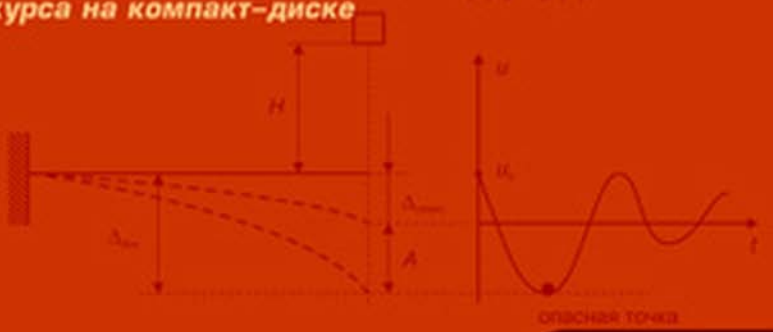
Е. Г. Макаров

Сопротивление материалов на базе Mathcad

- Полный объем теоретических сведений
- Практические расчеты
- Решение сложных задач в Mathcad
- 40 универсальных программ по всем разделам курса на компакт-диске



+CD

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

bhv

Е. Г. Макаров

Сопротивление материалов на базе Mathcad

Рекомендовано учебно-методическим объединением
по университетскому политехническому образованию
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по группе направлений подготовки бакалавров
и магистров 550000 — «Технические науки»
и дипломированных специалистов 650000 — «Техника и технологии»
по дисциплине «Сопротивление материалов»

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2004

УДК 681.3.06(0.75.8)
ББК 32.973.26-018.2я73
М15

Макаров Е. Г.

М15 Сопротивление материалов на базе Mathcad. — СПб.: БХВ-Петербург, 2004. — 512 с.: ил.

ISBN 5-94157-498-3

Курс сопротивления материалов дополнен сведениями о физике и механике хрупкого и пластического разрушения материалов. Углубленно рассматриваются расчеты в упругопластической области, усталость материалов, динамические расчеты. В каждой главе приводится решение сложных задач в пакете Mathcad. Все расчетные программы позволяют решить целый класс задач, проанализировать результаты расчета, выбрать оптимальный вариант. К книге прилагается компакт-диск с 40 универсальными программами по всем разделам курса сопротивления материалов, предназначенными для самостоятельной работы студентов.

Для студентов и преподавателей технических вузов, инженеров и научных работников

УДК 681.3.06(0.75.8)
ББК 32.973.26-018.2я73

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. главного редактора	*Людмила Еремеевская*
Зав. редакцией	*Григорий Добин*
Редактор	*Алексей Семенов*
Компьютерная верстка	*Ольги Сергиенко*
Корректор	*Зинаида Дмитриева*
Дизайн обложки	*Игоря Цырульникова*
Зав. производством	*Николай Тверских*

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 22.09.04.
Формат $70\times100^{1}/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 41,28.
Тираж 3000 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

Гигиеническое заключение на продукцию, товар № 77.99.02.953.Д.001537.03.02 от 13.03.2002 г. выдано Департаментом ГСЭН Минздрава России.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 5-94157-498-3

© Макаров Е. Г., 2004
© Оформление, издательство "БХВ-Петербург", 2004

Содержание

Предисловие 10

Особенности курса сопротивления материалов..... 10
Особенности решения задач в Mathcad..... 12

Глава 1. Основные понятия..... 15

1.1. Реальный объект и расчетная схема 15
1.2. Тела, рассматриваемые в сопротивлении материалов..... 16
1.3. Силы внешние и внутренние 17
1.4. Определение внутренних усилий методом сечений..... 17
1.5. Напряжения..... 21
1.6. Условия эквивалентности напряжений и внутренних усилий..... 22
1.7. Деформации..... 23
1.7.1. Типы деформаций.....24
1.8. Потенциальная энергия упругой деформации..... 25
1.9. Гипотезы и допущения в сопротивлении материалов 27
1.10. Условие прочности 30
1.11. Виды опор, используемые в схемах сопротивления материалов 31
1.12. Статически определимые и статически неопределимые системы 32
1.13. Цели и задачи сопротивления материалов..... 34
1.14. Неучитываемые факторы..... 35
1.14.1. Концентрация напряжений.....36
1.14.2. Изменение механических свойств материала 37
1.14.3. Вероятность выхода из строя 38
1.14.4. Принцип Сен-Венана.....38

Глава 2. Геометрические характеристики поперечных сечений 40

2.1. Статические моменты площади сечений 40
2.1.1. Свойства статических моментов площади сечения.....41
2.1.2. Определение положения центра тяжести 42
2.2. Моменты инерции сечений 44
2.2.1. Свойства моментов инерции.....44
2.2.2. Моменты инерции простейших фигур 45
2.2.3. Моменты инерции относительно параллельных осей.....48

2.2.4. Моменты инерции относительно повернутых осей 49
2.2.5. Главные оси и главные моменты инерции 51
2.2.6. Радиус инерции сечения 52
2.3. Примеры расчета геометрических характеристик сечений 52
2.3.1. Расчет геометрических характеристик сечения произвольной формы 53
2.3.2. Расчет геометрических характеристик составного сечения 57

Глава 3. Определение внутренних усилий 61

3.1. Растяжение-сжатие 62
3.2. Кручение 66
3.3. Изгиб 69
3.4. Дифференциальные зависимости внутренних усилий от распределенной нагрузки 77
3.4.1. Растяжение-сжатие 77
3.4.2. Кручение 78
3.4.3. Изгиб 78
3.4.4. Следствия из дифференциальных зависимостей 79

Глава 4. Растяжение-сжатие 83

4.1. Внутренние усилия и напряжения 83
4.2. Деформации 84
4.3. Закон Гука 85
4.4. Потенциальная энергия упругой деформации 87
4.5. Напряжения на наклонных площадках 88
4.5.1. Закон парности касательных напряжений 89
4.6. Понятие о главных напряжениях 90
4.7. Примеры решения задач на растяжение-сжатие 91
4.7.1. Расчет одного стержня 91
4.7.2. Расчет статически неопределимой шарнирно-стержневой системы 98

Глава 5. Механические характеристики материалов 104

5.1. Признаки хрупкого и пластического разрушения материалов 105
5.2. Диаграмма деформирования мягкой стали 106
5.2.1. Характеристики прочности 106
5.2.2. Характеристики пластичности 110
5.2.3. Работа разрушения при разрыве 111
5.2.4. Диаграммы деформирования других материалов 112
5.3. Испытание материалов на сжатие 113
5.4. Допускаемые напряжения 115
5.5. Диаграммы условных и истинных напряжений 116
5.5.1. Построение диаграммы истинных напряжений 119
5.5.2. Аппроксимация диаграммы деформирования 123

Глава 6. Сдвиг и кручение 127

6.1. Сдвиг 127
6.2. Расчет простейших соединений 130
6.2.1. Расчет тяги 131
6.2.2. Расчет штифта (заклепки) 132

6.2.3. Расчет сварного соединения....133
6.2.4. Пример расчета простейших соединений....134
6.3. Кручение стержней круглого поперечного сечения....136
6.3.1. Касательные напряжения и угол закручивания....137
6.3.2. Потенциальная энергия при кручении стержня....142
6.4. Связь между крутящим моментом, мощностью и скоростью вращения вала....144
6.5. Кручение стержней некруглого поперечного сечения....145
6.6. Примеры расчета стержней на кручение....147

Глава 7. Плоский поперечный изгиб....153

7.1. Нормальные напряжения при изгибе балки....154
7.1.1. Условие прочности при изгибе....158
7.1.2. Рациональная форма поперечного сечения....160
7.2. Касательные напряжения при изгибе....164
7.2.1. Распределение касательных напряжений в сечениях различной формы....166
7.2.2. Проверка прочности по касательным напряжениям....170
7.3. Потенциальная энергия упругой деформации при изгибе....172
7.4. Перемещения при изгибе....173
7.4.1. Непосредственное интегрирование уравнения упругой линии балки....174
7.4.2. Метод начальных параметров....175
7.5. Пример расчета балки на изгиб....178
7.5.1. Определение внутренних усилий....178
7.5.2. Определение напряжений....183
7.5.3. Определение перемещений балки....185
7.6. Изгиб кривых брусьев....189
7.6.1. Нормальные напряжения в кривых брусьях....189
7.6.2. Внутренние усилия в кривых брусьях....191
7.7. Расчет балок на упругом основании....193

Глава 8. Учет пластических деформаций....200

8.1. Связь напряжений и деформаций....200
8.2. Учет пластических деформаций при растяжении-сжатии....201
8.3. Учет упругопластических деформаций при изгибе....204
8.4. Учет пластических деформаций при кручении....213
8.5. Расчеты по предельной нагрузке....221
8.6. Понятие о приспособляемости конструкций....230

Глава 9. Основы напряженно-деформированного состояния....232

9.1. Деформации....232
9.2. Напряжения....233
9.3. Виды напряженного состояния....236
9.4. Плоское напряженное состояние....237
9.4.1. Прямая задача....238
9.4.2. Обратная задача....241
9.5. Связь напряжений и деформаций. Обобщенный закон Гука....244
9.6. Гипотезы прочности и пластичности....246
9.7. Условие прочности при плоском напряженном состоянии....253

Глава 10. Сложное сопротивление 255

10.1. Внутренние усилия при сложном сопротивлении 255
10.1.1. Построение эпюр внутренних усилий 256
10.2. Напряжения 259
10.2.1. Гипотезы 259
10.2.2. Нормальные напряжения 261
10.2.3. Касательные напряжения 262
10.2.4. Условие прочности 262
10.3. Расчет на прочность при сложном сопротивлении 263
10.3.1. Стержень произвольного сечения 263
10.3.2. Прямоугольное сечение 264
10.3.3. Круглое или кольцевое сечение 266
10.4. Частные случаи сложного сопротивления 267
10.5. Пример расчета стержня при сложном сопротивлении 268

Глава 11. Энергетический метод расчета упругих систем 278

11.1. Интеграл Мора 279
11.2. Примеры определения перемещений статически определимых систем 285
11.2.1. Определение перемещений балок при изгибе 285
11.2.2. Определение перемещений пространственной стержневой системы 289
11.3. Метод сил 292
11.3.1. Степень статической неопределимости 292
11.3.2. Перемещение от единичной силы (коэффициент податливости) 293
11.3.3. Канонические уравнения метода сил 295
11.3.4. Учет монтажных и температурных напряжений 298
11.3.5. Учет симметрии в методе сил 299
11.3.6. Проверка правильности решения системы 301
11.3.7. Порядок решения статически неопределимой задачи методом сил 301
11.4. Примеры раскрытия статической неопределимости методом сил 302
11.4.1. Раскрытие статической неопределимости плоской рамы 302
11.4.2. Расчет пространственной статически неопределимой рамы 309
11.4.3. Определение перемещений систем из нескольких элементов 317

Глава 12. Устойчивость сжатых стержней 323

12.1. Определение критической силы. Формула Эйлера 325
12.2. Определение критической силы при других видах закрепления 327
12.3. Критические напряжения 328
12.4. Расчет сжатых стержней на устойчивость 329
12.4.1. Условие устойчивости стержня 329
12.4.2. Рекомендации к расчету на устойчивость 331
12.4.3. Пример расчета стержня на устойчивость 332
12.5. Энергетический метод определения критической силы 335
12.5.1. Вывод формулы Рэлея 335
12.5.2. Примеры определения критической силы энергетическим методом 338
12.6. Продольно-поперечный изгиб 343
12.6.1. Уравнение упругой линии стержня 343
12.6.2. Примеры расчета балок на продольно-поперечный изгиб 344

Глава 13. Расчет тонкостенных оболочек 349

13.1. Безмоментная теория тонкостенных оболочек 349
13.1.1. Гипотезы и допущения 349
13.1.2. Формула Лапласа 351
13.1.3. Частные случаи тонкостенных оболочек 354
13.1.4. Расчет на прочность 356
13.2. Расчет распорного кольца 356
13.3. Деформация трубы под давлением 358
13.4. Краевой эффект 358
13.5. Пример расчета тонкостенной оболочки 362

Глава 14. Динамика упругих систем 368

14.1. Учет сил инерции при движении тела 369
14.2. Колебания упругой системы 370
14.2.1. Уравнение движения системы с одной степенью свободы 371
14.2.2. Свободные затухающие колебания 373
14.2.3. Опытное определение коэффициента затухания колебаний 375
14.3. Определение собственной частоты системы с одной степенью свободы 376
14.3.1. Собственная частота системы без учета ее массы 376
14.3.2. Собственна частота системы с учетом ее массы 377
14.3.3. Собственна частота при крутильных колебаниях 379
14.3.4. Замечания к расчету собственных частот колебаний 379
14.4. Ударная нагрузка 381
14.4.1. Вертикальный удар 381
14.4.2. Горизонтальный удар 383
14.4.3. Крутящий удар 384
14.4.4. Замечания к расчетам на ударную нагрузку 385
14.5. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы 386
14.5.1. Импульс силы 386
14.5.2. Произвольная нагрузка 387
14.5.3. Критическая скорость вращения вала 388
14.6. Примеры динамического расчета 389
14.6.1. Расчет балок на удар и колебания 389
14.6.2. Расчет сложной системы на удар и устойчивость 399

Глава 15. Усталость материалов 405

15.1. Механизм усталостного разрушения 405
15.2. Характеристики цикла нагружения 407
15.3. Диаграммы усталостной прочности 410
15.3.1. Усталостная кривая 410
15.3.2. Диаграмма предельных амплитуд 414
15.4. Суммирование повреждений при нестационарной нагрузке 415
15.5. Факторы, влияющие на предел выносливости 418
15.5.1. Концентрация напряжений 418
15.5.2. Размеры детали 420
15.5.3. Состояние поверхности 421

15.5.4. Влияние коррозии 423
15.5.5. Влияние температуры 423
15.6. Предел выносливости детали 424
15.7. Расчет на усталостную прочность 425
15.8. Примеры расчетов на усталостную прочность 427
15.8.1. Статистическая обработка результатов эксперимента 427
15.8.2. Приближенное построение диаграмм усталостной прочности 429
15.8.3. Определение размеров детали 431
15.8.4. Расчет долговечности детали при нестационарном нагружении 435
15.9. Понятие о малоцикловой усталости 439

Глава 16. Природа разрушения твердых тел 442

16.1. Природа упругой деформации 442
16.2. Теоретическая прочность твердых тел 443
16.3. Реальная прочность. Роль дефектов структуры 445
16.4. Виды дислокаций 445
16.5. Размножение дислокаций 448
16.6. Механизмы упрочнения 449
16.6.1. Упрочнение за счет уменьшения размеров зерен....449
16.6.2. Упрочнение легированием твердых растворов 450
16.6.3. Упрочнение за счет выделения дисперсных частиц при старении....450
16.7. Механизм больших пластических деформаций 451
16.7.1. Механизмы образования трещин....452
16.8. Механизмы роста трещин 452
16.9. Механизмы пластического разрушения.... 453
16.10. Механизм хрупкого разрушения.... 453

Глава 17. Факторы, влияющие на прочность и разрушение материалов.....455

17.1. Скорость деформации 455
17.2. Температура эксплуатации 456
17.3. Переход от пластического разрушения к хрупкому 457
17.3.1. Критическая температура хрупкости как критерий общего запаса вязкости 459
17.4. Напряженное состояние.... 459
17.5. Остаточные напряжения 461

Глава 18. Линейная механика разрушения тел с трещинами 464

18.1. Основные гипотезы.... 464
18.2. Критерии трещиностойкости.... 469
18.2.1. Силовой критерий трещиностойкости....469
18.3. Живучесть конструкций 472

Глава 19. Рациональное и оптимальное проектирование 477

19.1. Выбор рациональной конструкции 477
19.2. Выбор критериев оптимизации 479
19.3. Примеры поиска оптимальных решений 481
19.3.1. Расчет кронштейна 481

19.3.2. Расчет сферической крышки....484
19.3.3. Подбор нагрузок по перемещениям балки....486
19.3.4. Поиск оптимальных размеров сечения балки 491

Приложение 1. Самостоятельная работа с программами....493

Приложение 2. Описание компакт-диска 502

Список литературы....507

Предметный указатель 509

Предисловие

При проектировании любой машины или конструкции необходимо обеспечить ее работоспособность и надежность в течение всего срока эксплуатации. Безотказная работа конструкции, в первую очередь, гарантируется ее прочностью и жесткостью.

Подготовка инженера по вопросам прочности конструкций обеспечивается целым рядом дисциплин, таких как механика деформированного твердого тела, теория упругости, теория пластичности, реология, динамика и устойчивость машин и сооружений, строительная механика. Поскольку ни один серьезный расчет в настоящее время не обходится без использования компьютера, численные методы решения задач динамики и прочности рассматриваются в курсе вычислительной механики.

Особенности курса сопротивления материалов

Сопротивление материалов — своего рода азбука прочности. Здесь рассматриваются основные понятия, такие как напряжения, деформации, перемещения и др., которые необходимы для изучения последующих дисциплин прочностного цикла.

В сопротивлении материалов вводится большое количество упрощающих расчет гипотез и допущений, что позволяет получить и использовать в расчетах простые инженерные формулы. При этом неизбежно уменьшается точность расчетов и уменьшается круг решаемых задач.

Формулы сопротивления материалов, как правило, используются на стадии эскизного проектирования для подбора основных размеров конструкции. При подготовке серийного производства необходимы уточненные расчеты с ис-

пользованием метода конечных элементов и экспериментальная доводка изделия на испытательных стендах.

Содержание книги соответствует программе Министерства образования России.

В течение 40 лет я преподаю курс сопротивления материалов и ряд дисциплин прочностного цикла в БГТУ-Военмех Санкт-Петербурга.

В большинстве разделов книги я постарался учесть современные взгляды на решение прочностных задач.

В углубленной постановке рассмотрены вопросы учета пластических деформаций. Использование системы Mathcad позволяет получать простые решения сложных (при решении вручную) задач теории пластичности.

Особое внимание обращается в книге на характер разрушения материалов (хрупкий или вязкий). Внезапный переход материала из пластического состояния в хрупкое ведет к аварии, часто с катастрофическими последствиями.

С позиций теории колебаний решаются в книге вопросы динамического воздействия сил на конструкцию.

С точки зрения практических расчетов рассмотрены вопросы усталости материалов и механики разрушения тел с трещинами.

Определенное внимание уделено вопросам рационального и оптимального проектирования конструкций. Если рациональному выбору конструкции учит весь курс сопротивления материалов, то оптимальное проектирование основано на использовании математических методов поиска экстремума функции.

Освоение "азбуки прочности" требует решения большого количества простых примеров, чтобы понять и запомнить основные принципы решения прочностных задач. Решив определенное количество задач вручную, можно приступать к решению сложных задач с использованием компьютерных методов расчета.

В данной книге почти не рассматриваются простые примеры, ввиду ограниченного объема книги. Для решения таких задач можно использовать другие учебники и пособия [1–3], [11], [13–15].

Каждый пример этой книги представляет собой программу для решения определенного класса задач и позволяет, задавая диапазоны изменения различных параметров, анализировать результаты расчета, способствуя выбору рациональной и даже оптимальной конструкции.

Приведенные программы могут использоваться при подготовке студенческих расчетных работ по сопротивлению материалов. Некоторые возможности изменения программ в процессе самостоятельной работы с ними приведены в *приложении 1* к книге.

Но главное приложение — это компакт-диск со всеми программами, который позволяет сразу использовать программы в расчетах. Кроме того, предложенные программы служат своего рода электронными кубиками, из которых можно собирать другие программы.

Приведенные в этой и моей предыдущей книге "Инженерные расчеты в Mathcad" [6] примеры показывают, что при использовании Mathcad в сопротивлении материалов практически нет нерешаемых задач.

Особенности решения задач в Mathcad

Использование компьютера при решении прочностных задач позволяет избежать сложных рутинных вычислений и сосредоточиться на анализе результатов расчетов, выборе оптимальных параметров.

Выбор Mathcad в качестве средства решения задач объясняется его простотой и наглядностью. Ведь все математические выражения в Mathcad выглядят так же, как в книге или тетради.

Большое количество встроенных функций, наличие численного и символьного процессоров позволяет решать задачи как численно, так и аналитически. Наличие графического и текстового редакторов дают возможность готовить технические документы непосредственно в оболочке Mathcad.

В некоторых разделах при выводе формул сопротивления материалов используется символьный процессор Mathcad для оценки выражений, вычисления интегралов и производных, решения уравнений в символьном виде. Однако проделать весь вывод какой-либо формулы в Mathcad, как правило, не удается. Когда человек выводит формулу вручную, он, глядя на вид выражения, размышляет, как бы его преобразовать в более удобный вид. Mathcad размышлять не умеет. Он вычисляет по заранее разработанному алгоритму, в котором невозможно предусмотреть все возможные варианты преобразований. Для каждого расчета алгоритм надо разрабатывать самому. Чаще всего овчинка не стоит выделки.

Главное достоинство Mathcad — простота и удобство вычислений.

Этому принципу должны быть подчинены все вычисления в Mathcad. Если вручную выполнить вычисления быстрее и проще, чем в Mathcad, значит нечего и связываться с Mathcad. Именно так и обстоит дело с символьными вычислениями. Составить программу символьного вывода формулы конечно можно, но зачастую очень сложно. Вручную это делается гораздо быстрее.

А вот для оценки выражений, вычисления интегралов, производных, пределов функций, решения уравнений в символьном виде очень даже удобно использовать Mathcad.

Что касается численных вычислений, то здесь Mathcad успешно справляется с поставленной задачей. Однако, на мой взгляд, в системе Mathcad имеется много недоработок, ограничивающих применение системы в инженерной практике. Это ограничения при использовании размерностей в расчетах, при решении дифференциальных уравнений, при анализе экспериментальных данных. Совершенно недооценен создателями системы Mathcad раздел программирования, находящийся в зачаточном состоянии. Но даже в таком виде с использованием Mathcad можно запрограммировать задачу любой сложности [6].

Совет

Рекомендую приобрести мою книгу "Инженерные расчеты в Mathcad", которая поможет вам освоить Mathcad, а также содержит большое количество примеров решения инженерных задач в Mathcad. Вставляйте готовые фрагменты примеров в свои расчеты и подправляйте их соответственно условиям вашей задачи.

Все примеры, имеющиеся в той книге, размещены в Интернете на сайте издательства "Питер" www.piter.com. Загрузите их на свой компьютер и используйте в работе.

Хочу порекомендовать читателям книги — привыкайте к особому стилю компьютерных вычислений.

Практически все студенты (а я ежегодно обучаю сопротивлению материалов и работе в Mathcad около сотни студентов) в Mathcad считают так же, как вручную на микрокалькуляторах. Каждое слагаемое, каждый интеграл вычисляют отдельно.

Составляйте расчетные программы в общем виде, позволяющем решать целый класс подобных задач, изменяя исходные данные и параметры функций.

Используйте в работе векторные, матричные обозначения, знаки суммирования и произведения. Посмотрите, как компактно и зачастую элегантно выглядят расчеты в этой книге.

Усвойте основные принципы работы с Mathcad и совершенствуйте их дальше сами.

Чтобы решать задачи в Mathcad не надо быть большим специалистом. Достаточно изучить основы и иметь под рукой большой набор шаблонов для различных вычислений. Такими шаблонами являются программы, помещенные на компакт-диск, прилагаемый к этой книге, и размещенные в Интернете файлы к моей книге "Инженерные расчеты в Mathcad" [6].

Все программы, приведенные в этой книге, изготовлены в версии Mathcad 11, но сохранены в версии Mathcad 2000. Это позволяет открывать документы в любой версии от 2000 и выше.

Благодарности

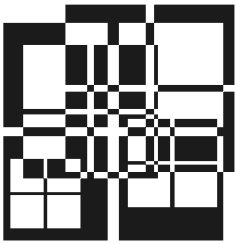
Особую благодарность выражаю своим студентам Михаилу Ковалеву, Дмитрию Толяренко и Олегу Чирикову за большую помощь в работе над книгой.

Об авторе

Макаров Евгений Георгиевич, доцент БГТУ-Военмех Санкт-Петербурга.

Email: **emakarov@inbox.ru**.

ГЛАВА 1



Основные понятия

В этой главе рассматриваются понятия, являющиеся общими для всех (или большинства) разделов сопротивления материалов.

1.1. Реальный объект и расчетная схема

Сопротивление материалов не рассматривает реальные объекты со всеми их индивидуальными особенностями. Оно изучает расчетные схемы и типовые методы расчета. Задача расчетчика выбрать расчетную схему, наиболее близко подходящую к реальному объекту. Удачно выбранная расчетная схема даст результаты расчета, близкие к реальным. При неудачном выборе — результат далек от истины.

В качестве примера рассмотрим мостовой кран, установленный в пролете цеха (рис. 1.1, *а*). Различные элементы конструкции испытывают разные нагрузки и рассчитывать на прочность их надо отдельно.

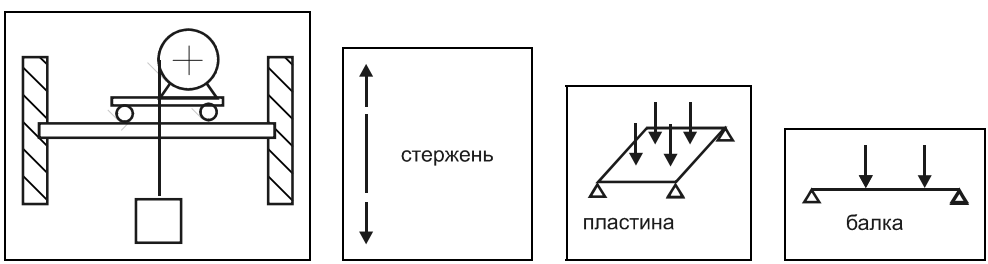


Рис. 1.1. Реальный объект и расчетная схема

На тросе висит груз, который растягивает его, поэтому первой расчетной схемой логично взять стержень (трос), нагруженный растягивающей силой

(рис. 1.1, *б*). Через трос нагрузка передается на барабан лебедки, далее на ось, подшипниковые опоры, зубчатые колеса и т. д.

Фактически каждую деталь лебедки необходимо рассматривать как отдельную расчетную схему. Лебедка установлена на раме, покрытой листом металла. Этот лист можно рассчитать как пластину, нагруженную в четырех точках крепления болтов (рис. 1.1, *в*). Колеса тележки мостового крана передают нагрузку на рельсы, которые можно рассматривать как балки на двух опорах (рис. 1.1, *г*).

Точность расчета зависит от выбора расчетной схемы. Например, рельсы можно рассматривать как балку, просто положенную на опоры, либо как балку, заделанную в кирпичную стену, либо приваренную к другой металлической конструкции. Результаты расчета при этом будут различными.

1.2. Тела, рассматриваемые в сопротивлении материалов

В процессе схематизации конструкции элементы реального тела заменяются их упрощенными моделями. Перечислим основные объекты, рассматриваемые в сопротивлении материалов (рис. 1.2).

1. Брус — тело, у которого один из размеров много больше двух других (длинное, тонкое, в общем случае криволинейное тело).
2. Стержень — прямолинейный брус.
3. Балка — стержень, работающий на изгиб.

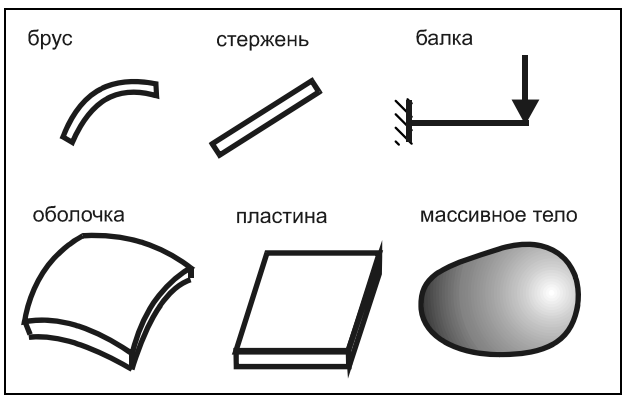


Рис. 1.2. Основные объекты в сопротивлении материалов

4. Оболочка — тело, у которого один из размеров много меньше двух других.
5. Пластина — частный случай оболочки, у которой срединная поверхность — плоскость.
6. Массивное тело.

1.3. Силы внешние и внутренние

Внешняя сила — это мера взаимодействия между телами. В задачах сопротивления материалов внешние силы считаются заданными. К внешним силам относятся также опорные реакции.

Внешние силы делятся на *объемные* и *поверхностные*. *Объемные* силы приложены к каждой частице тела по всему его объему. Примером объемных сил являются силы веса и силы инерции.

Поверхностные силы делятся на *сосредоточенные* и *распределенные*. *Сосредоточенными* считаются силы, приложенные к малой поверхности, размеры которой малы по сравнению с размерами тела, например, на схеме мостового крана (см. рис. 1.1) вес поднимаемого груза передается на рельсы через колеса тележки. При расчете балки на прочность размер зоны контакта колес с балкой мал по сравнению с длиной балки и нагрузку можно считать сосредоточенной. Однако при расчете напряжений вблизи зоны контакта нагрузку следует считать распределенной. К сосредоточенным нагрузкам относят не только сосредоточенные силы, но и пары сил, примером которых можно считать нагрузку, создаваемую гаечным ключом при закручивании гайки.

Распределенные нагрузки бывают распределенными по длине и по площади. В результате действия внешних сил в теле возникают *внутренние* силы. *Внутренняя* сила — мера взаимодействия между частицами одного тела.

Все внешние нагрузки можно разделить на *статические* и *динамические*.

Статическими считаются нагрузки, в процессе приложения которых возникающие силы инерции малы и ими можно пренебречь. В противном случае нагрузки считаются *динамическими*.

1.4. Определение внутренних усилий методом сечений

Внутренние силы являются самоуравновешенными. Поэтому они не видны на схеме и не влияют на условия равновесия тела. Определяются внутренние силы методом сечений.

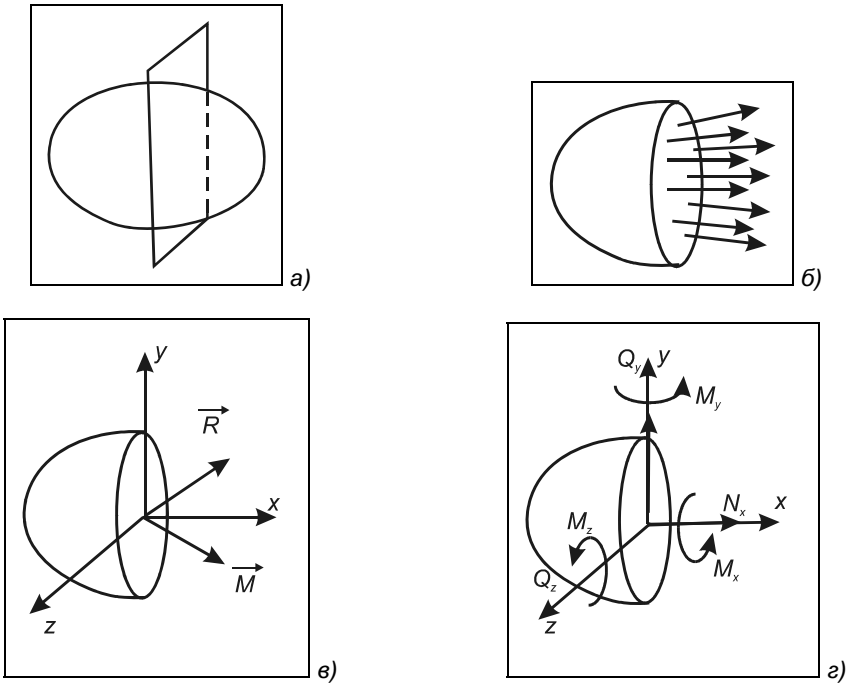


Рис. 1.3. Определение внутренних усилий методом сечений

Мысленно рассекаем тело произвольным сечением (рис. 1.3, *а*), отбрасываем одну часть тела и рассматриваем равновесие оставшейся части. Если бы не было внутренних сил, оставшаяся неуравновешенная часть тела начала бы двигаться под действием внешних сил. Поскольку сечение мысленное и тело находится в равновесии, действие отброшенной части тела заменяем внутренними силами (рис. 1.3, *б*), приложенными к каждой частице тела. Из теоретической механики известно, что любая система сил может быть приведена в любую точку пространства в виде главного вектора сил R и главного момента сил M (рис. 1.3, *в*). Модуль и направление этих векторов неизвестны. Удобнее всего определять проекции этих векторов на оси x, y, z, где ось x — нормаль к сечению, y и z — оси, лежащие в плоскости сечения. Начало координат находится в центре тяжести сечения (рис. 1.3, *г*).

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} N_x \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix} \qquad \vec{M} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

Проекции векторов R и M носят следующие названия:

- N_x — *продольное усилие*;
- Q_y и Q_z — *поперечные силы* соответственно вдоль осей y и z;
- $M_x = M_к$ — *крутящий момент*;
- M_y и M_z — *изгибающие моменты* соответственно вокруг осей y и z.

В общем случае определения внутренних усилий имеем 6 неизвестных, которые можно определить из шести уравнений равновесия:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \to N_x \\ \sum F_y = 0 \to Q_y \\ \sum F_z = 0 \to Q_z \\ \sum M(F)_x = 0 \to M_x \\ \sum M(F)_y = 0 \to M_y \\ \sum M(F)_z = 0 \to M_z \end{cases}$$

Решая систему из шести уравнений с шестью неизвестными, определяем все внутренние усилия.

Пример

Для заданного стержня (рис. 1.4, *а*) найти внутренние усилия и построить их эпюры.

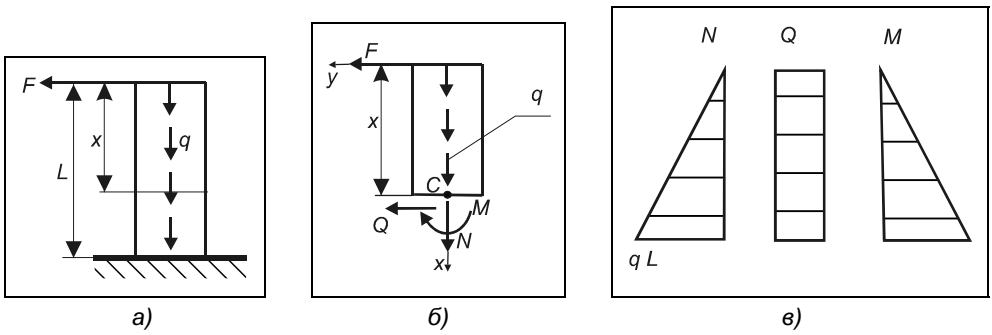


Рис. 1.4. Определение внутренних усилий в стержне

Отсекаем нижнюю часть стержня (рис. 1.4, *б*). Действие отброшенной части заменяем внутренними усилиями. В плоской задаче из шести внутренних

усилий остается только 3 (продольное усилие N, поперечная сила Q и изгибающий момент M). Для их определения составляем 3 уравнения равновесия

$$\begin{cases} \sum F_x = N + qx = 0 \\ \sum F_y = Q + F = 0 \\ \sum M(F)_c = Fx - M = 0 \end{cases}, \text{ откуда находим } \begin{cases} N = -q \cdot x \\ Q = -F \\ M = F \cdot x \end{cases}.$$

Сумма моментов вычислена относительно центра тяжести сечения C.

Знак плюс свидетельствует о том, что направление внутреннего усилия на схеме показано верно. Знак минус говорит о том, что истинное направление усилия противоположно выбранному.

Далее строим *эпюры внутренних усилий* (графики их изменения вдоль оси стержня) (рис. 1.4, *в*).

Обычно эпюры внутренних усилий строятся с целью выбора опасного сечения и определения усилий в нем для последующего расчета на прочность.

На практике чаще всего поступают иначе. Поскольку метод называется "метод мысленных сечений", отсеченную часть тела отбрасывают мысленно и рассматривают сумму сил или моментов всех сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения. На схеме же нужно показать положение рассматриваемого сечения и его текущую координату. От выбора начала координат зависит вид выражения, но не зависит результат выражения.

Общее правило определения любого внутреннего усилия:

N_x, Q_y, Q_z равняются алгебраической сумме проекций всех сил, расположенных по одну сторону от выбранного сечения, соответственно на оси x, y или z.

M_x, M_y, M_z равняются алгебраической сумме моментов всех сил, расположенных по одну сторону от выбранного сечения, соответственно относительно осей x, y или z, проходящих через центр тяжести выбранного сечения.

При использовании приведенного правила необходимо принять правило знаков для внутренних усилий, т. к. в данном случае вектор на схеме не показан и его направление пока не известно.

Правило знаков для внутренних усилий будет введено позднее при рассмотрении деформаций растяжения, изгиба, кручения.

1.5. Напряжения

Напряжением называется интенсивность действия внутренних сил в точке тела или, проще говоря, внутреннее усилие, приходящееся на единицу площади.

Рассечем тело произвольным сечением (рис. 1.5). Выделим малую площадку ΔA. Внутреннее усилие, действующее на нее, обозначим ΔR. Полнее среднее напряжение, на этой площадке $\vec{p} = \overrightarrow{\Delta R}/\Delta A$. Найдем предел этого отношения при $\Delta A \to 0$. Это и будет напряжение в точке тела $\vec{p} = \lim\limits_{\Delta A \to 0} \dfrac{\overrightarrow{\Delta R}}{\Delta A}$.

Чтобы задать вектор полного напряжения в точке, надо задать его модуль и направление в пространстве или задать его проекции на оси координат. Спроектируем вектор ΔR на оси x, y, z, из которых ось x направлена вдоль нормали к сечению, а оси y и z лежат в плоскости сечения $\overrightarrow{\Delta R} = \begin{bmatrix} \Delta N_x \\ \Delta Q_y \\ \Delta Q_z \end{bmatrix}$. Найдем проекции полного напряжения на оси x, y и z.

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \lim_{x\to 0} \frac{\Delta N_x}{\Delta A} = \frac{dN_x}{dA} \quad \text{— } \textit{нормальное} \text{ напряжение;} \\
\tau_{xy} &= \lim_{x\to 0} \frac{\Delta Q_y}{\Delta A} = \frac{dQ_y}{dA} \quad \text{— } \textit{касательное} \text{ напряжение вдоль оси } y; \\
\tau_{xz} &= \lim_{x\to 0} \frac{\Delta Q_z}{\Delta A} = \frac{dQ_z}{dA} \quad \text{— } \textit{касательное} \text{ напряжение вдоль оси } z.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

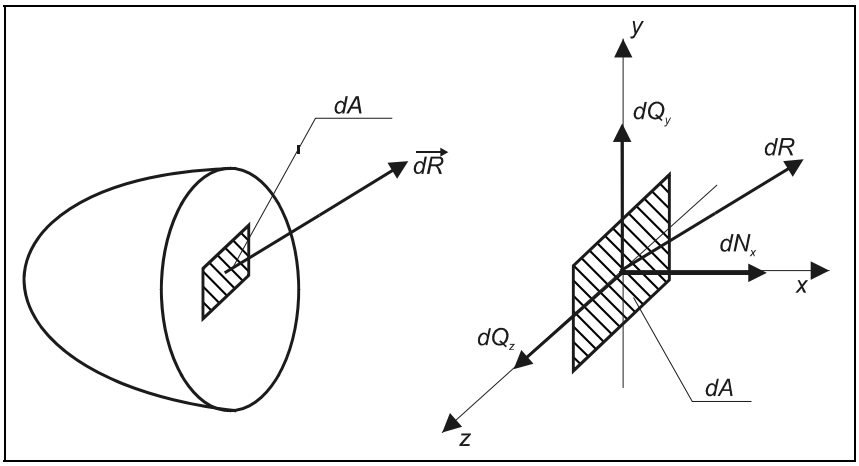


Рис. 1.5. Определение напряжений в точке *A*

В обозначении касательного напряжения первый индекс указывает нормаль к площадке, второй индекс — направление касательного напряжения.

1.6. Условия эквивалентности напряжений и внутренних усилий

В произвольном сечении тела вблизи произвольной точки выделим элементарную площадку dA (рис. 1.6) и покажем напряжения, действующие в выбранной точке.

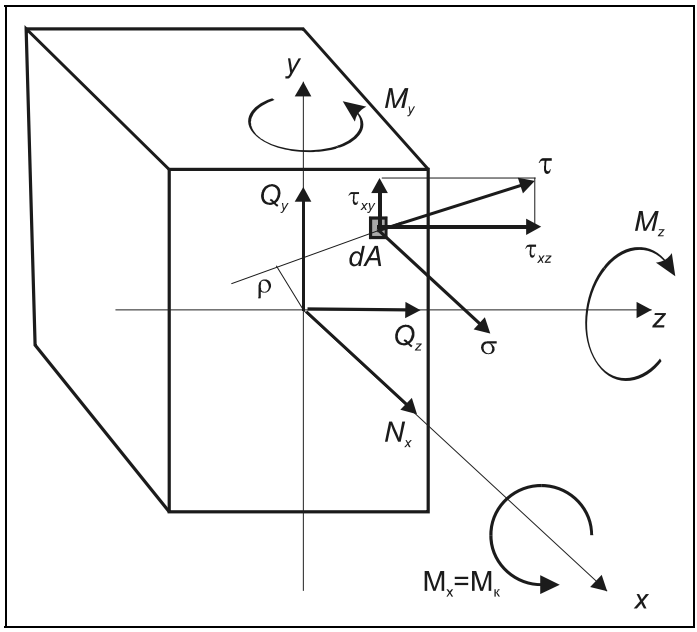


Рис. 1.6. Внутренние усилия и напряжения в точке тела

Пусть закон изменения напряжений по сечению известен. Найдем внутренние усилия в выбранном сечении:

- продольное усилие на площадке dA: $dN = \sigma_x dA$;
- поперечная сила вдоль оси y: $dQ_y = \tau_{xy} dA$;
- поперечная сила вдоль оси z: $dQ_{xz} = \tau_{xz} dA$.

Полные продольное усилие и поперечные силы для всего поперечного сечения есть интеграл от приведенных выражений

$$N_x = \int_A \sigma_x dA$$
$$Q_y = \int_A \tau_{xy} dA \qquad (1.2)$$
$$Q_z = \int \tau_{xz} dA$$

Обратите внимание, что к такому же результату приводит интегрирование выражений (1.1).

Найдем выражения для изгибающих и крутящего моментов.

Элементарные моменты вокруг осей x, y, z

$$dM_z = \sigma_x dA \cdot y$$
$$dM_y = \sigma_x dA \cdot z$$
$$dM_x = \tau_{xz} dA \cdot y - \tau_{xy} dA \cdot z$$

Выражение для крутящего момента становится проще, если предварительно найти суммарное касательное напряжение $\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}$. Тогда

$$dM_к = dM_x = \tau dA \cdot \rho .$$

Интегрируя элементарные моменты, получаем

$$M_z = \int_A \sigma_x y \cdot dA$$
$$M_y = \int_A \sigma_x z \cdot dA \qquad (1.3)$$
$$M_к = M_x = \int \tau\rho \cdot dA$$

Выражения (1.2) и (1.3) представляют собой условия эквивалентности напряжений и внутренних усилий. Каждое внутреннее усилие есть суммарный результат действия напряжений по всему поперечному сечению тела.

1.7. Деформации

Следует различать *деформации* и *перемещения*.

Перемещение — изменение положения точки в пространстве.

Деформация — изменение формы и размеров тела.

В отдельных случаях их величины могут совпадать, например, при растяжении стержня, но в общем случае — это разные вещи.

Деформации могут быть *угловыми* и *линейными* (рис. 1.7).

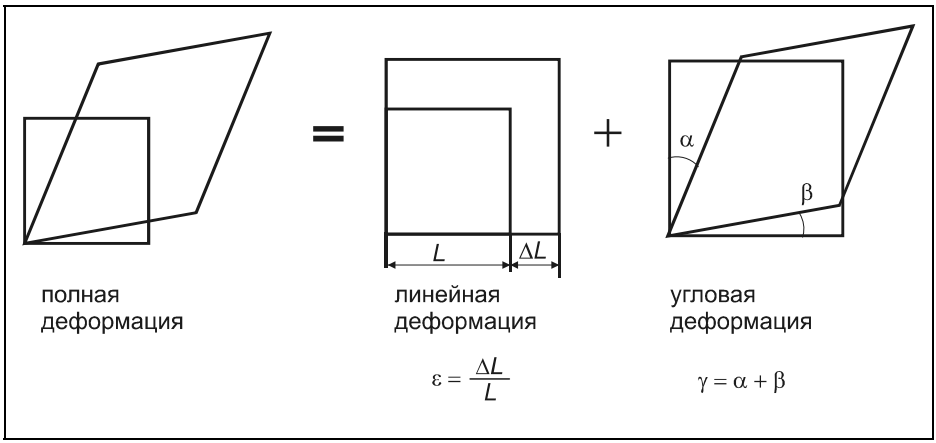


Рис. 1.7. Линейная и угловая деформация

Линейная деформация характеризует изменение размеров тела. Она бывает абсолютная ΔL и относительная $\varepsilon = \Delta L / L$. Использование относительной деформации предпочтительно, т. к. она не зависит от размеров тела.

Угловая деформация характеризует изменение формы тела и чаще всего называется углом сдвига.

Угол сдвига — это изменение первоначально прямого угла $\gamma = \alpha + \beta$.

Полная деформация — это сумма линейной и угловой деформаций.

Деформации делятся на *упругие* и *пластические (остаточные)*.

Упругими называются деформации, исчезающие после снятия вызвавших их сил.

Пластическими или *остаточными* называются деформации, остающиеся после снятия вызвавших их сил.

Полная деформация равна сумме упругих и пластических деформаций.

1.7.1. Типы деформаций

В зависимости от приложенных к телу нагрузок выделяют несколько типов деформаций, различающихся законом распределения напряжений по сечению тела.

1. *Растяжение-сжатие* — в поперечном сечении действует только одно внутреннее усилие, не равное нулю — продольное усилие.
2. *Сдвиг* — в поперечном сечении действует только поперечная сила.
3. *Кручение* — в поперечном сечении действует только крутящий момент.
4. *Изгиб* — в поперечном сечении действуют изгибающий момент и поперечная сила.
5. *Сложное сопротивление* — одновременное действие нескольких типов простых деформаций — растяжения-сжатия, кручения, изгиба.

Для каждого из указанных типов деформации в последующих главах будут выведены свои формулы для расчета на прочность.

1.8. Потенциальная энергия упругой деформации

Целью прочностных расчетов обычно является определение перемещений, деформаций и напряжений в конструкции. Сопротивление материалов рассматривает сравнительно простые расчетные схемы, для которых указанные величины определяются по простым инженерным формулам. Для сложных реальных конструкций в общем случае расчет сводится к решению системы из 15 дифференциальных уравнений и не имеет аналитического решения. Приближенное численное решение такой системы также сопряжено с большими трудностями.

Для решения сложных задач успешно применяется энергетический подход, в основе которого лежит определение работы внешних и внутренних сил и определение потенциальной энергии упругой деформации. Для успешного овладения энергетическими методами расчета в курсе "сопротивление материалов" для каждого вида деформации рассчитывается потенциальная энергия упругой деформации.

Рассмотрим общий подход к определению потенциальной энергии упругой деформации. Для ее расчета используется известный принцип механики:

Начало возможных перемещений

> Если тело находится в равновесии, то сумма работ внешних и внутренних сил, действующих на тело, равна нулю на любых возможных перемещениях.

Возможными считаются малые перемещения, согласованные со связями.

Заметим, что реальные перемещения конструкции всегда возможные.

$$\delta A^{\text{внеш}} + \delta A^{\text{внутр}} = 0 ,$$

где $\delta A^{\text{внеш}}$ и $\delta A^{\text{внутр}}$ — вариации (малые приращения) работы внешних и внутренних сил.

При упругой деформации знак вариации можно опустить, тогда

$$A^{\text{внеш}} + A^{\text{внутр}} = 0 ,$$

где $A^{\text{внеш}}$ и $A^{\text{внутр}}$ — работа внешних и внутренних сил.

Работа внешних сил затрачивается, в основном, на совершение упругой и пластической деформации. При этом работа пластической деформации обычно во много раз больше упругой деформации. Работа пластической деформации переходит в тепло, а работа упругой деформации — в потенциальную энергию, которая постоянно находится в теле (как сжатая пружина), готовая при определенных условиях, например при разрыве тела, высвободиться, что при большом запасе энергии может привести к катастрофическим последствиям.

Далее рассматриваем лишь упругую деформацию тела. Тогда

$$A^{\text{внеш}} = -A^{\text{внутр}} = \Pi ,$$

где Π — потенциальная энергия упругой деформации, которая всегда положительная.

В случае действия одной силы F работа внешних сил равна произведению силы на перемещение Δ под действием силы, если $F = Const$, и равна площади диаграммы деформирования тела в координатах $F - \Delta$ в противном случае, как известно из курса математики (технические приложения определенного интеграла). При упругой деформации перемещение пропорционально нагрузке и на графике изображается в виде прямой линии (рис 1.8). Тогда работа силы F

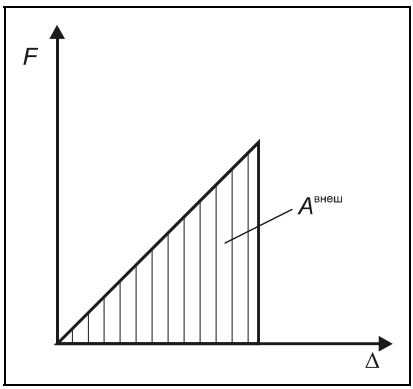
$$A^{\text{внеш}} = \int_0^{\Delta} F \cdot d\Delta$$

равна площади, ограниченной графиком подынтегральной функции и осью абсцисс, т. е. площади заштрихованного треугольника

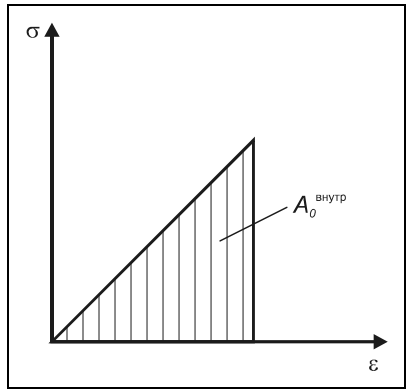
$$A^{\text{внеш}} = \frac{1}{2} F \cdot \Delta .$$

В случае действия системы сил $A^{\text{внеш}}$ равна сумме работ каждой силы в отдельности

$$A^{\text{внеш}} = \frac{1}{2}\sum F \cdot \Delta .$$



а)



б)

Рис. 1.8. Работа внешних (*а*) и внутренних (*б*) сил

Мерой внутренних сил в теле являются напряжения. Потенциальную энергию упругой деформации, численно равную работе внутренних сил, можно связать с напряжениями, записав в виде

$$П = \int_V П_0 dV ,$$

где $П_0$ — удельная потенциальная энергия упругой деформации, накопленная в единице объема тела V.

При растяжении $П_0 = \dfrac{\sigma\varepsilon}{2}$ (равна площади треугольника на диаграмме деформирования в координатах $\sigma - \varepsilon$ (см. рис. 1.8, *б*)).

Величину $П_0$ в дальнейшем для отдельных видов деформации выразим через напряжения и деформации. Используя начало возможных перемещений, получим связь между нагрузками, перемещениями, напряжениями и деформациями, которая и ляжет в основу энергетических методов расчета, включая метод конечных элементов, самый мощный метод расчета напряженно-деформированного состояния конструкций.

1.9. Гипотезы и допущения в сопротивлении материалов

Для расчета напряжений и деформаций в произвольном теле надо составить систему из 15 дифференциальных уравнений и решить ее. В общем случае

такая задача неразрешима. Чтобы получить решение задачи, необходимо принять упрощающие гипотезы, которые сужают круг решаемых задач, но позволяют использовать для решения простые инженерные формулы. Перечислим основные гипотезы, используемые в курсе сопротивления материалов.

❒ *Гипотеза сплошности, однородности, изотропности материалов.*

Пренебрегая атомарной структурой материала, считаем его сплошным, однородным, изотропным.

Материал считается:

- *сплошным*, если в теле нет разрывов;
- *однородным*, если его свойства во всех точках одинаковы;
- *изотропным*, если его свойства во всех направлениях одинаковы.

❒ Справедлив *закон Гука*.

Перемещения точек тела пропорциональны приложенным нагрузкам. Деформации пропорциональны напряжениям.

❒ *Гипотеза малости деформаций.*

Для всякого твердого тела деформации малы по сравнению с размерами тела. При составлении уравнений равновесия тела изменением размеров тела вследствие деформации можно пренебречь.

❒ *Принцип независимости действия сил.*

Результат действия на тело системы сил не зависит от порядка приложения нагрузок и равен сумме результатов действия каждой силы в отдельности.

Рассмотрим балку, нагруженную тремя нагрузками F, M и q (рис. 1.9). Суммарный прогиб конца балки (точки А) будет равен сумме прогибов балки от действия отдельно приложенных сил F, M и q.

$$\Delta_A = \Delta_A^F + \Delta_A^M + \Delta_A^q .$$

Следующие две гипотезы относятся только к *длинным и тонким стержням*:

❒ *Гипотеза плоских сечений.*

Сечения плоские до деформации остаются плоскими после деформации.

Эту гипотезу можно рассматривать как экспериментальный факт, наблюдаемый, например, при нанесении прямоугольной сетки на резиновый стержень (рис. 1.10). При изгибе такого стержня продольные линии искривляются, в то время, как поперечные линии остаются прямыми.

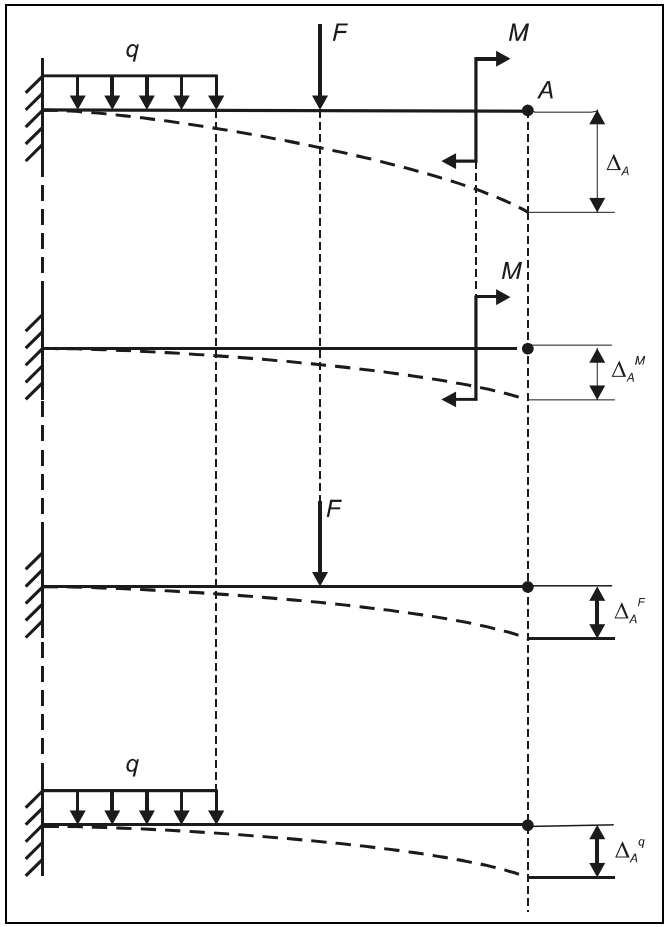


Рис. 1.9. Принцип независимости действия сил

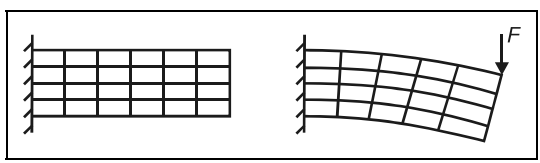


Рис. 1.10. Гипотеза плоских сечений

❒ *Гипотеза отсутствия боковых давлений.*

Волокна друг на друга не давят.

Гипотеза предполагает, что нормальные напряжения σ действуют только вдоль продольной оси стержня и не действуют в поперечных направлени-

ях. На самом деле σ в поперечных направлениях действуют, но они во много раз меньше, чем в продольном направлении, и для упрощения расчетов ими можно пренебречь.

1.10. Условие прочности

При оценке работоспособности конструкции необходимо выбрать критерии выхода конструкции из строя. Это может быть разрушение конструкции на части, появление недопустимых пластических деформаций, недопустимых перемещений какой-то части конструкции, потеря устойчивости, перегрев конструкции, износ рабочей части и т. д.

Пусть $A_{\text{пред}}$ — критерий выхода из строя, $\max A$ — максимальное значение того же параметра в реальной конструкции. Тогда условие выхода из строя $\max A = A_{\text{пред}}$.

Условие невыхода из строя конструкции (гарантия работоспособности) $\max A \le [A]$, где $[A] = \dfrac{A_{\text{пред}}}{n}$ — допускаемое значение параметра A, n — коэффициент запаса, выбираемый с учетом условий эксплуатации и многих других факторов.

В сопротивлении материалов, где оценивается, в первую очередь, прочность и жесткость конструкции, используют условие прочности и условие жесткости.

Условие прочности $\max\sigma \le [\sigma]$, где $\max\sigma$ и $[\sigma] = \dfrac{\sigma_{\text{пред}}}{n}$ — максимальное напряжение в конструкции и допускаемое напряжение.

Более подробно о выборе допускаемого напряжения рассказано в *главе 5*. До рассмотрения этого раздела допускаемое напряжение $[\sigma]$ считаем заданным. Максимальное напряжение в конструкции определяется по формулам сопротивления материалов.

Условие жесткости $u \le [u]$, где u и $[u]$ — реальное и допускаемое перемещение выбранной точки конструкции.

Реальное перемещение определяется методами сопротивления материалов. Допускаемое перемещение задается из условий эксплуатации конструкции.

1.11. Виды опор, используемые в схемах сопротивления материалов

Реальные узлы крепления конструкции в схемах сопротивления материалов заменяются их условными обозначениями: заделкой и шарнирными опорами (рис. 1.11).

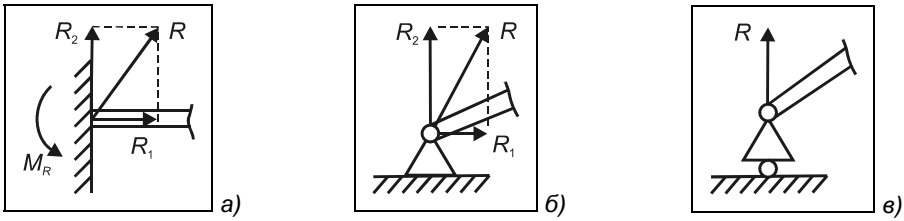


Рис. 1.11. Виды опор

При решении плоской задачи считается, что всякий элемент имеет 3 степени свободы (3 возможных перемещения, однозначно определяющих положение тела в пространстве): вращение вокруг точки и 2 линейных перемещения вдоль двух осей).

Всякая реакция возникает в местах наложения связей.

Если наложено ограничение на одно из указанных выше перемещений (чаще всего перемещение полагается равным нулю), то в этом направлении возникает реакция опоры: сосредоточенная сила при ограничении линейного перемещения и пара сил при ограничении углового перемещения.

В зависимости от налагаемых ограничений на перемещение тела различают следующие виды опор.

Заделка — нет перемещений (жесткое закрепление тела, например, сварка), возникают реакция неизвестной величины и направления R и реактивный момент M_R.

Неизвестную реакцию удобно представить в виде ее проекций на оси координат любого направления, например, для плоской системы горизонтальное R_1 и вертикальное R_2. Итого: в плоской заделке возникают 3 неизвестные реакции — 2 силы и одна пара сил (рис. 1.11, *а*);

Неподвижная шарнирная опора — возможно вращение вокруг опоры, линейных перемещений нет, поэтому возникает реакция неизвестной величины и направления R, которую заменяют ее проекциями на оси координат. Для плоской системы возникают 2 неизвестные реакции: R_1 и R_2 (рис. 1.11, *б*).

Примером шарнирной опоры можно считать подшипниковую опору. Внутреннее кольцо шарикового или роликового подшипника может поворачиваться относительно наружного на угол 2°. Этого достаточно, чтобы считать подшипник шарнирной опорой.

Подвижная шарнирная опора — возможно вращение вокруг опоры и перемещение вдоль одной из осей, например, плавающая подшипниковая опора, возникает одна реакция R: сила в направлении ограничения движения (перпендикулярно направлению движения вдоль оси) (рис. 1.11, *в*).

1.12. Статически определимые и статически неопределимые системы

Система называется *статически определимой*, если число неизвестных в ней равно числу полезных уравнений равновесия.

Для всякой пространственной системы сил (рис. 1.12, *а*) можно составить систему из шести уравнений равновесия и, решив ее, найти 6 неизвестных сил. Однако среди этих уравнений могут быть тождества, обращающиеся в нуль при любых значениях нагрузок. Это бесполезные уравнения и, следовательно, число неизвестных сил должно быть равно числу уравнений минус число тождеств.

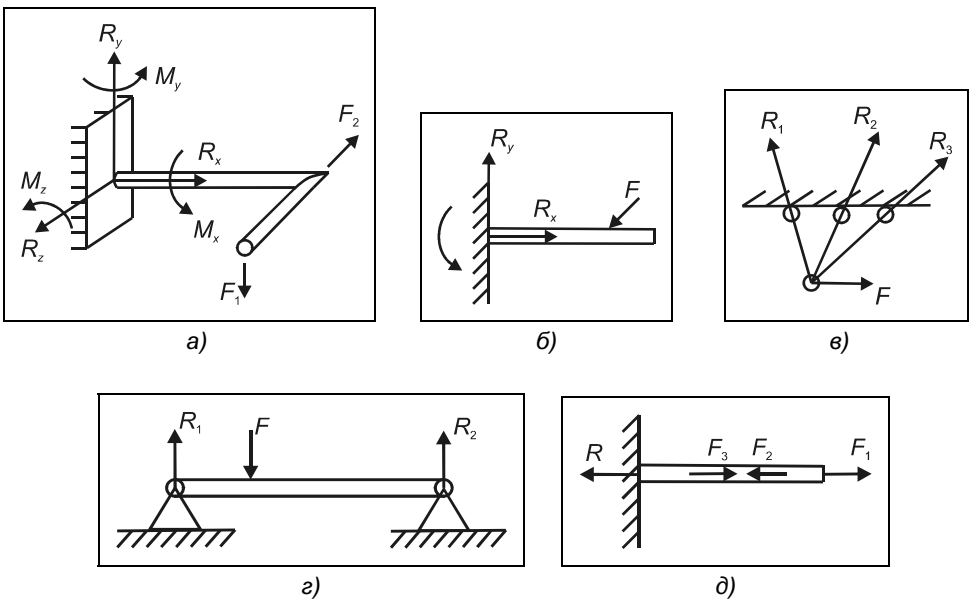


Рис. 1.12. Различные системы сил

Для произвольной плоской системы сил (рис. 1.12, *б*) можно составить 3 уравнения, не являющихся тождествами, например, сумму проекций всех сил на 2 любые оси и одну сумму моментов всех сил относительно какой-либо точки.

Для плоской системы сходящихся сил (рис. 1.12, *в*) можно составить лишь 2 уравнения, не являющихся тождествами. Сумма моментов всех сил относительно точки их пересечения тождественно равна нулю. Из двух уравнений (любых) можно определить лишь 2 неизвестные силы.

Для плоской системы параллельных сил (рис. 1.12, *г*) бесполезной оказывается сумма проекций на ось, перпендикулярную силам. Соответственно из двух любых уравнений равновесия можно найти лишь 2 неизвестные силы.

Для системы коллинеарных сил (действующих вдоль одной прямой линии) (рис. 1.12, *д*) можно составить лишь одно полезное уравнение — сумму проекций всех сил на эту прямую, которая равна просто сумме сил.

Система называется *статически неопределимой*, если число неизвестных в ней больше числа полезных уравнений равновесия.

Степень статической неопределимости равна разности между числом неизвестных и числом полезных уравнений равновесия.

Для раскрытия статической неопределимости существуют разные способы, которые будут рассмотрены далее. Заметим лишь, что всякая реакция возникает в местах наложения внешних связей (ограничений движения системы). Нет ограничения — нет реакции. Есть ограничение — есть реакция. В то же время любая наложенная связь (любое ограничение движения) позволяет составить дополнительное уравнение, называемое уравнением совместности перемещений. В результате появляется возможность сделать число уравнений равным числу неизвестных и решить систему уравнений.

На рис. 1.13 приведены примеры различных систем:

а) стержень недостаточно закреплен. Он может свободно вращаться под действием силы. Это механизм. Такие задачи требуют учета сил инерции и рассматриваются в курсе теории машин и механизмов;

б) система из двух стержней статически определима. Два усилия в двух стержнях определяются из двух уравнений равновесия;

в) система из трех стержней один раз статически неопределима: неизвестных усилий — 3, полезных уравнений равновесия — 2, степень статической неопределимости $3 - 2 = 1$;

г) система три раза статически неопределима: неизвестных усилий — 5, полезных уравнений равновесия — 2, степень статической неопределимости $5 - 2 = 3$.

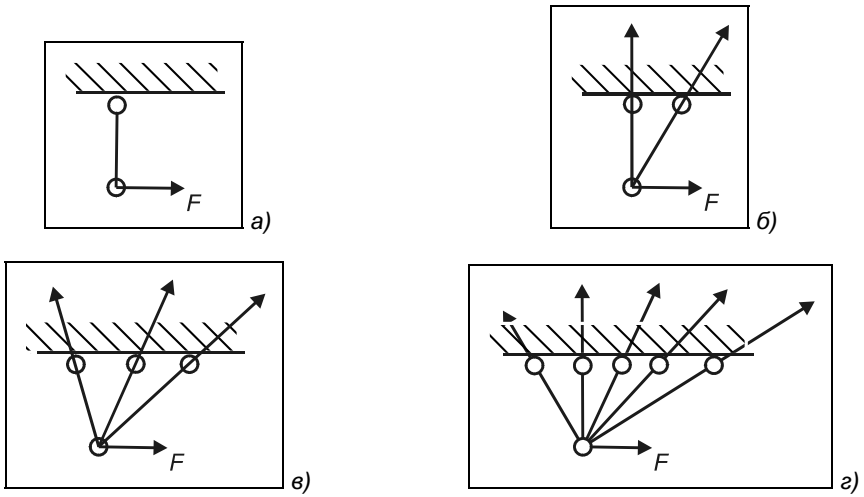


Рис. 1.13. Статически определимые и статически неопределимые системы

Решение статически неопределимых задач значительно более сложная и трудоемкая проблема. Практически без использования компьютера можно решить лишь 2—3 раза статически неопределимые задачи. С использованием Mathcad можно решить задачи с большой степенью статической неопределимости.

1.13. Цели и задачи сопротивления материалов

Сопротивление материалов — это азбука расчетов на прочность. Здесь студенты знакомятся с основными понятиями и методами расчетов. Но этим не ограничивается предназначение сопротивления материалов. На стадии эскизного проектирования, приступая к работе над новой конструкцией, инженер с помощью простых формул сопротивления материалов определяет основные размеры конструкции или допускаемые нагрузки, если размеры конструкции заданы заранее. Конечно, эти формулы приближенные. Они имеют определенные ограничения, вызванные большим количеством упрощающих расчет гипотез, но надо помнить, что условие прочности $\sigma_{max} \le [\sigma] = \frac{\sigma_{пред}}{n}$ состоит из левой и правой частей. Определяемая опытным путем величина $\sigma_{пред}$ уже содержит ошибку ~10%. Коэффициент запаса n вообще назначается почти "с потолка". В таком случае добиваться высокой точности расчета в левой части неравенства просто не имеет смысла и выдвигаемое обычно требование

5%-ной точности расчетов представляется несколько завышенным. Результаты, получаемые по формулам сопротивления материалов, всегда находятся в пределах здравого смысла.

На второй стадии проектирования после определения основных размеров и рабочих параметров конструкции проводится значительно более точный расчет прочностных и динамических характеристик конструкции с помощью современных компьютерных программ с использованием метода конечных элементов.

Для ответственных конструкций с целью уменьшения коэффициента запаса и, соответственно, веса конструкции на заключительной стадии доводки изделия проводятся натурные стендовые испытания.

В процессе решения задачи, кроме определения внутренних усилий, как уже сказано, требуется подобрать размеры конструкции. Число неизвестных в задаче соответственно увеличивается. Потребуются дополнительные уравнения. Таким уравнением является условие прочности. Но оно одно, следовательно, допускает появление только одного неизвестного, чаще всего размера сечения. Если же неизвестных размеров несколько, то они должны быть связаны между собой из конструктивных соображений. Если размеры конструкции известны, условие прочности позволяет подобрать допускаемую нагрузку или, если и нагрузка известна, просто проверить выполнение условия прочности.

Сопротивление материалов рассматривает в основном упругие стержневые системы. Расчет стержневых систем при упругопластических деформациях в данной книге рассматривается в *главе 8*. Для различных специальностей в курс сопротивления материалов включают различные дополнительные главы, в которых описывается расчет наиболее характерных для данной специальности элементов конструкций, таких как тонкостенные оболочки, толстостенные трубы, тонкие пластины и др.

Сопротивление материалов рассматривает тела, находящиеся в равновесии. Как правило, это неподвижные конструкции или движущиеся с постоянной скоростью. Однако, в принципе, с учетом сил инерции можно рассматривать и тела, движущиеся с ускорением *(см. главу 14)*.

1.14. Неучитываемые факторы

Как уже говорилось, расчеты по формулам сопротивления материалов ведутся на стадии эскизного проектирования и носят приближенный характер. При этом не учитывается ряд факторов, существенно влияющих на работоспособность конструкции. Отметим наиболее важные из них.

1.14.1. Концентрация напряжений

В местах резкого изменения формы тела происходит резкое возрастание напряжений, называемое *концентрацией напряжений.*

Типичными концентраторами напряжений являются: отверстия, канавки (смазочные, для выхода резьбы), резьба, уступы и галтели, шлицы и шпоночные канавки и т. д.

На рис. 1.14 приведен пример концентрации напряжений при растяжении плоской полосы с двумя боковыми надрезами.

В этих местах несправедлива гипотеза плоских сечений, лежащая в основе большинства расчетов в сопротивлении материалов. Скорость возрастания напряжений зависит, в основном, от кривизны поверхности. Чем меньше радиус кривизны, тем больше концентрация напряжений.

Упругие напряжения вблизи концентраторов напряжений определяются методами теории упругости или экспериментально. Для оценки степени концентрации напряжений вводится теоретический коэффициент концентрации напряжений

$$\alpha_\sigma = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{ном}},$$

где σ_{max} — максимальное упругое напряжение, $\sigma_{ном}$ — номинальное (среднее) напряжение, рассчитываемое по простым формулам сопротивления материалов при растяжении, изгибе, кручении.

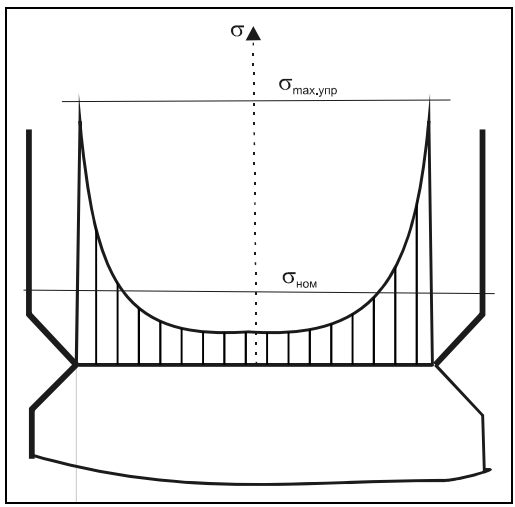


Рис. 1.14. Концентрация напряжений при растяжении полосы с надрезом

Теоретический коэффициент концентрации напряжений α_σ может достигать очень больших значений. Так у края отверстий $1 < \alpha_\sigma < 3$ в зависимости от диаметра отверстия (чем меньше диаметр, тем больше концентрация напряжений). Вблизи вершины трещины коэффициент $\alpha_\sigma \sim 200$.

Степень опасности концентрации напряжений существенно уменьшается в условиях пластических деформаций, неизбежно возникающих вблизи концентраторов напряжений.

Для оценки реального влияния концентрации напряжений на прочность детали вводится эффективный коэффициент концентрации напряжений

$$K_\sigma = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\sigma_{\text{пред.конц}}},$$

где $\sigma_{\text{пред}}$ — разрушающее напряжение для детали без концентратора напряжений, $\sigma_{\text{пред.конц}}$ — разрушающее напряжение для детали с концентратором напряжений.

Эффективный коэффициент K_σ, как правило, намного меньше теоретического α_σ.

Для уменьшения влияния концентрации напряжений принимают конструктивные меры (увеличение радиуса кривизны) и технологические (поверхностное упрочнение).

При расчетах на прочность в условие прочности надо вводить поправку

$$K_\sigma \sigma_{\max} \le [\sigma].$$

При статическом нагружении для деталей из пластичных материалов влияние концентрации напряжений мало и в расчетах полагают $K_\sigma = 1$.

При переменной нагрузке учет концентрации напряжений необходим. Реальные значения эффективного коэффициента концентрации напряжений в конструкциях $1 < K_\sigma < 3$.

1.14.2. Изменение механических свойств материала

В расчетах допускаемое напряжение $[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{n}$ принимают величиной постоянной, заданной. Однако в реальной конструкции предельное напряжение $\sigma_{\text{пред}}$, вызывающее выход конструкции из строя, изменяется с изменением условий эксплуатации. Так предел текучести, чаще всего принимаемый в ка-

честве $\sigma_{\text{пред}}$, при изменении скорости и температуры эксплуатации может как увеличиться в несколько раз, так и уменьшиться в несколько раз.

Факторы, влияющие на механические свойства материала, рассматриваются в *главе 17* этой книги.

1.14.3. Вероятность выхода из строя

Вероятность выхода конструкции из строя зависит как от погрешности расчетов, так и от ошибки в определении механических свойств материала. Для ее учета необходимо использовать сложные математические методы расчета надежности работы конструкции.

Приближенно вероятность выхода из строя можно задать с помощью коэффициента запаса в условии прочности.

Коэффициент запаса:

- $n = 1$ соответствует вероятности выхода из строя 50%;
- $n = 1,2$ примерно соответствует вероятности невыхода из строя 90%;
- $n = 1,5$ примерно соответствует вероятности невыхода из строя 99%;
- $n = 2$ примерно соответствует вероятности невыхода из строя 99,9%.

Много это или мало 99,9%? Для неответственных деталей много, для ответственных мало. Так для каната подъема лифта это означает на 1000 подъемов одно падение, что недопустимо.

Для уменьшения вероятности разрушения обычно используют дублирующие устройства. Тогда вероятность разрушения равна произведению вероятностей всех устройств. Если для одного устройства вероятность разрушения 0,001, то для двух устройств уже 0,000 001, что гораздо надежнее.

1.14.4. Принцип Сен-Венана

На расстояниях, превышающих наибольший размер поперечного сечения тела, от места приложения нагрузки напряжения и деформации не зависят от способа приложения нагрузки.

На рис. 1.15 два одинаковых стержня нагружены одинаковыми по величине нагрузками. Но одна из них — сосредоточенная сила, например нажим иголкой, другая — равномерно распределенная по всему сечению, например нажим ладонью. Очевидно, что под иголкой деформации и напряжения очень большие, а по краям сечения материал не деформируется. При нажиме ладонью напряжения по всему сечению примерно одинаковые. Вдали от места приложения нагрузки влиянием способа приложения нагрузки можно пренебречь. Эпюры напряжений в сечении становятся одинаковыми.

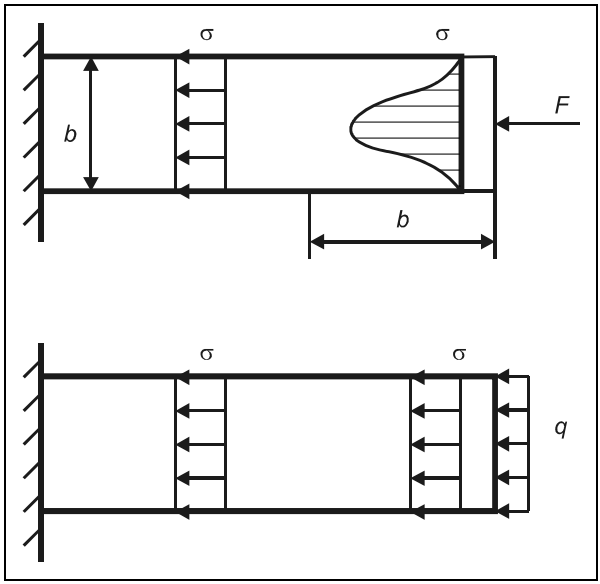


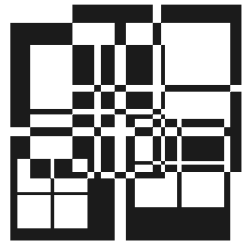
Рис. 1.15. Принцип Сен-Венана

Замечание

Менее научно, но более понятно, *принцип Сен-Венана* можно сформулировать так: вблизи мест приложения нагрузок формулы сопротивления материалов несправедливы.

При использовании любых формул сопротивления материалов об этом принципе забывать нельзя и в местах приложения нагрузки предусматривать соответствующие места крепления, утолщения тела.

ГЛАВА 2



Геометрические характеристики поперечных сечений

Известны три геометрические характеристики, знакомые каждому, — это длина, площадь, объем, которые имеют определенный физический смысл. В этой главе рассмотрим новые характеристики, которые будут использоваться в расчетных формулах сопротивления материалов: статические моменты и моменты инерции площади сечений. Эти характеристики не имеют физического смысла. Их нельзя измерить. При выводе формул сопротивления материалов иногда случается, что часть формулы представляет собой интегральное выражение, зависящее только от формы и размеров сечения. Для упрощения последующего использования этих формул удобно такое выражение подсчитать заранее для различных форм сечений.

Статические моменты площади сечений используются при определении положения центра тяжести сечения, при расчете касательных напряжений при изгибе.

Моменты инерции используются при расчете напряжений и перемещений при изгибе и при кручении и т. д.

2.1. Статические моменты площади сечений

Статическими моментами площади сечений называются интегралы следующего вида:

$$S_y = \int_A z\,dA, \qquad S_z = \int_A y\,dA. \tag{2.1}$$

У статических моментов нет физического смысла, но есть геометрическая интерпретация.

Рассмотрим сечение произвольной формы (рис. 2.1).

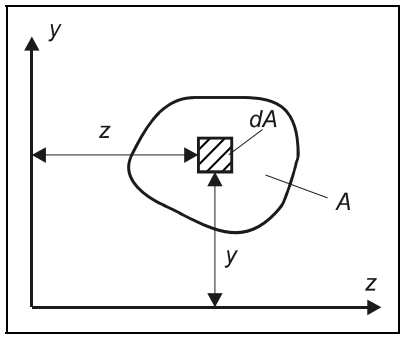


Рис. 2.1. Геометрическая интерпретация статических моментов площади сечений

Выделим в сечении элементарную площадку dA с координатами y и z. Произведение площади dA на координату y есть элементарный статический момент dS_z относительно оси z. Это понятие аналогично моменту силы относительно оси. Если предположить, что A — это вес пластины, имеющей форму нашего сечения, то статический момент S_z — это момент силы тяжести пластины относительно оси z.

2.1.1. Свойства статических моментов площади сечения

- Размерность статических моментов — $\left[\text{длина}^3\right]$, обычно $\left[\text{м}^3\right]$ или $\left[\text{см}^3\right]$.
- Статические моменты могут быть положительными, отрицательными или равными нулю.

  Ось, относительно которой статический момент равен нулю, называется *центральной.*

  Точка пересечения центральных осей называется *центром тяжести сечения.*
- Статический момент составного сечения равен сумме статических моментов элементов этого сечения.

  Это вытекает из свойств определенного интеграла, который можно вычислять по частям (в нашем случае по частям площади A).

2.1.2. Определение положения центра тяжести

Рассмотрим изменение статического момента при параллельном переносе осей координат (рис. 2.2). Расстояние между старыми и новыми осями координат обозначим a и b. Пусть известны статические моменты относительно старых осей координат $z-y$. Найти статические моменты относительно параллельно перенесенных осей координат z_1-y_1.

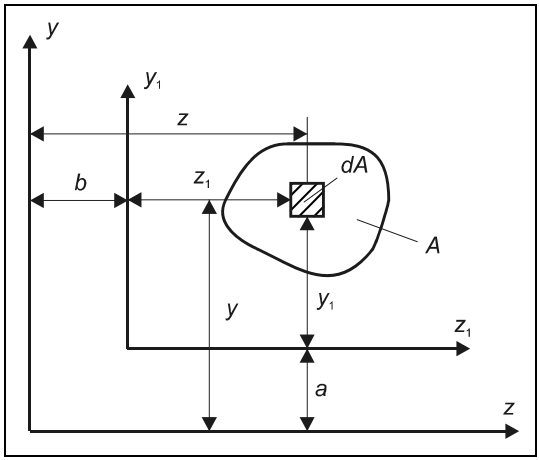


Рис. 2.2. К определению статических моментов относительно параллельно перенесенных осей

По определению: $S_{z_1} = \int\limits_A y_1 dA$, $S_{y_1} = \int\limits_A z_1 dA$.

Выделим элементарную площадку dA и запишем связь между координатами площадки в старой и новой системах координат: $z_1 = z - b$, $y_1 = y - a$.

Тогда $S_{z_1} = \int\limits_A (y-a)dA = \int\limits_A ydA - a\int\limits_A dA = S_z - aA$.

Аналогично $S_{y_1} = \int\limits_A (z-b)dA = \int\limits_A zdA - b\int\limits_A dA = S_y - bA$.

Найдем, на сколько надо сместить оси, чтобы они стали центральными.

$$S_{z_1} = S_z - aA = 0, \qquad a = y_c = \frac{S_z}{A},$$

$$S_{y_1} = S_y - bA = 0, \qquad b = z_c = \frac{S_y}{A}.$$

Здесь y_c и z_c — координаты центра тяжести, но найти их пока нельзя, ведь S_z и S_y неизвестны.

Чтобы найти их, используем способ Мюнхгаузена, который за волосы вытащил сам себя из болота.

Если не известны координаты центра тяжести всего сечения, то разобьем его на такие элементы, для которых эти координаты известны без расчетов, это — прямоугольник, круг, треугольник.

На рис. 2.3 сечение разбито на три прямоугольника. Статический момент каждого элемента найдем по предыдущей формуле: $S_z = y_c \cdot A$ и $S_y = z_c \cdot A$.

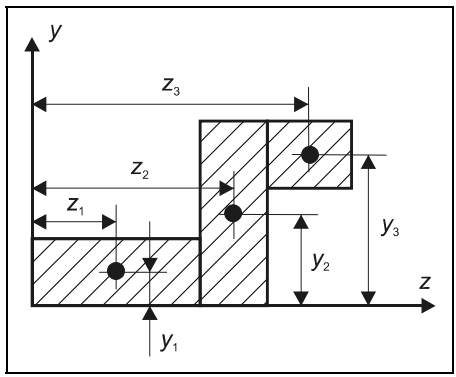


Рис. 2.3. Определение статических моментов составной фигуры

Суммарный статический момент всего сечения равен сумме статических моментов элементов этого сечения (по третьему свойству статических моментов)

$$S_z = S_{z1} + S_{z2} + S_{z3} = A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3 ,$$

$$S_y = S_{y1} + S_{y2} + S_{y3} = A_{y1} \cdot z_1 + A_{y2} \cdot z_2 + A_3 \cdot z_3 .$$

или $S_z = \sum S_{z_i}$ и $S_y = \sum S_{y_i}$.

Координаты центра тяжести всего сечения

$$z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} \text{ и } y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}, \qquad (2.2)$$

где y_i, z_i и A_i — координаты центра тяжести и площадь элементов, на которые разбито сечение, n — количество таких элементов.

2.2. Моменты инерции сечений

Моментами инерции сечений называются интегралы следующего вида:

$$J_y = \int_A z^2 dA \text{ — осевой момент инерции сечения относительно оси } y;$$

$$J_z = \int_A y^2 dA \text{ — осевой момент инерции сечения относительно оси } z; \tag{2.3}$$

$$J_{yz} = \int_A yz dA \text{ — центробежный момент инерции сечения;}$$

$$J_p = \int_A \rho^2 dA \text{ — полярный момент инерции сечения.}$$

2.2.1. Свойства моментов инерции

- Размерность моментов инерции — $\left[\text{длина}^4\right]$, обычно $\left[\text{м}^4\right]$ или $\left[\text{см}^4\right]$.
- Осевые и полярный моменты инерции всегда положительные. Центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным или равным нулю.

  Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются *главными осями инерции* сечения.

  Оси симметрии всегда главные. Если из двух осей хотя бы одна является осью симметрии, то обе оси главные.
- Момент инерции составного сечения равен сумме моментов инерции элементов этого сечения.
- Полярный момент инерции равен сумме осевых моментов инерции.

Докажем последнее свойство. В сечении площадью A для элементарной площадки dA радиус-вектор ρ и координаты y и z (рис. 2.4) связаны по теореме Пифагора $\rho^2 = y^2 + z^2$.

Тогда

$$J_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A \left(y^2 + z^2\right) dA = \int_A y^2 dA + \int_A z^2 dA = J_z + J_y . \tag{2.4}$$

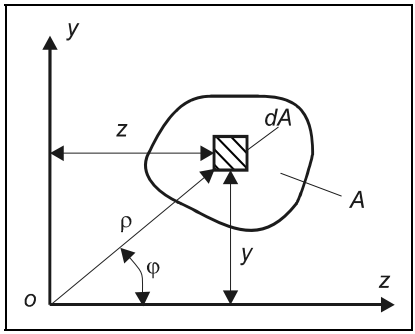


Рис. 2.4. Связь полярных и декартовых координат элементарной площадки

2.2.2. Моменты инерции простейших фигур

В этом разделе получим формулы для моментов инерции относительно собственных центральных осей простейших фигур: прямоугольника, круга, треугольника.

Прямоугольник

В прямоугольном сечении (рис. 2.5) выберем элементарную площадку dA с координатами y и z и площадью $dA = dy \cdot dz$.

Осевой момент инерции относительно оси y

$$J_y = \int_A z^2 dA = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \cdot dy \cdot dz = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\frac{h}{2} + \frac{h}{2} \right) z^2 dz = \frac{h}{3} \cdot \left(\frac{b^3}{8} + \frac{b^3}{8} \right) = \frac{hb^3}{12}.$$

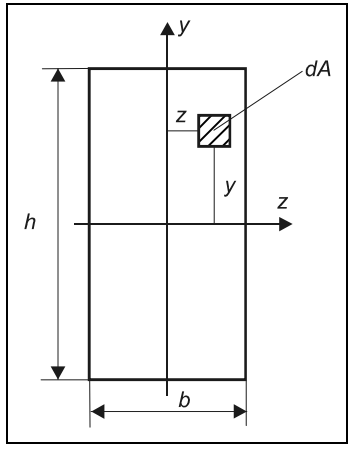


Рис. 2.5. К определению моментов инерции прямоугольного сечения

Аналогично получаем момент инерции относительно оси z: $J_z = \dfrac{bh^3}{12}$.

Поскольку y и z — оси симметрии, то центробежный момент $J_{zy} = 0$.

Круг и кольцо

Для круга диаметром d вычисления упрощаются, если использовать круговую симметрию. Возьмем в качестве элементарной площадки бесконечно тонкое кольцо с радиусом ρ и толщиной $d\rho$ (рис. 2.6). Его площадь $dA = 2\pi\rho d\rho$. Тогда полярный момент инерции

$$J_p = \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^2 2\pi\rho d\rho = 2\pi \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0{,}1d^4 .$$

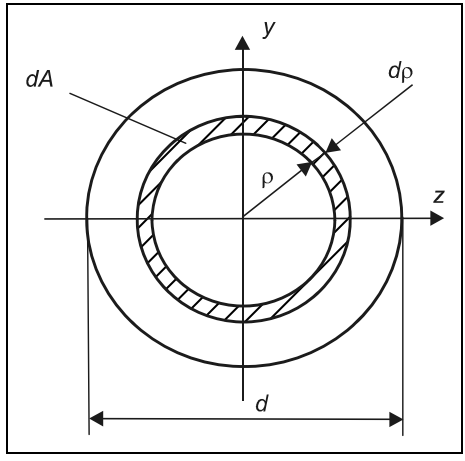


Рис. 2.6. К определению моментов инерции круга

Ввиду круговой симметрии осевые моменты инерции относительно любой центральной оси одинаковы.

$$J_y = J_z = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0{,}05d^4 .$$

Момент инерции кольца находим как разность моментов инерции двух кругов:

$$J_y = J_{yD} - J_{yd} = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi D^4}{64}\left(1 - \alpha^4\right) \approx 0{,}05D^4\left(1 - \alpha^4\right),$$

$$J_p = 2J_y = \frac{\pi D^4}{32}\left(1-\alpha^4\right) \approx 0{,}1D^4\left(1-\alpha^4\right),$$

где $\alpha = \frac{d}{D}$.

Момент инерции треугольника

Найдем момент инерции треугольника относительно центральной оси z_0, параллельной основанию (рис. 2.7). Выделим элементарную площадку dA, параллельную основанию

$$dA = b(y)\cdot dy\,.$$

Из подобия треугольников $\frac{\frac{2}{3}h - y}{h} = \frac{b(y)}{b}$.

Откуда $dA = \left(\frac{2}{3}b - \frac{b}{h}y\right)dy\Big)$.

Момент инерции J_z вычисляем с помощью Mathcad символьным путем (рис. 2.8).

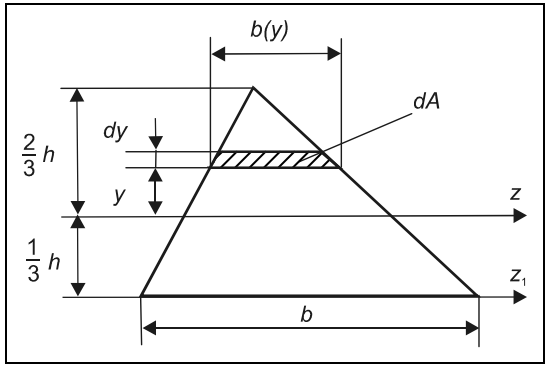


Рис. 2.7. К определению момента инерции треугольника

$$J_z(b,h) := \int_{\frac{-h}{3}}^{2\cdot\frac{h}{3}} y^2\left(\frac{2}{3}b - \frac{b\cdot y}{h}\right)dy \rightarrow \frac{1}{36}\cdot h^3\cdot b \qquad J_z(b,h) \rightarrow \frac{1}{36}\cdot h^3\cdot b$$

Рис. 2.8. Символьное вычисление момента инерции треугольника

В формуле для J_z параметры можно не писать. Результат будет тот же, но выражение окрасится в красный цвет. Численное вычисление — запрещено, символьное — возможно. Формулы для расчета моментов инерции сечений различной формы можно найти в справочнике [12].

2.2.3. Моменты инерции относительно параллельных осей

Пусть известны моменты инерции относительно центральных осей z_0 и y_0 для сечения площадью A. Найти моменты инерции относительно осей z_1 и y_1, перенесенных параллельно z_0 и y_0 на расстояния a и b (рис. 2.9).

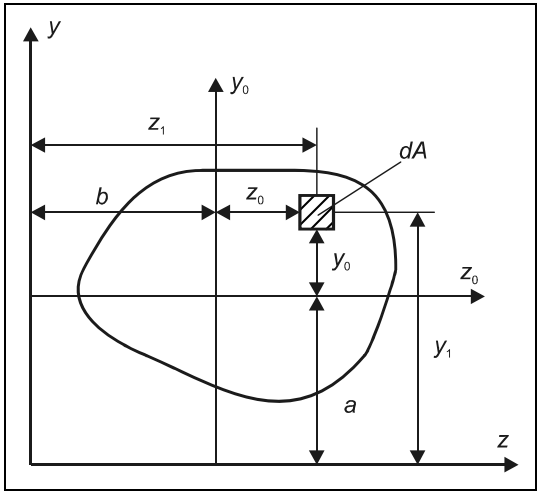


Рис. 2.9. К определению моментов инерции относительно параллельных осей

Запишем связь между координатами элементарной площадки dA в старой и новой системах координат:

$$z_1 = z_0 + b \quad y_1 = y_0 + a\,.$$

Подставим выражения для координат z_1 и y_1 в формулу моментов инерции

$$J_{y_1} = \int_A z_1^2 dA = \int_A (z_0 + b)^2 dA = \int_A {z_0}^2 dA + 2b\int_A z_0 dA + b^2 \int_A dA = J_{y_0} + b^2 A + 2bS_{y_0}\,,$$

$$J_{z_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y_0 + a)^2 dA = \int_A {y_0}^2 dA + 2a\int_A y_0 dA + a^2 \int_A dA = J_{z_0} + a^2 A + 2aS_{z_0}\,,$$

$$J_{z_1y_1} = \int_A z_1 y_1 dA = \int_A (z_0 + b)(y_0 + a) dA = \int_A z_0 y_0 dA + b\int_A y_0 dA + a\int_A z_0 dA + ab\int_A dA =$$
$$= J_{z_0y_0} + abA + bS_{z_0} + aS_{y_0},$$

где $S_{z_0} = 0$ и $S_{y_0} = 0$ как статические моменты относительно центральных осей z_0 и y_0.

Окончательно формулы для моментов инерции относительно параллельно перенесенных осей имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} J_{y_1} &= J_{y_0} + b^2 A \\ J_{z_1} &= J_{z_0} + a^2 A \\ J_{z_1y_1} &= J_{z_0y_0} + abA \end{aligned} \qquad (2.5)$$

Осевой момент инерции относительно любой оси равен моменту инерции относительно центральной оси, параллельной данной, плюс квадрат расстояния между осями.

Надо иметь в виду, что относительно центральных осей моменты инерции имеют минимальные значения. Если решается обратная задача: зная моменты инерции относительно какой-либо оси, найти моменты инерции относительно центральных осей, то в формулах (2.5) появляется знак минус вместо плюса.

2.2.4. Моменты инерции относительно повернутых осей

Пусть известны моменты инерции относительно осей z и y для сечения площадью A. Найти моменты инерции относительно осей u и v, повернутых относительно осей z и y на угол α (рис. 2.10).

Запишем связь между координатами элементарной площадки dA в старой и новой системах координат:

$$u = y\sin(\alpha) + z\cos(\alpha) \quad v = y\cos(\alpha) - z\sin(\alpha).$$

Подставим выражения для координат u и v в формулу моментов инерции:

$$J_u = \int_A v^2 dA = \int_A (y\cos(\alpha) - z\sin(\alpha))^2 dA = \cos^2 \int y^2 dA - 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\int_A zy dA +$$
$$+ \sin^2(\alpha)\int_A z^2 dA = J_z \cos^2(\alpha) + J_y \sin^2(\alpha) - J_{zy}\sin(2\alpha)$$

$$J_v = \int_A u^2 dA = \int_A (y\sin(\alpha) + z\cos(\alpha))^2 dA = \sin^2 \int y^2 dA + 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\int_A zydA +$$

$$+\cos^2(\alpha)\int_A z^2 dA = J_z \sin^2(\alpha) + J_y \cos^2(\alpha) + J_{zy}\sin(2\alpha)$$

$$J_{uv} = \int_A uvdA = \int_A (y\sin(\alpha) + z\cos(\alpha)(y\cos(\alpha) - z\sin(\alpha))dA =$$

$$= \sin(\alpha)\cos(\alpha)\left(\int_A y^2 dA - \int_A z^2 dA)\right) + (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha))\int_A zydA =$$

$$= \frac{J_z - J_y}{2}\sin(2\alpha) + J_{zy}\cos(2\alpha)$$

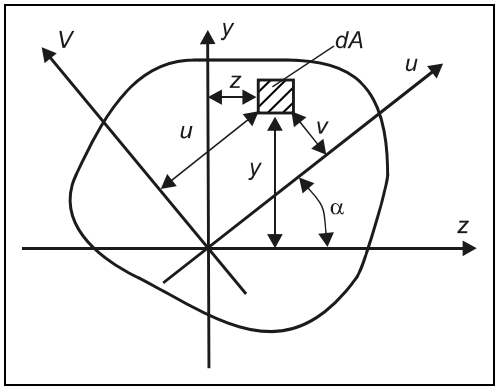


Рис. 2.10. К определению моментов инерции относительно повернутых осей

После упрощения формулы для моментов инерции относительно повернутых осей имеют вид:

$$\begin{aligned} J_u &= J_z \cos^2(\alpha) + J_y \sin^2(\alpha) - J_{zy}\sin(2\alpha), \\ J_v &= J_z \sin^2(\alpha) + J_y \cos^2(\alpha) + J_{zy}\sin(2\alpha), \\ J_{uv} &= \frac{J_z - J_y}{2}\sin(2\alpha) + J_{zy}\cos(2\alpha). \end{aligned} \qquad (2.6)$$

Отметим, что если сложить первое и второе из выражений (2.6), то

$$J_u + J_v = J_z + J_y. \qquad (2.7)$$

Сумма осевых моментов инерции при повороте осей не меняется.

2.2.5. Главные оси и главные моменты инерции

Определим положение главных осей, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю $J_{uv} = 0$.

$$J_{uv} = \frac{J_z - J_y}{2}\sin(2\alpha) + J_{zy}\cos(2\alpha) = 0 .$$

Откуда

$$\operatorname{tg}(2\alpha_0) = -\frac{2J_{zy}}{J_z - J_y}, \qquad (2.8)$$

где α_0 — угол, на который надо развернуть оси, чтобы они стали главными.

Моменты инерции относительно главных осей называются *главными моментами инерции*. Чтобы определить их, надо в выражения (2.6) подставить значение α_0, найденное по формуле (2.8).

Докажем, что относительно главных осей осевые моменты инерции имеют *экстремальные значения*. Вычислим первую производную от выражения J_u и приравняем ее нулю.

$$\frac{dJ_u}{d\alpha} = \frac{J_z - J_y}{2}2\sin(2\alpha) - J_{zy}\cos(2\alpha) = 0 .$$

Откуда

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = -\frac{2J_{zy}}{J_z - J_y}. \qquad (2.9)$$

Сравнивая выражения (2.8) и (2.9), делаем вывод, что угол наклона главных осей α_0 равен углу наклона осей α, относительно которых моменты инерции принимают экстремальные значения.

Теперь можно уточнить формулировку главных осей.

Главными осями называются оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, а осевые моменты принимают экстремальные значения.

Для определения главных моментов инерции существует и более простая формула. Для ее получения нужно найти из выражения (2.8) угол α_0, подставить его в выражение (2.6). Затем исключить α_0, используя выражения для $\cos(2\alpha)$ и $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

После упрощения получаем

$$J_{\frac{\max}{\min}} = \frac{J_z + J_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4J_{zy}^2}\ . \qquad (2.10)$$

Знак плюс перед вторым слагаемым относится к максимальному моменту инерции, знак минус — к минимальному.

Формула (2.10) (в отличие от формулы (2.6)) не позволяет сразу сказать, относительно какой оси момент инерции максимальный. Для этой цели полезно использовать подсказки, основанные на результатах расчета.

Ось, относительно которой момент инерции максимальный:

- проходит через более узкую часть сечения ("поперек живота");
- проходит через II—IV четверть поперечного сечения, если центробежный момент положительный, и через I—III четверть, если центробежный момент отрицательный.

2.2.6. Радиус инерции сечения

Понятие радиус инерции встретится в *разд. 12.4*.

Радиусом инерции называется математическое выражение следующего вида:

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}}\ .$$

Радиус инерции можно представить как расстояние от оси z до точки, в которой нужно сосредоточить всю площадь сечения, чтобы момент инерции этой точки был равен моменту инерции всего сечения.

Радиусы инерции, соответствующие главным осям, называются главными радиусами инерции:

$$i_{\max} = \sqrt{\frac{J_{\max}}{A}} \qquad i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}}\ .$$

2.3. Примеры расчета геометрических характеристик сечений

Mathcad позволяет определить геометрические характеристики практически любого сечения. Рассмотрим несколько примеров с различными сечениями.

2.3.1. Расчет геометрических характеристик сечения произвольной формы

Рассчитать геометрические характеристики для поперечного сечения, заданного аналитически или в виде семейства точек на контуре.

Пусть задано сечение, ограниченное четырьмя кривыми, описываемое уравнениями, приведенными на рис. 2.11 в виде вектора-функции. На этом же рисунке показаны графики этих функций и образуемое ими сечение.

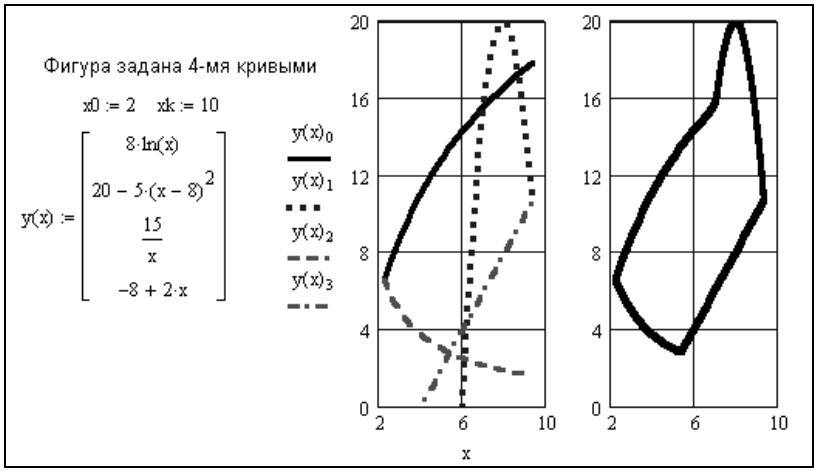


Рис. 2.11. Поперечное сечение (справа), образованное четырьмя кривыми (слева)

Следует иметь в виду, что Mathcad вычисляет значения функций при значениях аргумента, заданных дискретной переменной и расположенных строго в возрастающем порядке. Обратного хода здесь нет. Поэтому сечение задано двумя кривыми: верхней $y1(z)$ и нижней $y2(z)$.

Каждая кривая составлена из двух частей с помощью условного оператора `if` на панели программирования. Для стыковки частей кривых вначале надо найти точки их пересечения, решив систему двух уравнений с помощью вычислительного блока `given-find`, которому предшествуют начальные значения для всех аргументов (рис. 2.12). Начальное значение должно быть взято на той же ветви кривой, где находится точка пересечения. Так для четвертой точки пересечения (параболы с прямой) взято значение $z = 10$, чтобы попасть на правую ветвь параболы.

Далее в программе расчета записаны формулы, соответствующие стандартным определениям площади, статических моментов и моментов инерции в виде двойных интегралов по z и y (рис. 2.13).

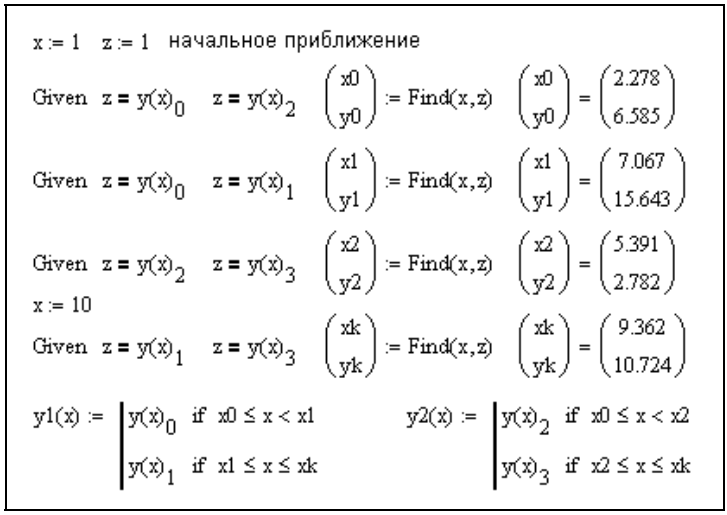


Рис. 2.12. Нахождение точек пересечения четырех кривых, образующих сечение

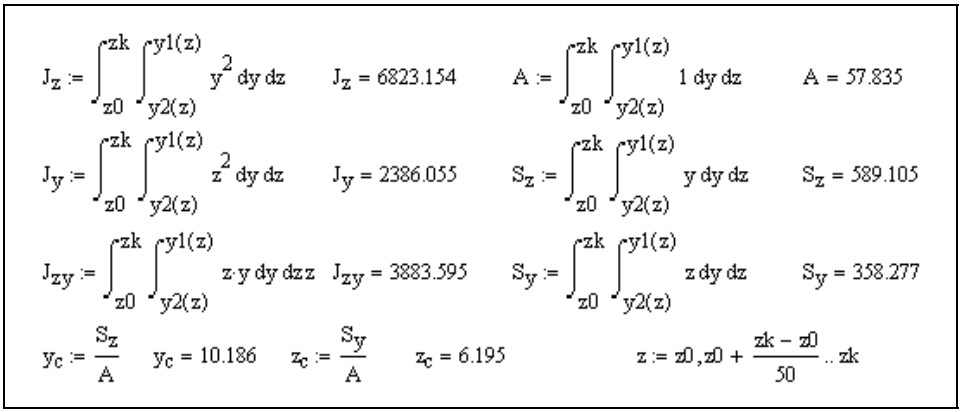


Рис. 2.13. Расчет моментов инерции и координат центра тяжести

По формуле (2.2) определено положение центра тяжести. По формулам (2.5) определены моменты инерции относительно центральных осей всего сечения и по формуле (2.7) относительно повернутых осей (рис. 2.14).

По формуле (2.8) найден угол наклона главных центральных осей и соответствующие ему главные центральные моменты инерции (рис. 2.15). На том же рисунке показано сечение с нанесенными на него главными центральными осями инерции.

$\alpha := 0, \frac{\pi}{10} .. 2\cdot\pi$

$J_{zc} := J_z - A\cdot y_c^2$ $\quad J_{zc} = 822.537$

$J_{yc} := J_y - A\cdot z_c^2$ $\quad J_{yc} = 166.584$

$J_{zcyc} := J_{zy} - A\cdot z_c\cdot y_c$ $\quad J_{zcyc} = 234.185$

$J_u(\alpha) := J_{zc}\cdot\cos(\alpha)^2 + J_{yc}\cdot\sin(\alpha)^2 - J_{zcyc}\cdot\sin(2\cdot\alpha)$

$J_v(\alpha) := J_{zc}\cdot\sin(\alpha)^2 + J_{yc}\cdot\cos(\alpha)^2 + J_{zcyc}\cdot\sin(2\cdot\alpha)$

$J_{uv}(\alpha) := \frac{J_{zc} - J_{yc}}{2}\cdot\sin(2\cdot\alpha) + J_{zcyc}\cdot\cos(2\cdot\alpha)$

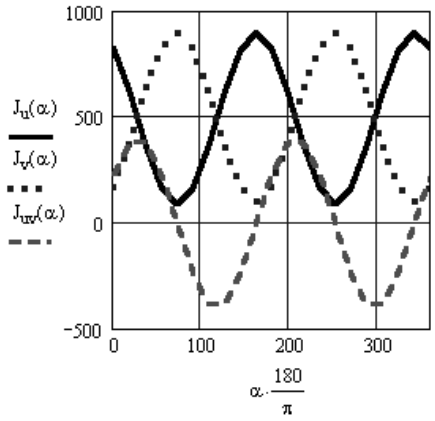


Рис. 2.14. Моменты инерции сечения относительно параллельно перенесенных и повернутых осей

$\alpha_{глав} := \frac{1}{2}\cdot\operatorname{atan}\left(\frac{-2\cdot J_{zcyc}}{J_{zc} - J_{yc}}\right)$

$\alpha_{глав} = -17.764\,\text{deg}$

$J_u(\alpha_{глав}) = 897.563$

$J_v(\alpha_{глав}) = 91.558$

уравнения главных осей

$yy1(z) := y_c + \tan(\alpha_{глав})\cdot(z - z_c)$

$yy2(z) := y_c + \tan\left(\alpha_{глав} + \frac{\pi}{2}\right)\cdot(z - z_c)$

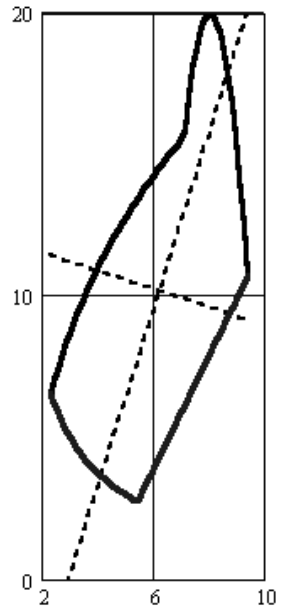


Рис. 2.15. Определение положения главных осей инерции и величины главных моментов инерции

Приведенная программа работает для различных сечений, заданных аналитическими выражениями. Работая с программой, поменяйте выражения, образующие контур сечения.

Вид поперечного сечения можно задать не только аналитически, но и рядом точек, лежащих на контуре сечения.

На рис. 2.16 показан массив точек контура некоторого сечения. Напоминаю, что Mathcad для последующей интерполяции функций требует, чтобы значения аргумента были заданы обязательно в возрастающем порядке. Не может быть обратного движения кривой, поэтому сечение задано двумя массивами точек: для верхней и для нижней частей контура отдельно. Для экономии места на рисунке массивы введены в виде строки с последующим транспонированием в столбец.

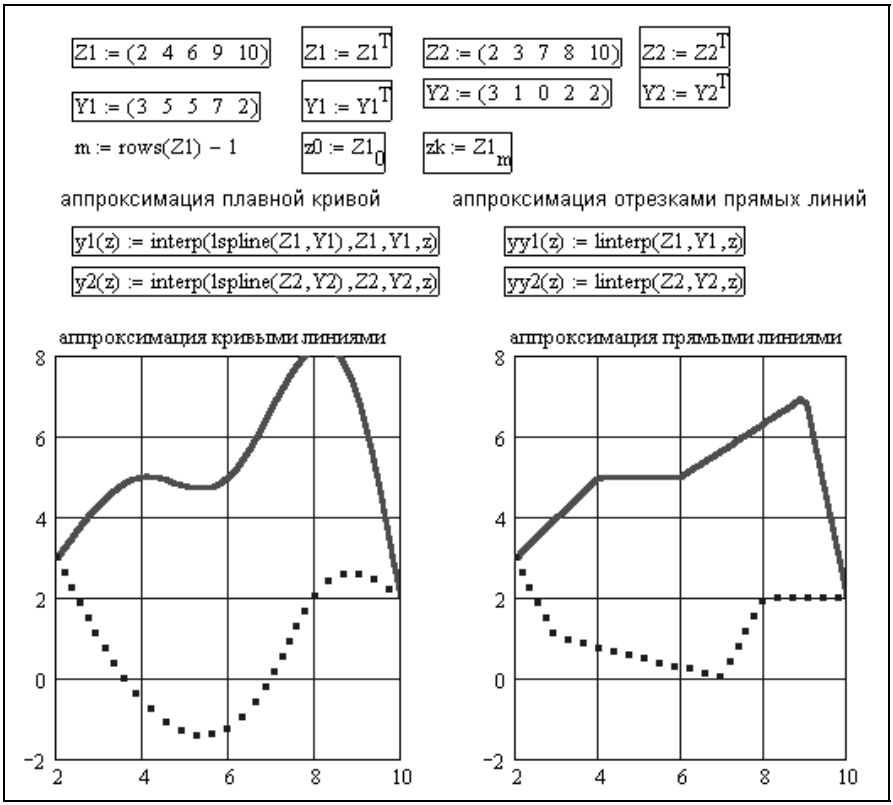


Рис. 2.16. Задание сечения массивом точек

Для вычисления интегралов массивы надо превратить в функции путем их интерполяции функцией `interp`. В зависимости от способа интерполяции вид

сечения будет немного изменяться. Можно описать сечения плавной кривой, используя одну из трех функций кубической сплайн-интерполяции, можно соединить точки отрезками прямых линий, используя линейную интерполяцию. Вид получаемых сечений показан на рис. 2.16.

При работе с программой включите указанные в программе выражения для аппроксимации сечения плавной кривой или ломаной линией. Для включения выражений в контекстном меню **Properties** (Свойства) выберите **Calculation** (Вычисления) и снимите флажок у пункта **Disable Evaluation** (Оценка не нужна). После этого весь пример будет пересчитан для выбранного вами варианта.

Если вам надо определить геометрические характеристики сечения с вырезом произвольной формы, то аналогичный расчет нужно сделать для выреза. Скопируйте программу и вставьте в конец ее самой. Первая часть послужит для расчета основного сечения, вторая часть — для выреза.

Внимание

При расчете площадь выреза и момент инерции выреза берутся с минусом.

2.3.2. Расчет геометрических характеристик составного сечения

Рассчитать геометрические характеристики составного сечения (рис. 2.17).

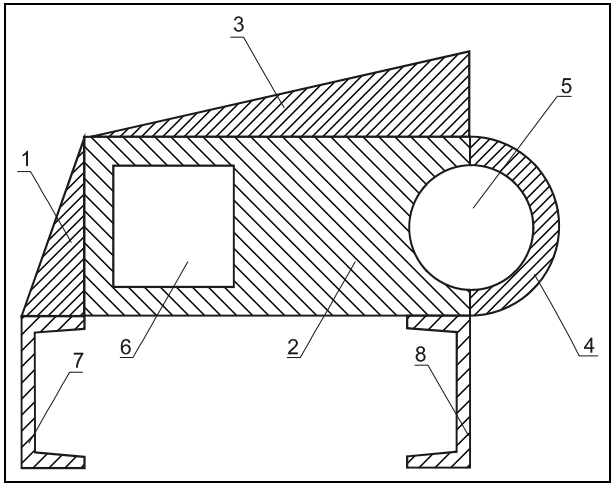


Рис. 2.17. Составное поперечное сечение

Заданное сечение разбито на 7 элементов. Для каждого элемента необходимо ввести ширину элемента b, высоту сечения h, площадь элемента A, координаты центра тяжести Y и Z в виде элементов вектора для выполнения последующих однотипных операций (рис. 2.18). Также следует ввести код элемента K и признак наличия выреза $K1$. Расшифровка кодов приведена на рис. 2.19.

ORIGIN := 1

мм := 0.001·m см := 10·мм м := m град := deg

b := (5 15 15 7.5 5 3 0 0) $b := b^T \cdot см$

h := (10 10 5 7.5 5 3 0 0) $h := h^T \cdot см$

A := (25 75 37.5 88.4 39.3 36 13.3 13.3) $A := A^T \cdot см^2$

Y := (3.33 5 11.67 7.5 7.5 5 −6 −6) $Y := Y^T \cdot см$

Z := (−1.67 7.5 10 18.18 15 5 −3.66 13.46) $Z := Z^T \cdot см$

K := (3 1 3 5 2 1 7 7) $K := K^T$

K1 := (1 1 1 1 −1 −1 1 1) $K1 := K1^T$

n := rows(A) i := 1..n

Рис. 2.18. Исходные данные к расчету составного сечения

K = 1	прямоугольник
K = 2	круг
K = 3	треугольник Jzy>0
K = 4	треугольник Jzy<0
K = 5	полукруг, где d - вертикальный размер
K = 6	полукруг, где d - горизонтальный размер
K = 7	швеллер
K1 = 1	сечение сплошное
K1 = −1	вырез

Рис. 2.19. Коды элементов составного поперечного сечения

Далее в программе расчет моментов инерции элементов относительно собственных центральных осей, оформленный в виде подпрограммы (рис. 2.20). В зависимости от кода K для каждого элемента введена своя расчетная формула.

$$J_{z_i} := \begin{cases} \frac{b_i \cdot (h_i)^3}{12} & \text{if } K_i = 1 \\ \frac{\pi \cdot (b_i)^4}{64} & \text{if } K_i = 2 \\ \frac{b_i \cdot (h_i)^3}{36} & \text{if } 3 \le K_i \le 4 \\ \frac{\pi \cdot (b_i)^4}{128} & \text{if } K_i = 5 \\ \left[0.00686 \cdot (b_i)^4 \right] & \text{if } K_i = 6 \\ 304 \cdot \text{см}^4 & \text{if } K_i = 7 \\ 0 & \text{if } K_i > 7 \end{cases} \qquad J_{y_i} := \begin{cases} \frac{(b_i)^3 \cdot h_i}{12} & \text{if } K_i = 1 \\ \frac{\pi \cdot (b_i)^4}{64} & \text{if } K_i = 2 \\ \frac{(b_i)^3 \cdot h_i}{36} & \text{if } 3 \le K_i \le 4 \\ \left[0.00686 \cdot (b_i)^4 \right] & \text{if } K_i = 5 \\ \frac{\pi \cdot (b_i)^4}{128} & \text{if } K_i = 6 \\ 31.2 \cdot \text{см}^4 & \text{if } K_i = 7 \\ 0 & \text{if } K_i > 7 \end{cases}$$

$$J_{zy_i} := \begin{cases} \frac{(b_i)^2 \cdot (h_i)^2}{72} & \text{if } K_i = 3 \\ \frac{(b_i)^2 \cdot (h_i)^2}{-72} & \text{if } K_i = 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Рис. 2.20. Моменты инерции элементов составного сечения

$$Y_c := \frac{\sum_{j=1}^{n} A_j \cdot Y_j \cdot K1_j}{\sum_{j=1}^{n} A_j \cdot K1_j} \qquad Z_c := \frac{\sum_{j=1}^{n} A_j \cdot Z_j \cdot K1_j}{\sum_{j=1}^{n} A_j \cdot K1_j}$$

$Y_c = 52\,\text{мм}$

$Z_c = 105\,\text{мм}$

$$J_{z0} := \sum_{j=1}^{n} \left[J_{z_j} + A_j \cdot (Y_j - Y_c)^2 \right] \cdot K1_j \qquad J_{z0} = 7344\,\text{см}^4$$

$$J_{y0} := \sum_{j=1}^{n} \left[J_{y_j} + A_j \cdot (Z_j - Z_c)^2 \right] \cdot K1_j \qquad J_{y0} = 13862\,\text{см}^4$$

$$J_{zy0} := \sum_{j=1}^{n} \left[J_{zy_j} + A_j \cdot (Y_j - Y_c) \cdot (Z_j - Z_c) \right] \cdot K1_j \qquad J_{zy0} = 3389\,\text{см}^4$$

$$\alpha_{\text{глав}} := \frac{1}{2} \cdot \text{atan}\left(\frac{-2 \cdot J_{zy0}}{J_{z0} - J_{y0}} \right) \qquad \alpha_{\text{глав}} = 23\,\text{град}$$

$$J_{max} := \frac{J_{z0} + J_{y0}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(J_{z0} - J_{y0})^2 + 4 \cdot J_{zy0}^2} \qquad J_{max} = 15305\,\text{см}^4$$

$$J_{min} := \frac{J_{z0} + J_{y0}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(J_{z0} - J_{y0})^2 + 4 \cdot J_{zy0}^2} \qquad J_{min} = 5902\,\text{см}^4$$

Рис. 2.21. Результаты расчета геометрических характеристик составного сечения

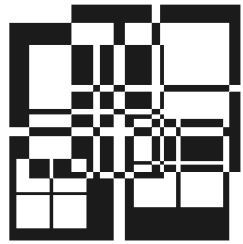
Затем следует перечень расчетных формул и вывод результатов расчета (рис. 2.21).

- Определение положения центра тяжести сечения.
- Определение моментов инерции относительно центральных осей, параллельных исходным осям.
- Определение угла наклона главных осей относительно исходных.
- Определение главных центральных моментов инерции.

С помощью приведенной программы можно рассчитывать различные сечения. Введите свои исходные данные и посмотрите результаты расчета. Если ваше сечение содержит элементы, которых нет среди указанных семи типов, например сектор, сегмент, двутавр, уголок, введите формулы для них в выражения-подпрограммы для моментов инерции.

Приведенные в двух примерах программы позволяют определить геометрические характеристики практически любого поперечного сечения.

ГЛАВА 3



Определение внутренних усилий

При расчете на прочность любой конструкции необходимо определить распределение внутренних усилий в ней, выбрать опасное сечение и затем усилия, действующие в опасном сечении, подставить в условие прочности, представляющее собой готовую формулу.

Определение внутренних усилий — это основная задача, требующая знаний и умения соображать, т. к. для каждой задачи количество сил и их расположение различно, различны и способы крепления конструкций. В любой задаче сопротивления материалов 80% времени и сил тратится на определение внутренних усилий, остальные 20% уходят на подстановку найденных усилий в опасном сечении в готовые расчетные формулы и определение по ним неизвестных параметров конструкции.

Использование Mathcad позволяет создать программы для расчета внутренних усилий, пригодные, конечно, не для всех случаев жизни, но все же для широкого круга задач. Такие программы приведены в этой главе.

Все нагрузки, действующие на любое тело, можно свести к парам сил, сосредоточенным силам и распределенным нагрузкам. Посмотрим, как зависят внутренние усилия от того или иного вида нагрузки.

Напомним приведенное в первой главе, вытекающее из метода сечений правило определения любого внутреннего усилия.

Правило определения внутренних усилий

N_x, Q_y, Q_z равняются алгебраической сумме проекций всех сил, расположенных по одну сторону от выбранного сечения, соответственно на оси x, y или z.

M_x, M_y, M_z равняются алгебраической сумме моментов всех сил, расположенных по одну сторону от выбранного сечения, соответственно относительно осей x, y или z, проходящих через центр тяжести выбранного сечения.

Рассмотрим простые виды деформации: растяжение-сжатие, кручение и изгиб.

3.1. Растяжение-сжатие

При растяжении-сжатии все силы направлены вдоль оси стержня. В поперечных сечениях стержня действует только одно внутреннее усилие: продольное. Возможно действие сосредоточенных и распределенных нагрузок.

Правило

Продольное усилие равняется сумме сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Положительным считается растягивающее усилие, отрицательным — сжимающее.

Математически это правило можно записать следующим образом:

$$N(x) = \sum F_i + \sum \int q_i(x) \cdot dx \,. \tag{3.1}$$

Распределенная нагрузка q может быть переменной или постоянной. Если $q = Const$, то выражение (3.1) принимает вид

$$N(x) = \sum F_i + \sum q_i(x) \cdot (x - L_{q\text{н}}) - \sum q_i(x) \cdot (x - L_{q\text{к}}) \,, \tag{3.2}$$

где $L_{q\text{н}}$ и $L_{q\text{к}}$ — расстояние от начала координат соответственно до начала и до конца распределенной нагрузки.

Если распределенная нагрузка постоянной интенсивности приложена лишь к части стержня, то ее можно заменить двумя нагрузками: распределенной нагрузкой, приложенной от сечения $x = L_{q\text{н}}$ до конца стержня, и фиктивной распределенной нагрузкой той же величины, но противоположного направления, приложенной от сечения $x = L_{q\text{к}}$ до конца стержня (формула 3.2).

Для записи внутренних усилий в общем виде далее во всех примерах используются булевы операторы условия.

Булевы операторы принимают значения 1, если логическое выражение в скобках верно, и 0, если — не верно.

Умножение какого-либо слагаемого на булев оператор условия позволяет включить это слагаемое, если условие выполняется, или выключить его, если условие не выполняется.

С использованием булевых операторов можно выстраивать довольно сложные математические выражения. Например, одновременное действие нескольких условий (...и, ...и, ...и, ...) записываем в виде произведения нескольких булевых операторов. Если хоть одно условие неверно, выражение обращается в нуль $(1\cdot 1\cdot 1\cdot 0\cdot 1)=0$.

Если достаточно выполнения хотя бы одного условия (...или, ...или, ...или, ...), записываем сумму булевых операторов $(0+0+0+1+0)=1$ и будем неправы. Представьте, что одновременно выполняются два условия, тогда результат равен 2, а это повлечет за собой умножение на 2 предшествующего условию математического выражения и результат станет неверным.

Совет

Во избежание ошибок не надо строить математические выражения с использованием обычных знаков умножения и сложения. Надо использовать знаки логических операций с панели **Boolean** (Булевы операторы): $\wedge$ — и...и, $\vee$ — или.

Расчет продольного усилия в Mathcad для стержня, условно показанного на рис. 3.1, приведен на рис. 3.3, а результаты расчета на рис. 3.4. Условность схемы состоит в том, что на рис. 3.1 стержень нагружен одной сосредоточенной и одной распределенной нагрузкой, тогда как в примере на стержень действуют 3 сосредоточенных и 2 распределенных нагрузки. Сделано это, чтобы не загромождать рисунок большим количеством стрелок и обозначений. В принципе, количество нагрузок может быть любым.

Как видно из графиков (рис. 3.4), при постоянной интенсивности распределенной нагрузки формулы (3.1) и (3.2) дают абсолютно одинаковые результаты. Чтобы показать влияние переменной распределенной нагрузки, необходимо включить в расчет выражение для $q1(x)$, сдвинув его вниз, (см. рис. 3.3). Первая из двух треугольных распределенных нагрузок возрастает, а вторая убывает по линейному закону. В выражении для $q1(x)$ координата $x=0$ соответствует началу действия распределенной нагрузки, что заставило скорректировать пределы интегрирования. Если нужно использовать выражение, где $x=0$ — начало стержня, следует применять выражение для $N(x)$ из рис. 4.4 *следующей главы*.

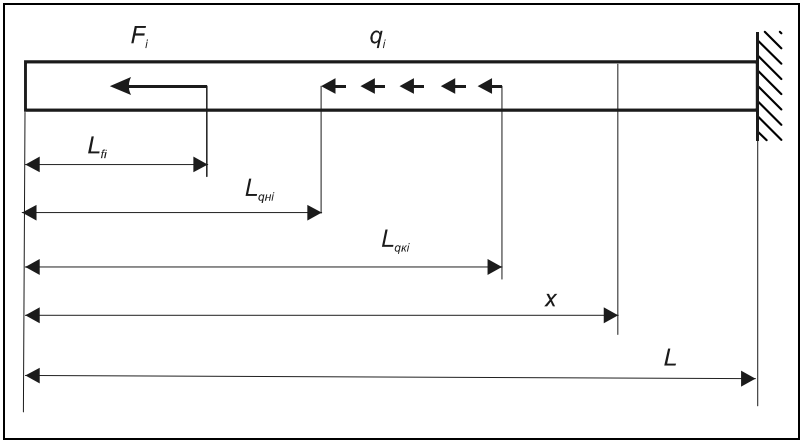


Рис. 3.1. Условная схема нагружения стержня при растяжении-сжатии

Записанные в Mathcad выражения для продольных усилий являются функциями, которые можно интегрировать и дифференцировать. В *следующей главе* будет показано, что перемещение при растяжении пропорционально интегралу от продольного усилия по длине стержня, т. е. площади эпюры продольных усилий. Вычисление этого интеграла показано на рис. 3.4. Обратите внимание, что на правом конце стержня (в заделке) значение интеграла, а следовательно, и перемещение равно нулю.

Формулы, приведенные в этом расчете, справедливы для любой схемы нагружения стержня. Поскольку в примере на стержень действуют 3 сосредоточенные и 2 распределенные нагрузки, приложенные в разных сечениях, в формулы (3.1) и (3.2) включены булевы операторы условия, включающие при соответствующих значениях x слагаемые для отдельных нагрузок. Работая с примером, поменяйте величины и количество нагрузок, места их приложения.

Расчет внутренних усилий в этой главе производится с учетом размерностей, поэтому в начале расчета вводятся производные размерности на русском языке, а затем исходные данные для расчета (рис. 3.2).

Особенностями работы в Mathcad, обеспечивающими простоту решения и его универсальность, являются:

- ❒ выбор общего начала координат для задания всех расстояний, позволяющий построить эпюры внутренних усилий;
- ❒ запись всех нагрузок и расстояний до них в векторной форме, позволяющий использовать оператор суммирования по заданному индексу;

- использование булевых операторов условия, обеспечивающих включение слагаемых при x большем расстояния от начала координат до соответствующей нагрузки.

Примечание

Для сопоставимости графиков на одном рисунке здесь и далее используются различные масштабные коэффициенты для разных функций.

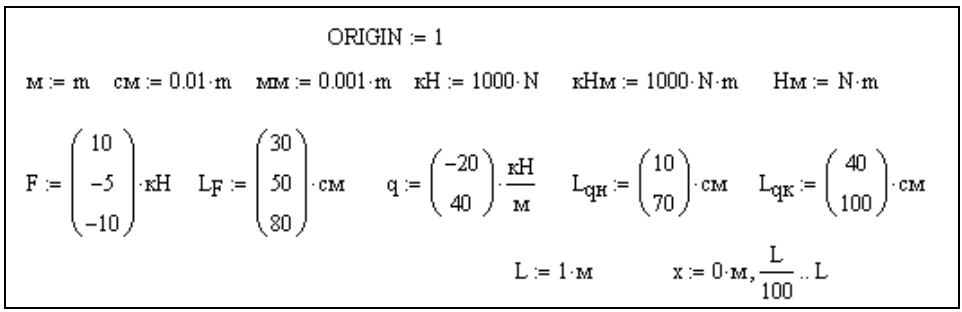


Рис. 3.2. Исходные данные для расчета

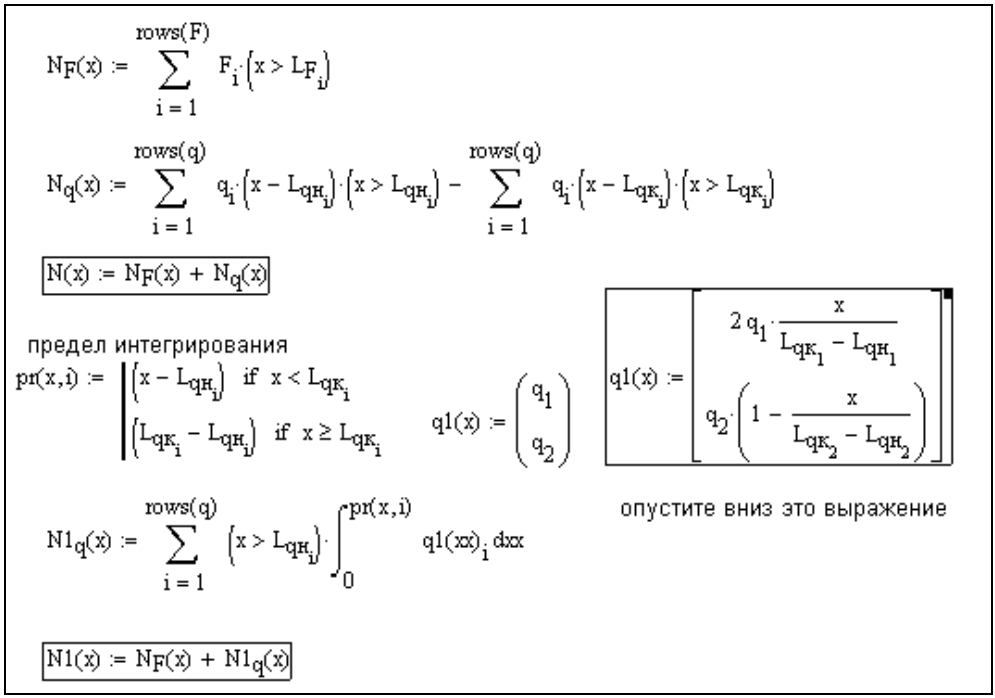


Рис. 3.3. Расчет продольных усилий при растяжении

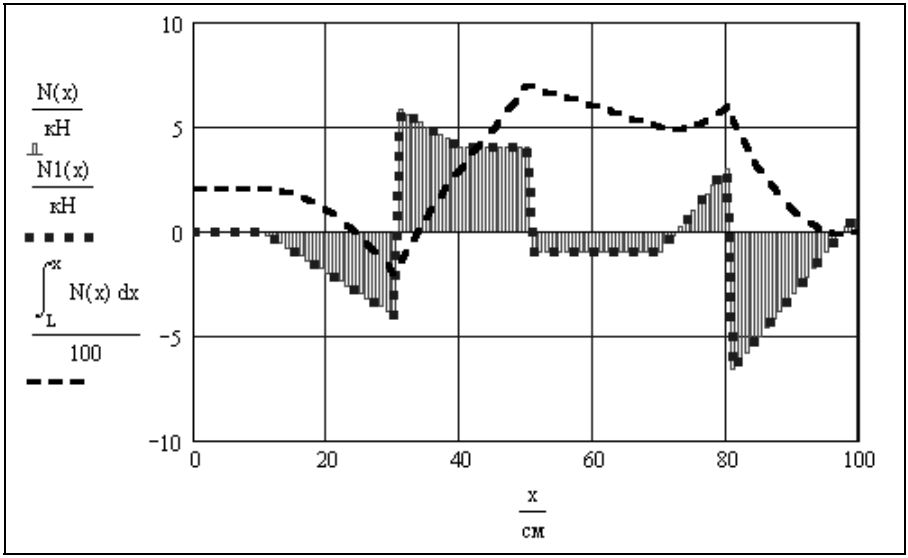


Рис. 3.4. Результаты расчета продольных усилий

3.2. Кручение

Кручение стержня вызывается парами сил, плоскость действия которых перпендикулярна продольной оси стержня. В этом случае в поперечных сечениях стержня действует только одно внутреннее усилие — крутящий момент $M_к$.

Внешними нагрузками при кручении могут быть сосредоточенные моменты M и распределенные моменты m.

Применительно к кручению правило определения внутренних усилий выглядит так:

Правило

> Крутящий момент равен сумме моментов пар сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Правило знаков для крутящего момента, в принципе, не вводится, т. к. прочность при кручении не зависит от направления вращения. Важно лишь не спутать сумму или разность чисел. Тем не менее для упорядочения расчетов рекомендуется считать крутящий момент положительным, если, глядя с торца стержня, видим внешний момент, действующим против часовой стрелки.

Математически крутящий момент можно записать так

$$M_{\text{к}}(x) = \sum M_i + \sum \int m_i(x) \cdot dx \,. \tag{3.3}$$

В реальных конструкциях нет сил и моментов, действующих в точке. Каждая сила действует на каком-то участке тела, как правило, малом по сравнению с размерами тела, и поэтому в расчетах заменяется сосредоточенной силой или парой сил, действующей в точке. При кручении распределенные моменты используются в расчетах крайне редко.

Теоретически распределенные моменты могут быть постоянной или переменной интенсивности. Для примера используем распределенные моменты постоянной интенсивности. Если же нужно учесть распределенный момент переменной интенсивности, то возьмите из рис. 3.3 выражение для $N1_q(x)$, замените в нем $q1$ на $m1$ и используйте его для определения крутящего момента.

При постоянной распределенной нагрузке m выражение (3.3) принимает вид

$$M_{\text{к}}(x) = \sum M_i + \sum m_i(x) \cdot (x - L_{m\text{н}}) - \sum m_i(x) \cdot (x - L_{m\text{к}}) \,, \tag{3.4}$$

где $L_{m\text{н}}$ и $L_{m\text{к}}$ — расстояние от начала координат соответственно до начала и до конца распределенной нагрузки.

Расчет в Mathcad крутящих моментов для стержня, условно показанного на рис. 3.5, представлен на рис. 3.6. Результаты расчета приведены на рис. 3.7.

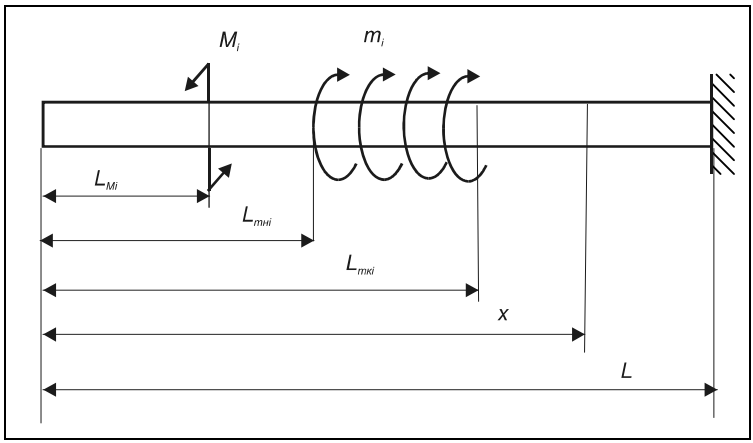


Рис. 3.5. Условная схема нагрузок стержня при кручении

Кроме крутящего момента на этом рисунке приведены результаты расчета интеграла и производной от крутящего момента. Как будет показано

в *главе 6*, интеграл от крутящего момента пропорционален углу закручивания стержня, а производная равна интенсивности распределенной нагрузки. Работая с примером, поменяйте длины нагрузки и места их приложения.

$$m := \begin{pmatrix} -1000 \\ 2000 \end{pmatrix} \cdot \frac{Нм}{м} \quad L_{mн} := \begin{pmatrix} 10 \\ 70 \end{pmatrix} \cdot см \quad L_{mк} := \begin{pmatrix} 40 \\ 100 \end{pmatrix} \cdot см \quad M := \begin{pmatrix} 500 \\ -800 \end{pmatrix} \cdot Нм \quad L_M := \begin{pmatrix} 20 \\ 60 \end{pmatrix} \cdot см$$

$$M_{kM}(x) := \sum_{i=1}^{rows(M)} M_i \cdot (x > L_{M_i}) +$$

$$M_{km}(x) := \sum_{i=1}^{rows(m)} m_i \cdot (x - L_{mн_i}) \cdot (x > L_{mн_i}) - \sum_{i=1}^{rows(m)} m_i \cdot (x - L_{mк_i}) \cdot (x > L_{mк_i})$$

$$M_k(x) := M_{kM}(x) + M_{km}(x)$$

Рис. 3.6. Расчет крутящих моментов при кручении стержня

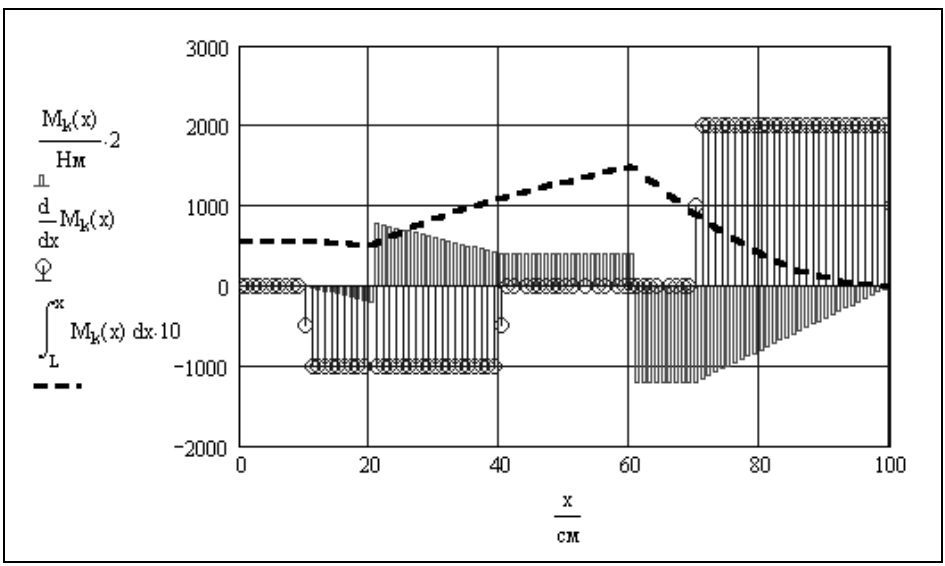


Рис. 3.7. Результаты расчета крутящих моментов при кручении стержня

3.3. Изгиб

Рассмотрим плоский поперечный изгиб, при котором все силы лежат в одной плоскости и перпендикулярны продольной оси балки. В этом случае в поперечных сечениях действуют поперечная сила Q и изгибающий момент M. Продольное усилие $N = 0$. Согласно приведенному ниже правилу определения внутренних усилий при плоском поперечном изгибе возможно действие сосредоточенных и распределенных нагрузок.

Правило

Поперечная сила равняется сумме сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения; изгибающий момент равен сумме моментов всех сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения относительно центра тяжести сечения.

Правила знаков для поперечной силы и изгибающего момента труднопроизносимы, и лучше представить и запомнить это правило в графическом виде (рис. 3.8).

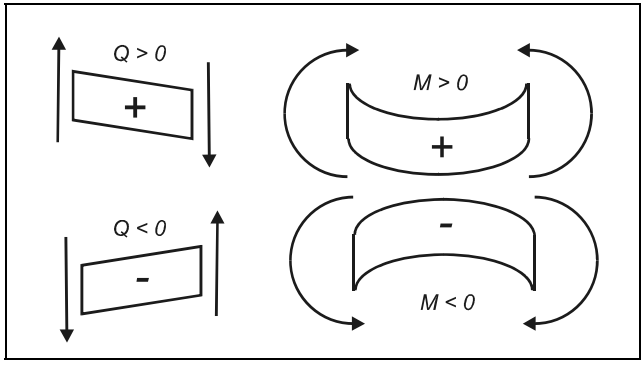


Рис. 3.8. Графические правила знаков для поперечной силы Q и изгибающего момента M

Математически внутренние усилия при изгибе можно записать следующим образом:

$$Q(x) = \sum F_i + \sum \int q_i(x) \cdot dx, \tag{3.5}$$

$$M_z(x) = \sum M_i + \sum \int F_i \cdot h(x) + \sum \int q_i(x) \cdot h(x) \cdot dx, \tag{3.6}$$

где $h(x)$ — плечо силы.

Если с подсчетом суммы сил, расположенных по одну сторону от выбранного сечения, все ясно, то подсчет суммы моментов требует дополнительных пояснений. Практика работы со студентами показывает, что больше всего ошибок студенты делают при определении изгибающих моментов в сечениях балки, поэтому считаю необходимым повторить правило определения момента силы, известное из курсов физики и теоретической механики.

Правило

Для плоской задачи:

- ❒ момент силы относительно какой-либо точки равен произведению силы на плечо;
- ❒ плечо — перпендикуляр, опущенный из точки на линию действия силы.

Для пространственной задачи:

- ❒ момент силы относительно какой-либо оси в пространстве равен произведению проекции силы на плоскость, перпендикулярную заданной оси, на плечо;
- ❒ плечо — кратчайшее расстояние в пространстве между линией действия силы и заданной осью.

Пара сил — это две силы, находящиеся на фиксированном расстоянии друг от друга. Если задана пара сил, то *момент пары сил* — величина постоянная для любой точки.

Сложнее с распределенной нагрузкой. На практике распределенная нагрузка, расположенная по одну сторону от выделенного сечения балки, заменяется результирующей сосредоточенной силой, приложенной в центре тяжести распределенной нагрузки. Момент от распределенной нагрузки подсчитывается как произведение этой результирующей силы на ее плечо. При этом закон изменения момента зависит от того, взято сечение в пределах действия распределенной нагрузки или за ее пределами.

На рис. 3.9 показана балка, нагруженная произвольной распределенной нагрузкой. На расстоянии xx от начала нагрузки выделим элемент длиной $d(xx)$. На него действует нагрузка $q(x)\cdot d(xx)$. На расстоянии x от начала балки выделим произвольное сечение и найдем изгибающий момент в этом сечении.

От нагрузки, действующей на элемент $d(xx)$,

$$dM_{zq} = q(xx)\cdot d(xx)\cdot h(x),$$

где $h(x) = x - xx - L_{q\text{н}}$ — плечо силы $q(x)\cdot d(xx)$.

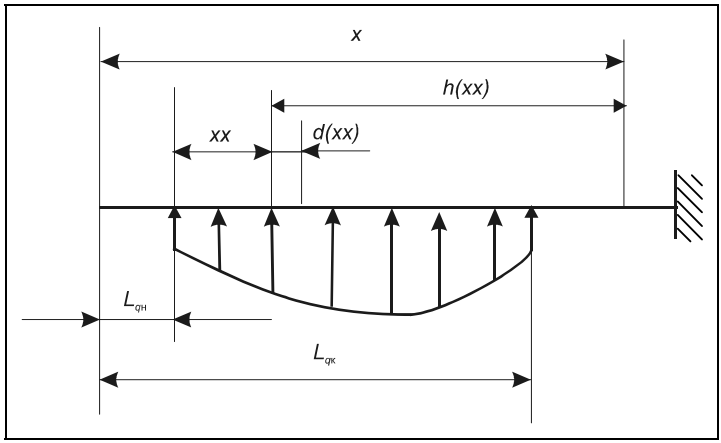


Рис. 3.9. Балка, нагруженная произвольной распределенной нагрузкой

Полный изгибающий момент от распределенной нагрузки равен

$$M_{zq}(x) = \int_0^{xx} q(xx) \cdot h(x) \cdot d(xx), \tag{3.7}$$

если сечение взято в пределах распределенной нагрузки, и

$$M_{zq}(x) = \int_0^{L_{qк}-L_{qн}} q(xx) \cdot h(x) \cdot d(xx), \tag{3.8}$$

если сечение взято за пределами распределенной нагрузки.

Если распределенная нагрузка постоянной интенсивности приложена лишь к части балки, то ее можно заменить двумя нагрузками: распределенной нагрузкой, приложенной от сечения $x = L_{qн}$ до конца стержня, и фиктивной распределенной нагрузкой той же величины, но противоположного направления, приложенной от сечения $x = L_{qк}$ до конца стержня.

$$\begin{aligned} Q_q(x) &= \sum q_i \cdot (x - L_{qнi}) - \sum q_i \cdot (x - L_{qкi}), \\ M_{zq}(x) &= \sum q_i \cdot \frac{(x - L_{qнi})^2}{2} - \sum q_i \cdot \frac{(x - L_{qкi})^2}{2}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Расчет в Mathcad внутренних усилий при изгибе для балки, условно показанной на рис. 3.10, с распределенной нагрузкой постоянной интенсивности по формулам (3.5), (3.6), (3.9) показан на рис. 3.11. Результаты расчета приведены на рис. 3.12.

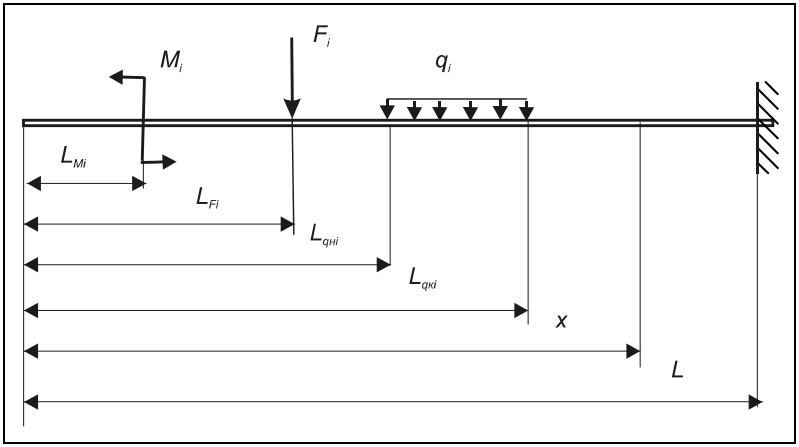


Рис. 3.10. Условная схема нагрузок балки при изгибе

$$F := \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix} \cdot кН \quad L_F := \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \\ 80 \end{pmatrix} \cdot см \quad q := \begin{pmatrix} -20 \\ 40 \end{pmatrix} \cdot \frac{кН}{м} \quad L_{qн} := \begin{pmatrix} 10 \\ 70 \end{pmatrix} \cdot см \quad L_{qк} := \begin{pmatrix} 40 \\ 100 \end{pmatrix} \cdot см$$

$$M := \begin{pmatrix} 500 \\ -800 \end{pmatrix} \cdot Нм \qquad L_M := \begin{pmatrix} 20 \\ 60 \end{pmatrix} \cdot см \qquad L := 1 \cdot м \qquad x := 0 \cdot м, \frac{L}{100} .. L$$

$$Q_F(x) := \sum_{i}^{rows(F)} F_i \cdot (x > L_{F_i})$$

$$Q_q(x) := \sum_{i=1}^{rows(q)} q_i \cdot (x - L_{qн_i}) \cdot (x > L_{qн_i}) - \sum_{i=1}^{rows(q)} q_i \cdot (x - L_{qк_i}) \cdot (x > L_{qк_i})$$

$$\boxed{Q(x) := Q_F(x) + Q_q(x)}$$

$$M_{zM}(x) := \sum_{i}^{rows(M)} M_i \cdot (x > L_{M_i})$$

$$M_{zF}(x) := \sum_{i}^{rows(F)} F_i \cdot (x - L_{F_i}) \cdot (x > L_{F_i})$$

$$M_{zq}(x) := \sum_{i=1}^{rows(q)} q_i \cdot \frac{(x - L_{qн_i})^2}{2} \cdot (x > L_{qн_i}) - \sum_{i=1}^{rows(q)} q_i \cdot \frac{(x - L_{qк_i})^2}{2} \cdot (x > L_{qк_i})$$

$$\boxed{M_z(x) := M_{zM}(x) + M_{zF}(x) + M_{zq}(x)}$$

Рис. 3.11. Расчет поперечной силы Q изгибающего момента M при $q = Const$

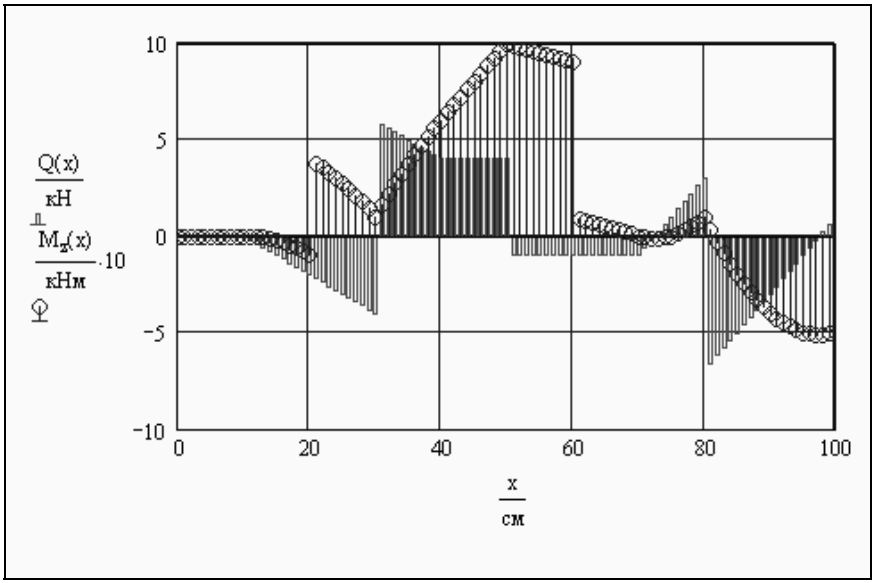


Рис. 3.12. Результаты расчета поперечной силы Q изгибающего момента M при $q = Const$

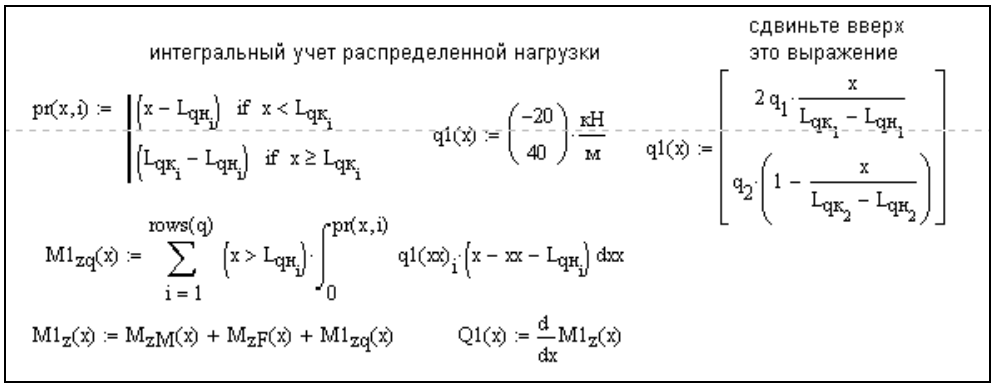


Рис. 3.13. Расчет изгибающего момента $M1$ с учетом $q \neq Const$

Интегральные выражения для $M_z(xx)$ по формулам (3.7), (3.8), используемые в Mathcad, приведены на рис. 3.13. Для расчета предложены две нагрузки (те же, что использованы на рис. 3.3 при растяжении): постоянная и переменная (треугольная). При работе с примером сдвиньте вниз выражение для переменной нагрузки и посмотрите результат расчета. На рис. 3.14 представлены результаты расчета $M1_z(x)$ по формулам (3.7), (3.8), приведенным на

рис. 3.13, и $M_z(x)$ по формуле (3.9). Для расчета использована распределенная нагрузка постоянной интенсивности. Результаты расчета, как и следовало ожидать, совпадают.

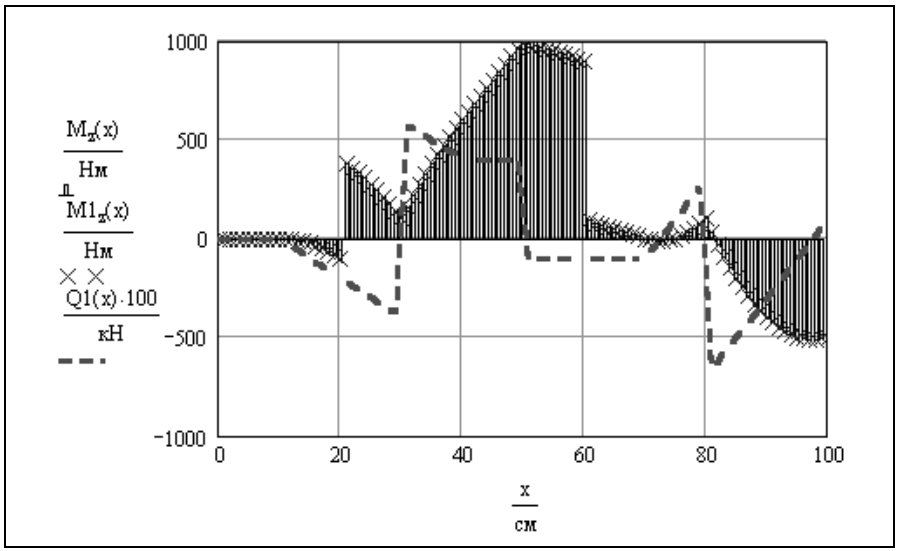


Рис. 3.14. Сравнение результатов расчета изгибающего момента $M1_z$ по формулам (3.6) и (3.7) и M_z по формуле (3.9) для $q = Const$

Все предыдущие расчеты изгибающих моментов производились для балки, консольно защемленной одним концом, однако закрепления балки могут быть различными.

Рассмотрим построение эпюр внутренних усилий для балки на двух опорах. Прежде всего, надо определить реакции опор из условий равновесия балки. Поперечная сила и изгибающий момент представляют собой уравнения равновесия отсеченной части балки. Эпюры внутренних усилий представляют собой графическое представление уравнений равновесия. С учетом реакций эпюры с нуля начинаются и нулем заканчиваются. В наших расчетах начало координат взято на левом конце балки, тогда на правом конце балки при $x = L$ $Q(L) = 0$ и $M_z(L) = 0$. Эти два условия используются для определения двух опорных реакций при изгибе балки на двух опорах (рис. 3.15). Расчет внутренних усилий с учетом опорных реакций приведен на рис. 3.16. Для определения опорных реакций используется вычислительный блок `given-find`, которому предшествуют начальные приближения для обеих реакций.

В уравнения для поперечных сил и изгибающих моментов включены слагаемые от опорных реакций R_A и R_B, а поскольку они не известны до момента

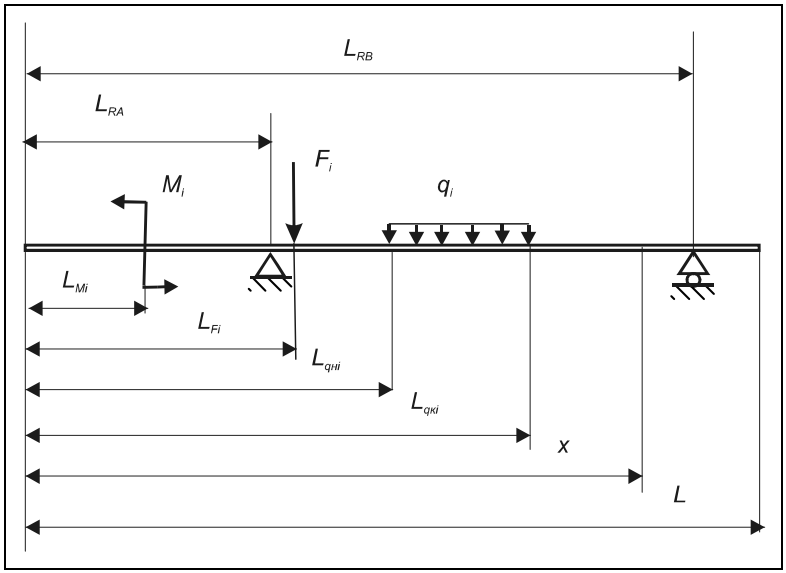


Рис. 3.15. Расчетная схема балки на двух опорах

положение опор на балке

$L_{RA} := 40 \cdot см$ $L_{RB} := 70 \cdot см$ поменяйте положение опор

Построение эпюр с определением опорных реакций

$Q_{RA}(R_A, x) := R_A \cdot (x \geq L_{RA})$ $Q_{RB}(R_B, x) := R_B \cdot (x \geq L_{RB})$

$Q(R_A, R_B, x) := Q_{RA}(R_A, x) + Q_{RB}(R_B, x) + Q_F(x) + Q_q(x)$

$M_{zRA}(R_A, x) := R_A \cdot (x - L_{RA}) \cdot (x \geq L_{RA})$

$M_{zRB}(R_B, x) := R_B \cdot (x - L_{RB}) \cdot (x \geq L_{RB})$

$M_z(R_A, R_B, x) := M_{zRA}(R_A, x) + M_{zRB}(R_B, x) + M_{zM}(x) + M_{zF}(x) + M_{zq}(x)$

определение опорных реакций

$R_A := 10 \cdot кН$ $R_B := 10 \cdot кН$ начальные приближения

Given $M_z(R_A, R_B, L) = 0$ $Q(R_A, R_B, L) = 0$

$\begin{pmatrix} R_A \\ R_B \end{pmatrix} := Find(R_A, R_B)$ $R_A = 2.667\ кН$ $R_B = -3.667\ кН$

Рис. 3.16. Расчет внутренних усилий и определение опорных реакций в балке на двух опорах

их определения, то они обязательно должны быть включены в параметры функций внутренних усилий $Q(R_A, R_B, x)$ и $M_z(R_A, R_B, x)$.

В расчете на рис. 3.16 опоры расположены в сечениях $L_{RA} = 40$ см и $L_{RB} = 70$ см. Поменяйте расстояния до опор L_{RA} и L_{RB} и посмотрите, как изменятся результаты расчета, показанные на рис. 3.17.

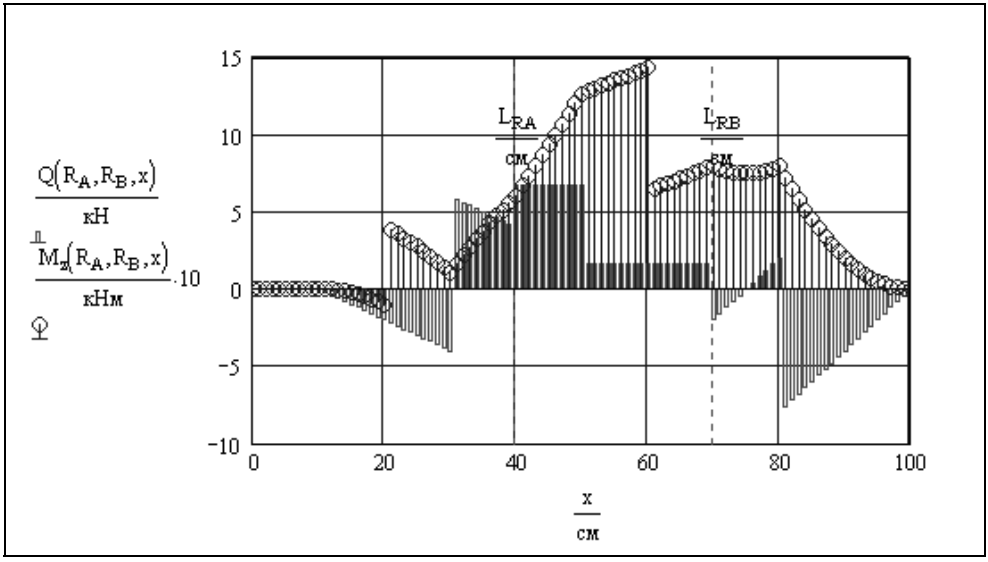


Рис. 3.17. Результаты расчета внутренних усилий и опорных реакций в балке на двух опорах

Приведенные примеры определения внутренних усилий показывают, что для Mathcad практически нет неразрешимых задач. Для одного отдельно взятого стержня можно определить внутренние усилия при любых нагрузках. Другой вопрос, надо ли это для практических задач. На практике стержень или балка нагружены, как правило, одной-двумя нагрузками, не считая опорных реакций. Если распределенная нагрузка распределена по какому-то сложному закону, то чаще всего ее интенсивность принимается постоянной или распределенная нагрузка заменяется сосредоточенной силой.

Для простых задач не имеет смысла использовать Mathcad, если задачу можно проще и быстрее решить с помощью микрокалькулятора.

Совет

Mathcad должен упрощать расчеты, а не усложнять. Не используйте Mathcad для решения простых задач.

Еще одно ограничение при использовании Mathcad — это определение внутренних усилий в рамах и ломаных стержнях. Если для длинного стержня с большим количеством нагрузок с помощью условных операторов внутренние усилия на всех участках можно описать одним уравнением, то для ломаного стержня каждый перелом — отдельный участок с отдельным уравнением, которое требуется записать вручную. Построить единую эпюру для всех участков ломаного стержня Mathcad также не в силах. Написать программу для таких вычислений конечно можно, но "овчинка выделки не стоит". Ручной работы много, программа сложная, и использование Mathcad нерационально.

3.4. Дифференциальные зависимости внутренних усилий от распределенной нагрузки

3.4.1. Растяжение-сжатие

Рассмотрим стержень, на который среди прочих нагрузок действует распределенная по любому закону нагрузка q_x, действующая вдоль оси стержня x (рис. 3.18).

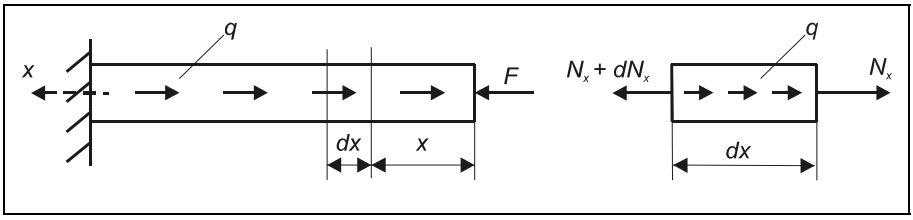


Рис. 3.18. К выводу дифференциальной зависимости между N_x и q_x

Выделим элемент стержня длиной dx в той части стержня, где действует распределенная нагрузка, и рассмотрим условия его равновесия. В пределах бесконечно малой длины dx здесь и далее интенсивность распределенной нагрузки можно считать постоянной. Тогда

$$\sum F_x = N_x + qdx - N_x - dN_x = 0\,,$$

откуда

$$q = \frac{dN_x}{dx}\,. \qquad (3.10)$$

3.4.2. Кручение

Рассмотрим стержень, на который среди прочих нагрузок действует распределенная по любому закону нагрузка m_x, закручивающая стержень вокруг продольной оси стержня x (рис. 3.19).

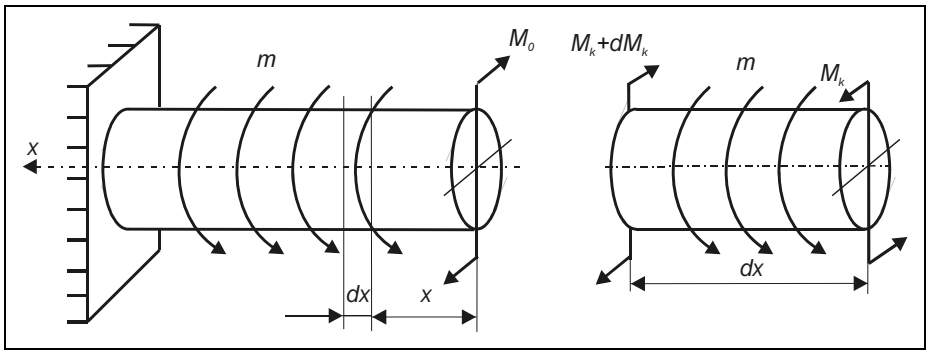


Рис. 3.19. К выводу дифференциальной зависимости между $M_к$ и m_x

Выделим элемент стержня длиной dx в той части стержня, где действует распределенный момент, и рассмотрим условия его равновесия.

$$\sum M(F)_x = M_к + mdx - M_к - dM_к = 0\,,$$

откуда

$$m = \frac{dM_к}{dx}\,. \qquad (3.11)$$

3.4.3. Изгиб

Возьмем балку, нагруженную различными нагрузками (рис. 3.20).

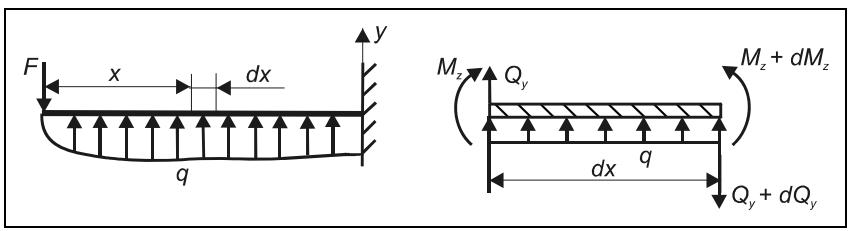


Рис. 3.20. К выводу дифференциальных зависимостей при изгибе между M, Q и q

Вырежем элемент балки в той ее части, где действует распределенная нагрузка, и запишем условия равновесия элемента балки.

$$\sum F_y = Q_y + qdx - Q_y - dQ_y = 0,$$

$$\sum M(F)_z = -M_z - Q_y dy - (Q_y dx)\frac{dx}{2} + M_z + dM_z = 0,$$

откуда

$$q = \frac{dQ_y}{dx} \quad Q_y = \frac{dM_z}{dx} \quad \text{или} \quad q = \frac{d^2 M_z}{dx^2}. \tag{3.12}$$

Найденные дифференциальные зависимости используются для проверки правильности построения эпюр внутренних усилий или для построения этих эпюр вообще без расчетов. Рассмотрим следствия из записанных дифференциальных зависимостей.

3.4.4. Следствия из дифференциальных зависимостей

Дифференциальные зависимости (формулы (3.10)—(3.12)) справедливы при любом виде нагрузок. Однако при растяжении и при кручении распределенная нагрузка встречается редко, поэтому все дальнейшие рассуждения проведем на примере изгиба.

В основе следствий лежит геометрический смысл производной и интеграла.

- Производная от функции равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции.

  Поперечная сила есть тангенс угла наклона касательной к эпюре изгибающих моментов.

  Чем больше поперечная сила при изгибе, тем больше наклон эпюры изгибающих моментов. Если поперечная сила положительная, наклон эпюры изгибающих моментов положительный (против часовой стрелки) (рис. 3.21).

- Интеграл от функции равен площади, ограниченной кривой подынтегральной функции и осью абсцисс.

  Проинтегрируем второе выражение (3.12).

$$dM_z = Q_y dx \qquad M_z(x_2) - M_z(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} Q_y dx \tag{3.13}$$

  Приращение изгибающего момента между двумя сечениями равняется приращению площади эпюры поперечной силы между этими сечениями.

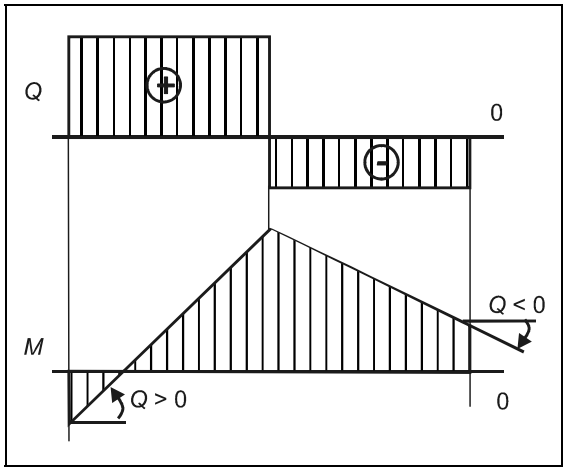


Рис. 3.21. Взаимосвязь эпюр Q и M при изгибе

Влияние каждого вида нагрузок на характер эпюр поперечной силы и изгибающего момента показано в табл 3.1. Используйте эту таблицу для проверки правильности построения эпюр Q и M.

Приведенные зависимости позволяют строить эпюры внутренних усилий без расчетов (по характерным точкам).

Следует помнить, что любая эпюра с нуля начинается и нулем заканчивается, потому что она представляет собой графическое представление уравнения равновесия тела.

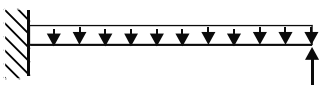
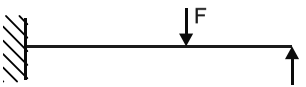
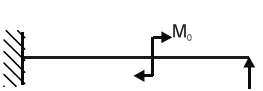
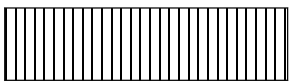
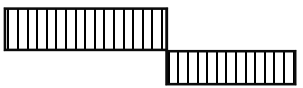
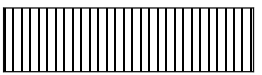
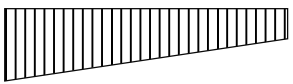
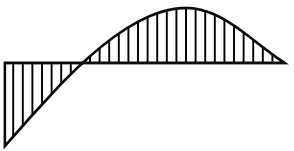
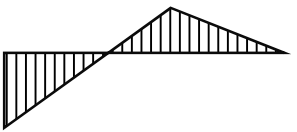
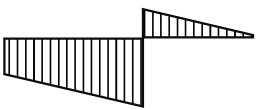
При изгибе балки построение эпюр внутренних усилий начинают с эпюры поперечных сил. Последовательно переходя от одной характерной точки к другой, подсчитывают сумму сил, находящихся по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Перед построением эпюры изгибающих моментов надо определить направление наклона эпюры M. Если $Q > 0$ — наклон положительный (вверх, если идем слева направо), $Q < 0$ — наклон отрицательный (рис. 3.20).

При построении эпюры M ставим на конце балки исходную точку $M1 = 0$ (эпюра начинается с нуля). Для нахождения момента $M2$ в следующем характерном сечении к значению $M1$ необходимо добавить площадь эпюры Q между этими сечениями. Добавить со знаком плюс или минус зависит от определенного заранее направления наклона эпюры M.

В сечениях, где действуют пары сил, на эпюре M следует сделать скачок на величину момента пары сил.

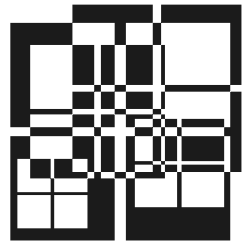
Таблица 3.1. Влияние вида нагрузки на характер эпюр Q и M

На балке	Нет распределенной нагрузки	Есть распределенная нагрузка $q = Const$ 	Есть сосредоточенная сила 	Есть пара сил M_0 
На эпюре Q	Прямоугольник 	Наклонная прямая	Скачок на величину F 	Никак не отражается 
На эпюре M	Наклонная прямая 	Парабола  Выпуклость навстречу нагрузке	Перелом 	Скачок на величину M_0 

При построении эпюр должны быть известны все нагрузки, действующие по одну сторону от рассматриваемого сечения, поэтому для балки с шарнирными опорами необходимо заранее найти реакции опор. Для балки, заделанной одним концом, эпюры строят, идя со свободного конца балки. При этом определение реакций в заделке не требуется, они получаются автоматически, как значения Q и M в заделке.

Напоминаю, что определение внутренних усилий — важнейший момент расчета конструкции на прочность. Необходимо свободно владеть навыками построения эпюр и правилами их проверки. Для этого требуется навык построения эпюр вручную (без компьютера). Mathcad следует доверять лишь построение эпюр при большом количестве нагрузок.

ГЛАВА 4



Растяжение-сжатие

При растяжении и при сжатии в поперечных сечениях стержней действует только продольное усилие. Расчетные формулы для растянутых и сжатых стержней одинаковы и различаются только знаком продольного усилия.

Правило знаков

Растягивающее продольное усилие — положительное, сжимающее — отрицательное.

4.1. Внутренние усилия и напряжения

Рассмотрим стержень, нагруженный силой F (рис. 4.1). Внутренние усилия в поперечных сечениях стержня определяются методом сечений. Из уравнений равновесия отсеченной части стержня продольное усилие $N = F$, поперечная сила $Q = 0$, изгибающий момент $M = 0$.

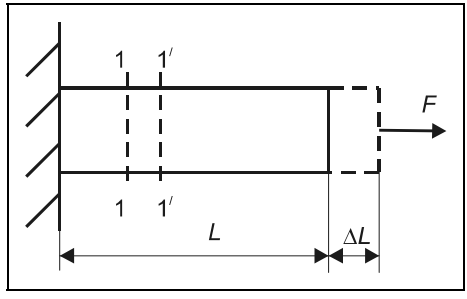


Рис. 4.1. Растяжение стержня

Продольное усилие N для рассматриваемого стержня не зависит от выбранного сечения и эпюра продольных усилий (график распределения продольного усилия по длине стержня) представляет собой прямоугольник.

Укажем на стержне произвольное поперечное сечение 1–1. Под действием силы F стержень удлинился на величину Δl. При этом сечение 1–1 переместилось в положение $1'–1'$, но в силу гипотезы плоских сечений осталось плоским и параллельным своему исходному положению. Перемещения всех точек поперечного сечения одинаковы, а следовательно, деформации и напряжения (в силу закона Гука) также одинаковы.

Так как напряжение — это внутреннее усилие N, приходящееся на единицу площади A, формула для нормальных напряжений σ при растяжении

$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

Поперечная сила при растяжении $Q = 0$, следовательно, вызываемые ею касательные напряжения $\tau = 0$.

При растяжении $\sigma > 0$, при сжатии $\sigma < 0$.

Условие прочности при растяжении-сжатии

$$\max \sigma = \left|\frac{N}{A}\right| \le [\sigma].$$

Выражения для $\max \sigma$ взято по модулю, т. к. допускаемое напряжение $[\sigma]$ всегда положительное.

4.2. Деформации

На рис. 4.2 показан стержень до и после растяжения. Его длина увеличилась, а поперечный размер уменьшился. Введем понятия абсолютной и относительной деформации.

- $\Delta l = l_1 - l$ — абсолютная продольная деформация;
- $\Delta b = b_1 - b$ — абсолютная поперечная деформация;
- $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l}$ — относительная продольная деформация;
- $\varepsilon' = \dfrac{\Delta b}{b}$ — относительная поперечная деформация.

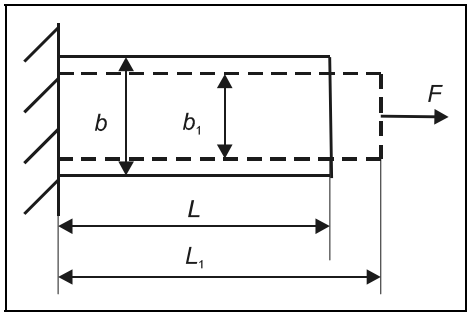


Рис. 4.2. Деформации при растяжении стержня

Относительные поперечная и продольная деформации связаны между собой эмпирической зависимостью

$$\varepsilon' = -\mu \cdot \varepsilon ,$$

где μ — коэффициент Пуассона, определяемый опытным путем. Знак минус показывает, что при растяжении стержня его поперечное сечение сужается.

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right| .$$

Коэффициент Пуассона является упругой константой материала. При упругой деформации $0 < \mu < 0,5$. Значения коэффициента μ для различных материалов приводятся в справочниках. Например:

- для пробки $\mu \approx 0$;
- для стали $\mu \approx 0,3$;
- для резины $\mu = 0,49$.

Примечание

В Mathcad строчная буква l "эль" выглядит как число 1, поэтому во всех текстах программ используется только прописная буква *L*.

Во всех главах книги латинская буква "эль" (большая и маленькая) означает одно и то же — длину стержня.

4.3. Закон Гука

По закону Гука перемещения прямо пропорциональны нагрузкам.

$$F = K\Delta ,$$

где F — сила, Δ — перемещение от этой силы, K — жесткость тела, зависящая не только от свойств материала, но и от формы и размеров тела.

На графике прямая пропорциональность изображается прямой линией (рис. 4.3).

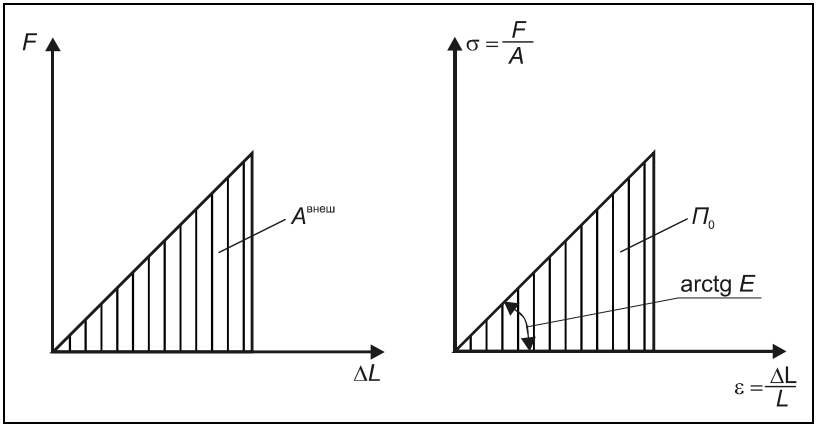


Рис. 4.3. Закон Гука при растяжении

Поскольку напряжения $\sigma = \frac{N}{A}$ и деформации $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ есть нагрузка и перемещение, деленные на константы A и l, то и напряжения прямо пропорциональны деформациям. На графике (рис. 4.3) зависимость σ от ε изображается прямой линией. Следовательно, можно записать

$$\sigma = E\varepsilon ,$$

где E — коэффициент пропорциональности, названный *модулем Юнга.*

Модуль Юнга E — константа материала (как и коэффициент Пуассона μ) приводится в справочниках:

- для стали $E = 2 \cdot 10^6$ МПа;
- для чугуна $E = 10^6$ МПа;
- для дерева $E = 10^4$ МПа.

На практике часто необходимо найти удлинение стержня под действием растягивающих или сжимающих нагрузок. По закону Гука $\sigma = E\varepsilon$. Подставим в это выражение $\sigma = \frac{N}{A}$ и $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$, тогда $\frac{N}{A} = E\frac{\Delta l}{l}$, откуда

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}.$$

Эта формула справедлива в случае действия одной сосредоточенной силы, т. е. продольное усилие N постоянно по длине стержня.

Если на стержень действует несколько сосредоточенных сил, то стержень разбивается на несколько участков (от силы до силы) и полное удлинение равно сумме удлинений каждого участка в отдельности

$$\Delta l = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i l_i}{EA_i},$$

где i — номер участка, n — количество участков.

В общем случае, если продольное усилие на некоторых участках величина переменная, т. е. действует распределенная нагрузка, то удлинение пропорционально площади эпюры продольных усилий $\int_l N(x)dx$

$$\Delta l = \sum_{i=1}^{n} \int_l \frac{N_i(x)dx}{EA_i}.$$

4.4. Потенциальная энергия упругой деформации

Для определения потенциальной энергии воспользуемся известным из теоретической механики началом возможных перемещений.

Начало возможных перемещений

> Если тело находится в состоянии равновесия, то сумма работ внешних и внутренних сил равна нулю на любых возможных (согласованных со связями) перемещениях.

Заметим, что реальные перемещения — всегда возможные.

$$A^{\text{внеш}} + A^{\text{внутр}} = 0.$$

При упругой деформации потенциальная энергия $П$ равна работе внутренних сил

$$П = A^{\text{внутр}} = -A^{\text{внеш}}.$$

Потенциальная энергия не бывает отрицательной и численно равна площади диаграммы нагружения стержня (при упругой деформации площади треугольника (см. рис. 4.3)).

$$П = \left| A^{\text{внеш}} \right| = \int_{\Delta l} N \cdot d(\Delta l) = \frac{N \cdot \Delta l}{2}.$$

С учетом $\Delta l = \frac{Nl}{EA}$ получаем $П = \frac{N^2 l}{2EA}$.

В общем случае нагружения ($N \neq Const$)

$$П = \sum_{i=1}^{n} \int_{l} \frac{N_i(x)dx}{2EA_i}.$$

Подсчитаем *удельную потенциальную энергию упругой деформации* $П_0$, т. е. энергию $П$, накопленную в единице объема V.

$$П_0 = \frac{П}{V} = \frac{N\Delta l}{2Al}, \quad \text{но} \quad \frac{N}{A} = \sigma \quad \text{и} \quad \frac{\Delta l}{l} = \varepsilon,$$

тогда

$$П_0 = \frac{\sigma\varepsilon}{2} = \frac{\sigma^2}{2E} \quad (\text{с учетом } \sigma = E\varepsilon).$$

4.5. Напряжения на наклонных площадках

Пусть стержень растягивается силой F. В поперечных сечениях стержня нормальные напряжения $\sigma = \frac{F}{A}$, где площадь поперечного сечения $A = b \cdot h$. Найдем напряжения, действующие на площадке, наклоненной под углом α к поперечному сечению (рис. 4.4). Площадь наклонной площадки $A_\alpha = \frac{b \cdot h}{\cos\alpha}$.

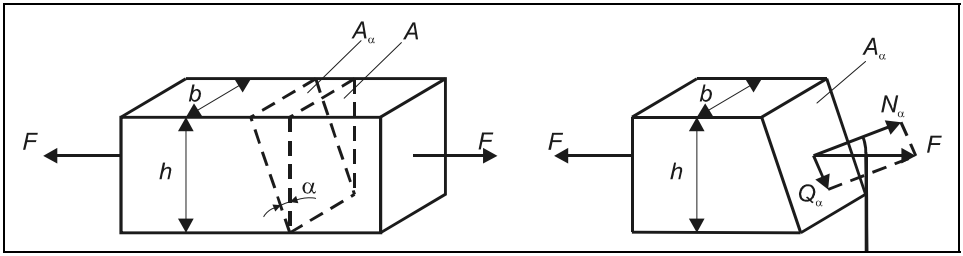


Рис. 4.4. Усилия в наклонном сечении стержня при растяжении

Согласно методу сечений мысленно рассекаем стержень по наклонному сечению, отбрасываем правую часть и рассматриваем равновесие левой части.

Неизвестное внутреннее усилие в наклонном сечении раскладываем на 2 составляющие: вдоль нормали к сечению $N_\alpha = F \cdot \cos\alpha$ и по касательной к сечению $Q_\alpha = F \cdot \sin\alpha$. Из условия равновесия отсеченной части их геометрическая сумма равна F.

Напряжения на наклонной площадке

$$\sigma_\alpha = \frac{N_\alpha}{A_\alpha} = \frac{F \cdot \cos\alpha}{A/\cos\alpha} = \frac{F}{A}\cos^2\alpha = \sigma \cdot \cos^2\alpha,$$

$$\tau_\alpha = \frac{Q_\alpha}{A_\alpha} = \frac{F \cdot \sin\alpha}{A/\cos\alpha} = \frac{F}{A}\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha.$$

При $\alpha = 0$ $\quad \sigma_\alpha = \sigma = \sigma_{max} \quad \tau_\alpha = 0$,

при $\alpha = 45°$ $\quad \sigma_\alpha = \frac{\sigma}{2} \quad \tau_\alpha = \frac{\sigma}{2} = \tau_{max}$,

при $\alpha = 90°$ $\quad \sigma_\alpha = 0 = \sigma_{min} \quad \tau_\alpha = 0 = \tau_{min}$.

В дальнейшем будет показано, что τ_{max} всегда действует на площадках, наклоненных под углом $45°$, к площадкам, где действует σ_{max} и σ_{min}.

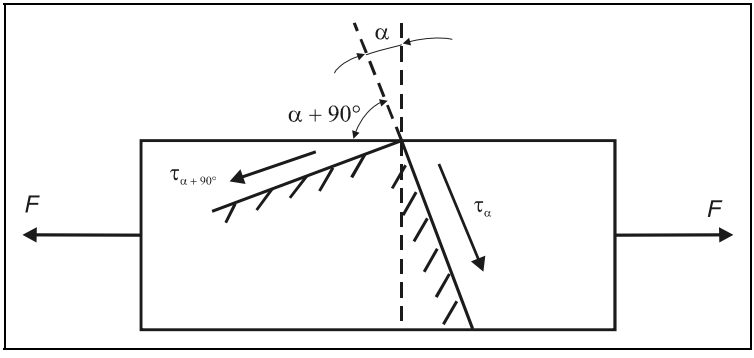


Рис. 4.5. Касательные напряжения на взаимно перпендикулярных сечениях

4.5.1. Закон парности касательных напряжений

Найдем касательные напряжения, действующие на двух взаимно перпендикулярных площадках (рис. 4.5)

$$\tau_\alpha = \sigma\frac{\sin 2\alpha}{2},$$

$$\tau_{\alpha+90^\circ} = \frac{\sigma}{2}\sin(2\alpha + 180^\circ) = -\frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha\,.$$

Закон парности касательных напряжений

> На взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения равны по величине и противоположны по направлению.

Этот закон часто используется в сопротивлении материалов при исследовании напряженного состояния в окрестностях некоторой точки тела.

4.6. Понятие о главных напряжениях

Подробно о главных напряжениях и их определении речь пойдет в *главе 10.* Здесь же пока без вывода приведем несколько необходимых для дальнейшего изложения положений.

Главной называется площадка, где отсутствуют касательные напряжения.

Нормальные напряжения на главной площадке называются *главными напряжениями*.

В окрестностях любой точки можно провести 3 взаимно перпендикулярных главных площадки, на которых действуют соответственно 3 главных напряжения.

Главные напряжения обычно расставляются "по росту" и обозначаются $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$ (с учетом знака). То есть σ_{max} всегда обозначается σ_I.

В зависимости от величины главных напряжений можно выделить три вида напряженно-деформированного состояния (НДС) тела (рис. 4.6):

- ❒ *линейное НДС* — два из трех главных напряжений равны нулю;
- ❒ *плоское НДС* — одно из трех главных напряжений равно нулю;
- ❒ *объемное НДС* — все три главных напряжения не равны нулю.

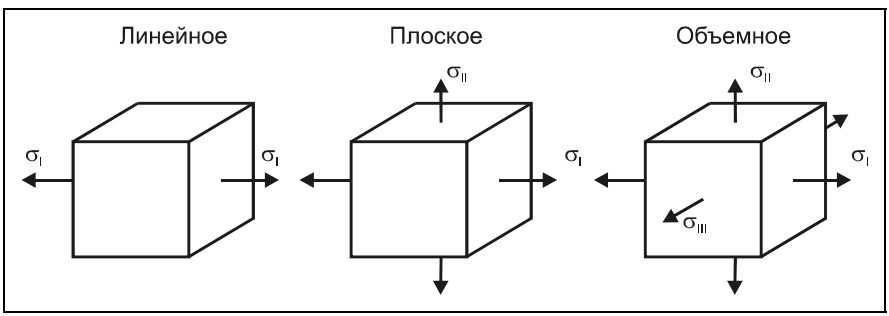


Рис. 4.6. Виды напряженно-деформированного состояния

Примеры различных НДС:

- ❒ линейное — растяжение-сжатие, чистый изгиб;
- ❒ плоское — сдвиг, кручение, изгиб, сложное сопротивление длинных и тонких стержней, деформация тонких пластин и оболочек;
- ❒ объемное — деформация массивных тел.

4.7. Примеры решения задач на растяжение-сжатие

Для стержней, испытывающих растяжение-сжатие, обычно требуется определить распределение по длине стержня продольных усилий, напряжений и перемещений.

Геометрия стержня, материал стержня, действующие на стержень нагрузки, как правило, известны.

Продольные усилия, возникающие в сечениях стержня, определяются методом сечений из условия равновесия отсеченной части стержня. Естественно, что все нагрузки (включая опорные реакции), действующие на отсеченную часть стержня, должны быть известны.

Опорные реакции определяются из условия равновесия всего стержня целиком (без рассечения на части). Однако этот способ пригоден только для статически определимых систем.

Для статически неопределимых систем определение реакций самая сложная часть задачи. Для определения лишних реакций необходимо составить дополнительные уравнения, называемые уравнениями совместности перемещений, и решить их.

4.7.1. Расчет одного стержня

Статически определимая задача

Для заданного стального стержня переменного сечения, защемленного одним концом и нагруженного несколькими нагрузками (рис. 4.7), определить распределение продольных усилий, напряжений и перемещений вдоль оси стержня.

Стержень круглого поперечного сечения переменного диаметра. Первый участок — диаметром $d1$, третий — диаметром $d2$, а на втором (среднем) участке диаметр изменяется по линейному закону от $d1$ до $d2$. Границы участков обозначены размерами L_1, L_2, L_3. Стержень нагружен тремя силами F_1,

F_2, F_3, приложенными в сечениях на расстояниях L_{F1}, L_{F2}, L_{F3} от левого края и двумя распределенными нагрузками q_1 и q_2. Расстояние от общего начала координат (на левом конце стержня) до начала распределенной нагрузки $L_{q\text{н}1}$ и $L_{q\text{н}2}$, до конца распределенной нагрузки $L_{q\text{к}1}$ и $L_{q\text{к}2}$. Интенсивность распределенной нагрузки q может быть любой (постоянной или переменной). На рис. 4.7 изображена условная схема нагружения стержня. Чтобы избежать загромождения чертежа, на нем указана одна сила F_i, одна распределенная нагрузка q_i и их координаты, которые также могут быть любыми.

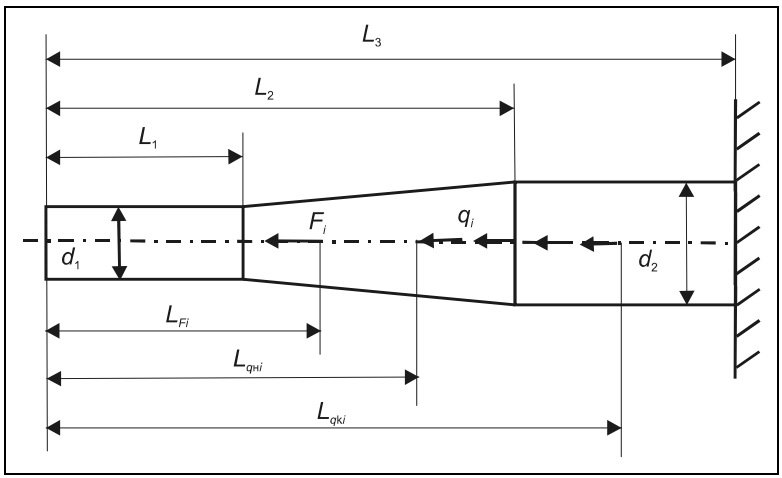


Рис. 4.7. Условная схема нагружения стержня

Исходные данные для расчета приведены на рис. 4.8.

Поскольку расчет в Mathcad ведется с учетом размерностей в начале программы вводятся размерности, производные от основных (рис. 4.8).

Продольные усилия в произвольных сечениях стержня определяем методом сечений как сумму сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения. Их определение показано на рис. 4.8. Для записи продольных усилий использованы выражения, полученные в *главе 3* (см. рис. 3.3).

Изменение площади поперечного сечения $A(x)$ вдоль оси x задано на рис. 4.9. Применение булевых операторов в этом выражении сделало бы его малопонятным и некрасивым, поэтому оно записано с помощью панели программирования.

На том же рисунке записаны формулы для напряжения $\sigma(x)$ и перемещения $\Delta L(x)$.

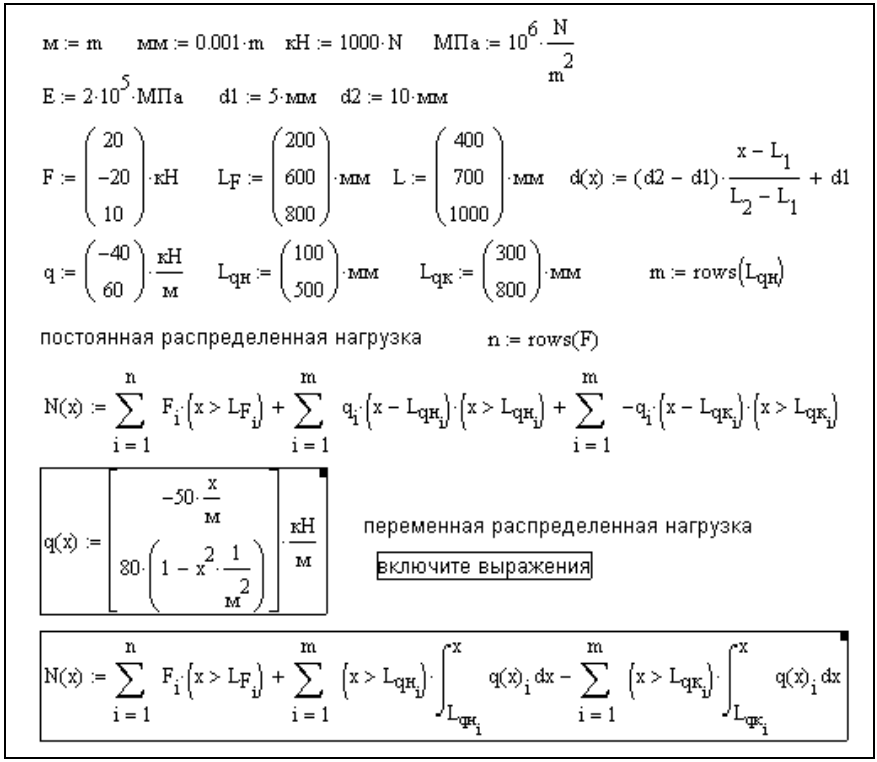


Рис. 4.8. Исходные данные для расчета стержня

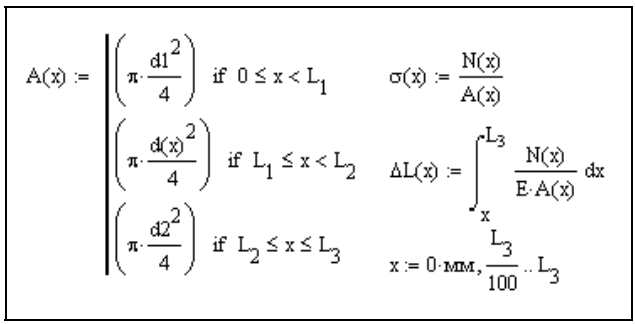


Рис. 4.9. Площадь сечения $A(x)$, напряжение $\sigma(x)$ и удлинение $\Delta L(x)$ стержня

В общем случае перемещение записывается в виде интеграла, как удлинение части стержня от заделки до выделенного сечения.

Результаты расчета приведены на рис. 4.10 в виде графиков. Так как расчет ведется с учетом размерностей, в диапазоне x все значения должны иметь

одинаковую размерность (или не иметь ее). А вот графики не могут быть построены с размерными величинами, поэтому все размерные выражения разделены на размерность.

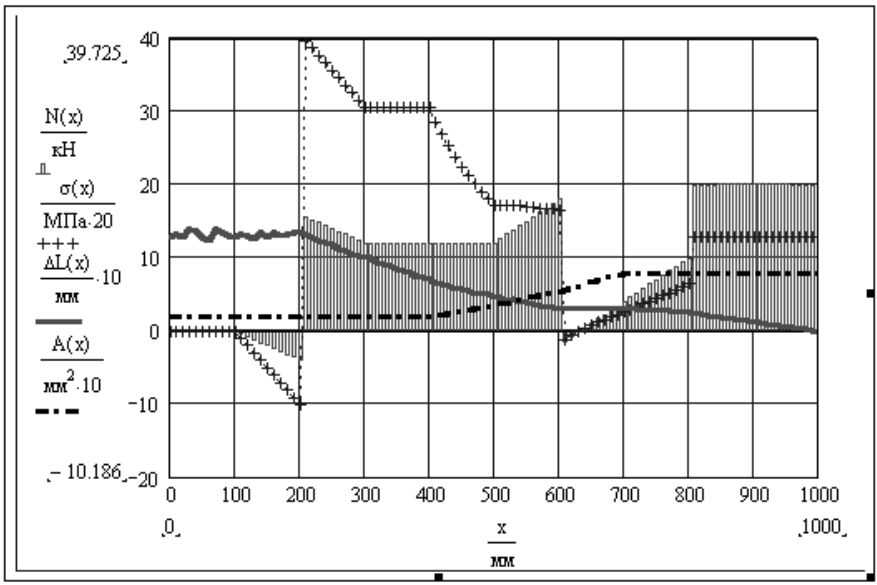


Рис. 4.10. Результаты расчета статически определимого стержня

Таблица числовых значений результатов расчетов приведена в программе на прилагаемом к книге компакт-диске (`раст-1стерж-стат-опред`).

Для Mathcad расчет оказался примитивно простым, а вот при расчете вручную (на микрокалькуляторе) вычисление напряжений и перемещений на десяти участках (3 по площади сечений и 7 по нагрузке) потребует много времени и сил.

Статически неопределимая задача

Добавим на схеме (см. рис. 4.7) заделку стержня слева (рис. 4.11). Система станет один раз статически неопределимой. Неизвестных опорных реакций две, а полезное уравнение равновесия (не тождество) одно. Для определения опорных реакций необходимо добавить еще одно уравнение — уравнение совместности перемещений. Заделки — жесткие, поэтому взаимное смещение левой заделки A относительно правой заделки B равно нулю.

$$\Delta_{AB} = 0 .$$

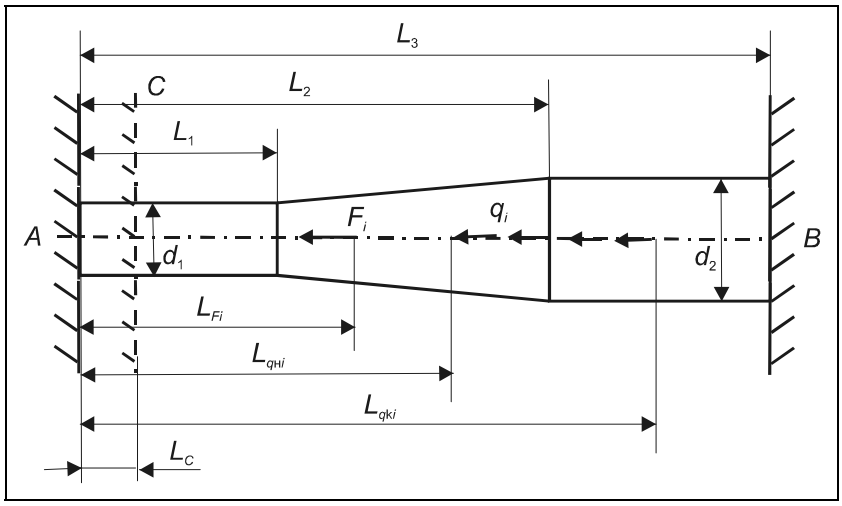


Рис. 4.11. Условная схема нагрузок статически неопределимого стержня

В статически неопределимых системах возможно возникновение монтажных напряжений, вызванных ошибками при изготовлении стержней или при сборке конструкции.

Допустим, стержень изготовлен на величину $\Delta_{\text{монт}}$ короче, чем надо. Короткий стержень нужно растянуть при сборке, а длинный стержень сжать до требуемого размера. Тогда условие совместности перемещений после сборки примет вид $\Delta_{AB} = -\Delta_{\text{монт}}$. Исходя из этого условия с помощью функции `root` определяется реакция в заделке.

Поставим более общую задачу. В некотором сечении C стержня при $x = L_C$ наложим связь, ограничивающую перемещение. Это может быть какой-то упор, болтовое соединение, сварка. При монтаже конструкции возможны погрешности установки, поэтому перемещение сечения C может быть равно не нулю, а монтажному зазору $\Delta_{\text{монт}}$. Тогда перемещение сечения C относительно правой заделки B $\Delta_{CB} = -\Delta_{\text{монт}}$. Требуется найти для этого случая распределение напряжений и перемещений по длине стержня.

Исходные данные для расчета те же, что в статически определимой задаче. Они приведены на рис. 4.8 и 4.9.

Решение поставленной задачи вручную непомерно сложно. Для Mathcad задача проста. Неизвестную реакцию R в сечении C включаем в выражение для продольного усилия. Но поскольку она заранее не известна, то должна войти параметром в выражение-функцию $N(x, R)$ (рис. 4.12).

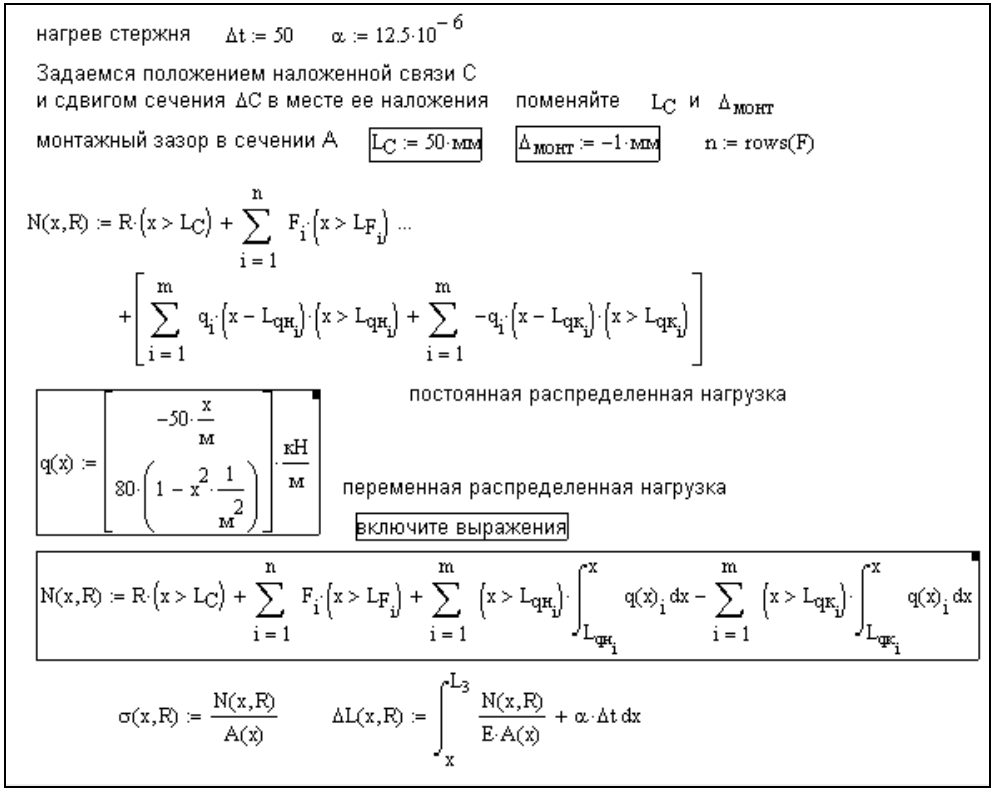


Рис. 4.12. Формулы для решения статически неопределимой задачи

Выражения для напряжений и перемещений также записываем в виде функции от реакции $\sigma(x,R)$ и $\Delta(x,R)$.

Далее, решая уравнение совместности деформаций $\Delta_{CB} + \Delta_{\text{монт}} = 0$ (рис. 4.13), определяем реакцию R. Для решения используем функцию `root`, которой должно предшествовать начальное приближение. Поскольку ответ (значение реакции) размерная величина, то и начальное приближение должно быть размерной величиной, т. е. число, умноженное на размерность.

Рассмотрим влияние нагрева стержня на его удлинение и напряжения в нем. При нагревании стержня его длина увеличивается на величину

$$\Delta L_t = L \cdot \alpha \cdot \Delta t ,$$

где L — длина стержня, α — коэффициент линейного расширения материала стержня, Δt — приращение температуры.

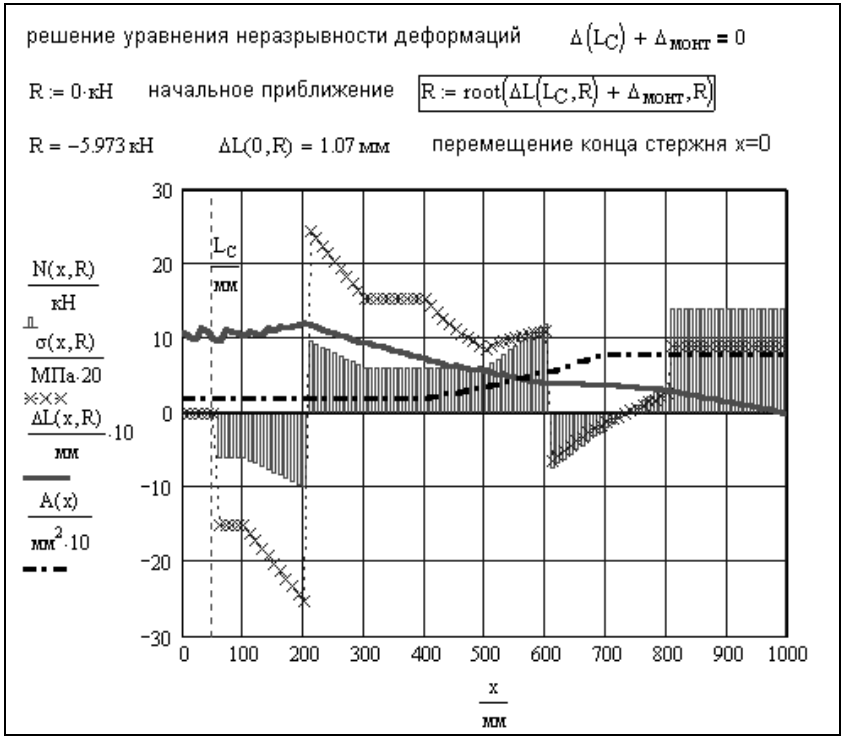


Рис. 4.13. Результаты решения статически неопределимой задачи

В статически определимых системах, где нет ограничений на перемещение стержней, температурные напряжения не возникают.

В статически неопределимых системах стержень при нагревании стремится расшириться, но наложенные ограничения не позволяют этого. Возникают сжимающие напряжения, вызывающие укорочение стержня.

Полное удлинение стержня складывается из удлинения от продольного усилия N и изменения температуры

$$\Delta L = \Delta L_N + \Delta L_t = \int_L \frac{N \cdot dx}{E \cdot A} + L \cdot \alpha \cdot \Delta t \,.$$

Полное перемещение в месте наложения связи

$$\Delta = \Delta L_N + \Delta L_t + \Delta_{\text{монт}} = \int_L \frac{N \cdot dx}{E \cdot A} + L \cdot \alpha \cdot \Delta t + \Delta_{\text{монт}} = 0 \,.$$

При нагревании стержня в нем возникают сжимающие усилия, при охлаждении — растягивающие.

В общем случае перемещение записывается в виде интеграла, как удлинение части стержня от заделки $x = L_3$ до выделенного сечения x (см. рис. 4.12).

Результаты расчета статически неопределимого стержня при одновременном воздействии внешних сил, температурных и монтажных напряжений показаны на рис. 4.13.

Протестируйте программу. Положите диаметры d_1 и d_2 одинаковыми. Все нагрузки, кроме одной, положите равными нулю. Положите $\Delta t = 0$ и $\Delta_{\text{монт}} = 0$.

Обратите внимание, что при расчетах выполняется принцип независимости действия сил. В общем случае нагружения стержня напряжения σ равны сумме напряжений от действия внешних нагрузок, от изменения температуры и от монтажных ошибок при сборке.

4.7.2. Расчет статически неопределимой шарнирно-стержневой системы

В данном примере для раскрытия статической неопределимости используется *метод засечек*. Этот метод не универсальный и здесь нет общего правила решения задачи. Чтобы решить задачу, надо разобраться в схемах деформаций и перемещений системы. Для различных задач вид уравнений будет разным.

Программа, составленная в данном примере, позволяет рассчитывать шарнирно-стержневые статически неопределимые системы, в которых один из элементов *абсолютно жесткий* (недеформируемый).

Рассмотрим шарнирно-стержневую систему, состоящую из одной жесткой балки AB и четырех деформируемых стержней, шарнирно соединенных с балкой и работающих на растяжение или сжатие (рис. 4.14). Данная система три раза статически неопределима. Порядок определения степени статической неопределимости описан в *разд. 1.10*. Можно отбросить три стержня и при этом система останется неподвижной (не упадет).

На балку действует сила F (можно приложить и несколько сил) и точка ее приложения L_F. Заданы длины стержней $L_{\text{ст}}$, расстояния от оси вращения жесткого элемента A до точек крепления стержней L_i к жесткому элементу, углы ϕ_i между стержнем и радиусом вращения точки крепления стержня к жесткому элементу.

Исходные данные для расчета приведены на рис. 4.15. Материал стержней — сталь, для которой заданы: модуль Юнга E, коэффициент температурного

расширения α, допускаемое напряжение $[\sigma]$, которое в программе Mathcad обозначено $\sigma_{доп}$, т. к. Mathcad принимает название величины, стоящее в квадратных скобках, за математическое выражение. Задано также приращение температуры Δt и монтажная ошибка $\Delta_{монт}$ в одном или нескольких стержнях. Кроме того, задан коэффициент учета знака деформации стержней k.

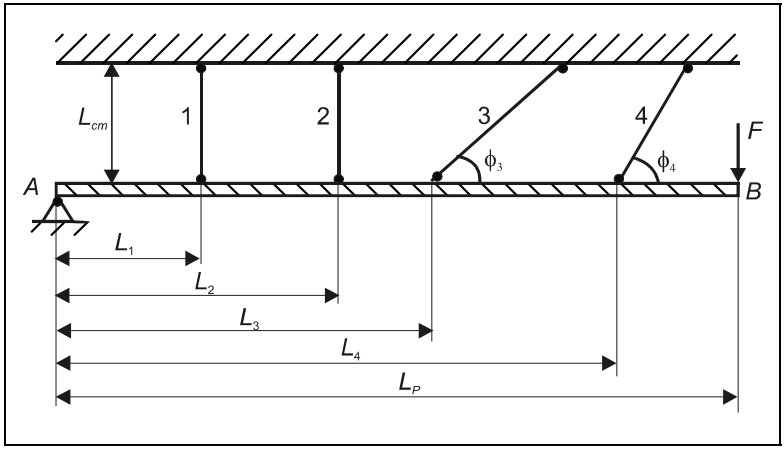


Рис. 4.14. Заданная шарнирно-стержневая система

ORIGIN := 1

град := deg мм := 0.001·m см := 0.01·m кН := 1000·N $МПа := 10^6 \cdot \frac{N}{m^2}$

$E := 2 \cdot 10^5 \cdot МПа$ $\sigma_{доп} := 100 \cdot МПа$ F := 10·кН $L_F := 100 \cdot см$

нагрев стержня Δt := 20 $\alpha := 12.5 \cdot 10^{-6}$

$$L := \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 60 \\ 80 \end{pmatrix} \cdot см \quad \phi := \begin{pmatrix} 90 \\ 90 \\ 45 \\ 60 \end{pmatrix} \cdot град \quad A := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot см^2 \quad L_{ст} := \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 30 \\ \hline \sin(\phi_3) \\ \frac{30}{\sin(\phi_4)} \end{pmatrix} \cdot см$$

$$k := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Delta_{монт} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \\ -0.1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot мм$$

k = 1 стержень растянут

k = –1 стержень сжат

Рис. 4.15. Исходные данные к расчету шарнирно-стержневой системы

Дело в том, что в записанных далее уравнениях Mathcad не различает положение стержней сверху или снизу от балки, а результат расчета зависит от этого. Условимся считать $k = 1$, если стержень удлиняется при деформации, и $k = -1$, если — укорачивается.

В данной задаче 6 неизвестных: 4 продольных усилия в стержнях и две реакции в шарнирной опоре A (горизонтальная и вертикальная). Следовательно, надо составить систему из шести уравнений (3 уравнения равновесия и 3 уравнения совместности перемещений) и решить ее. Однако если взять в качестве уравнения равновесия сумму моментов относительно опоры A, то реакции на опоре не войдут в расчет и достаточно решить систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными продольными усилиями в стержнях.

При составлении уравнения равновесия полагаем, что продольные усилия возникают как реакция на приложение силы F и их действие противоположно действию силы. Знак продольного усилия и напряжения зависит от расположения стержня и учитывается коэффициентом k.

$$FL_F - \sum_{i=1}^{m} k_i N_i L_i \sin(\phi_i) = 0 .$$

Уравнения совместности перемещений связывают между собой перемещения шарнирных узлов крепления стержней, которые выразим через удлинения стержней, а их, в свою очередь, через продольные усилия в стержнях.

Шарнир — часть жесткого элемента (балки). Перемещения точек жесткого элемента Δ_i пропорциональны их радиусам вращения L_i вокруг точки подвеса этого элемента.

$$\frac{\Delta_1}{L_1} = \frac{\Delta_2}{L_2} = \frac{\Delta_3}{L_3} = \frac{\Delta_4}{L_4} .$$

Эта запись представляет собой 6 уравнений совместности перемещений. Для решения задачи достаточно любых трех из этих уравнений.

Каждое перемещение шарнира Δ выразим через удлинение стержня. Для этого используем *метод засечек*.

Изобразим вид системы из одной балки и одного стержня до и после деформации (рис. 4.16). Под действием силы F балка повернулась вокруг точки подвеса A на некоторый очень малый угол (тысячные доли градуса). Однако на схеме этот угол для наглядности изображен достаточно большим.

Шарнир B переместился в положение B_1. Удлинился и переместился вслед за шарниром B и стержень.

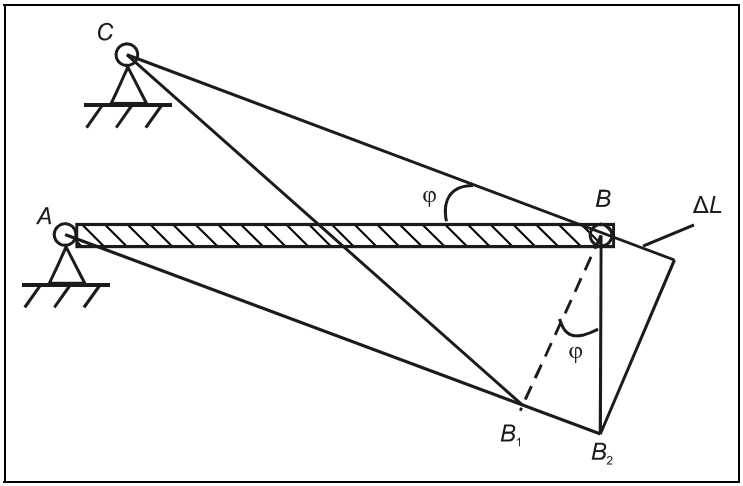


Рис. 4.16. Связь перемещения BB_1 и удлинения ΔL по методу засечек

Повернем деформированный стержень до своего исходного положения. Разность длин стержня до и после деформации есть удлинение стержня ΔL.

Поскольку угол поворота стержня ничтожно мал, дуги окружности при повороте стержня и балки заменяем касательными к окружности вращения (или, что то же самое, перпендикулярами к радиусам вращения). В результате на схеме видим прямоугольный треугольник перемещения с известным из геометрии системы углом ϕ. Откуда находим связь между перемещением шарнира Δ и удлинением стержня ΔL

$$\Delta = \frac{\Delta L}{\sin(\phi)}.$$

Поскольку продольное усилие по длине стержня постоянно, то $\Delta L = \frac{N \cdot L}{E \cdot A}$.

Чтобы учесть нагрев стержней и монтажную погрешность при сборке, суммарное удлинение стержня запишем в виде

$$\Delta L = \frac{N \cdot L}{E \cdot A} + L \cdot \alpha \cdot \Delta t + \Delta_{\text{монт}}.$$

Для решения системы четырех уравнений (трех уравнений совместности перемещений и одного уравнения равновесия) в Mathcad используем вычислительный блок `given-find` (рис. 4.17). Включение двух параметров в функции ΔL и Δ связано с тем, что Mathcad не допускает наличия параметров с ин-

дексами в левой части выражения (в названии функции). Блоку `given-find` предшествует начальное приближение для всех искомых величин (четырех продольных усилий).

$$\Delta L(N,i) := \frac{N \cdot L_{ст_i}}{E \cdot A_i} + L_{ст_i} \cdot \alpha \cdot \Delta t + \Delta_{монт_i} \qquad \Delta(N,i) := \frac{\Delta L(N,i)}{\sin(\phi_i)} \qquad m := \text{rows}(A)$$

$$i := 1..m$$

$$N := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot кН \quad \text{Given} \quad F \cdot L_F - \sum_{i=1}^{m} k_i \cdot N_i \cdot L_i \cdot \sin(\phi_i) = 0 \qquad \frac{\Delta(N_1,1) \cdot k_1}{L_1} = \frac{\Delta(N_2,2) \cdot k_2}{L_2}$$

$$\frac{\Delta(N_2,2) \cdot k_2}{L_2} = \frac{\Delta(N_3,3) \cdot k_3}{L_3} \qquad \frac{\Delta(N_3,3) \cdot k_3}{L_3} = \frac{\Delta(N_4,4) \cdot k_4}{L_4}$$

$$N := \text{Find}(N_1, N_2, N_3, N_4) \qquad N = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} кН \qquad \sigma := \frac{\overrightarrow{N}}{A} \qquad \sigma = \begin{pmatrix} -14 \\ -46 \\ 50 \\ 57 \end{pmatrix} МПа \qquad \Delta L(N_i,i) = \begin{pmatrix} 0.053 \\ 0.107 \\ 0.113 \\ 0.185 \end{pmatrix} мм$$

Рис. 4.17. Расчетные зависимости и результаты расчета шарнирно-стержневой системы

Для согласования знаков продольных усилий и перемещений при удлинении или укорочении стержней в уравнениях использован коэффициент k.

Для проверки правильности работы алгоритма задачи уберите два стержня, точнее, сделайте площадь поперечного сечения двух стержней ничтожно малой, например, $A = 10^{-8}$ см^2, положите $\Delta t = 0$ и $\Delta_{монт} = 0$, поменяйте знаки коэффициентов k, как бы меняя положение стержней (выше или ниже балки).

Поскольку расчеты ведутся с учетом размерностей, в начале программы введены производные размерности (на русском языке), а в численных ответах приходится вписывать нужную размерность вручную (в дополнительный черный квадратик ввода).

В рассмотренном примере все было известно и задача расчетчика свелась к проверке выполнения условия прочности $\max\sigma \le [\sigma]$. Если условие прочности не выполняется, расчетчик может, изменяя исходные данные вручную (уменьшая нагрузку или увеличивая площади сечений), добиться его выполнения.

Казалось бы, вредные монтажные ошибки дают возможность повышения прочности конструкции. Предусмотрев в конструкции возможность предва-

рительного натяга стержней (путем затяжки болтов), т. е. задавая конструктивно монтажный зазор, можно вызвать появление в стержнях дополнительных напряжений.

Эти напряжения, складываясь с рабочими напряжениями от внешней нагрузки, могут увеличить или уменьшить $\max\sigma$. Задача конструктора — выбрать оптимальную величину предварительного натяга стержней.

Если требуется подобрать нагрузку из условия прочности, то составьте пропорцию

$$n = \frac{\max\sigma}{[\sigma]} = \frac{F}{[F]},$$

где F — действующая нагрузка, $[F]$ — допускаемая нагрузка, а n — коэффициент запаса.

Если требуется подобрать размеры поперечных сечений стержней, то из условия прочности

$$\max\sigma = \frac{N}{A} \le [\sigma] \quad \text{находим} \quad A \ge \frac{N}{[\sigma]}.$$

Внимание

Условие прочности одно и позволяет определить лишь одну неизвестную величину: либо одну силу, либо одну площадь сечения.

В рассмотренном примере стержни работают на растяжение или на сжатие. Следует иметь в виду, что расчетные формулы при растяжении или сжатии одни, а прочность материалов на растяжение или сжатие может быть различной. В таком случае проверку на прочность нужно делать отдельно для растянутых и для сжатых стержней, используя различные допускаемые напряжения на растяжение и на сжатие.

Внимание

Длинные тонкие стержни не могут работать на сжатие. Они теряют устойчивость (сжатие сменяется изгибом — стержень выпучивается) при нагрузке в несколько раз меньше допускаемой. О способах повышения устойчивости сжатых стержней *см. главу 12*.

ГЛАВА 5

Механические характеристики материалов

Все существующие и проектируемые конструкции должны удовлетворять условию прочности $\max\sigma \le [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{n}$, где $\max\sigma$ — максимальное рабочее напряжение в конструкции, $\sigma_{\text{пред}}$ — характеристика прочности материала, n — коэффициент запаса. Основные механические характеристики материалов определяются опытным путем по результатам испытаний стандартных образцов на растяжение. Остальные виды испытаний являются технологическими и в расчетах на прочность не используются.

Образцы для испытаний чаще всего круглого поперечного сечения (рис. 5.1). Однако при изготовлении образцов из листового материала — поперечное сечение прямоугольник. Все образцы имеют рабочую часть длиной L_0 и постоянного диаметра d_0, и головки большего диаметра для крепления в захватах машины. Во избежание преждевременного разрушения в месте перехода от рабочей части к головке ГОСТ на образцы предусматривает наличие переходной конической части. На практике иногда вместо конической части выполняют переход от рабочей части к головке в виде скругления большим радиусом.

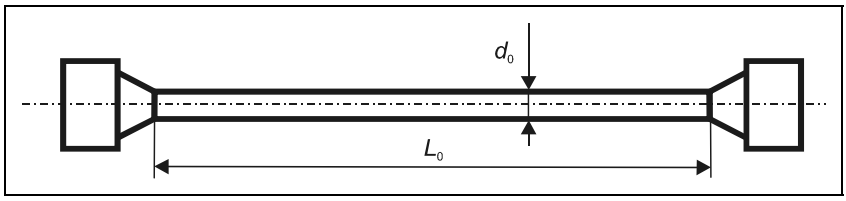


Рис. 5.1. Образец для испытаний на растяжение

Для сопоставления результатов испытаний образцов разного диаметра соблюдается закон подобия образцов. Для стандартных образцов $L_0/d_0 = 10$. Это так называемые десятикратные образцы. Допускается также использование пятикратных образцов.

Машины для испытаний на растяжение осуществляют деформацию образца с постоянной сравнительно малой скоростью $\varepsilon = \dfrac{\Delta L}{L} \sim 0,01$.

Результаты испытаний существенно различаются для материалов в пластичном и хрупком состояниях.

5.1. Признаки хрупкого и пластического разрушения материалов

В природе нет хрупких и пластичных материалов, а есть хрупкое и пластическое состояние материала. При изменении условий испытания один и тот же материал может разрушаться и хрупко и пластично. Например, углеродистая сталь, пластичная при комнатной температуре 20 ºС, разрушается хрупко при температуре жидкого азота –196 ºС. Чугун, хрупкий при растяжении и кручении, разрушается пластично при сжатии. При испытании на твердость на прессе Роквелла такого хрупкого материала, как мрамор, на его поверхности остается вмятина, свидетельствующая о пластической деформации.

Хрупкое разрушение вызывается нормальными напряжениями σ и называется *отрывом*.

Пластическая деформация вызывается касательными напряжениями τ и называется *сдвигом*.

Пластическое разрушение носит сложный характер: если пластическая деформация, образование и развитие трещин вызывается τ, то разделение тела на части в последний момент разрушения вызывается σ. Однако, пренебрегая моментом разрушения, можно сказать, что *пластическое разрушение* вызывается касательными напряжениями τ и называется *срезом*.

Знание признаков хрупкого и пластического разрушения чрезвычайно важно при анализе изломов конструкции. Анализируя вид излома, можно определить характер разрушения, вид нагрузки, ее величину и время действия.

Перечислим основные из этих признаков (табл. 5.1).

Что касается вида излома, то таким он является для металлических конструкций.

Таблица 5.1

Признак	Пластическое разрушение	Хрупкое разрушение
Пластические деформации	Есть	Нет
Разрушающие напряжения	Касательные τ	Нормальные σ
Вид излома	Матовый, волокнистый	Блестящий, кристаллический

Пластическому разрушению предшествует появление видимых пластических деформаций. Его можно предотвратить.

Хрупкое разрушение происходит внезапно и часто сопровождается катастрофическими последствиями.

Одна из главных задач конструктора избежать опасности хрупкого разрушения, не допустить в процессе эксплуатации перехода материала из пластичного состояния в хрупкое.

Более подробно об особенностях хрупкого и пластического разрушения рассказано в *главах 16—18*.

5.2. Диаграмма деформирования мягкой стали

Определение механических характеристик материала рассмотрим на примере пластического разрушения мягкой стали. Приведенные для примера численные значения механических характеристик соответствуют стали Ст3.

В процессе испытания стандартный образец устанавливается в захватах машины и деформируется с постоянной скоростью до разрушения. Одновременно диаграммный аппарат испытательной машины записывает диаграмму зависимости нагрузки F от абсолютного удлинения образца ΔL (рис. 5.2). По диаграмме деформирования определяются характеристики прочности материала, по непосредственным замерам образца до и после деформации определяются характеристики пластичности.

5.2.1. Характеристики прочности

Рассмотрим основные участки на этой диаграмме и дадим определения основных механических характеристик материала.

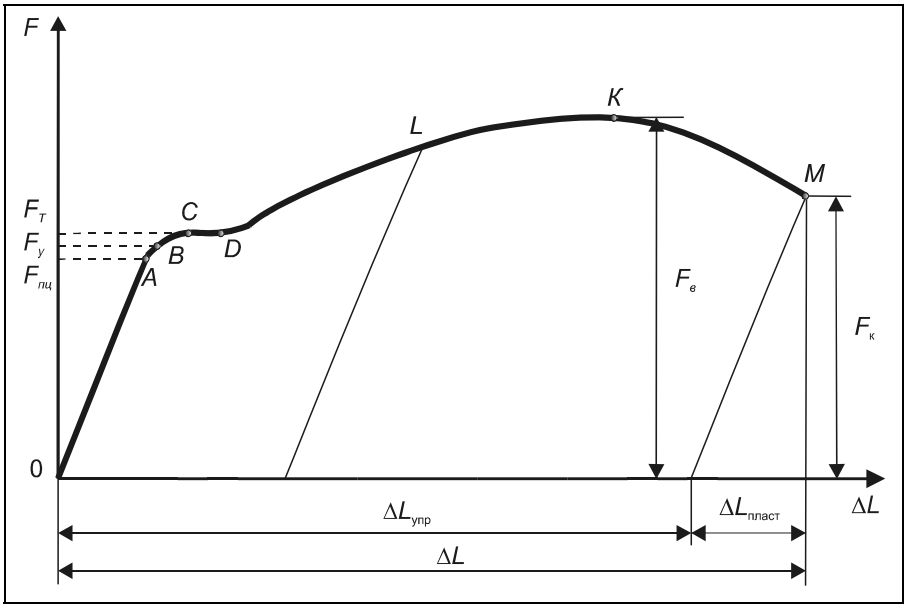


Рис. 5.2. Диаграмма деформирования мягкой стали

- Участок *OA* — зона пропорциональности (на диаграмме прямая линия), заканчивается точкой *A*, соответствующей пределу пропорциональности.

  Пределом пропорциональности называется наибольшее напряжение, до которого материал подчиняется закону Гука.

$$\sigma_{пц} = \frac{F_{пц}}{A_0},$$

  где $F_{пц}$ — нагрузка, соответствующая окончанию прямой линии (точка *A*), $A_0 = \frac{\pi d_0^2}{4}$ — площадь поперечного сечения образца до деформации.

  Для стали Ст3 $\sigma_{пц} \approx 200$ МПа.

- Точка *B* соответствует пределу упругости материала.

  Пределом упругости материала называется максимальное напряжение, до которого в материале отсутствуют остаточные (пластические) деформации.

$$\sigma_у = \frac{F_у}{A_0}.$$

  Для стали Ст3 $\sigma_у \approx 210$ МПа.

- Участок CD — площадка текучести (горизонтальная), соответствует физическому пределу текучести.

  Физическим пределом текучести называется напряжение, при котором деформация растет без увеличения нагрузки.

$$\sigma_т = \frac{F_т}{A_0}.$$

  Для стали Ст3 $\sigma_т \approx 250$ МПа.

- Участок DK — зона упрочнения материала, заканчивается точкой K, соответствующей пределу прочности материала.

  Пределом прочности или временным сопротивлением материала называется напряжение, соответствующее максимальной нагрузке на образец.

$$\sigma_в = \frac{F_в}{A_0}.$$

  Для стали Ст3 $\sigma_в \approx 400$ МПа.

- Участок KM — зона местной деформации, заканчивается точкой M, соответствующей сопротивлению разрыву. На этом участке в образце образуется местное сужение (шейка) и почти вся деформация сосредоточена в шейке.

  Сопротивлением разрыву называется напряжение в момент разрыва образца.

$$S_к = \frac{F_к}{A_к},$$

  где $A_к$ — площадь поперечного сечения образца в шейке в момент разрыва.

  Для стали Ст3 $S_к \approx 800$ МПа.

Все перечисленные характеристики $\sigma_{пц}$, $\sigma_у$, $\sigma_т$, $\sigma_в$, $S_к$ являются характеристиками прочности материала.

Предел пропорциональности $\sigma_{пц}$ и предел упругости $\sigma_у$ близки друг к другу и обычно предел упругости в процессе испытаний не определяется.

Если в процессе испытания образец нагрузить выше предела текучести, а затем разгрузить, то линия разгрузки LO_1 на диаграмме (см. рис. 5.2) пойдет параллельно начальному участку, т. е. при разгрузке имеет место чисто упругая деформация образца.

При нагрузке деформация образца упругопластическая, при разгрузке упругая деформация снимается, пластическая остается.

При повторной нагрузке линии нагрузки и предыдущей разгрузки образуют петлю гистерезиса, площадь которой равна работе, затраченной на пластическую деформацию образца при повторном нагружении. Площадь петли гистерезиса мала по сравнению с площадью диаграммы и внешне линии разгрузки и повторной нагрузки почти совпадают. Далее деформация образца продолжается так, как будто и не было промежуточной разгрузки. В результате при повторном нагружении у образца повысились характеристики прочности (предел пропорциональности, предел упругости), но уменьшился запас пластичности, т. е. материал стал более прочным, но менее пластичным.

Явление повышения упругих характеристик при предварительной упругопластической деформации называется *наклепом.*

В технике явление наклепа используют для повышения упругих свойств пружин, цепей, канатов и др. Однако иногда наклеп материала нежелателен и после технологических операций обработки металлов резанием, ковки, штамповки деталь подвергают отжигу для снятия наклепа.

Площадка текучести имеется на диаграммах углеродистых сталей. На диаграммах легированных термообработанных сталей и большинства других материалов площадки текучести нет. В этом случае определяется условный предел текучести (рис. 5.3).

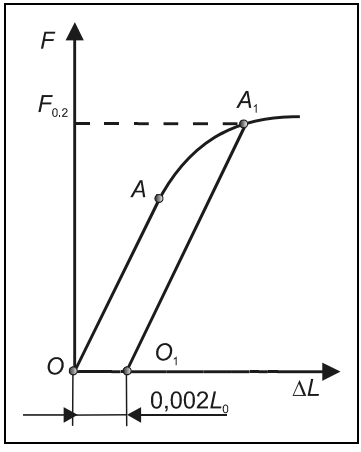


Рис. 5.3. Определение условного предела текучести

Условным пределом текучести называется напряжение, при котором остаточная деформация составляет 0,2% от первоначальной длины образца.

Для определения условного предела текучести надо на оси деформаций отложить в масштабе $\Delta L = 0,002L$ и провести прямую $O_1A_1 1$, параллельную начальному участку OA. Ордината точки пересечения этой прямой с диаграммой деформирования есть нагрузка $F_{0,2}$, соответствующая условному пределу текучести $\sigma_{0,2}$.

$$\sigma_{0,2} = \frac{F_{0,2}}{A_0}.$$

Для большинства материалов в справочниках в качестве предела текучести приводится именно условный предел текучести.

Следует отметить, что 4 характеристики: пределы пропорциональности, упругости, текучести и прочности характеризуют одно и то же свойство материала — сопротивление пластической деформации, но при различной допускаемой деформации.

- $\sigma_{пц}$ — соответствует $\varepsilon \approx 0,005\%$;
- $\sigma_{у}$ — соответствует $\varepsilon \approx 0,01\%$;
- $\sigma_{т}$ — соответствует $\varepsilon \approx 0,2\%$;
- $\sigma_{в}$ — соответствует $\varepsilon \approx 10\%$.

Лишь одна характеристика — сопротивление разрыву $S_к$ характеризует сопротивление материала разрушению.

Предел прочности соответствует предельной нагрузке при растяжении, когда в образце начинает образовываться шейка, площадь поперечного сечения уменьшается и, несмотря на некоторое снижение нагрузки, напряжения в шейке стремительно растут. В момент разрыва $S_к \approx 2\sigma_в$.

В реальных деталях машин и элементах конструкций шейка не образуется и для них именно сопротивление разрыву характеризует предельные напряжения в момент разрушения.

Значение сопротивления разрыву традиционно недооценивается.

5.2.2. Характеристики пластичности

По результатам замеров образцов до и после испытаний определяются две характеристики пластичности: относительное удлинение при разрыве δ и относительное сужение при разрыве ψ.

$$\delta = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L_к - L_0}{L_0} 100\% \qquad \psi = \frac{\Delta A}{A_0} = \frac{A_0 - A_к}{A_0} 100\% .$$

Для стали Ст3 $\delta \approx 15\%$ и $\psi \approx 70\%$.

Заметим, что относительное удлинение при разрыве δ зависит от отношения длины рабочей части образца L_0 к диаметру d_0. Размер шейки образца перед разрывом не зависит от длины образца, а зависит от его диаметра. Поэтому с ростом отношения L_0/d_0 величина δ уменьшается. Для десятикратных образцов относительное удлинение при разрыве меньше, чем для пятикратных.

Этого недостатка нет у относительного сужения при разрыве ψ, поэтому можно считать, что относительное сужение при разрыве ψ лучше всего характеризует запас пластичности материала.

Существует множество эмпирических формул для оценки прочности и долговечности элементов конструкций при статической и динамической нагрузке. В большинстве этих формул в качестве параметров используются сопротивление разрыву $S_к$ и относительное сужение при разрыве ψ.

5.2.3. Работа разрушения при разрыве

Для оценки материала используют понятия: прочность, пластичность и вязкость. О прочности и пластичности сказано выше.

Вязкость материала характеризуется работой, затраченной на разрушение.

В высшей математике (свойства определенного интеграла) показано, что работа силы F на перемещении Δ равна площади диаграммы в координатах $F - \Delta$. Тогда работа, затраченная на разрушение образца в процессе испытаний на растяжение, равна площади диаграммы деформирования.

Чем больше площадь диаграммы, тем больше вязкость материала, тем лучше он сопротивляется воздействию динамических нагрузок.

Полная деформация образца складывается из упругой и пластической деформации.

$$\Delta L = \Delta L_{упр} + \Delta L_{пласт} .$$

Полная работа разрушения образца складывается из работ упругой и пластической деформации.

$$A = A_{упр} + A_{пласт} .$$

В момент разрыва образца происходит его разгрузка: упругая деформация исчезает, пластическая остается. Поскольку разгрузка подчиняется закону Гука, работа упругой деформации равна площади треугольника.

$$A_{\text{упр}} = \frac{1}{2} F_{\text{разр}} \Delta L_{\text{упр}} .$$

Обычно работу разрушения образца оценивают путем сопоставления с площадью прямоугольника с размерами $F_{\text{в}}$ и ΔL, используя коэффициент заполнения диаграммы η.

$$A = \eta F_{\text{в}} \Delta L .$$

Для стали Ст3 $\eta = 0,85...0,87$.

5.2.4. Диаграммы деформирования других материалов

Такую же диаграмму, как рассмотренная диаграмма деформирования мягкой стали, имеют большинство металлов и сталей после отжига. Диаграммы деформирования термически обработанных легированных сталей не имеют площадки текучести и для них определяется условный предел текучести.

У материалов в хрупком состоянии практически отсутствуют пластические деформации, поэтому диаграмма деформирования имеет другой вид.

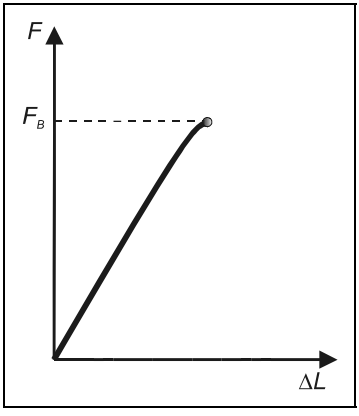


Рис. 5.4. Диаграмма растяжения чугуна

Диаграмма растяжения чугуна представлена на рис. 5.4. Она имеет вид почти прямой линии, слегка искривляющейся перед разрывом образца. При таком виде диаграммы определяется только одна характеристика прочности — пре-

дел прочности $\sigma_в$. Остальные характеристики определить невозможно. Характеристики пластичности у материалов в хрупком состоянии, как показывают замеры образцов до и после разрушения, близки к нулю.

5.3. Испытание материалов на сжатие

Испытание материалов на растяжение — основной вид испытаний материалов. Именно результаты испытаний на растяжение приводятся во всех справочниках как механические характеристики материалов.

Все другие виды испытаний являются технологическими и проводятся только в случае производственной необходимости. Тем не менее их изучение позволяет исследовать поведение материалов при различных видах напряженно-деформированного состояния.

При сжатии образцов из мягкой стали и других высокопластичных материалов разрушения получить не удается.

Поскольку объем образца при пластической деформации не меняется, с уменьшением высоты образца при сжатии площадь поперечного сечения увеличивается. Соответственно растет нагрузка, вызывающая пластическую деформацию. Диаграмма сжатия стали и вид образца до и после испытания показаны на рис. 5.5.

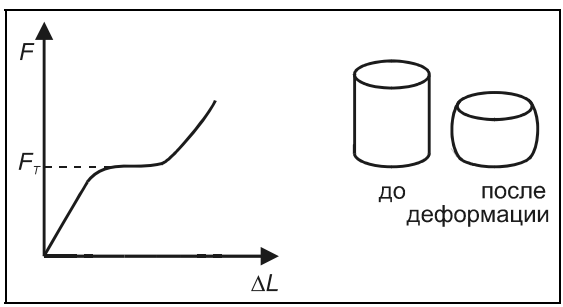


Рис. 5.5. Испытание стали на сжатие

Поведение чугуна при сжатии резко отличается от его поведения при растяжении. Если для испытаний на растяжение используется образец, у которого $h/d = 10$, то для испытаний на сжатие берут $h/d = 1{,}5$, т. к. при сжатии более длинного образца при больших нагрузках возможна потеря устойчивости образца, т. е. изгиб его в боковом направлении. Вид чугунного образца до и после испытаний и его диаграмма сжатия показаны на рис. 5.6.

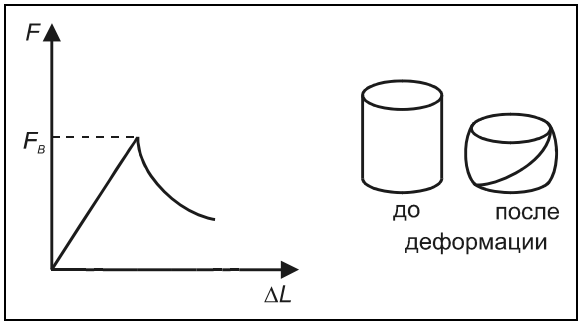


Рис. 5.6. Испытание чугуна на сжатие

Цилиндрический образец (и стальной и чугунный) при сжатии превращается в бочонок. При этом его высота значительно меньше, чем до испытаний, т. е. налицо большая пластическая деформация чугунного образца.

Бочкообразная форма образца вызвана силами трения между образцом и поверхностью пресса. Если уменьшить трение путем смазки торцов образца, например парафином, то бочкообразность практически исчезает. Иногда для ее устранения используют тонкие медные прокладки толщиной 0,1 мм, но при этом бочка может превратиться в рюмку.

Если стальной образец при сжатии не разрушается вовсе, то чугунный разрушается путем скола (среза) под углом порядка 30° к оси образца, а если уменьшить силу трения смазкой, то угол плоскости среза приближается к 45°. Следовательно, при сжатии чугуна разрушение происходит путем среза под действием максимальных касательных напряжений. Напомню, при растяжении-сжатии плоскость действия максимальных касательных напряжений наклонена под углом 45° к оси стержня.

В изломе образца хорошо видны следы сдвига. Таким образом, при сжатии чугунного образца наблюдаются все признаки пластического разрушения.

При растяжении чугун разрушается хрупко, при сжатии пластично.

Важно отметить, что прочность чугуна на сжатие в 4 раза больше, чем на растяжение. Сталь при сжатии не разрушается, а вот пределы пропорциональности и текучести при растяжении и при сжатии примерно одинаковы.

Примером хрупкого разрушения при сжатии может служить сжатие камня, бетона, стали после закалки без отпуска, дерева вдоль волокон. В этих случаях разрушение происходит по плоскостям, параллельным оси образца, путем расслоения образца на отдельные сегменты.

Причиной разрушения при этом является не σ_{max} или τ_{max}, а максимальная линейная деформация ε_{max}. Речь об этом пойдет в *разд. 9.6.*

Отдельного рассмотрения заслуживает сжатие дерева. Дерево анизотропный материал, у которого свойства вдоль и поперек волокон различны. Вид образцов до и после испытаний и диаграммы сжатия дерева вдоль и поперек волокон показаны на рис. 5.7.

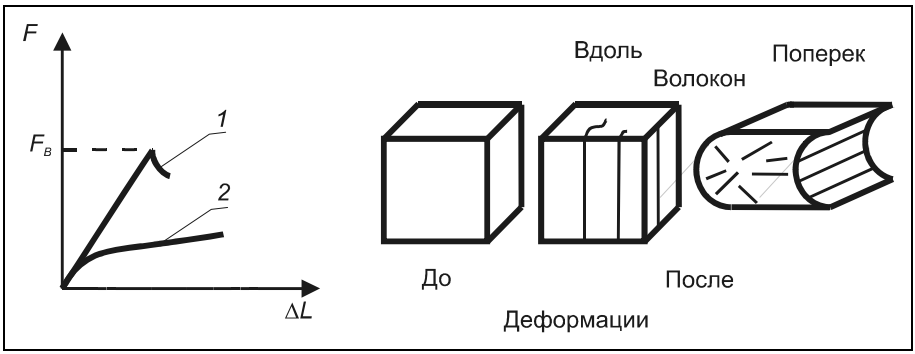


Рис. 5.7. Испытание дерева на сжатие: 1 — вдоль; 2 — поперек волокон

Предел прочности дерева на растяжение примерно в два раза больше, чем на сжатие. Это объясняется тем, что при сжатии вдоль волокон дерево разрушается хрупко. Оно расслаивается на отдельные волокна, которые при дальнейшей деформации теряют устойчивость, изгибаются и переламываются.

При сжатии поперек волокон дерево деформируется пластично. Волокна сдвигаются друг относительно друга, образец сплющивается и, в конце концов, разваливается в силу недостаточной прочности скрепления волокон. Предел прочности дерева вдоль волокон примерно в 10 раз больше, чем поперек.

5.4. Допускаемые напряжения

Понятие о допускаемом напряжении уже давалось в *главе 1*. Пришло время уточнить, что принять в качестве предельного напряжения.

При расчете конструкции на прочность и жесткость будем рассматривать два вида выхода конструкции из строя:

- ❒ разделение тела на части (хрупкое разрушение);
- ❒ появление недопустимых пластических деформаций (пластическая деформация, но не разрушение).

В реальных условиях существует и много других видов выхода из строя, например потеря устойчивости, износ, коррозия и др.

При расчетах на прочность условие выхода конструкции из строя $\sigma_{max} = \sigma_{пред}$.

Условие работоспособности конструкции $\sigma_{max} \le [\sigma]$.

Допускаемое напряжение

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{пред}}{n},$$

где $\sigma_{пред} = \sigma_{в}$ — для материалов в хрупком состоянии, $\sigma_{пред} = \sigma_{т}$ — для материалов в пластичном состоянии.

Коэффициент запаса n выбирается по справочникам в зависимости от условий эксплуатации конструкции и других факторов. Перечислим основные факторы, учитываемые при выборе коэффициента запаса:

- точность знания нагрузок и их характера;
- точность расчетных формул;
- возможные последствия выхода из строя.

Коэффициент запаса иногда называют еще коэффициентом незнания. Чем меньше мы знаем, тем больше коэффициент запаса.

Если рассчитывается неответственная деталь, которую в случае поломки легко заменить, коэффициент запаса можно взять минимальным $n = 1,2 - 1,5$.

Если возможная поломка может вызвать гибель людей, например трос подъема лифта, коэффициент запаса берется максимально большим $n = 10 - 15$.

Коэффициент запаса косвенным образом оценивает возможную вероятность выхода из строя конструкции, как сказано в *разд. 1.14.3*.

5.5. Диаграммы условных и истинных напряжений

В процессе испытаний изменяется площадь поперечного сечения образца. При подсчете напряжений в образце изменение площади сечения можно учитывать или не учитывать, получая соответственно условные или истинные напряжения.

До образования шейки деформация по всей длине образца одинаковая. В процессе образования шейки деформация происходит только в области шейки.

Диаметр шейки уменьшается, диаметр остальной части образца не меняется. Соответственно, деформации образца можно определять с учетом и без учета изменения диаметра, получая при этом условные или истинные деформации.

Условными называются *напряжения*, найденные как отношение нагрузки к первоначальной площади поперечного сечения $\sigma_{усл} = \dfrac{F}{A_0}$.

Условными называются *деформации*, найденные как отношение удлинения образца к его первоначальной длине $\varepsilon = \dfrac{\Delta L}{L_0}$.

Истинными называются *напряжения*, найденные как отношение нагрузки к текущей площади поперечного сечения $\sigma_{ист} = \dfrac{F}{A_{ист}}$.

Истинными называются *деформации*, найденные как отношение приращения длины элемента образца к текущей длине этого элемента.

Чтобы определить истинные напряжения, необходимо в процессе испытаний замерять диаметр образца в области шейки, что обычно не делается, а замеряется лишь диаметр шейки после разрыва.

Ввести понятие истинной деформации не так просто, ведь надо оценить деформации в шейке, которая образуется неизвестно где.

Рассмотрим элемент образца длиной dL_0 до деформации. В произвольный момент нагружения его длина становится равной dL. Дадим небольшое приращение нагрузки, длина элемента вырастет еще на $d(dL)$ (рис. 5.8). Тогда приращение деформации элемента $d\varepsilon_{ист} = \dfrac{d(dL)}{dL}$, а полная истинная деформация за все нагружение

$$\varepsilon_{ист} = \int_{dL_0}^{dL} \frac{d(dL)}{dL} = \ln\left(\frac{dL}{dL_0}\right).$$

Такая деформация в литературе называется *логарифмической* деформацией.

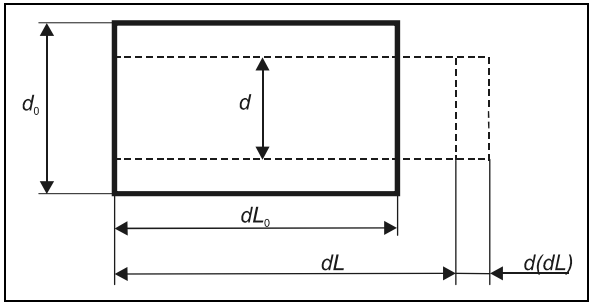


Рис. 5.8. К расчету истинных деформаций при растяжении

Поскольку отношение приращений длины неизвестно, выразим его через известные величины.

Пластическая деформация протекает без изменения объема тела. Упругим изменением объема пренебрегаем. Считаем объем тела в процессе деформации постоянным.

$$dV = A_0 dL_0 = A dL\,,$$

откуда

$$\frac{dL}{dL_0} = \frac{A_0}{A}\,,$$

тогда

$$\varepsilon_{\text{ист}} = \ln\left(\frac{dL}{dL_0}\right) = \ln\left(\frac{A_0}{A}\right).$$

Чтобы найти истинную деформацию в момент разрыва, надо знать площадь шейки при разрыве или, при использовании справочных данных, можно взять относительное сужение ψ в момент разрыва

$$\psi = \frac{A_0 - A_{\text{к}}}{A_0} = 1 - \frac{A_{\text{к}}}{A_0} \text{ или } \frac{A_0}{A_{\text{к}}} = \frac{1}{1-\psi}\,,$$

тогда

$$\varepsilon_{\text{ист}} = \ln\left(\frac{dL}{dL_0}\right) = \ln\left(\frac{A_0}{A}\right) = \ln\left(\frac{1}{1-\psi}\right).$$

Для пластичных сталей $\psi \approx$ 0,6–0,7 и $\varepsilon \approx 1$, т. е. деформация в шейке достигает 100%.

Свяжем истинные деформации $\varepsilon_{\text{ист}}$ и истинные напряжения $\sigma_{\text{ист}}$.

$$\sigma_{\text{ист}} = \frac{F}{A} = \frac{F}{A}\cdot\frac{A_0}{A_0} = \sigma_{\text{усл}}\,\frac{A_0}{A} = \sigma_{\text{усл}} e^{\varepsilon_{\text{ист}}}\,.$$

До образования шейки — деформация одинаковая по всей длине образца, тогда из условия постоянства объема образца

$$A_0 L_0 = AL\,, \qquad \frac{A_0}{A} = \frac{L}{L_0} = \frac{L_0 + \Delta L}{L_0} = 1 + \varepsilon_{\text{усл}}\,,$$

$$\varepsilon_{\text{ист}} = \ln\left(\frac{A_0}{A}\right) = \ln(1 + \varepsilon_{\text{усл}}) \approx \varepsilon_{\text{усл}}\,,$$

$$\sigma_{\text{ист}} = \sigma_{\text{усл}} e^{\ln(1+\varepsilon_{\text{ист}})} = \sigma_{\text{усл}}(1 + \varepsilon_{\text{ист}})\,.$$

Диаграммы условных и истинных напряжений показаны на рис. 5.13. Диаграмма условных напряжений $\sigma_{усл} - \varepsilon_{усл}$ подобна диаграмме деформирования, нарисованной машиной в координатах нагрузка — удлинение ($F - \Delta L$).

Так как условные напряжения и деформация — это нагрузка и удлинение, деленные на постоянную величину, т. е. фактически просто изменен масштаб диаграммы деформирования. Диаграмма истинных напряжений в 5—7 раз длиннее и в 2—3 раза выше диаграммы условных напряжений.

5.5.1. Построение диаграммы истинных напряжений

Такая диаграмма строится по результатам испытаний стандартного образца на растяжение.

По замерам образца до и после испытаний в расчет вводим начальные длину L_0 и диаметр образца d_0, а также диаметр образца в шейке после разрыва $d_к$.

С нарисованной испытательной машиной диаграммы в координатах "нагрузка — перемещение" снимают координаты нескольких характерных точек: начала и конца площадки текучести, точек, соответствующих максимальной нагрузке на образец и моменту разрыва образца. Кроме того, для последующей аппроксимации диаграммы деформирования необходимы координаты по крайней мере двух точек между пределом текучести и пределом прочности. Чтобы на диаграмме был виден участок упругости, введена точка начала нагружения с координатами (0, 0).

Исходные данные для построения диаграммы истинных напряжений приведены на рис. 5.9. Этот пример выполнен с учетом размерностей, поэтому в начале документа введены производные размерности, далее — исходные данные.

Координаты точек диаграммы введены в виде строки для экономии места в документе, а затем транспонированы, т. к Mathcad работает только с векторами (столбцами чисел), но не со строками.

Умноженные на масштаб диаграммы, координаты ее точек уже выражают нагрузку в ньютонах и абсолютное удлинение образца в метрах. Для расчета напряжений введены площади поперечного сечения образца до деформации A_0 и после разрыва в шейке $A_к$.

На рис. 5.10 показан вид диаграммы деформирования, построенной машиной. Собственные упругие деформации машины, накладываясь на деформации образца, сильно искажают вид диаграммы, увеличивая ее наклон.

Размерности, производные от стандартных ORIGIN := 1

H := N м := m град := deg кН := 1000 · N

мм := mm см := cm $МПа := 10^6 \cdot \frac{H}{м^2}$

Исходные данные

$d_0 := 4 \cdot мм$ $d_k := 2.6 \cdot мм$ $L_0 := 40 \cdot мм$ $E := 2 \cdot 10^5 \cdot МПа$

Координаты точек диаграммы

F := (0 200 200 265 290 300 270) · мм

ΔL := (0 100 150 300 500 600 800) · мм

Масштабные коэффициенты $mp := 25 \cdot \frac{H}{мм}$ mL := 0.01

$F := F^T \cdot mp$ $\Delta L := \Delta L^T \cdot mL$ n := rows(F) n = 7

$F^T = (0\ \ 5\ \ 5\ \ 6.625\ \ 7.25\ \ 7.5\ \ 6.75)$ кН

$\Delta L^T = (0\ \ 1\ \ 1.5\ \ 3\ \ 5\ \ 6\ \ 8)$ мм

$A_0 := \pi \cdot \frac{d_0^2}{4}$ $A_K := \pi \cdot \frac{d_k^2}{4}$ i := 1..n

Рис. 5.9. Исходные данные для построения диаграммы деформирования

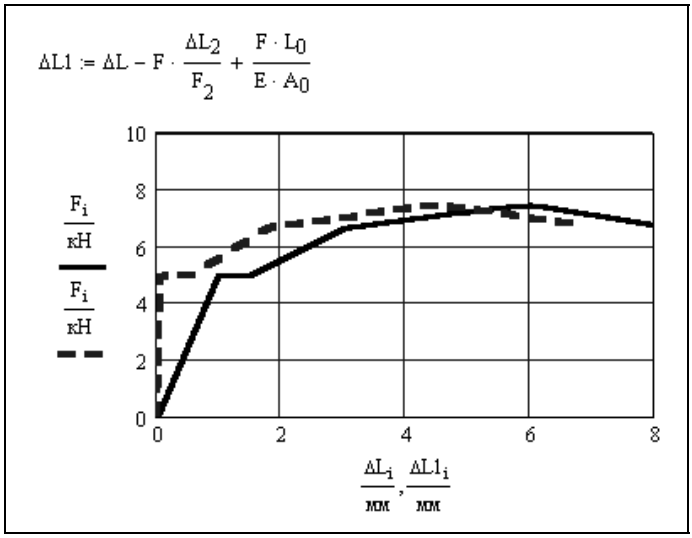


Рис. 5.10. Учет податливости испытательной машины

Для исправления диаграммы необходимо вычесть полную упругую деформацию и добавить упругую деформацию образца

$$\Delta L = \Delta L - \frac{F}{\mathrm{tg}(\beta)} + \frac{FL_0}{EA_0},$$

где $\mathrm{tg}(\beta) = \dfrac{F_т}{\Delta L_т}$ — тангенс угла наклона участка упругости на машинной диаграмме.

Ввиду малости упругих деформаций образца упругая ветвь исправленной диаграммы (пунктирная линия) почти совпадает с осью нагрузок.

На рис. 5.11 приведен расчет условных и истинных деформаций и напряжений. Условные величины отнесены к первоначальным размерам образца A_0 и L_0, истинные — к текущим размерам A и L.

Рис. 5.11. Расчет истинных деформаций и напряжений

Истинные деформации определяются по формуле $\varepsilon_и = \ln\left(\dfrac{A_0}{A}\right)$. Использование этой формулы требует замера диаметра образца в процессе испытаний, что обычно не делается, поэтому она применена лишь для определения деформации в момент разрыва образца.

До образования шейки в образце используется другая формула $\varepsilon_и = \ln(1+\varepsilon)$, не требующая замера диаметра.

Истинные напряжения определяются по формуле $\sigma_и = \sigma \cdot e^{\varepsilon_и}$, также не требующей замера диаметра, или $\sigma_и = \sigma(1+\varepsilon)$. Работая с программой, сдвиньте

вверх выражение для последней формулы, результат не изменится — обе формулы верны.

Для определения напряжений и деформаций в шейке в момент разрыва используем замеренный диаметр шейки $d_к$.

$$\sigma_и = \frac{F_{разрыва}}{A_к} \text{ и } \varepsilon_и = \ln\left(\frac{A_0}{A_к}\right).$$

Результаты расчета деформаций и напряжений приведены на рис. 5.12, а вид диаграмм условных и истинных напряжений на рис. 5.13. Истинные деформации и напряжения в момент разрыва в несколько раз больше условных.

деформации и напряжения $i := 1..n$

условные σ_i =		условные ε_i =	истинные $\sigma_{и_i}$ =		истинные $\varepsilon_{и_i}$ =
0	МПа	0	0	МПа	0
398		0.002	399		0.002
398		0.014	404		0.014
527		0.045	551		0.044
577		0.092	630		0.088
597		0.115	666		0.109
537		0.169	1271		0.862

Рис. 5.12. Результаты расчета деформаций и напряжений

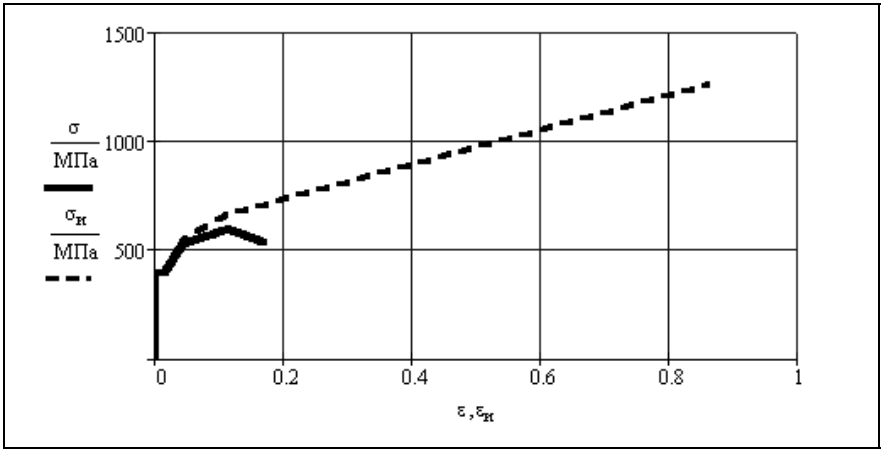


Рис. 5.13. Сопоставление диаграмм условных и истинных напряжений

5.5.2. Аппроксимация диаграммы деформирования

Если нормальные напряжения меньше предела текучести $\sigma < \sigma_т$, то и линейная деформация $\varepsilon < \varepsilon_т$, а поведение материала подчиняется закону Гука

$$\sigma = E \cdot \varepsilon .$$

Если $\sigma > \sigma_т$, то соответственно $\varepsilon > \varepsilon_т$, связь между напряжением и деформацией представляется диаграммой истинных напряжений при растяжении материала стержня.

Для выполнения расчетов на прочность необходимо иметь аналитическое выражение диаграммы деформирования, для этого производится аппроксимация диаграммы тем или иным способом.

Для упрощения аппроксимации принимают, что предел пропорциональности и предел текучести практически совпадают. Тогда диаграмма деформирования представляется, состоящей из двух участков: прямая линия от $\sigma = 0$ до $\sigma = \sigma_т$ (справедлив закон Гука) и криволинейный участок от $\sigma = \sigma_т$ до $\sigma = S_к$, где $S_к$ — сопротивление разрыву (истинные напряжения в шейке образца при разрыве). В этом случае деформацию, соответствующую началу пластической деформации, определяют по закону Гука $\varepsilon_т = \sigma_т / E$.

До предела прочности обе диаграммы (условных и истинных напряжений) приблизительно совпадают. Диаграмму истинных напряжений можно как бы разбить на две части: область малых упругопластических деформаций (до предела прочности) и область больших пластических деформаций.

Расчеты в области малых упругопластических деформаций не требуют построения диаграммы истинных напряжений, т. к. обе диаграммы практически совпадают. Такие расчеты характерны для оценки напряжений и деформаций в реальных конструкциях, где в большей части конструкции деформации чисто упругие, и только в зонах концентрации напряжений (около отверстий, канавок, в углах люков) возникают упругопластические деформации, но они чаще всего не превышают 2—3% и, как правило, не выходят за пределы площадки текучести, если она есть.

При обработке металлов давлением (ковке, штамповке, вытяжке, прокатке) величина пластической деформации может достигать 60%. В области больших пластических деформаций построение диаграммы истинных напряжений необходимо. Такая диаграмма, как правило, аппроксимируется прямой линией от предела прочности (или от предела текучести) до сопротивления разрыву.

Для расчетов на прочность и жесткость в упругопластической области необходимо знать уравнение диаграммы деформирования. Для этого нужна ее аппроксимация. Не углубляясь в вопросы теории пластичности, отметим три вида аппроксимации диаграммы деформирования:

- Диаграмма идеального упругопластического тела (диаграмма Прандтля) (рис. 5.14) с бесконечно длинной площадкой текучести:
  - при $\varepsilon < \varepsilon_т$ $\sigma = E \cdot \varepsilon$;
  - при $\varepsilon \geq \varepsilon_т$ $\sigma = \sigma_т$.
- Диаграмма упругопластического тела с линейным упрочнением:
  - при $\varepsilon < \varepsilon_т$ $\sigma = E \cdot \varepsilon$;
  - при $\varepsilon \geq \varepsilon_т$ $\sigma = \sigma_т + E_1 \cdot (\varepsilon - \varepsilon_т)$,

  где E_1 — модуль упрочнения.
- Диаграмма упругопластического тела со степенным упрочнением:
  - при $\varepsilon < \varepsilon_т$ $\sigma = E \cdot \varepsilon$;
  - при $\varepsilon \geq \varepsilon_т$ $\sigma = \sigma_т + A \cdot \varepsilon^m$,

  где A и m — эмпирические коэффициенты.

Получение уравнений для линейной и степенной аппроксимаций показано на рис. 5.14. Линейная аппроксимация заменяет рассматриваемый участок диаграммы прямой линией. Степенная аппроксимация — кривой.

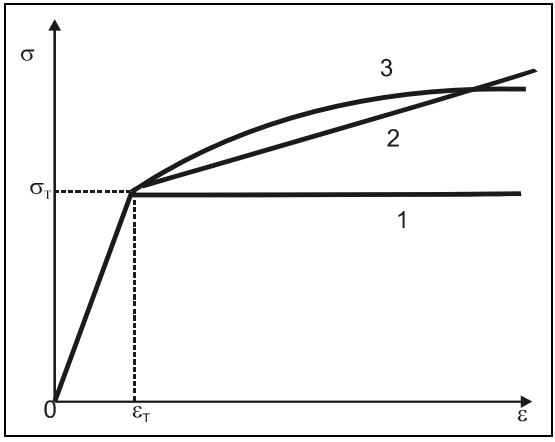


Рис. 5.14. Аппроксимация диаграммы деформирования
(1 — диаграмма Прандтля; 2 — линейное упрочнение; 3 — степенное упрочнение)

Для расчетов в области малых упругопластических деформаций выбран участок диаграммы деформирования от предела текучести до предела прочности.

При линейной аппроксимации коэффициенты уравнения прямой линии $\sigma = a + b \cdot \varepsilon$ определяются с помощью встроенной функции регрессии `line`.

При степенной аппроксимации коэффициенты уравнения $\sigma = a + b \cdot \varepsilon^c$ определяются с помощью функции `pwrfit`, требующей начального приближения коэффициентов.

Внимание

Функции регрессии не могут работать с размерными единицами. Чтобы сделать их безразмерными, напряжения, входящие в параметры функций, разделены на размерность.

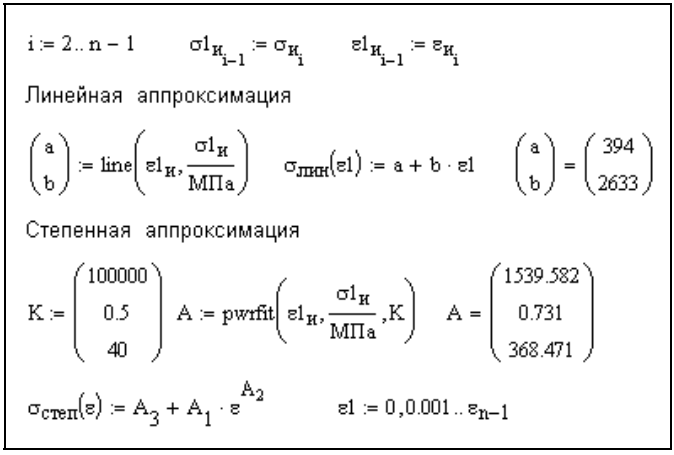


Рис. 5.15. Аппроксимации диаграммы деформирования в Mathcad

Результаты аппроксимации диаграммы деформирования показаны на рис. 5.16.

В процессе расчетов в упругопластической области часто встает задача выбрать аппроксимацию диаграммы деформирования без проведения испытания материала на растяжение.

В справочниках, как правило, приводятся значения предела текучести материала и предела прочности, по которым можно приближенно задаться аппроксимацией диаграммы деформирования.

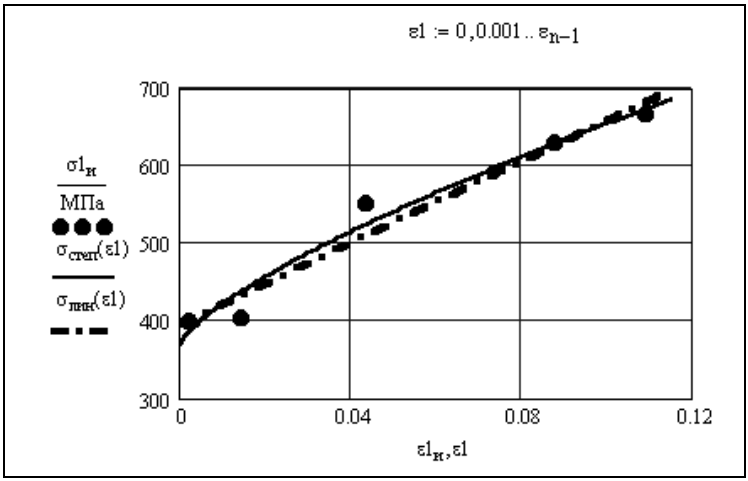
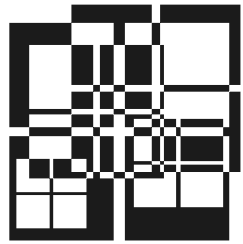


Рис. 5.16. Линейная и степенная аппроксимации диаграммы деформирования

Для линейной аппроксимации требуется знать координаты двух точек диаграммы. Напряжения $\sigma_т$ и $\sigma_в$ берем из справочника. Деформациями задаемся: для предела текучести $\varepsilon_т = \frac{\sigma_т}{E} \sim 0,002$, для предела прочности берем $\varepsilon_в \approx 0,1$. Это значение очень неточное, но, как можно увидеть из расчетов, приведенных в *главе 8*, даже большая ошибка в уравнении диаграммы деформирования ведет к маленькой ошибке в вычислениях.

Для степенной аппроксимации диаграммы деформирования требуется минимум 3—4 точки. Их в справочнике нет, поэтому к степенной аппроксимации, не имея экспериментальных данных, лучше не обращаться. Для большинства расчетов за пределом текучести вполне достаточно линейной аппроксимации и даже диаграммы Прандтля (с бесконечно длинной площадкой текучести).

ГЛАВА 6



Сдвиг и кручение

Полная деформация любого тела складывается из линейной ε и угловой деформации γ. Линейная деформация ε вызывается нормальными напряжениями σ. Угловая деформация γ вызывается касательными напряжениями τ. Связь между σ и ε изучалась в *главе 4*. В этой главе рассматривается связь τ и γ.

6.1. Сдвиг

Примером сдвига можно считать разрезание ножницами листа бумаги или металла. В очень узкой области между ножами создается область сдвига. Вырежем в этой области элемент тела и рассмотрим его деформацию (рис. 6.1). Грани элемента смещаются друг относительно друга под действием поперечной силы Q.

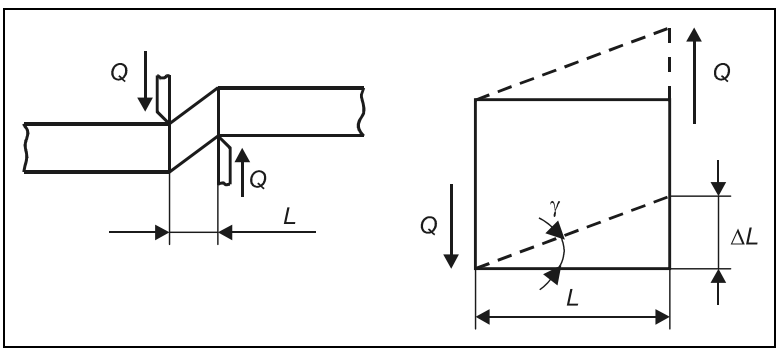


Рис. 6.1. Сдвиг

Абсолютный сдвиг ΔS — смещение граней элемента, неудобен в использовании, так как зависит от размеров тела.

Относительный сдвиг

$$\gamma = \frac{\Delta S}{l},$$

называемый углом сдвига, не зависит от размеров тела.

Касательное напряжение на гранях элемента изменяется по довольно сложному закону и на практике принимается постоянным. Хотя это и не верно, но допустимо. В практических расчетах ошибка компенсируется поправочными коэффициентами.

$$\tau = \frac{Q}{A},$$

где A — площадь сечения, испытывающего деформацию сдвига.

Закон Гука при сдвиге означает линейную зависимость между касательным напряжением τ и углом сдвига γ

$$\tau = G \cdot \gamma, \tag{6.1}$$

где G — коэффициент пропорциональности, называемый *модулем сдвига.*

Модуль сдвига — константа материала, которая определяется опытным путем и приводится в справочниках.

Мы рассмотрели три упругие постоянные материала: модуль Юнга E, модуль сдвига G, коэффициент Пуассона μ. Между ними существует теоретическая связь

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \tag{6.2}$$

Например, для большинства сталей справочные значения $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0,3$, $G = 8 \cdot 10^4$ МПа. Формула (6.2) дает значение $G = 7,7 \cdot 10^4$ МПа.

Из закона Гука при сдвиге (6.1), подставив в него выражения для τ и γ

$$\frac{Q}{A} = G\frac{\Delta S}{l},$$

можно получить выражение для абсолютного сдвига

$$\Delta S = \frac{Ql}{GA}.$$

Потенциальная энергия упругой деформации при сдвиге $П$, как и при растяжении, численно равна работе внешних сил $A^{внеш}$, которая, в свою очередь, равна площади диаграммы деформирования при сдвиге. При упругой деформации справедлив закон Гука и, следовательно, потенциальная энергия упругой деформации численно равна площади треугольника, заштрихованного на рис. 6.2.

$$П \approx A^{внеш} = \frac{Q \cdot \Delta S}{2} = \frac{Q^2 l}{2GA}. \tag{6.3}$$

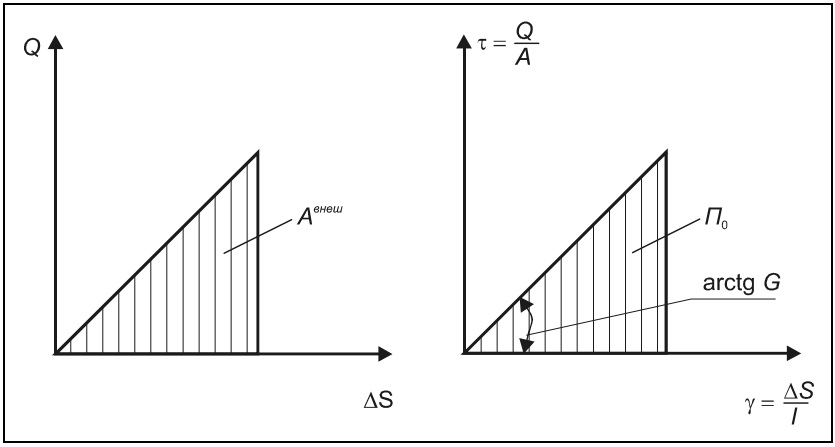


Рис. 6.2. Работа внешних сил при сдвиге

Удельная потенциальная энергия $П_0$, накопленная в единице объема V

$$П_0 = \frac{U}{V} = \frac{Q \cdot \Delta S}{2Al} = \frac{\tau \cdot \gamma}{2}.$$

Или с учетом $\tau = G \cdot \gamma$

$$П_0 = \frac{G \cdot \gamma}{2} = \frac{\tau^2}{2G}. \tag{6.4}$$

Величина $П_0$ численно равна площади диаграммы деформирования при сдвиге в координатах $\tau - \gamma$ (рис. 6.2).

Примечание

Сдвиг — это деформация без разрушения материала. Разрушение при сдвиге носит название срез.

В заключение введем понятие чистого сдвига.

При сдвиге, вызванном двумя силами, направленными навстречу друг другу, материал в промежутке между силами, кроме сдвига, еще испытывает изгиб, вызывающий появление нормальных напряжений.

Чистым назовем сдвиг, при котором есть сечения, где отсутствуют нормальные напряжения. Примером чистого сдвига является кручение.

6.2. Расчет простейших соединений

Приведенных сведений о расчетах на растяжение-сжатие и на сдвиг достаточно для расчета на прочность простейших соединений, таких как болты, штифты, заклепки, сварные швы и др.

В основе расчета лежат условия прочности на растяжение, срез и смятие.

$$\sigma_{\text{раст}} = \frac{F}{A_{\text{раст}}} \le \left[\sigma_{\text{раст}}\right] = \frac{\sigma_{\text{т}}}{n}$$

$$\tau_{\text{среза}} = \frac{F}{A_{\text{среза}}} \le \left[\tau_{\text{среза}}\right] \approx (0,5-0,6)\left[\sigma_{\text{раст}}\right]$$

$$\sigma_{\text{смят}} = \frac{F}{A_{\text{смят}}} \le \left[\sigma_{\text{смят}}\right] \approx 2\left[\sigma_{\text{раст}}\right]$$

Здесь F — сила, вызывающая деформацию тела, $A_{\text{раст}}$, $A_{\text{среза}}$, $A_{\text{смят}}$ — площади поперечных сечений, в которых действуют максимальные напряжения соответственно растяжения, среза и смятия. Выбор этих площадей будет далее пояснен на конкретных примерах.

Допускаемые напряжения на растяжение, срез и смятие выбираются с учетом опытных данных, позволяющих получить достаточно достоверные результаты.

В основе всех трех условий прочности лежит предположение о равномерности распределения напряжений по всему сечению. Если при растяжении подобная гипотеза справедлива (вдали от места приложения нагрузки), то в случае расчета на срез и смятие это не верно, но удобно, и, учитывая приближенный характер расчетов, возможно.

Расчеты простейших соединений слишком просты, чтобы использовать Mathcad, и выполняются с помощью микрокалькулятора.

6.2.1. Расчет тяги

Схема соединения показана на рис. 6.3. Требуется определить из условия прочности диаметр тяги d, диаметр головки D и высоту h головки тяги при заданной силе F, растягивающей тягу.

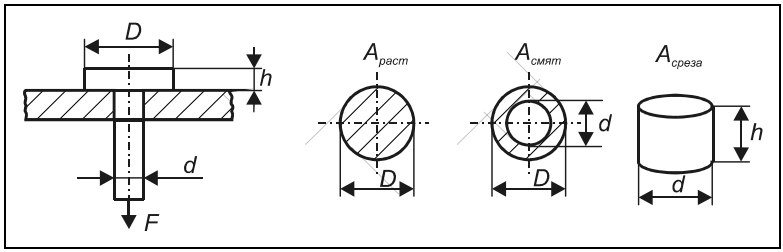


Рис. 6.3. Схема тяги

Растяжение тяги

Диаметр тяги найдем из условия прочности на растяжение

$$\sigma_{\text{раст}} = \frac{F}{A_{\text{раст}}} \le \left[\sigma_{\text{раст}}\right] = \frac{\sigma_{\text{т}}}{n}.$$

Площадь сечения, где возможен разрыв тяги $A_{\text{раст}} = \dfrac{\pi d^2}{4}$.

Из условия прочности $A_{\text{раст}} \ge \dfrac{F}{\left[\sigma_{\text{раст}}\right]}$.

Приравнивая два выражения для $A_{\text{раст}}$, находим диаметр тяги

$$d = \sqrt{\frac{4A_{\text{раст}}}{\pi}}.$$

Найденный результат округляем в большую сторону, как правило, до целых миллиметров.

Смятие головки тяги

Диаметр головки тяги найдем из условия смятия

$$\sigma_{\text{смят}} = \frac{F}{A_{\text{смят}}} \le \left[\sigma_{\text{смят}}\right] \approx 2\left[\sigma_{\text{раст}}\right].$$

В качестве площади смятия берем площадь опоры головки на лист металла.

$$A_{\text{смят}} = \frac{\pi}{4}\left(D^2 - d^2\right).$$

Из условия прочности $A_{\text{смят}} = \dfrac{F}{\left[\sigma_{\text{смят}}\right]}$.

Приравнивая два выражения для $A_{\text{смят}}$, находим диаметр D.

Срез головки тяги

Высоту головки тяги h найдем из условия прочности на срез

$$\tau_{\text{среза}} = \frac{F}{A_{\text{среза}}} \le \left[\tau_{\text{среза}}\right] \approx (0{,}5 - 0{,}6)\left[\sigma_{\text{раст}}\right].$$

В качестве площади среза берем цилиндрическую поверхность диаметром d и высотой h, которая образовалась бы при протаскивании головки тяги через отверстие в листе металла $A_{\text{среза}} = \pi dh$. Из условия прочности $A_{\text{среза}} \ge \dfrac{F}{\left[\tau_{\text{среза}}\right]}$.

Приравнивая два выражения для $A_{\text{среза}}$, находим высоту головки h.

6.2.2. Расчет штифта (заклепки)

Условия нагрузки заклепок при заклепочном соединении двух листов металла и штифтов, соединяющих, например, обод зубчатого колеса с корпусом в планетарном редукторе, практически одинаковы. Схема штифтового соединения показана на рис. 6.4.

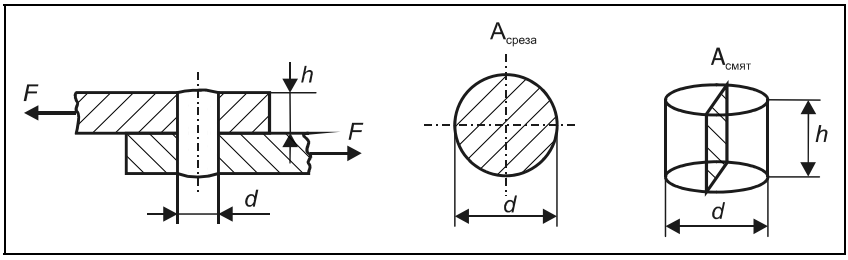


Рис. 6.4. Схема штифтового соединения

Расчет штифта на срез

Из условия прочности на срез (6.10) $A_{\text{среза}} \ge \dfrac{F}{\left[\tau_{\text{среза}}\right]}$.

Штифт может срезаться по круглому поперечному сечению. Площадь среза $A_{\text{среза}} = \dfrac{\pi d^2}{4}$. Приравнивая два выражения $A_{\text{среза}}$, определяем диаметр штифта d.

Расчет на смятие

Из условия смятия (6.9) находим допускаемую площадь смятия $A_{\text{смят}} \geq \dfrac{F}{[\sigma_{\text{смят}}]}$.

Реальная площадь смятия определяется толщиной скрепляемых штифтом деталей. Истинная поверхность смятия — половина поверхности цилиндра, но распределение напряжений на ней неизвестно. Они распределяются по сложному степенному закону.

Удовлетворительные результаты расчета получаются, если взять в качестве площади смятия проекцию криволинейной поверхности на диаметральную плоскость $A_{\text{смят}} = d \cdot h$, где h — наименьшая из толщин соединяемых деталей.

Если детали разной прочности, то возможно потребуется проверка прочности на смятие обеих деталей.

Приравнивая два выражения $A_{\text{смят}}$, находим допустимую толщину детали h.

Расчет заклепочного соединения абсолютно аналогичен расчету штифтового соединения.

6.2.3. Расчет сварного соединения

Рассмотрим приварку пластины к листу угловым швом с обваркой по всему контуру (рис. 6.5).

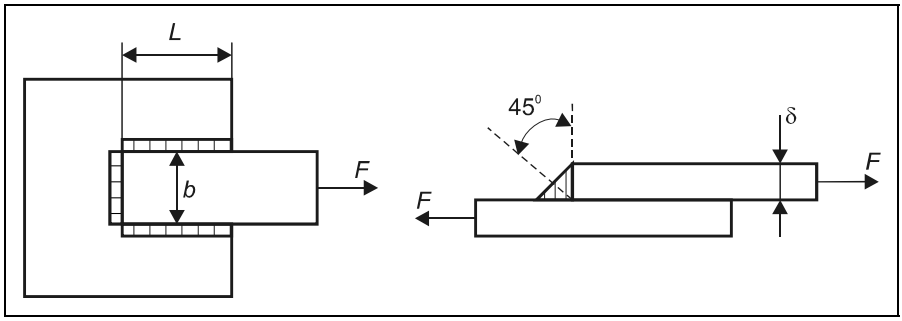


Рис. 6.5. Схема сварного соединения

Расчет пластины на растяжение

Сначала найдем необходимую ширину пластины b. Из условия прочности на растяжение (6.8) $A_{\text{раст}} \geq \frac{F}{[\sigma_{\text{раст}}]}$. Реальная толщина пластины $A_{\text{раст}} = \delta \cdot b$. Приравнивая два выражения для $A_{\text{раст}}$, находим ширину пластины b.

Расчет длины сварного шва

Из условия прочности сварного шва на срез (6.10) найдем допускаемую площадь среза $A_{\text{среза}} \geq \frac{F}{[\tau_{\text{среза}}]}$.

Считается, что срез сварного шва происходит по наименьшей площади среза $A_{\text{среза}} = t \cdot L$, где t — длина перпендикуляра, опущенного из вершины шва на его поверхность, $L_{\text{шва}} = 2l + b$ — полная длина контура обварки пластины.

Для равнобокого шва поверхность среза наклонена под углом 45° к плоскости листа. Тогда площадь среза шва $A_{\text{среза}} = L_{\text{шва}} \cdot \delta \cos 45°$, где δ — высота катета сварного шва, обычно равная толщине листа.

Приравнивая два выражения для $A_{\text{среза}}$, находим длину l накладки пластины на лист.

Учитывая, что при подобных расчетах простейших соединений погрешность расчета велика, в реальных расчетах обычно вводится ряд поправочных коэффициентов, учитывающих специфику работы соединения.

6.2.4. Пример расчета простейших соединений

Этот пример слишком прост, чтобы использовать Mathcad для расчетов. Время, которое нужно потратить на составление программы гораздо больше, чем время расчета с помощью микрокалькулятора. Однако если есть готовая программа, то стоит воспользоваться ею. Я все-таки составил такую программу (рис. 6.6 и 6.7), чтобы показать как в Mathcad используется условие прочности.

Расчет производится с учетом размерностей, поэтому в начале программы введены производные размерности. Далее заданы исходные данные для расчета: сила F и допускаемые напряжения на растяжение, срез и смятие (рис. 6.6).

Затем следует непосредственно расчет трех соединений: тяги, штифта, сварного шва на растяжение, срез и смятие.

$H := N \quad кН := 10^3 \cdot H \quad м := m \quad мм := 0.001 \cdot м \quad см := 0.01 \cdot м \quad МПа := 10^6 \cdot \frac{H}{м^2}$

Допускаемые напряжения

$F := 10 \cdot кН \quad \sigma_{раст} := 100 \cdot МПа \quad \sigma_{смят} := 200 \cdot МПа \quad \tau_{среза} := 50 \cdot МПа$

Расчет тяги

Расчет на растяжение $A(d) := \frac{\pi \cdot d^2}{4}$

$d := 1 \cdot см \quad d := root\left(\frac{F}{A(d)} - \sigma_{раст}, d\right) \quad d = 11.3\,мм$

Расчет на срез $A(h) := \pi \cdot d \cdot h$

$h := 1 \cdot см \quad h := root\left(\frac{F}{A(h)} - \tau_{среза}, h\right) \quad h = 5.6\,мм$

Расчет на смятие $A(D) := \frac{\pi \cdot D^2}{4} - \frac{\pi \cdot d^2}{4}$

$D := 15 \cdot мм \quad D := root\left(\frac{F}{A(D)} - \sigma_{смят}, D\right) \quad D = 13.8\,мм$

Рис. 6.6. Расчет простейших соединений

Расчет штифта

Расчет на срез $A(d) := \frac{\pi \cdot d^2}{4}$

$d := 1 \cdot см \quad d := root\left(\frac{F}{A(d)} - \tau_{среза}, d\right) \quad d = 16\,мм$

Расчет на смятие $A(h) := h \cdot d$

$h := 0.1 \cdot см \quad h := root\left(\frac{F}{A(h)} - \sigma_{смят}, h\right) \quad h = 3.1\,мм$

Расчет сварного шва $\delta := 5 \cdot мм \quad F := 100 \cdot кН$

Расчет пластины на разрыв $A(b) := b \cdot \delta$

$b := 1 \cdot см \quad b := root\left(\frac{F}{A(b)} - \sigma_{раст}, b\right) \quad b = 200\,мм$

Расчет на срез сварного шва $A(L) := \delta \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot (2 \cdot L + b)$

$L := 1 \cdot см \quad L := root\left(\frac{F}{A(L)} - \tau_{среза}, L\right) \quad L = 182.8\,мм$

Рис. 6.7. Расчет простейших соединений *(окончание)*

Форма условия прочности во всех случаях расчета одинакова. Она приобретает вид равенства, т. к. Mathcad не выполняет численных расчетов с неравенствами.

Для решения равенства используется функция `root`, которая требует подстановки выражения, равного нулю, поэтому вместо условия прочности $\sigma_{max} \le [\sigma]$ используется выражение $\sigma_{max} - [\sigma] = 0$.

В получившемся универсальном выражении (функции прочности) для каждого вида расчета надо ввести свой неизвестный размер, который нужно найти, и вид допускаемого напряжения.

Перед каждым расчетом надо ввести свое выражение для площади поперечного сечения (растяжения, среза или смятия) как функцию от искомого размера.

Каждому расчету предшествует начальное приближение неизвестной, которую надо определить.

Так как расчет ведется с учетом размерностей, то и начальное приближение надо задавать в виде произведения числа на размерность. Для получения результата в миллиметрах необходимо щелкнуть мышью на результате и в черный квадратик справа от числа вписать требуемую размерность (мм).

6.3. Кручение стержней круглого поперечного сечения

Кручение — один из четырех видов простых деформаций. При кручении стержень нагружен только парами сил, вращающих стержень вокруг продольной оси x. При этом в поперечных сечениях стержня действует только одно внутреннее усилие — *крутящий момент*, $M_к = M_x$ численно равный сумме моментов всех сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Знак крутящего момента обычно безразличен, так как прочность стержня при кручении зависит только от величины крутящего момента и не зависит от его направления. Тем не менее для упорядочения расчетов в ряде учебников рекомендуется считать крутящий момент положительным, если при взгляде со стороны любого конца стержня мы видим внешний закручивающий момент действующим против часовой стрелки.

В технике наиболее часто используются стержни круглого или кольцевого поперечного сечения. Оказывается и расчет таких стержней на кручение значительно проще, чем стержней с другой формой поперечного сечения. С этого случая и начнем изучение деформации кручения стержней.

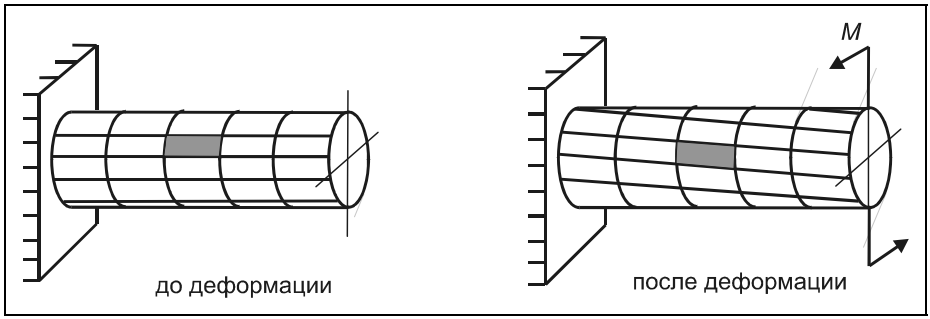


Рис. 6.8. Деформация прямоугольной сетки при кручении стержня

Рассмотрим результат следующего эксперимента. На поверхность резинового стержня круглого поперечного сечения нанесем прямоугольную сетку (рис. 6.8).

Нагрузим стержень парой сил, закручивающей стержень вокруг продольной оси. При этом поперечные сечения стержня поворачиваются относительно друг друга, и нанесенная сетка линий искажается. Первоначально прямоугольные элементы сетки становятся параллелограммами.

Изменение формы элемента сетки свидетельствует о деформации сдвига, происходящей при кручении стержня круглого поперечного сечения.

6.3.1. Касательные напряжения и угол закручивания

Основные гипотезы

Вывод формул для напряжений и перемещений при кручении начнем с гипотез, принимаемых для упрощения расчетов.

Замечание

Справедливы все гипотезы из *разд. 1.9*. Далее рассмотрим только гипотезы, непосредственно используемые при выводе формул.

- *Расстояние между поперечными сечениями при кручении не меняется.* Следовательно, деформация волокон стержня вдоль продольной оси x равна нулю $\varepsilon_x = 0$ и по закону Гука $\sigma_x = E\varepsilon_x$ нормальные напряжения в поперечных сечениях стержня отсутствуют $\sigma_x = 0$.

- *При кручении прямолинейные радиусы не искривляются, а только поворачиваются.*

  Круглое сечение остается круглым. Касательные напряжения τ перпендикулярны радиусам вращения.

- *Волокна друг на друга не давят.*

  Следовательно, нормальные напряжения в поперечном направлении отсутствуют $\sigma_y = \sigma_z = 0$.

Итак, на гранях элемента стержня, вырезанного плоскостями, перпендикулярными осям x, y, z, отсутствуют нормальные напряжения σ и действуют только касательные τ (рис. 6.9). Такой случай нагружения называется чистым сдвигом. Следовательно, *кручение — частный случай чистого сдвига* и все зависимости, полученные при рассмотрении деформации сдвига, могут быть использованы при кручении стержней.

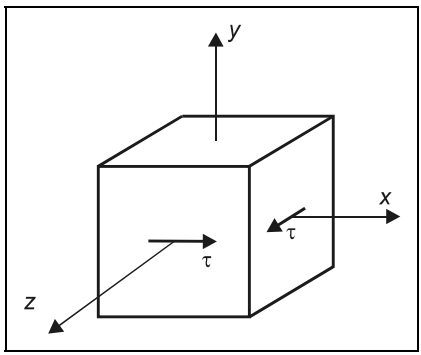


Рис. 6.9. Напряжения на гранях элемента при кручении

Порядок вывода расчетных формул в сопротивлении материалов

При выводе любых аналитических зависимостей в сопротивлении материалов рассматриваются условия существования малого элемента тела с целью последовательного определения его перемещений, деформаций и напряжений в нем.

Далее, проинтегрировав установленные зависимости по объему тела, находят связь перемещений, деформаций и напряжений с внешними силами.

Всякий расчет состоит из четырех этапов.

1. *Геометрический анализ* — устанавливает связь между перемещениями и деформациями малого элемента тела.
2. *Физический анализ* — устанавливает связь между деформациями элемента и напряжениями в нем. При упругой деформации используется закон Гука.
3. *Статический анализ* — устанавливает связь напряжений с внешними нагрузками путем интегрирования уравнений равновесия элемента по всему

объему тела с учетом граничных условий на поверхности. В сопротивлении материалов в роли таких интегралов выступают условия эквивалентности напряжений и внутренних усилий (1.2) и (1.3), установленные в *разд. 1.4.*

4. *Синтез установленных зависимостей.* Подставляя найденные на трех предыдущих этапах выражения одно в другое и упрощая их, получают окончательные расчетные формулы.

Вывод расчетных формул для напряжений и угла закручивания стержня

Геометрический анализ

Вырежем из стержня, испытывающего деформацию кручения (рис. 6.10), элемент длиной dx. В этом элементе, на некотором расстоянии ρ от центра кручения, выделим волокно ab и рассмотрим его перемещение.

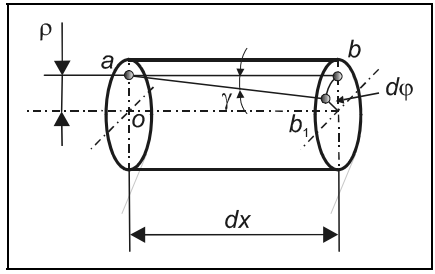


Рис. 6.10. Элемент стержня, работающего на кручение

В процессе деформации крайние поперечные сечения элемента dx поворачиваются относительно друг друга. Мысленно остановим левое сечение. Тогда правое сечение повернется относительно него на угол $d\varphi$. При этом волокно ab поворачивается на угол сдвига γ и приходит в положение ab_1.

Найдем связь между углом поворота сечения $d\varphi$ и углом сдвига волокна γ. Перемещение правого конца волокна точки b

$$bb_1 = \rho \cdot d\varphi = dx \cdot \gamma .$$

Откуда

$$\gamma = \frac{d\varphi}{dx}\rho . \qquad (6.5)$$

Физический анализ

Так как кручение — это частный случай чистого сдвига, при упругой деформации для связи деформаций и напряжений используем закон Гука при сдвиге с учетом выражения (6.5)

$$\tau = G \cdot \gamma = G\rho \frac{d\varphi}{dx}. \tag{6.6}$$

Формула для касательных напряжений получена, но пользоваться ею нельзя, т. к. неизвестна величина $\frac{d\varphi}{dx}$. Однако логика подсказывает, что чем больше крутящий момент $M_к$, тем больше угол закручивания стержня φ.

Статический анализ

Воспользуемся условием эквивалентности напряжений и внутренних усилий для связи касательных напряжений с крутящим моментом. Крутящий момент есть результат действия касательных напряжений в поперечном сечении стержня

$$M_к = \int_A \tau \cdot \rho \cdot dA = \int_A G\rho \frac{d\varphi}{dx} \rho dA = G \frac{d\varphi}{dx} \int_A \rho^2 dA. \tag{6.7}$$

В выражении (6.7) за знак интеграла вынесены величины постоянные, независящие от выбора площадки dA. Выражение под интегралом представляет собой полярный момент инерции поперечного сечения $J_p = \int_A \rho^2 dA$. Тогда

$$M_к = G \frac{d\varphi}{dx} J_p.$$

Откуда

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_к}{G \cdot J_p}. \tag{6.8}$$

Подставив выражение (6.8) в выражение (6.6), находим

$$\tau = G \cdot \rho \frac{M_к}{G \cdot J_p}.$$

Сократив это выражение на модуль сдвига G, окончательно получаем

$$\tau = \frac{M_к}{J_p} \rho. \tag{6.9}$$

Формулу для угла закручивания стержня получаем путем интегрирования выражения (6.8).

$$\varphi = \int_l \frac{M_к \cdot dx}{G \cdot J_p},$$

где l — длина стержня.

Если на стержень действуют несколько внешних нагрузок, то

$$\varphi = \sum \int_l \frac{M_к \cdot dx}{G \cdot J_p}, \tag{6.10}$$

где сумма берется по числу участков на стержне. Границами участков являются сечения, где, либо приложены нагрузки, либо изменяются форма и размеры поперечного сечения.

Если крутящий момент по длине участка не меняется, то интеграл принимает вид суммы

$$\varphi = \sum \frac{M_к \cdot l}{G \cdot J_p}, \tag{6.11}$$

где l — длина соответствующего участка.

Условие прочности при кручении

Построим эпюру распределения касательных напряжений по сечению круглого стержня при кручении. В соответствии с формулой (6.9) касательные напряжения распределены по сечению по линейному закону и пропорциональны радиусу ρ (рис. 6.11).

При $\rho = 0$ (в центре круга) $\tau = 0$.

При $\rho = \rho_{max} = \frac{d}{2}$ (на поверхности круга) $\tau = \tau_{max} = \frac{M_к}{J_p}\rho_{max}$.

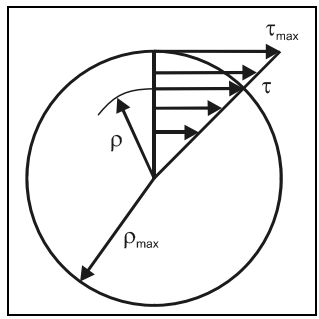


Рис. 6.11. Касательные напряжения в круглом сечении при кручении

Введем новую геометрическую характеристику сечения

$$W_p = \frac{J_p}{\rho_{\max}},$$

где W_p — момент сопротивления сечения при кручении или полярный момент сопротивления.

Тогда

$$\tau_{\max} = \frac{\max M_к}{W_p}. \qquad (6.12)$$

Для круглого поперечного сечения

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4 \qquad \rho_{\max} = \frac{d}{2}$$

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3. \qquad (6.13)$$

Для кольца

$$J_p = \frac{\pi d^4(1-\alpha^4)}{32} \approx 0,1d^4(1-\alpha^4) \qquad \alpha = \frac{d}{D} \quad \rho_{\max} = \frac{D}{2}$$

$$W_p = \frac{\pi D^3(1-\alpha^4)}{16} \approx 0,2d^3(1-\alpha^4). \qquad (6.14)$$

Условие прочности при кручении $\tau_{\max} \le [\tau]$ или с учетом (6.12)

$$\tau_{\max} = \frac{M_к}{W_p} \le [\tau] \approx (0,5-0,6)[\sigma]. \qquad (6.15)$$

6.3.2. Потенциальная энергия при кручении стержня

Потенциальная энергия упругой деформации, численно равная работе внешних сил, может быть определена как площадь диаграммы деформирования. При упругой деформации — это площадь треугольника (рис. 6.12). Если стержень нагружен одной парой сил, то с учетом выражения (6.11)

$$П = \frac{M_к \varphi}{2} = \frac{M_к}{2}\frac{M_к l}{G \cdot J_p} = \frac{M_к^2 l}{2G \cdot J_p}.$$

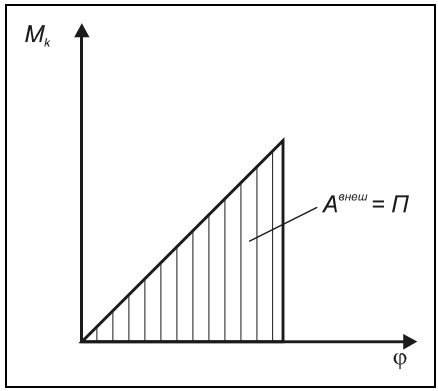


Рис. 6.12. Диаграмма деформирования при кручении

В общем случае действия произвольной нагрузки, если $M_к \neq Const$

$$П = \int_l \frac{M_к^2 dx}{2G \cdot J_p} \qquad (6.16).$$

Рассмотрим второй (более общий) способ определения потенциальной энергии упругой деформации $П$. Найдем ее как интеграл по объему V от удельной потенциальной энергии $П_0$: $П = \int_V П_0 dV$.

С учетом $dV = dA \cdot dx$,

$$П_0 = \frac{\tau \cdot \gamma}{2} \text{ и } \tau = \frac{M_к}{J_p}\rho$$

$$П = \int_l \int_A \frac{\tau^2}{2G} dA \cdot dx = \int_l \int_A \frac{M_к^2}{J_p^2}\rho^2 \frac{1}{2G} dA \cdot dx = \int_l \frac{M_к^2}{2G \cdot J_p^2} \int_A \rho^2 dA \cdot dx.$$

Так как $J_p = \int_A \rho^2 dA$, то

$$П = \int_l \frac{M_к^2}{2G \cdot J_p} dx,$$

что совпадает с выражением (6.16).

В случае действия нескольких нагрузок

$$П = \sum \int_l \frac{M_к^2}{2G \cdot J_p} dx. \qquad (6.17)$$

6.4. Связь между крутящим моментом, мощностью и скоростью вращения вала

При расчете электропривода различных устройств, исходя из нагрузки на исполнительный орган, например станок, требуется определить мощность электродвигателя.

На рис. 6.13 изображена схема электропривода, где вращение электродвигателя через муфту и редуктор передается на станок.

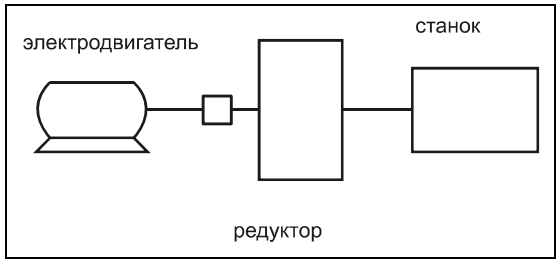


Рис. 6.13. Схема электропривода

Найдем связь между крутящим моментом на валу исполнительного органа и мощностью двигателя. Зная необходимый крутящий момент на валу станка и передаточное отношение редуктора, определяют момент на входном валу редуктора, а затем мощность электродвигателя.

Мощность N — это работа A в единицу времени t

$$N = \frac{A}{t}.$$

Работа пары сил $M_к$ на угле поворота вала φ

$$A = M_к \cdot \varphi.$$

Откуда

$$N = \frac{A}{t} = \frac{M_к \varphi}{t} = \frac{M_к}{\omega},$$

где $\omega = \frac{\varphi}{t}$ — угловая скорость вращения вала.

Угловая скорость ω связана с числом оборотов вала в минуту n зависимостью

$$\omega = \frac{2\pi n}{60}.$$

Тогда мощность $N = M_к \dfrac{2\pi n}{60}$, откуда

$$M_к = \frac{60N}{2\pi n} \approx 9{,}55\frac{N}{n} \text{ Нм},$$

если мощность N введена в ваттах, т. е. Нм / с.

При вводе N в киловаттах и n в об / мин

$$M_к = 9550\frac{N}{n} \text{ Нм}.$$

6.5. Кручение стержней некруглого поперечного сечения

При кручении стержней некруглого поперечного сечения оказывается несправедливой гипотеза плоских сечений. Происходит так называемая *депланация* сечений — сечения искривляются (рис. 6.14).

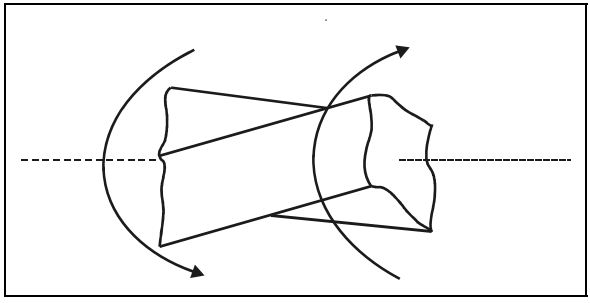


Рис. 6.14. Депланация прямоугольного сечения при кручении

Точное решение задачи кручения для некоторых типов поперечного сечения дается в теории упругости.

Для удобства использования результаты расчета стержней любого поперечного сечения принято представлять в той же форме, что и для стержней круглого поперечного сечения, а именно:

$$\varphi = \frac{M_к \cdot l}{G \cdot J_к} \qquad \tau_{max} = \frac{M_к}{W_к}, \tag{6.18}$$

где $J_к$ и $W_к$ — эмпирические или расчетные коэффициенты, называемые, соответственно, момент инерции при кручении и момент сопротивления при

кручении. Для стержней круглого или кольцевого сечения $J_к = J_p$ и $W_к = W_p$.

Для стержней некруглого поперечного сечения чаще всего эти коэффициенты берутся из справочников.

Условие прочности при кручении

$$\tau_{max} = \frac{M_к}{W_к} \le [\tau] \approx (0,5-0,6)[\sigma]. \qquad (6.19)$$

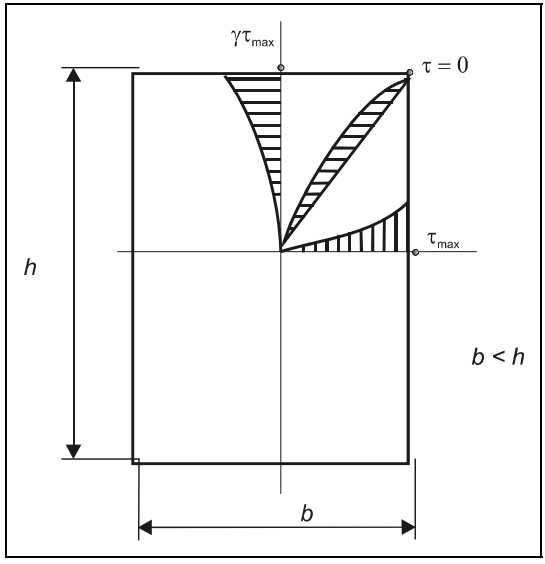


Рис. 6.15. Распределение касательных напряжений в прямоугольном сечении

Приведем имеющиеся в справочниках значения $J_к$ и $W_к$ для стержня прямоугольного поперечного сечения. На рис. 6.15 приведены эпюры касательных напряжений по главным осям инерции прямоугольного сечения и по диагонали.

Максимальные касательные напряжения τ_{max} возникают в середине длинной стороны прямоугольного сечения.

В середине короткой стороны $\tau = \gamma \cdot \tau_{max}$.

Момент инерции и момент сопротивления при кручении рассчитываются по формулам

$$J_к = \alpha h b^3 \quad W_к = \beta h b^2, \qquad (6.20)$$

где коэффициенты α, β и γ определяются из справочника в зависимости от отношения сторон прямоугольника $\frac{b}{h}$, где h — большая сторона прямоугольника. Значения этих коэффициентов приведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1. Коэффициенты для расчета на кручение стержней прямоугольного сечения

b/h	α	β	γ	b/h	α	β	γ
1	0,141	0,208	1,000	4	0,281	0,282	0,745
1,5	0,196	0,231	0,859	6	0,299	0,299	0,743
2	0,229	0,246	0,795	8	0,307	0,307	0,743
2,5	0,249	0,256	0,766	10	0,313	0,313	0,743
3	0,263	0,267	0,753	∞	0,333	0,333	0,743

6.6. Примеры расчета стержней на кручение

Рассмотрим пример расчета на кручение одного стержня, в котором будет учтено все сразу: различные по числу и величине моменты, различные длины участков и различные формы поперечных сечений. В этом примере рассмотрим разные способы закрепления стержня, рассматривая как статически определимую, так и статически неопределимую задачу. Такую задачу невозможно решить без использования компьютера.

Условная расчетная схема задачи приведена на рис. 6.16. Условность схемы состоит в том, что на схеме показан лишь один сосредоточенный момент M_i и один распределенный m_i, чтобы не загромождать схему большим количеством обозначений. Точно так же была рассмотрена условная схема нагружения стержня при растяжении-сжатии.

В рассматриваемом далее примере стержень нагружен тремя сосредоточенными и двумя распределенными моментами, хотя число нагрузок может быть любым.

По форме поперечного сечения стержень разделен на три участка: круглый, кольцевой, прямоугольный, хотя число участков с различной формой поперечного сечения может быть любым.

На рис. 6.17 приведены исходные данные для расчета. Так как задача решается с учетом размерностей, в начале программы введены производные размерности на русском языке.

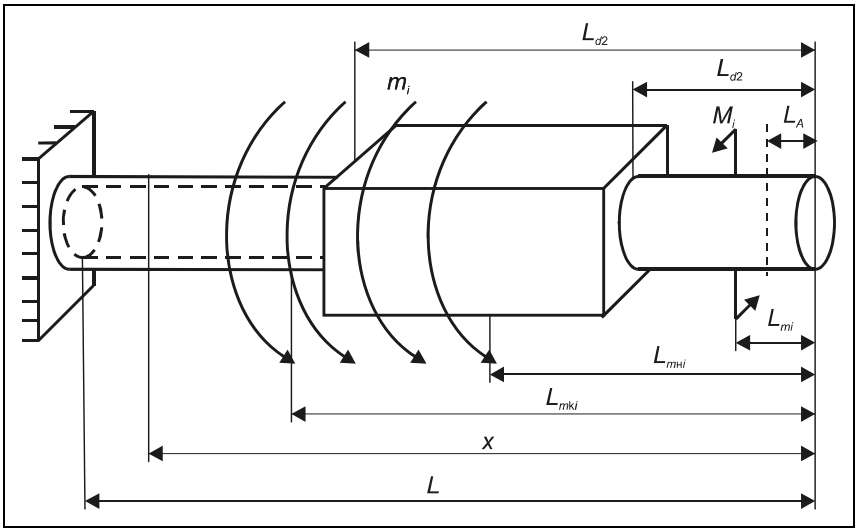


Рис. 6.16. Условная расчетная схема нагружения стержня при кручении

м := m см := 0.01·m мм := 0.001·m кН := 1000·N

кНм := 1000·N·m Нм := N·m МПа := $10^6 \cdot \frac{N}{m^2}$

град := deg

Исходные данные G := $8 \cdot 10^4$·МПа

для круга D1 := 50·мм

для кольца d := 40·мм D := 50·мм

для прямоугольного сечения

b := 50·мм h := 50·мм α := 0.141 β := 0.208 для квадрата

$m := \begin{pmatrix} -3000 \\ 2000 \end{pmatrix} \cdot \frac{Нм}{м}$ $L_{mн} := \begin{pmatrix} 10 \\ 70 \end{pmatrix} \cdot см$ $L_{mк} := \begin{pmatrix} 40 \\ 100 \end{pmatrix} \cdot см$ L := 1·м

$M := \begin{pmatrix} 500 \\ 700 \\ -800 \end{pmatrix} \cdot Нм$ $L_M := \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 60 \end{pmatrix} \cdot см$ $L_d := \begin{pmatrix} 0.3 \cdot L \\ 0.7 \cdot L \end{pmatrix}$ $x := 0 \cdot м, \frac{L}{100} .. L$

Рис. 6.17. Исходные данные к расчету стержня на кручение

Далее задается единственная характеристика материала — модуль сдвига G для стали.

Затем — размеры поперечных сечений и границы участков с различными сечениями L_d; нагрузки: 3 сосредоточенных момента M и 2 распределен-

ных m; координаты сечений, где они приложены: для сосредоточенных моментов L_M, для распределенных моментов указаны начало $L_{m\text{н}}$ и конец нагрузки $L_{m\text{к}}$; полная длина стержня L; диапазон изменения значений координаты x.

В процессе работы с примером поменяйте любые исходные данные и посмотрите на результаты расчета.

Далее в программе записан алгоритм решения статически определимой задачи.

Запись выражения для крутящего момента (рис. 6.18) аналогична записи, использованной в примере *главы 3*, т. е. с помощью булевых операторов условия записана сумма моментов, расположенных по одну сторону от сечения стержня.

Статически определимая задача

$$M_{kM}(x) := \sum_{i=1}^{rows(M)} M_i \cdot \left(x > L_{M_i}\right)$$

$$M_{km}(x) := \sum_{i=1}^{rows(m)} m_i \cdot \left(x - L_{m\text{н}_i}\right) \cdot \left(x > L_{m\text{н}_i}\right) - \sum_{i=1}^{rows(m)} m_i \cdot \left(x - L_{m\text{к}_i}\right) \cdot \left(x > L_{m\text{к}_i}\right)$$

$$M_k(x) := M_{kM}(x) + M_{km}(x)$$

Рис. 6.18. Определение крутящего момента

Распределенный момент заменен двумя моментами противоположного знака, действующими от начала нагрузки до конца стержня. Эпюра крутящих моментов приведена на рис. 6.20.

Геометрические характеристики сечения: момент инерции при кручении $J_\text{к}$ и момент сопротивления при кручении $W_\text{к}$ записаны в виде функции с использованием оператора условия с панели программирования (рис. 6.19). Такая форма записи условия наиболее наглядна. Фактически на экране виден перечень формул для выбранных форм поперечного сечения.

Для прямоугольного сечения других размеров не забудьте в исходных данных ввести новые значения коэффициентов α и β.

Если у вашего стержня более трех участков с различными сечениями, в операторы программирования надо добавить строки и ввести выражения для других форм поперечных сечений.

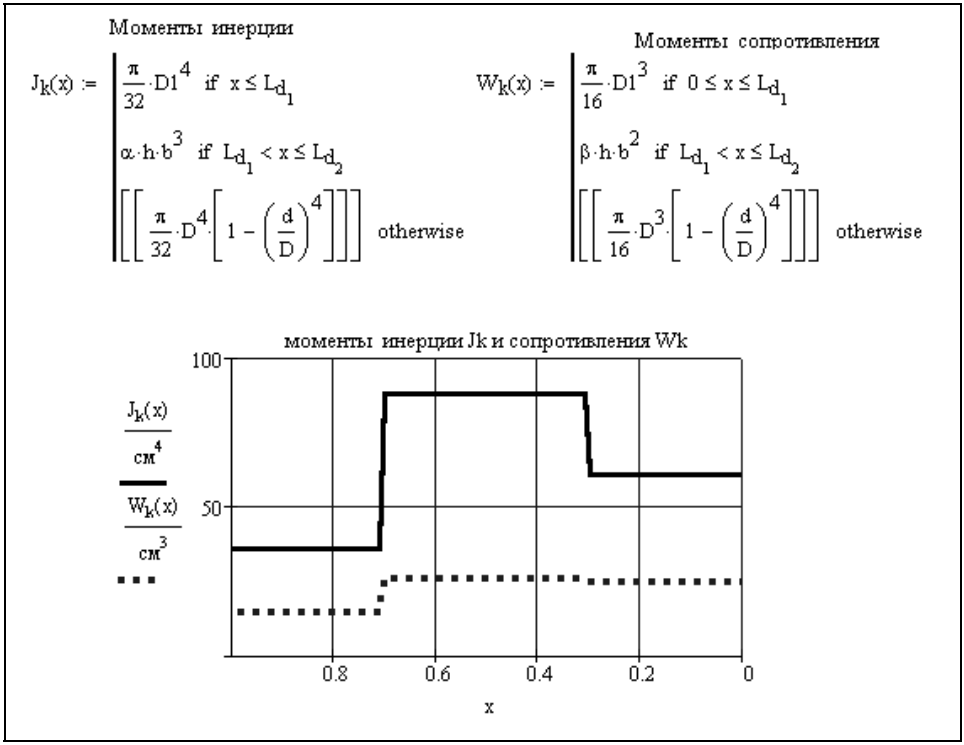


Рис. 6.19. Определение момента инерции и момента сопротивления при кручении

Для ввода дополнительной строки следует установить курсор в конец предыдущей строки, клавишей <Space> (пробел) выделить строку целиком, затем на панели программирования выбрать **Add Line** и в появившееся место ввода вписать новое выражение.

Для расчета максимальных напряжений и углов поворота сечений стержня введены формулы для их вычисления (рис. 6.20).

Обратите внимание, поскольку угол поворота отсчитывается от неподвижной заделки, в выражении для угла поворота интеграл берется не от 0 до x, а от L до x.

Графики изменения угла поворота сечения φ и максимальных напряжений τ_{max} приведены на рис. 6.20. На этом же рисунке показана эпюра крутящих моментов (заштрихована).

На рис. 6.21 и 6.22 показан расчет на кручение статически неопределимого стержня.

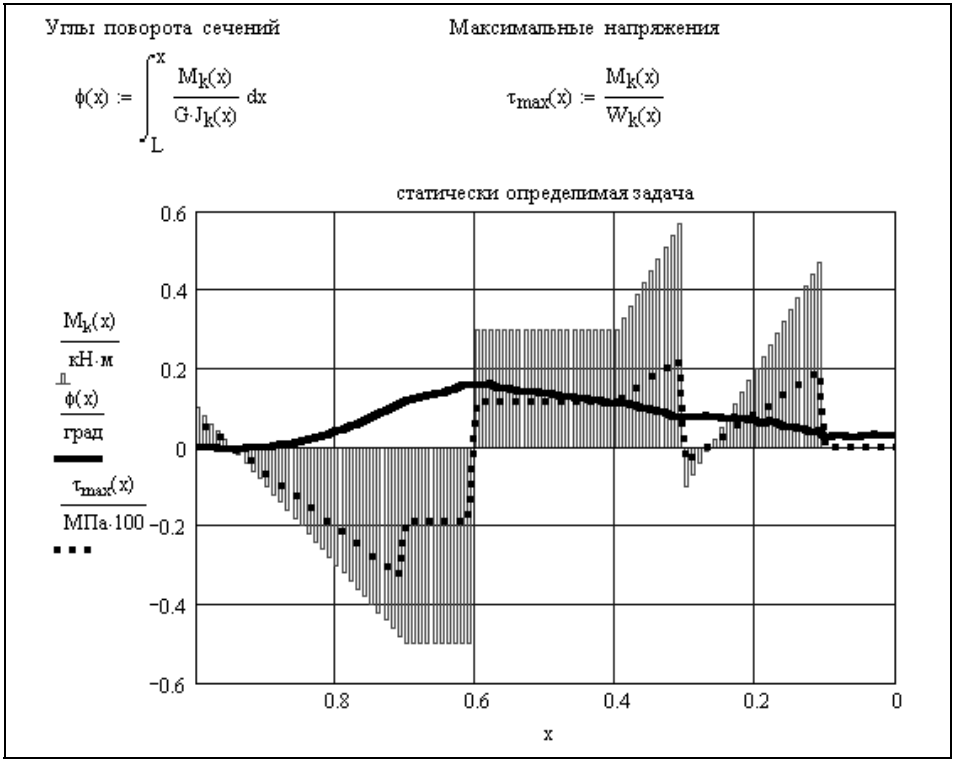


Рис. 6.20. Результаты расчета статически определимого стержня на кручение

Статически неопределимая задача

Задаемся положением наложенной связи A и углом поворота ϕA в месте ее наложения $L_a := 0.25 \cdot L$ $\phi A := 0.1 \cdot град$

поменяйте L_a и ϕA

$M_{k1}(Ma,x) := M_k(x) + Ma \cdot (x > L_a)$

$\phi(Ma,x) := \int_L^x \frac{M_{k1}(Ma,x)}{G \cdot J_k(x)}\,dx$ $\tau_{max}(Ma,x) := \frac{M_{k1}(Ma,x)}{W_k(x)}$

решение уравнения неразрывности деформаций $\phi(L_a) - \phi A = 0$

$Ma := 0 \cdot кНм$ начальное приближение

$Ma := root(\phi(Ma,L_a) - \phi A, Ma)$ $Ma = -26\,Нм$

Рис. 6.21. Решение статически неопределимой задачи на кручение

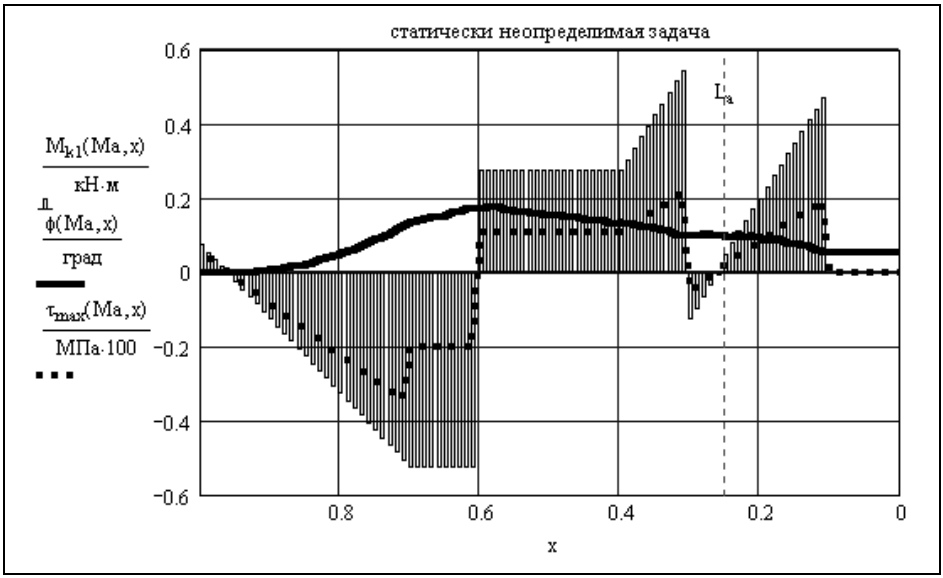


Рис. 6.22. Результаты расчета статически неопределимого стержня на кручение

Стержень становится статически неопределимым при наложении на него дополнительных связей. Эта связь может быть жесткой или упругой, и наложена в любом сечении стержня.

В примере (рис. 6.21) связь, допускающая угол поворота $\varphi_A = 0{,}1$ град, наложенная в сечении A, находящемся на расстоянии $L_A = L/4$ от свободного конца стержня.

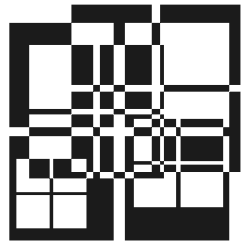
Поскольку реакция связи M_A неизвестна, то она должна входить в параметры всех выражений, предшествующих ее определению. С учетом этого заново определяем выражения для крутящего момента, угла поворота и максимального касательного напряжения.

Величину M_A определяем из уравнения неразрывности перемещений $\varphi(M_A, L_A) = \varphi_A$ с помощью функции `root` (рис. 6.21). Результаты расчета статически неопределимой задачи на кручение приведены на рис. 6.22.

Обратите внимание, что на всех графиках в этом примере ордината x изменяется от L до 0.

Так как начало координаты x взято на правом конце стержня, пришлось и на графиках изменить направление оси x. Для этого надо выделить график и в местах ввода по оси абсцисс ввести слева L, а справа 0.

ГЛАВА 7



Плоский поперечный изгиб

Изгибом называется деформация, в процессе которой продольная ось бруса искривляется.

Стержень (прямолинейный брус), работающий на изгиб, называется *балкой*.

При упругой деформации продольную ось балки (линию, соединяющую центры тяжести поперечных сечений) называют *упругой линией балки*.

Изгиб бывает *плоским* и *пространственным*. При плоском изгибе упругая линия балки — плоская кривая, при пространственном изгибе — пространственная кривая.

В этой главе рассмотрим лишь плоский поперечный изгиб. Пространственный изгиб бруса будет приведен в *главе 10*, как частный случай сложного сопротивления.

Поперечным называется изгиб балки, вызванный силами, перпендикулярными продольной оси балки. Это условие необходимо, чтобы изгиб был поперечным, но недостаточно. Дополнительное условие будет сформулировано в *разд. 7.1*.

При плоском поперечном изгибе в поперечных сечениях балки под действием внешних (поперечных) сил возникают два внутренних усилия: поперечная сила Q и изгибающий момент M, которые определяются методом сечений. Определение внутренних усилий при изгибе и построение эпюр Q и M описано в *главе 3*. В этой главе рассмотрим напряжения в поперечных сечениях балки и перемещения балки при изгибе.

7.1. Нормальные напряжения при изгибе балки

Под действием изгибающего момента M в поперечных сечениях балки возникают нормальные напряжения σ, под действием поперечной силы Q — касательные напряжения τ. Чтобы упростить задачу определения напряжений, рассмотрим чистый изгиб балки.

Чистым называется изгиб, при котором в поперечных сечениях балки отсутствует поперечная сила.

Пример чистого изгиба балки приведен на рис. 7.1. Под действием пары сил M балка изгибается. При этом верхние волокна сжимаются $\varepsilon < 0$, а нижние растягиваются $\varepsilon > 0$. В таком случае где-то в средней части балки есть волокна, где деформация $\varepsilon = 0$, а следовательно, и напряжение $\sigma = 0$.

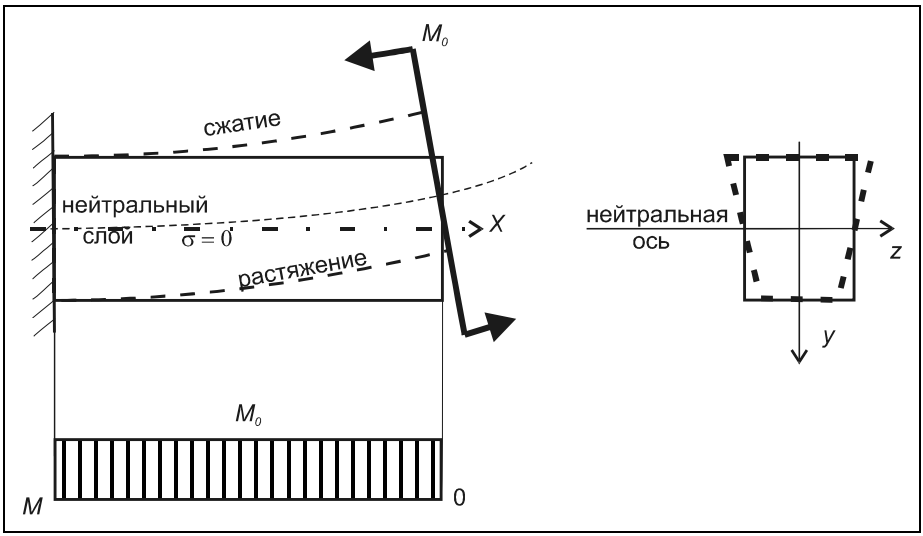


Рис. 7.1. Чистый изгиб балки

Слой волокон, в котором отсутствует нормальное напряжение, называется *нейтральным.*

След пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения называется *нейтральной осью*.

Форма поперечного сечения балки при изгибе также изменяется. В области сжатых волокон сечение становится шире, в области растянутых — у́же, т. к.

продольная и поперечная деформации связаны коэффициентом Пуассона $\varepsilon_{\text{попер}} = -\mu \cdot \varepsilon_{\text{прод}}$.

При расчете балки на изгиб будем считать, что справедливы все гипотезы из *разд. 1.6.* Из них выделим две гипотезы, которые будут использованы при выводе формулы нормальных напряжений при изгибе.

- *Гипотеза отсутствия боковых давлений* — волокна друг на друга не давят. В силу этой гипотезы при чистом изгибе волокна балки испытывают растяжение-сжатие $\sigma_z = \sigma_y = \tau = 0 \quad \sigma_x = \sigma$, следовательно, справедлив закон Гука при растяжении-сжатии $\sigma = E \cdot \varepsilon$.
- *Гипотеза плоских сечений* — сечения плоские до деформации остаются плоскими после деформации.

Как и при кручении, вывод конечной формулы состоит из трех частей.

Геометрический анализ

Вырежем из балки элемент длиной *dx* и рассмотрим его деформацию (рис. 7.2).

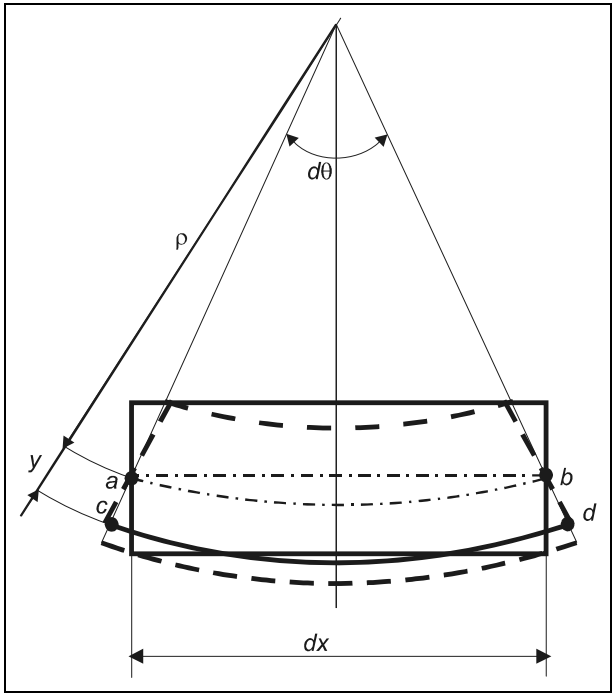


Рис. 7.2. К определению деформации при изгибе

Предположим, что волокно ab — след нейтрального слоя, его положение еще предстоит определить. Тогда в этом слое волокно не деформируется $\varepsilon = 0$ и $\sigma = 0$.

На некотором расстоянии y от ab возьмем волокно cd и рассмотрим его деформацию

$$ab = dx = \rho \cdot d\theta$$
$$cd = (\rho + y) \cdot d\theta \text{,}$$

где ρ — радиус кривизны нейтрального слоя.

Деформация волокна cd на расстоянии y от нейтрального слоя

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{cd - ab}{ab} = \frac{(\rho + y) \cdot d\theta}{\rho \cdot d\theta}.$$

Откуда после упрощения получаем

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}. \tag{7.1}$$

Физический анализ

Справедлив закон Гука. Следовательно, в силу гипотезы отсутствия боковых давлений

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \frac{y}{\rho}. \tag{7.2}$$

Формула есть, но пользоваться ею нельзя, т. к не известен радиус кривизны нейтрального слоя ρ. Чем больше нагрузка, тем меньше радиус кривизны. Найдем связь между ними.

Статический анализ

Изгибающий момент в сечении вызывает появление нормальных напряжений. Связь между ними устанавливает условие эквивалентности (1.3).

$$M_z = \int_A \sigma y \cdot dA.$$

С учетом (7.2)

$$M_z = \int_A \frac{Ey^2}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} J_z, \tag{7.3}$$

где $J_z = \int_A y^2 dA$.

Из выражения (7.3) находим кривизну балки

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{E \cdot J_z}. \tag{7.4}$$

Подставляя (7.4) в (7.2) получаем $\sigma = \frac{M_z}{E \cdot J_z} E \cdot y$

или окончательно

$$\sigma = \frac{M_z}{J_z} y. \tag{7.5}$$

Формула (7.5) выведена при чистом изгибе балки. При плоском поперечном изгибе гипотеза плоских сечений несправедлива и полученная формула дает ошибку. Однако при отношении длины балки к высоте поперечного сечения $\frac{l}{h} > 10$ погрешность расчета не превышает 5% , что позволяет использовать полученную формулу при плоском поперечном изгибе длинных и тонких балок.

Завершая статический анализ задачи, рассмотрим еще два условия эквивалентности (1.2) и (1.3).

$$N = \int_A \sigma \cdot dA. \tag{7.6}$$

Так как при изгибе нет продольных усилий $N = 0$. Подставим выражение (7.5) в (7.6)

$$N = \int_A \frac{M_z}{J_z} y \cdot dA = \frac{M_z}{J_z} \int_A y \cdot dA = \frac{M_z}{J_z} S_z = 0,$$

где $S_z = \int_A y \cdot dA$ — статический момент сечения относительно нейтральной оси. Изгибающий момент M_z и момент инерции J_z не могут быть равны нулю, поэтому $S_z = 0$. Следовательно, *нейтральная ось проходит через центр тяжести сечения.*

По условию эквивалентности (1.3)

$$M_y = \int_A \sigma \cdot z \cdot dA. \tag{7.7}$$

Но $M_y = 0$, т. к. рассматриваем плоский изгиб балки. Тогда, подставляя в условие (7.7) выражение (7.5), получаем

$$M_y = \int_A \frac{M_z}{J_z} y \cdot z \cdot dA = \frac{M_z}{J_z} \int_A y \cdot z \cdot dA = \frac{M_z}{J_z} J_{yz} = 0,$$

где $J_{yz} = \int_A y \cdot z \cdot dA$ — центробежный момент инерции сечения. Следовательно, $J_{yz} = 0$, а оси y и z являются главными осями инерции сечения балки.

Теперь можно сформулировать дополнительное условие существования плоского изгиба.

Изгиб является плоским, если все силы лежат в одной из главных плоскостей инерции балки, т. е. в плоскости, проходящей через одну из главных осей инерции сечения и продольную ось балки.

7.1.1. Условие прочности при изгибе

Нормальные напряжения σ при изгибе, в соответствии с формулой (7.5), распределяются по линейному закону (рис. 7.3). На уровне нейтральной оси при $y = 0$ $\sigma = 0$. В волокнах, максимально удаленных от нейтральной оси, т. е. на поверхности балки, возникают максимальные напряжения σ_{max} в области растянутых волокон и минимальные напряжения σ_{min} в области сжатых волокон.

Условие прочности в сопротивлении материалов имеет вид $\sigma_{max} \le [\sigma]$.

Запишем выражение для σ_{max}

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{J_z} y_{max} = \frac{M_{max}}{W_z},$$

где $W_z = \frac{J_z}{y_{max}}$ — момент сопротивления при изгибе.

Окончательный вид условия прочности

$$\sigma_{max} = \frac{|M_{max}|}{W_z} \le [\sigma]. \qquad (7.8)$$

Запишем моменты сопротивления для наиболее часто используемых сечений.

Для балки прямоугольного сечения (рис. 7.5):

$$J_z = bh^3/12; \quad y_{max} = \frac{h}{2}; \quad W_z = \frac{J_z}{y_{max}} = \frac{bh^3}{12h/2} = \frac{bh^2}{6}.$$

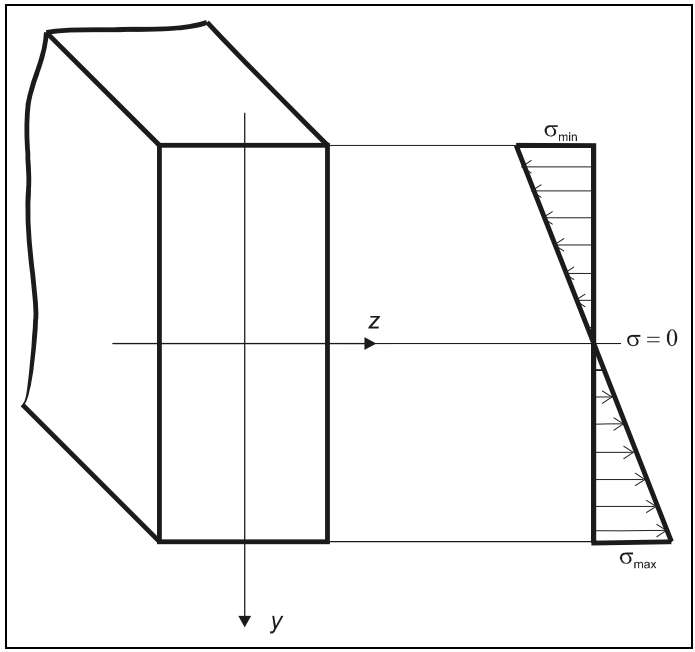


Рис. 7.3. Нормальные напряжения в поперечном сечении балки при изгибе

Для балки круглого сечения:

$$J_z = \pi d^4 / 64 ; \quad y_{\max} = \frac{d}{2} ; W_z = \frac{\pi d^4}{64\, d/2} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1 d^3 .$$

Для балки кольцевого сечения:

$$\alpha = d/D ; \quad J_z = \frac{\pi D^4}{64}(1-\alpha^4) ; \quad y_{\max} = \frac{D}{2} ; W_z = \frac{\pi D^4}{64}(1-\alpha^4) \cdot \frac{1}{D/2} = \frac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4) .$$

Для стальных конструкций прочность материала на растяжение и на сжатие одинакова. Однако у некоторых материалов она различна.

У чугуна предел прочности на сжатие в 4 раза больше, чем на растяжение.

У дерева, наоборот, прочность на растяжение в 2 раза больше, чем на сжатие.

В таких случаях иногда приходится проверять два условия прочности: на растяжение и на сжатие.

Рассмотрим чугунный рельс, лежащий на двух опорах, нагруженный посередине силой (рис. 7.4). Пример не очень корректный, т. к. в настоящее время используют стальные рельсы. Кроме того, рельс, лежащий на шпалах, надо рассматривать как балку на упругом основании, а это совсем другой расчет.

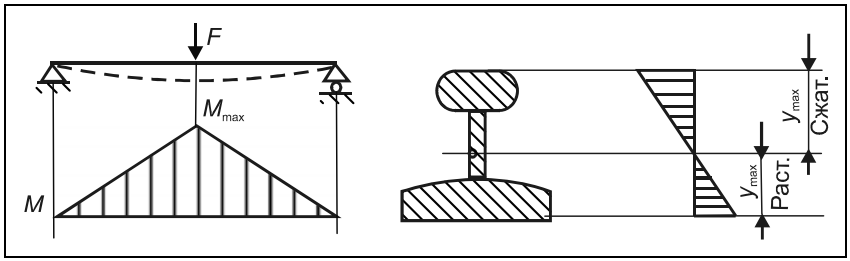


Рис. 7.4. Изгиб чугунного рельса

Под действием силы F рельс прогибается. Верхние волокна сжимаются, нижние растягиваются. Так как на сжатие прочность чугуна выше, чем на растяжение, желательно, чтобы сжимающие напряжения в балке были больше, чем растягивающие. Это достигается формой поперечного сечения рельса. Центр тяжести рельса смещен вниз в сторону массивного основания.

Для чугунного рельса надо делать две проверки на прочность. Отдельно для сжатых и для растянутых волокон. Для сжатых:

$$\sigma_{\text{сжат}} = \frac{|M_{\max}|}{J_z} y_{\max.\text{сжат}} \le [\sigma_{\text{сжат}}] = \frac{\sigma_{\text{в.сжат}}}{n}.$$

Для растянутых волокон:

$$\sigma_{\text{раст}} = \frac{|M_{\max}|}{J_z} y_{\max.\text{раст}} \le [\sigma_{\text{раст}}] = \frac{\sigma_{\text{в.раст}}}{n}.$$

7.1.2. Рациональная форма поперечного сечения

Рассмотрим балку прямоугольного сечения. Нормальные напряжения распределяются по сечению по линейному закону. Максимальные напряжения действуют на поверхности балки. На нейтральной оси (на уровне центра тяжести) $\sigma = 0$. Другими словами, вблизи центра тяжести сечения материал балки всегда недогружен.

С точки зрения экономии металла рационально вырезать часть металла вблизи нейтральной оси (рис. 7.5). Так, прямоугольное сечение целесообразно заменить двутавровым. При этом момент сопротивления W_z сечения балки уменьшается незначительно, а площадь A уменьшается в несколько раз. Таким образом, при тех же нагрузках вес балки резко уменьшается.

Тот же эффект получается при замене прямоугольного сечения швеллером, но в этом случае возможно скручивание балки, о чем будет сказано в *следующем разделе*.

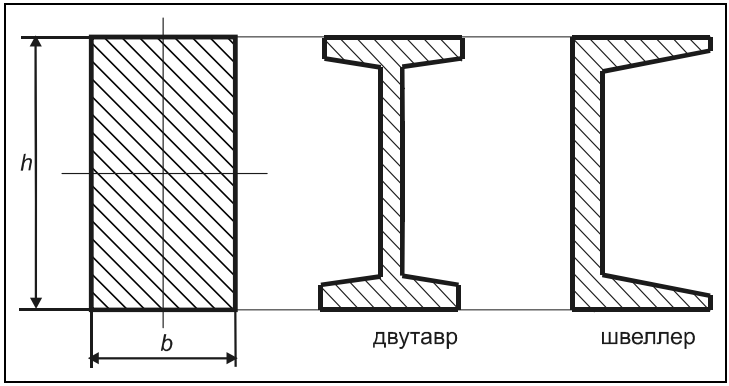


Рис. 7.5. Рациональные формы сечения балки

Существенной экономии материала можно достигнуть также при замене прямоугольного сечения коробчатым (для деревянных балок) или кольцевым (балка — труба).

Эффективность использования материала можно оценить отношением W_z / A, но это отношение имеет размерность длины. Лучше оценивать эффективность выбранной формы поперечного сечения безразмерным коэффициентом $\lambda = \dfrac{W_z}{A \cdot h}$.

Рассмотрим балку длиной 1 м, нагруженную силой 10 кН (рис. 7.6). Материал балки сталь Ст3, допускаемое напряжение $[\sigma] = 100$ МПа. Из условия прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_z} \le [\sigma]$$

найден допускаемый момент сопротивления

$$W_z \ge \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]} = \frac{10^4}{10^8} = 10^{-4}\ \text{м}^3 = 100\ \text{см}^3.$$

Подберем размеры для заданных на рис. 7.6 форм поперечного сечения.

Такой расчет слишком прост, чтобы использовать Mathcad для его выполнения. Однако на этом примере я хочу показать использование матричной функции пользователя при решении уравнения с помощью функции `root`, а также влияние принятой точности расчетов `TOL` на результаты расчета.

Расчет проведен с учетом размерностей, поэтому в начале расчета приведены производные размерности, далее — исходные данные для расчета (рис. 7.7).

Как и в предыдущих главах, допускаемое напряжение и допускаемый момент сопротивления обозначены $\sigma_{доп}$ и $W_{доп}$, т. к. Mathcad воспринимает квадратные скобки как математическое действие.

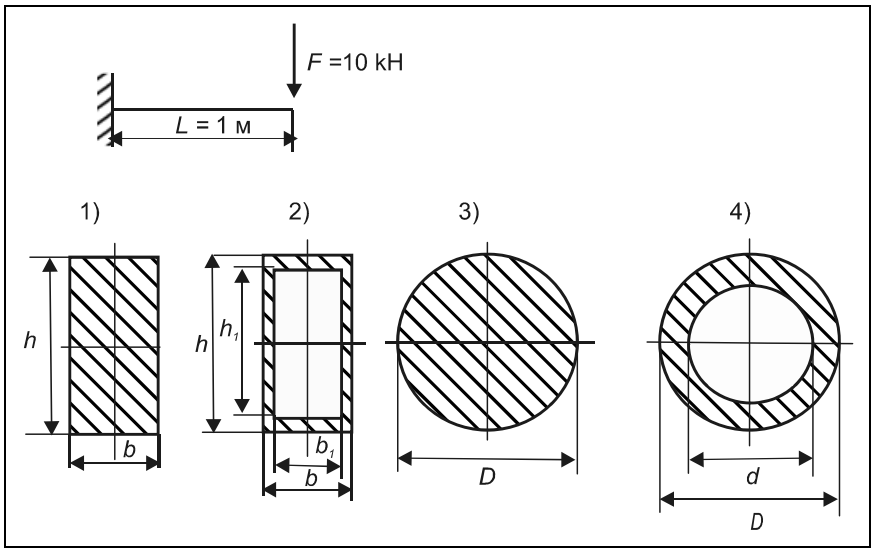


Рис. 7.6. Различные формы сечения балки

м := m см := 0.01·m мм := 0.001·m г := 0.001·kg ORIGIN := 1

$H := N \quad кН := 1000 \cdot N \quad кНм := 1000 \cdot N \cdot m \quad МПа := 10^6 \cdot \frac{H}{м^2}$

$L := 1 \cdot м \quad \gamma := 7.8 \cdot \frac{г}{см^3} \quad M := 10 \cdot кНм \quad \sigma_{доп} := 100 \cdot МПа$

b(h) := 0.8·h b1(h) := 0.8·b(h) h1(h) := 0.8·h D(h) := h d(h) := 0.8·D(h)

$$J_z(h) := \begin{pmatrix} \frac{b(h) \cdot h^3}{12} \\ \frac{b(h) \cdot h^3}{12} - \frac{b1(h) \cdot h1(h)^3}{12} \\ \pi \cdot \frac{D(h)^4}{64} \\ \frac{\pi \cdot D(h)^4}{64} - \frac{\pi \cdot d(h)^4}{64} \end{pmatrix}$$

$W_{доп} := \frac{M}{\sigma_{доп}}$

$W_{доп} = 100\ см^3$

$W_z(h) := \frac{J_z(h)}{h} \cdot 2$

$$A(h) := \begin{pmatrix} b(h) \cdot h \\ b(h) \cdot h - b1(h) \cdot h1(h) \\ \frac{\pi \cdot D(h)^2}{4} \\ \frac{\pi \cdot D(h)^2}{4} - \frac{\pi \cdot d(h)^2}{4} \end{pmatrix}$$

Q(h) := A(h)·L·γ вес балки

Рис. 7.7. Оценка экономичности формы поперечного сечения балки (начало)

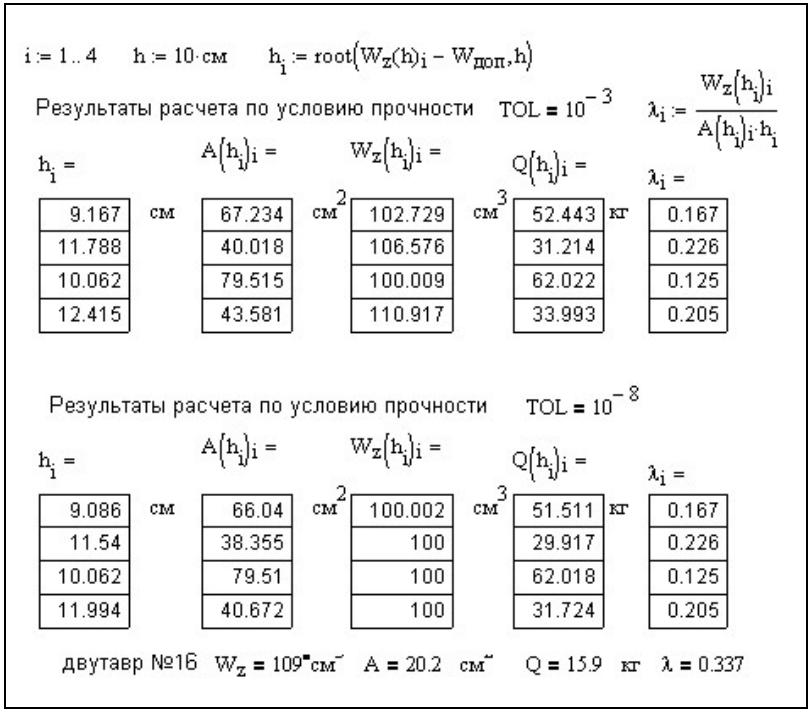


Рис. 7.8. Оценка экономичности формы поперечного сечения балки (окончание)

Формулы для площади поперечного сечения $A(h)$ и момента инерции $J_z(h)$ для прямоугольного, коробчатого, круглого и кольцевого сечений записаны в виде матричных функций от высоты поперечного сечения h. Соответственно, момент сопротивления сечения $W_z(h)$ и вес балки $Q(h)$ — также матричные функции.

Высоту поперечного сечения определяем с помощью функции `root`. Обратите внимание на индексную форму вывода результатов расчета.

Как видно из рис. 7.8, результаты расчета зависят от принятой точности расчета `TOL`. Функция `root` использует выражение $W_z(h)_i = W_{доп} = 100$ см^3. Однако при $\mathtt{TOL} = 10^{-3}$ величина $W_z(h_i)_i$ существенно отличается от 100. Увеличение точности расчета до $\mathtt{TOL} = 10^{-8}$ позволяет провести анализ условия прочности достаточно точно.

Для двутаврового сечения момент сопротивления, площадь поперечного сечения и вес одного погонного метра выписаны из сортамента прокатной стали из условия $W_z \approx W_{доп}$.

Работая с примером, поменяйте соотношение размеров сечений и посмотрите на изменение эффективности сечений.

Как видно из рис. 7.8, наиболее эффективным является двутавровое сечение, наименее эффективным — круглое сечение. При той же прочности вес двутавровой балки в 4 раза меньше, чем у балки круглого поперечного сечения.

7.2. Касательные напряжения при изгибе

При поперечном изгибе в сечениях балки действуют два внутренних усилия: изгибающий момент, вызывающий появление нормальных напряжений σ, и поперечная сила, вызывающая появление касательных напряжений τ.

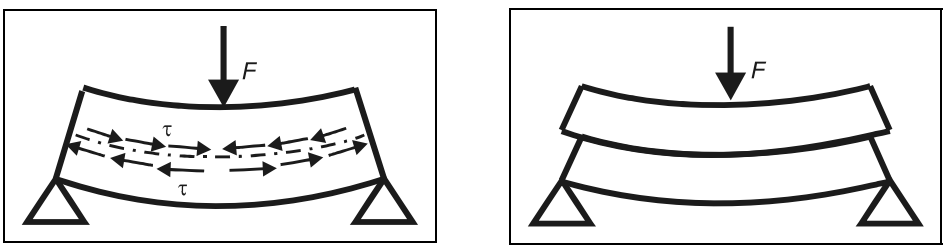
По закону парности касательных напряжений появление τ в поперечных сечениях балки влечет за собой появление τ в продольных сечениях (вдоль волокон).

Рассмотрим две балки: одну сплошную (рис. 7.9, *а*) и другую, составленную из двух отдельных листов (рис. 7.9, *б*). Под действием поперечной нагрузки балки изгибаются. В балке, составленной из листов, хорошо видны сдвиги между листами. В сплошной балке таких сдвигов нет. Возникающие между слоями касательные напряжения компенсируют сдвиги, сохраняя сплошность балки.

Распределение τ по ширине сечения балки неизвестно, поэтому для решения поставленной задачи примем две гипотезы:

- ❒ касательные напряжения по ширине сечения распределены равномерно;
- ❒ в поперечном сечении касательные напряжения параллельны линии действия поперечной силы.

В действительности, эти гипотезы справедливы лишь для прямоугольного поперечного сечения. Однако выведенную с помощью этих гипотез формулу используют и для некоторых других форм поперечного сечения.



а) *б)*

Рис. 7.9. Касательные напряжения при изгибе балки

Для вывода формулы касательных напряжений τ для балки, нагруженной силой F, построим эпюры изгибающих моментов M_z и поперечных сил Q (рис. 7.10).

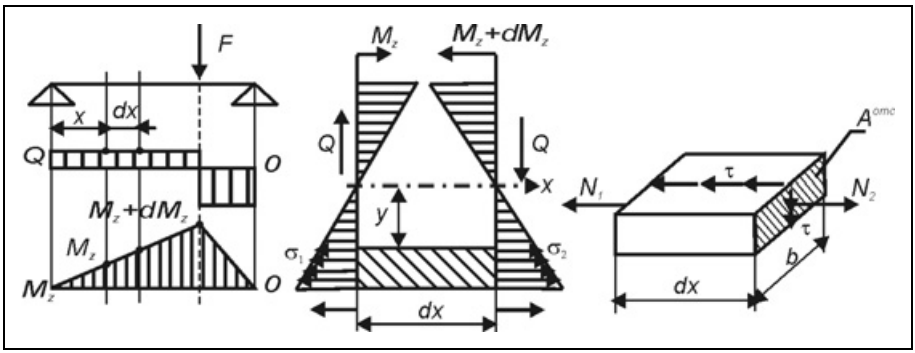


Рис. 7.10. К выводу касательных напряжений при изгибе

Вырежем из сплошной балки элемент длиной dx. Внутренние усилия с левой и с правой сторон элемента различны. Слева действуют M_z и Q, справа — $M_z + dM_z$ и Q.

От выбранного элемента на некотором расстоянии y от нейтральной оси продольным сечением отрежем нижнюю часть и рассмотрим ее равновесие.

$$\sum F_x = -N_1 - \tau \cdot b \cdot dx + N_2 = 0,$$

где

$$N_1 = \int_A \sigma_1 \cdot dA = \int_\Phi \frac{M_z}{J_z} y \cdot dA = \frac{M_z}{J_z} S_z^{\text{отс}},$$

$$N_2 = \int_A \sigma_2 \cdot dA = \int_A \frac{(M_z + dM_z)}{J_z} y \cdot dA = \frac{M_z + dM_z}{J_z} S_z^{\text{отс}},$$

$$S_z^{\text{отс}} = \int_A y \cdot dA.$$

Тогда

$$\tau = \frac{N_2 - N_1}{b \cdot dx} = \frac{\frac{M_z + dM_z}{J_z} S_z^{\text{отс}} - \frac{M_z}{J_z} S_z^{\text{отс}}}{b \cdot dx} = \frac{dM_z}{dx} \cdot \frac{S_z^{\text{отс}}}{b \cdot J_z}.$$

С учетом $Q = \frac{dM_z}{dx}$

$$\tau = \frac{Q \cdot S_z^{\text{отс}}}{b \cdot J_z}. \qquad (7.9)$$

Полученная формула (7.9) носит название формулы Журавского.

В этой формуле:

- Q — поперечная сила в сечении;
- b — ширина сечения на том уровне, где определяются касательные напряжения;
- J_z — момент инерции всего сечения относительно нейтральной оси;
- $S_z^{\text{отс}}$ — статический момент относительно нейтральной оси части сечения, расположенной выше или ниже уровня, где определяются касательные напряжения.

7.2.1. Распределение касательных напряжений в сечениях различной формы

Рассмотрим распределение касательных напряжений в сечениях различной формы.

Прямоугольное сечение

Дано: Q, b, h (рис. 7.11)

$$J_z = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$S_z^{\text{отс}} = A^{\text{отс}} \cdot y_c^{\text{отс}} = \frac{1}{2} b \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \left(\frac{h}{2} + y\right) = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right), \qquad (7.10)$$

где $A^{\text{отс}} = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right)$ — площадь отсеченной части сечения, $y_c^{\text{отс}} = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y\right)$ — расстояние от центра тяжести отсеченной части до нейтральной оси.

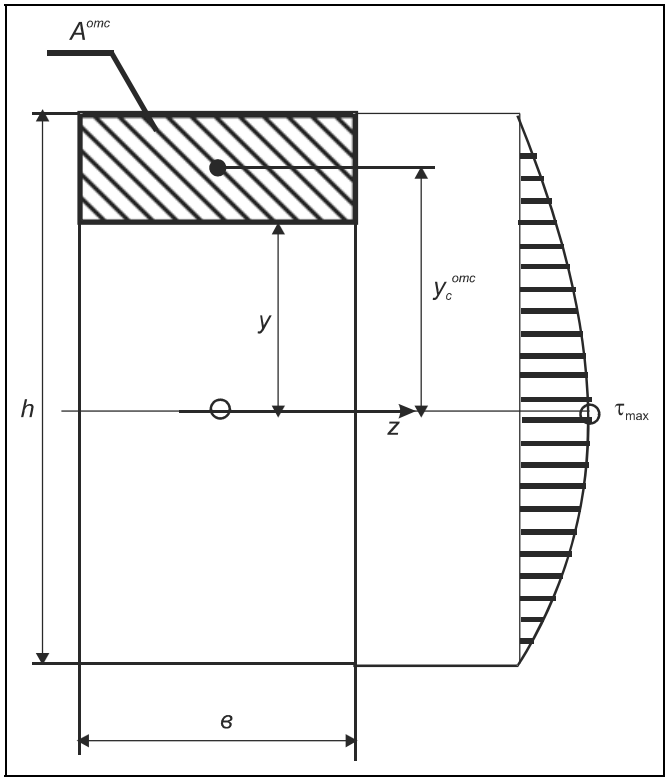


Рис. 7.11. Касательные напряжения в прямоугольном сечении балки при изгибе

Выражение (7.10) представляет собой уравнение параболы. На поверхности балки при $y = \pm\frac{h}{2}$ $\tau = 0$. На нейтральной оси при $y = 0$

$$\tau = \tau_{\max} = \frac{Q \cdot b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4}}{b \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}} = \frac{Q}{b \cdot h} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{A}.$$

Круглое и кольцевое сечения

Дано: Q, d.

Для круглого поперечного сечения несправедлива гипотеза о том, что касательные напряжения τ параллельны поперечной силе Q. В круглом поперечном сечении τ направлены по касательной к концентрическим окружностям, имеющим общий центр (рис. 7.12).

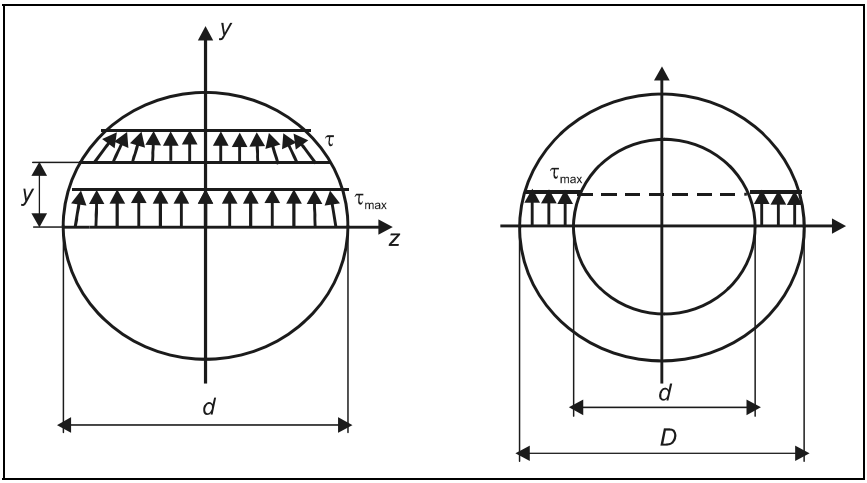


Рис. 7.12. Касательные напряжения в круглом сечении балки при изгибе

Закон распределения τ не может быть определен по формуле Журавского. Однако на уровне нейтральной оси, где все τ параллельны поперечной силе Q, можно по формуле Журавского определить максимальные касательные напряжения

$$\tau_{max} = \frac{Q \cdot \left(S_z^{отс}\right)_{max}}{b \cdot J_z}.$$

В этом выражении $b = d$ $J_z = \frac{\pi d^4}{64}$ $S_z^{отс} = \frac{\pi d^2}{8} \cdot \frac{4d}{3\pi} = \frac{d^3}{6}$.

Тогда $\tau_{max} = \frac{Q \cdot 64 \cdot d^3}{d \cdot \pi d^4 \cdot 6} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{A}$.

Для кольцевого сечения, применяя формулу Журавского, также можно найти τ_{max} на уровне нейтральной оси, рассматривая кольцо как разность двух кругов. В зависимости от толщины кольца $\frac{4}{3}\frac{Q}{A} < \tau_{max} < 2\frac{Q}{A}$.

Для тонкостенных колец можно принять $\tau_{max} \approx 2\frac{Q}{A}$.

Двутавровое сечение

Двутавр приближенно можно рассматривать как сечение, состоящее из трех прямоугольников (рис. 7.13). В прямоугольном сечении касательные напряжения τ распределены по параболе.

На поверхности $\tau = 0$. На нейтральной оси $\tau = \tau_{max}$. В месте перехода от полки к стенке двутавра его ширина b уменьшается примерно в 15 раз. Соответственно во столько же раз скачкообразно увеличиваются касательные напряжения.

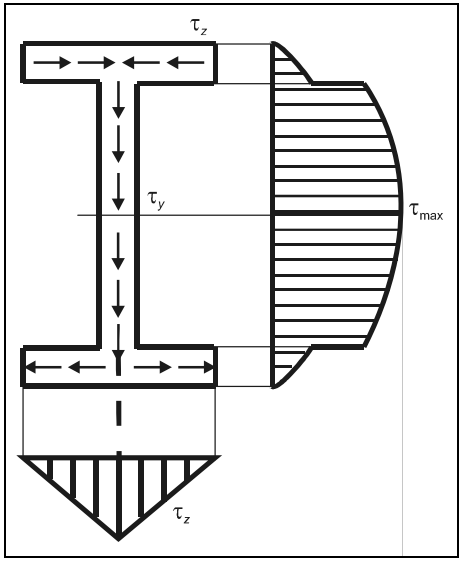


Рис. 7.13. Касательные напряжения в двутавровой балке при изгибе

Следует отметить, что в полках двутавра, кроме вертикальных касательных напряжений τ_y, действуют еще и горизонтальные τ_z, направленные, как показано на рис. 7.13. Они образуют поток касательных напряжений, который для двутавра является самоуравновешенным.

Швеллер

В швеллере касательные напряжения образуют неуравновешенный поток, который может вызвать скручивание балки (рис. 7.14, *а*). Чтобы компенсировать скручивающее действие касательных напряжений, внешнюю силу рекомендуется прикладывать не в центре тяжести швеллера, а сместить так, чтобы момент силы относительно продольной оси уравновешивал поток касательных напряжений (рис. 7.14, *б*).

Точка, в которую надо сместить силу, чтобы она уравновешивала скручивающее действие потока касательных напряжений, называется *центром изгиба*.

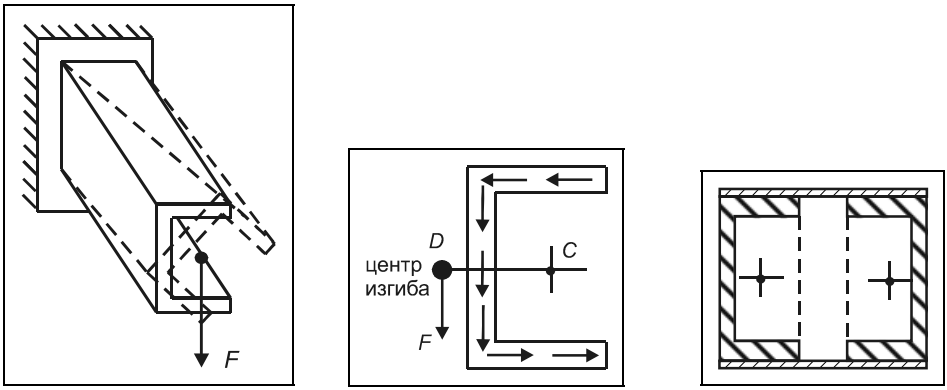


Рис. 7.14. Поток касательных напряжений в швеллере при изгибе

Положение центра изгиба определяется в теории расчета тонкостенных стержней открытого профиля. На практике не рекомендуется использовать один швеллер. Желательно, чтобы сечение балки было симметричным, и, если нужно использовать швеллер, сделайте симметричное сечение из двух швеллеров (рис. 7.14, *в*).

7.2.2. Проверка прочности по касательным напряжениям

Для длинных балок максимальные касательные напряжения, как правило, значительно меньше максимальных нормальных напряжений. Так, для балки круглого поперечного сечения, размеры которого подобраны из условия прочности по нормальным напряжениям при $\sigma_{max} = 100$ МПа, величина $\tau_{max} \approx 2$ МПа, т. е. пренебрежимо мала.

Необходимо также учесть, что нормальные напряжения максимальны на поверхности балки и равны нулю на уровне нейтральной оси, а касательные напряжения равны нулю на поверхности и максимальны на уровне нейтральной оси. Нет точки, в которой одновременно действовали бы максимальные нормальные и максимальные касательные напряжения.

Как правило, проверка прочности балки по касательным напряжениям не производится. Однако в некоторых случаях все-таки приходится делать такую проверку.

Проверка прочности балки по касательным напряжениям производится в следующих случаях.

- Для коротких балок.
- Если силы приложены вблизи опор балки.

Объяснение для обоих случаев одно. Рассмотрим две балки (рис. 7.15). Одна нагружена силой F посередине (рис. 7.15, *а*), другая — двумя силами $F/2$, приложенными на сравнительно малом расстоянии a от опор (рис. 7.15, *б*). Для первой балки $M_{\max}$ значительно больше, чем для второй. Максимальная поперечная сила $Q_{\max}$ для обеих балок одинакова. Размеры поперечного сечения подбираются по условию прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_z} \le [\sigma].$$

Для первой балки размеры сечения будут больше. При равенстве поперечных сил максимальные касательные напряжения будут больше в балке меньшего поперечного сечения, т. е. во второй (правой) балке.

- Если сечение имеет вырез вблизи нейтральной оси.

Например, для двутавровой балки или балки коробчатого сечения, согласно формуле Журавского, при уменьшении ширины поперечного сечения в несколько раз, во столько же раз увеличиваются касательные напряжения, и могут стать сопоставимы с нормальными напряжениями. Так, для двутавровой балки, если $\sigma_{\max} = 100$ МПа, то $\tau_{\max} \approx 25$ МПа.

- Для материалов с пониженной сдвиговой жесткостью.

Например, для балок из пластмассы, дерева, композиционных материалов, где волокна с высоким модулем сдвига скреплены между собой связующим материалом с гораздо меньшим модулем сдвига.

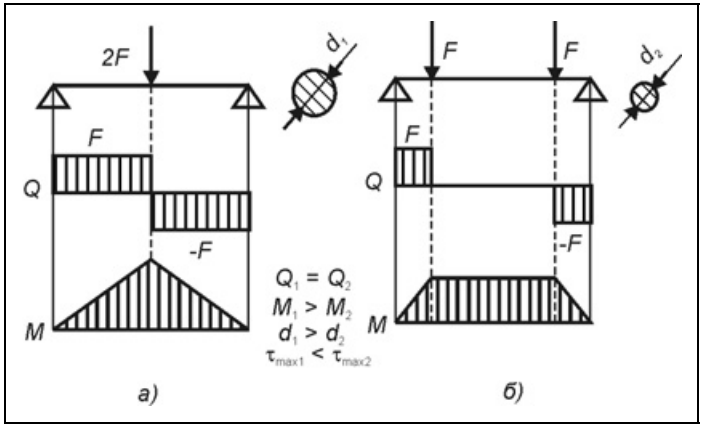


Рис. 7.15. Зависимость внутренних усилий от положения сил на балке

7.3. Потенциальная энергия упругой деформации при изгибе

Потенциальная энергия упругой деформации $П$ при изгибе численно равна работе внутренних сил, которая складывается из суммы работ изгибающего момента $П_M$ и поперечной силы $П_Q$

$$П = П_M + П_Q .$$

Полную потенциальную энергию $П$, накопленную в теле, найдем как интеграл по объему от удельной потенциальной энергии $П_0$. Потенциальная энергия изгибающего момента есть результат действия нормальных напряжений $П_0^\sigma = \dfrac{\sigma^2}{2E}$, где $\sigma = \dfrac{M_z}{J_z} y$, а элементарный объем $dV = dA \cdot dx$. Тогда

$$П_M = \int\limits_V П_0^\sigma dV = \int\limits_V \frac{\sigma^2}{2E} dV = \int\limits_l \iint\limits_A \left(\frac{M_z}{J_z} y \right)^2 \cdot \frac{1}{2E} dA \cdot dx = \int\limits_l \frac{M_z^2}{J_z^2 2E} \left(\int\limits_A y^2 dA \right) dx ,$$

где $\int\limits_A y^2 dA = J_z$.

Окончательно получаем

$$П_M = \int\limits_l \frac{M_z^2 \cdot dx}{2E \cdot J_z} .$$

Потенциальная энергия от поперечной силы Q есть результат действия касательных напряжений $П_0^\tau = \dfrac{\tau^2}{2G}$, где $\tau = \dfrac{Q \cdot S_z^{\text{отс}}}{b \cdot J_z}$. Тогда

$$П_Q = \int\limits_V П_0^\tau dV = \int\limits_V \frac{\tau^2}{2G} dV = \int\limits_l \iint\limits_A \frac{Q^2 \left(S_z^{\text{отс}} \right)^2}{b^2 J_z^2 2G} dA \cdot dx \cdot \frac{A}{A} .$$

Для сохранения единообразия формул для потенциальной энергии упругой деформации выражение $П_Q$ умножили и разделили на площадь поперечного сечения A. Тогда окончательно

$$П_Q = k \int\limits_l \frac{Q^2 dx}{2G \cdot A} ,$$

где $k = \dfrac{A}{J_z^2}\int\limits_A \left(\dfrac{S_z^{\text{отс}}}{b}\right)^2 dA$ — коэффициент неравномерности распределения касательных напряжений по сечению, величина, в большинстве случаев, близкая к единице $k = 1-1{,}2$.

Выражение полной потенциальной энергии упругой деформации при изгибе имеет вид

$$\Pi = \int\limits_l \frac{M_z^2 \cdot dx}{2E \cdot J_z} + k\int\limits_l \frac{Q^2 dx}{2G \cdot A}.$$

В случае наличия на балке нескольких участков с различной нагрузкой подсчитывается сумма интегралов по количеству участков

$$\Pi = \sum \int\limits_l \frac{M_z^2 \cdot dx}{2E \cdot J_z} + \sum k\int\limits_l \frac{Q^2 dx}{2G \cdot A}. \qquad (7.11)$$

7.4. Перемещения при изгибе

Балка при изгибе искривляется. При этом каждое сечение получает два перемещения: линейное — прогиб и угловое — угол поворота сечения (рис. 7.16).

Пусть в сечении x прогиб балки u_y. В сечении $x + dx$ прогиб балки $u_y + du_y$. Тогда, ввиду малости перемещений по сравнению с длиной балки, угол наклона касательной к упругой линии балки, равный углу поворота сечения

$$\theta \approx \text{tg}(\theta) = \frac{du_y}{dx}, \qquad (7.12)$$

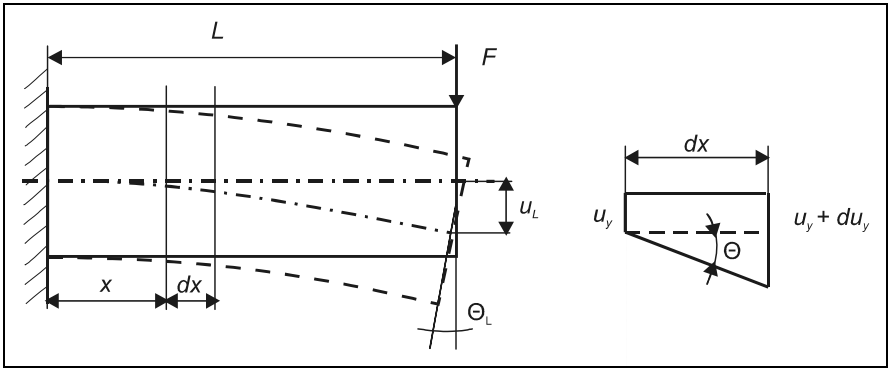


Рис. 7.16. Перемещения балки при изгибе

Запишем уравнение упругой линии балки. По выражению (7.4) кривизна балки $\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{E \cdot J_z}$.

С другой стороны, из аналитической геометрии

$$\frac{1}{\rho} = \frac{u_y''}{\left(1 + \left(u_y'\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Угол поворота сечения $\theta = u_y' \approx 0$ по сравнению с 1. Тогда кривизна балки $\frac{1}{\rho} \approx u_y''$. Приравнивая два выражения для кривизны балки, получаем уравнение упругой линии балки

$$EJ_z u_y'' = M_z. \tag{7.13}$$

Для определения прогиба балки необходимо дважды проинтегрировать уравнение упругой линии балки. Угол поворота сечения балки есть производная от прогиба (7.12).

С учетом дифференциальных зависимостей между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки (3.12) можно составить систему дифференциальных уравнений упругой линии балки

$$u_y' = \theta \qquad u_y'' = \frac{M_z}{EJ_z} \qquad u_y''' = \frac{Q}{EJ_z} \qquad u_y^{IV} = \frac{q}{EJ_z}. \tag{7.14}$$

7.4.1. Непосредственное интегрирование уравнения упругой линии балки

Непосредственное интегрирование уравнения упругой линии балки — это самый простой способ определения перемещений балки при изгибе. Необходимо составить уравнение изгибающего момента для заданной балки и, записав уравнение (7.13), проинтегрировать его — получим уравнение углов поворота сечений балки. После второго интегрирования получим уравнения прогибов балки

$$EJ_z u_y'' = M_z,$$

$$EJ_z \theta = EJ_z u_y' = \int M_z dx + C,$$

$$EJ_z u_y = \int\int M_z dx dx + Cx + D.$$

Произвольные постоянные интегрирования определяются из граничных условий закрепления балки. Если на балке n участков с различной нагрузкой, для каждого участка составляется свое уравнение упругой линии, дающее после интегрирования две произвольные постоянные. Всего — $2n$ постоянных, для определения которых надо составить систему из $2n$ уравнений и решить ее. Это создает большие трудности при определении перемещений вручную с помощью микрокалькулятора.

При использовании Mathcad таких трудностей нет. Уравнение изгибающего момента, записанное с использованием операторов условия, одно для всех участков.

Функция `odesolve` легко справляется с любым уравнением упругой линии (см. рис. 7.22) для всех балок, кроме балки с двумя консолями по концам, что связано с несовершенством функции `odesolve`, для которой одно из граничных условий обязательно должно относиться к началу интервала интегрирования.

7.4.2. Метод начальных параметров

Метод начальных параметров — это способ решения дифференциальных уравнений, при котором неизвестными параметрами являются значения функции и ее производных в начале координат. Для уравнения упругой линии это будут прогиб и угол поворота в начале координат на левом конце балки.

Для балки с несколькими участками, для того чтобы произвольные постоянные интегрирования на всех участках были равны, надо, чтобы слагаемые уравнения изгибающих моментов не менялись при переходе от одного участка к другому. Для этого используются два приема:

- момент пары сил умножается на фиктивное плечо в нулевой степени $M = M_0(x - a_m)^0$;
- распределенная нагрузка принимается действующей до конца балки. А чтобы не нарушить условия нагружения, в сечении, где заканчивается реальная нагрузка, прикладывается равная по величине распределенная нагрузка противоположного направления, также действующая до конца балки $M = q\dfrac{(x-a_q)^2}{2} - q\dfrac{(x-b_q)^2}{2}$.

Рассмотрим балку длиной l, нагруженную парой сил M_0, силой F и распределенной нагрузкой интенсивностью q (рис. 7.17). Расстояния от левого

конца балки до нагрузок M_0, F, q обозначим соответственно a_m, a_F и a_q — до начала распределенной нагрузки, b_q — до конца распределенной нагрузки. Начало координат возьмем на левом конце балки.

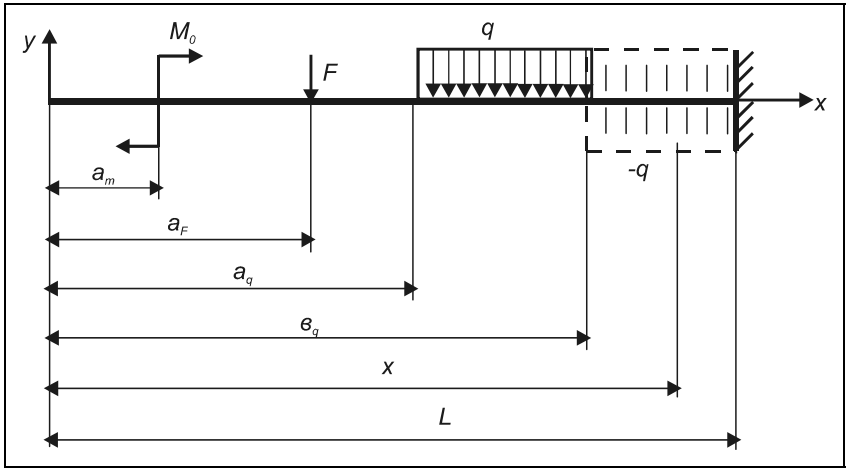


Рис. 7.17. Условная схема нагружения балки при изгибе

Для сечения, взятого на последнем участке балки, уравнение изгибающего момента имеет вид

$$EJ_z u_y'' = M(x) = M_0(x-a_m)^0 - F(x-a_F) - q\frac{(x-a_q)^2}{2} + q\frac{(x-b_q)^2}{2}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем уравнение углов поворота сечений

$$EJ_z u_y' = EJ_z\theta(x) = M_0(x-a_m) - F\frac{(x-a_F)^2}{2} - q\frac{(x-a_q)^3}{6} + q\frac{(x-b_q)^3}{6} + C.$$

Интегрируя еще раз, получаем уравнение прогибов балки

$$EJ_z u_y(x) = M_0\frac{(x-a_m)^2}{2} - F\frac{(x-a_F)^3}{6} - q\frac{(x-a_{qi})^4}{24} + q\frac{(x-b_q)^4}{24} + Cx + D.$$

Уравнения для других участков, согласно определению изгибающего момента, должны включать только слагаемые от нагрузок, находящихся по одну сторону (слева) от рассматриваемого сечения.

Определим смысл произвольных постоянных.

При $x = 0$

$$EJ_z\theta_0 = C \quad EJ_z u_{y0} = D.$$

Откуда

$$\theta_0 = \frac{C}{EJ_z} \quad u_{y0} = \frac{D}{EJ_z},$$

где u_{y0} и θ_0 — прогиб и угол поворота сечения балки в начале координат.

В общем виде, для случая действия любого количества нагрузок уравнение упругой линии балки принимает вид

$$EJ_z u_y = EJ_z u_{y0} + EJ_z \theta_0 x + \sum M_0 \frac{(x-a_m)^2}{2} + \sum F \frac{(x-a_F)^3}{6} + \\ + \sum q \frac{(x-a_{qi})^4}{24} - \sum q \frac{(x-b_q)^4}{24}. \qquad (7.15)$$

Это уравнение называется универсальным уравнением упругой линии балки или уравнением Крылова.

Данное уравнение составлено с учетом распределенной нагрузки постоянной интенсивности q. Если используется распределенная нагрузка переменной интенсивности $q(x)$, надо добавить слагаемые, содержащие первую, а если необходимо, то и вторую производную от $q(x)$.

Правила пользования уравнением Крылова.

1. Начало координат всегда на левом конце балки. В этом случае знаки прогиба и угла поворота сечения совпадают, в противном случае знаки противоположны.
2. Составить уравнение Крылова для последнего участка балки. Уравнение для произвольного сечения балки должно включать в себя только слагаемые, учитывающие нагрузки, расположенные слева от рассматриваемого сечения. Желательно записывать нагрузки в том порядке, в каком они стоят на балке, соблюдая форму записи, приведенную в уравнении (7.15).
3. Уравнение углов поворота сечений получается из уравнения прогибов путем дифференцирования.
4. Знак перед каждым слагаемым соответствует знаку изгибающего момента от данной нагрузки.
5. Начальные параметры u_{y0} и θ_0 определяются из граничных условий (рис. 7.18).

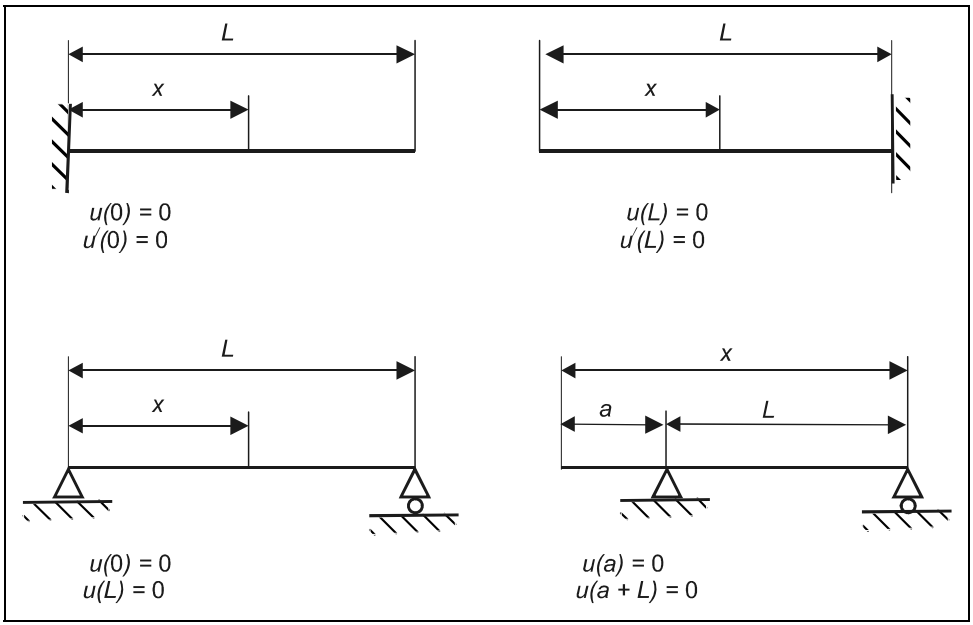


Рис. 7.18. Граничные условия для определения перемещений балки при изгибе

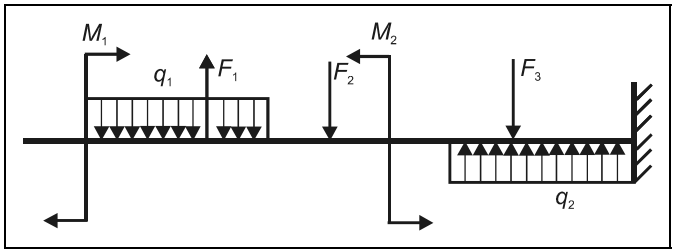
7.5. Пример расчета балки на изгиб

Рассмотрим две балки: консольную балку и балку на двух опорах (рис. 7.19). Нагрузки, приложенные к балкам, могут быть любыми. В данном примере используем нагрузки, указанные на рис. 7.21.

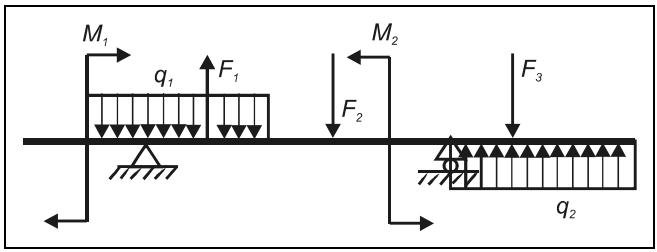
На балки действуют 2 пары сил, 3 сосредоточенные силы и 2 распределенные нагрузки постоянной интенсивности. Обозначения координат точек приложения нагрузок условно показаны на рис. 7.20, чтобы не загромождать схемы балок (рис. 7.19). Балки стальные длиной 1 м. Поскольку расчет ведется с учетом размерностей, на этом же рисунке приведены размерности, производные от стандартных.

7.5.1. Определение внутренних усилий

Выражения для поперечной силы и изгибающего момента для консольной балки, аналогичные использованным в *главе 3*, приведены на рис. 7.22. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов представлены на рис. 7.23. Присмотритесь к построенным эпюрам. Включите исключенное выражение. Убедитесь в справедливости дифференциальных зависимостей между поперечной силой и изгибающим моментом.



а)



б)

Рис. 7.19. Схемы балок, использованных в расчетах

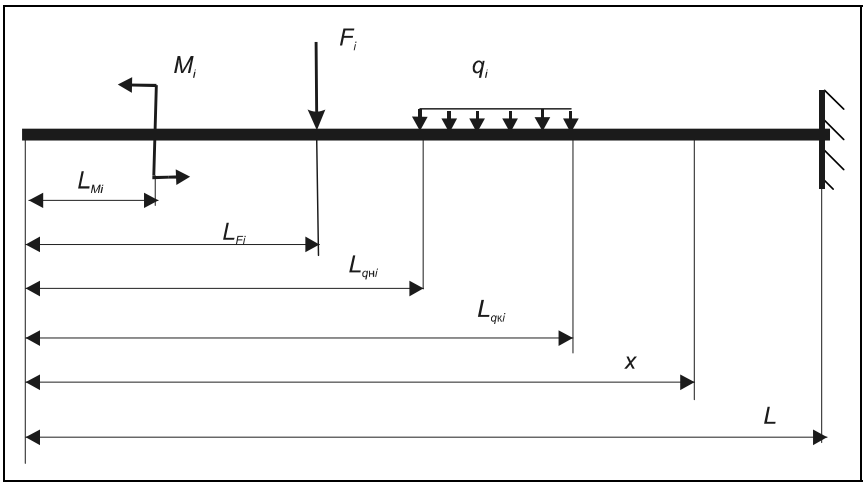


Рис. 7.20. Условная схема нагружения балки при изгибе

Следует отметить, что численный расчет производной от изгибающего момента дает в отдельных точках небольшие всплески, которые, впрочем, не меняют характер эпюры поперечных сил. Поменяйте значения нагрузок и координаты их точек приложения.

Для балки на двух опорах с теми же нагрузками в выражения для поперечной силы и изгибающего момента, приведенные на рис. 7.22, следует добавить

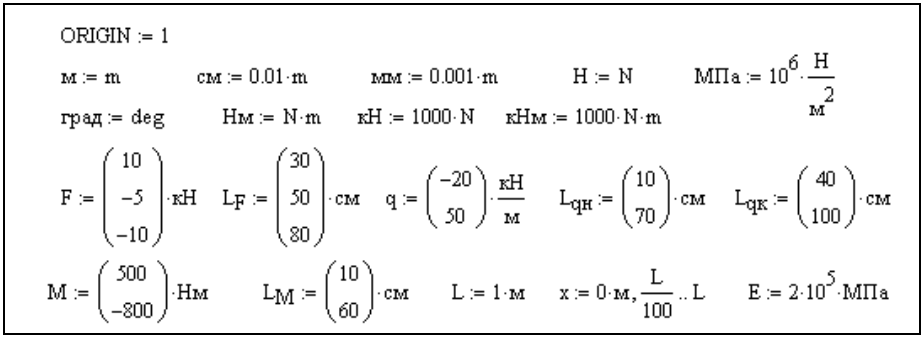


Рис. 7.21. Исходные данные для расчета балки на изгиб

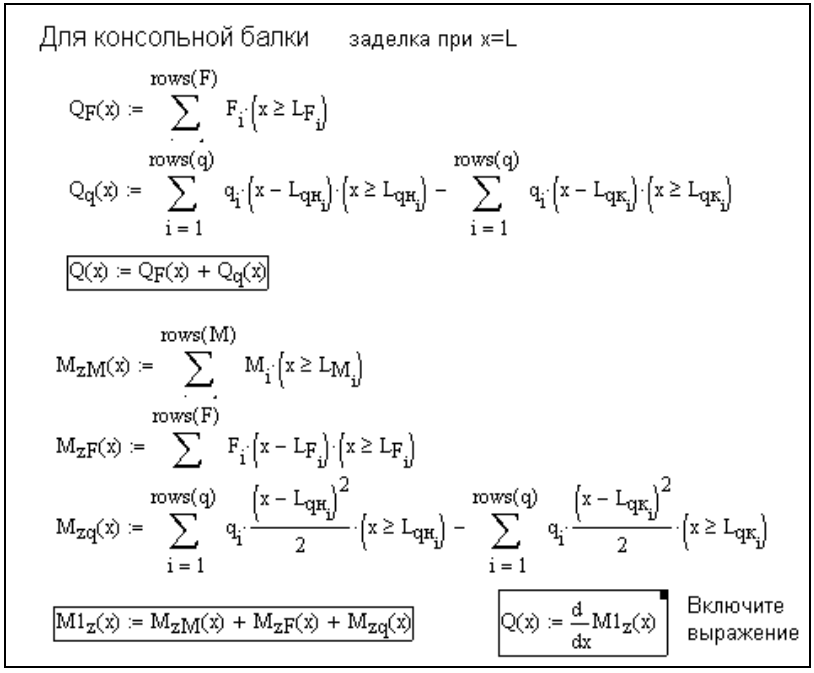


Рис. 7.22. Выражения для поперечной силы и изгибающего момента в консольной балке

слагаемые от опорных реакций R_A и R_B. Поскольку реакции на момент записи выражений еще не определены, их необходимо включить в параметры функции (рис. 7.24).

Определяются опорные реакции из условий равновесия балки

$$\sum F_i = 0 \text{ и } \sum M_z(F_i) = 0.$$

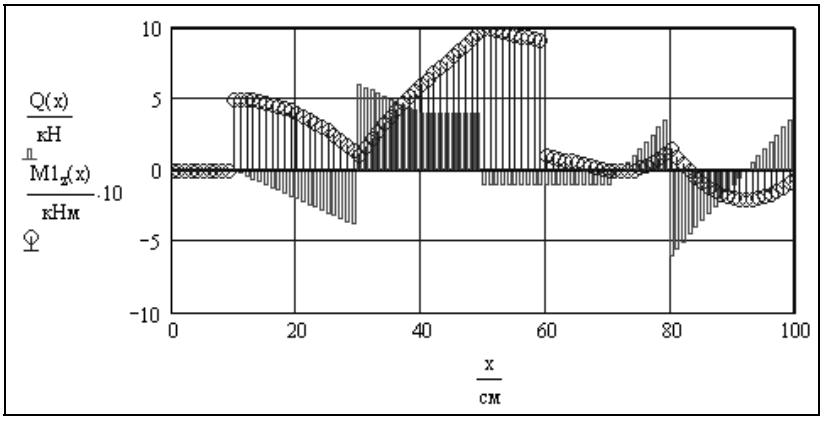


Рис. 7.23. Эпюры поперечной силы и изгибающего момента для консольной балки

Для балки на двух опорах

положение опор на балке

$L_{RA} := 20 \cdot см$ $L_{RB} := 70 \cdot см$ поменяйте положение опор

Построение эпюр с определением опорных реакций

$Q_{RA}(R_A, x) := R_A \cdot (x \geq L_{RA})$ $Q_{RB}(R_B, x) := R_B \cdot (x \geq L_{RB})$

$Q(R_A, R_B, x) := Q_{RA}(R_A, x) + Q_{RB}(R_B, x) + Q_F(x) + Q_q(x)$

$M_{zRA}(R_A, x) := R_A \cdot (x - L_{RA}) \cdot (x \geq L_{RA})$

$M_{zRB}(R_B, x) := R_B \cdot (x - L_{RB}) \cdot (x \geq L_{RB})$

$M_z(R_A, R_B, x) := M_{zRA}(R_A, x) + M_{zRB}(R_B, x) + M_{zM}(x) + M_{zF}(x) + M_{zq}(x)$

определение опорных реакций

$R_A := 10 \cdot кН$ $R_B := 10 \cdot кН$ начальные приближения

Given $M_z(R_A, R_B, L) = 0$ $Q(R_A, R_B, L) = 0$

$\begin{pmatrix} R_A \\ R_B \end{pmatrix} := Find(R_A, R_B)$ $R_A = 2.5\,кН$ $R_B = -6.5\,кН$

Рис. 7.24. Изгибающие моменты и поперечные силы в балке на двух опорах. Определение опорных реакций

По сути, эти уравнения представляют собой выражения для поперечной силы и изгибающего момента на правом конце балки при $x = L$.

Для решения системы двух уравнений использован вычислительный блок `given-find`.

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балки на двух опорах приведены на рис. 7.25.

Поменяйте положение опор на балке L_{RA} и L_{RB}. Обратите внимание, что функции `root` и `find` могут работать с размерными величинами, в отличие от функции `odesolve`. В этом случае начальные приближения искомых величин должны быть размерными величинами.

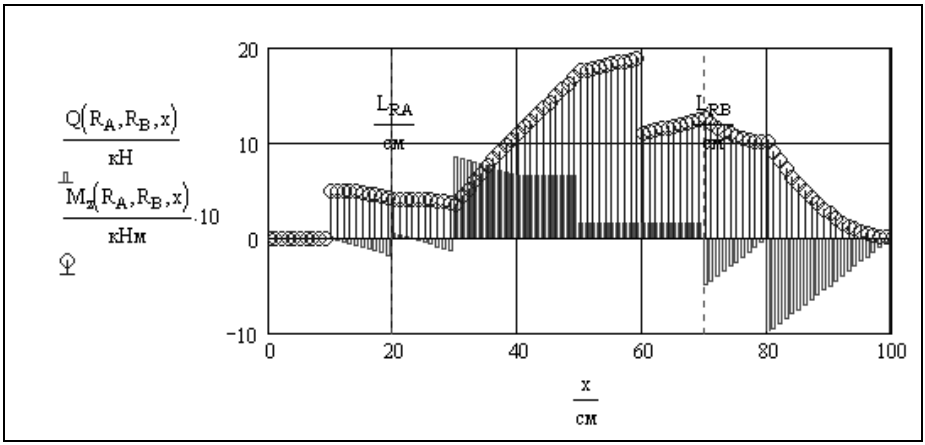


Рис. 7.25. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балки на двух опорах

При наличии построенных эпюр поперечных сил и изгибающих моментов нет необходимости использовать Mathcad для определения максимальных значений Q и M, если расчет напряжений производится вручную. Если же напряжения должны быть рассчитаны в Mathcad, то и максимальные значения Q и M должны определяться в Mathcad. Такой расчет приведен на рис. 7.26.

Поскольку опорные реакции уже определены, функции Q и M переименованы, а опорные реакции удалены из списка параметров функции для сокращения записи последующих выражений, то для нахождения экстремума использована функция `minerr` — единственная функция, которая может определить экстремум функции с переломами и разрывами значений. Так как для определения напряжений в опасном сечении используют значения Q и M, взятые по модулю, необходимо определить наибольшие положительные и наибольшие отрицательные значения Q и M, а также выбрать из них максимальные с помощью операторов условия.

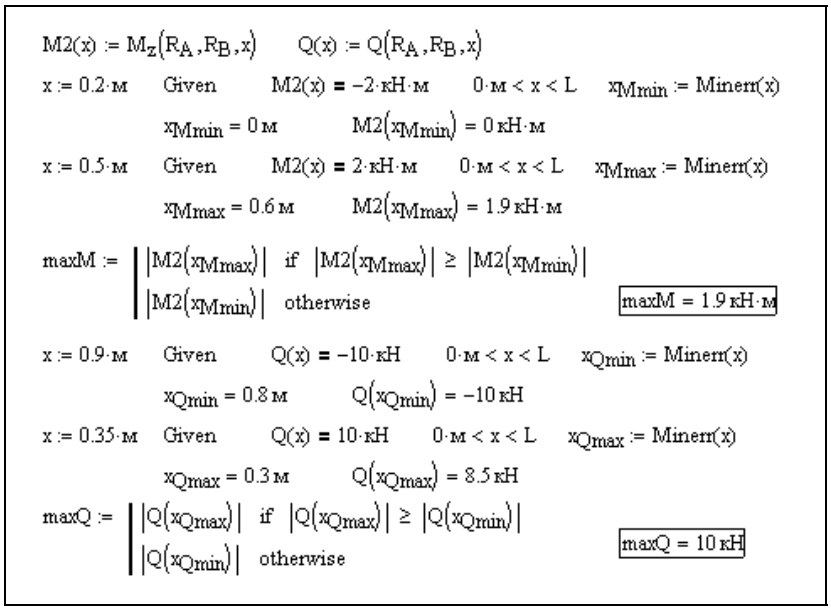


Рис. 7.26. Определение максимальных значений поперечных сил и изгибающих моментов

7.5.2. Определение напряжений

Для определения напряжений необходимо знать момент инерции сечения балки. Определение его показано на рис. 7.27. В принципе, для этого можно использовать программу, описанную в *главе 2*. Эта программа включена в расчет, приведенный в файле к *главе 7*, и скрыта в закрытой зоне. При работе с программой двойной щелчок левой кнопкой мыши на линии закрытой зоны открывает ее содержание.

Поскольку сечение балки состоит из двух прямоугольников, исходные данные исправлены применительно к конкретной задаче. Ряд формул этой программы не используется в нашем расчете, поэтому ниже, на рис. 7.27, приведен расчет только необходимого момента инерции относительно нейтральной (центральной) оси z.

Расчет нормальных и касательных напряжений при изгибе балки показан на рис. 7.28.

Самая сложная часть здесь — объяснить Mathcad логически, что именно следует использовать в формуле касательных напряжений в качестве ширины сечения bb. Так как сечение взято произвольно, в условный оператор включены конкретные значения в сантиметрах. При необходимости изменить

Здесь скрыт расчет геометрических характеристик

$b := (5 \;\; 4)\cdot см \quad b := b^T \quad h := (10 \;\; 6)\cdot см \quad h := h^T$

$A := (50 \;\; 24)\cdot см^2 \quad A := A^T \quad Y := (5 \;\; 4)\cdot см \quad Y := Y^T$

$K1 := (1 \;\; -1) \quad K1 := K1^T \quad n := rows(A) \quad i := 1..n$

$$J_{z_i} := \frac{b_i \cdot (h_i)^3}{12} \qquad Y_c := \frac{\sum_{j=1}^{n} A_j \cdot Y_j \cdot K1_j}{\sum_{j=1}^{n} A_j \cdot K1_j}$$

$$J_{z0} := \sum_{j=1}^{n} \left[J_{z_j} + A_j \cdot (Y_j - Y_c)^2 \right] \cdot K1_j \qquad J_z := J_{z0}$$

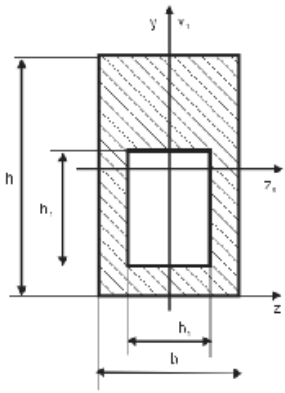


Рис. 7.27. Расчет момента инерции составного сечения балки

$y_{max} := (h_1 - Y_c) \qquad y_{min} := -Y_c \qquad y := y_{min}, y_{min} + \frac{y_{max} - y_{min}}{100} .. y_{max}$

ширина сечения

$$bb(y) := \begin{cases} b_1 & \text{if } y > 7\cdot см - Y_c \\ (b_1 - b_2) & \text{if } 1\cdot см - Y_c < y \le 7\cdot см - Y_c \\ b_1 & \text{if } y \le 1\cdot см - Y_c \end{cases}$$

$$\sigma(y) := \frac{maxM}{J_z}\cdot y \qquad S_z(y) := \int_{y}^{y_{max}} z\cdot bb(z)\, dz \qquad \tau(y) := \frac{maxQ\cdot S_z(y)}{bb(y)\cdot J_z}$$

Рис. 7.28. Расчет нормальных и касательных напряжений при изгибе балки

форму или даже размеры сечения этот оператор должен быть скорректирован. Эпюры нормальных и касательных напряжений по высоте сечения балки показаны на рис. 7.29.

Экстремальные значения напряжений определены с помощью функций `maximize` и `minimize`, которые возвращают значение аргумента, при котором функция имеет экстремум. В примере эти функции непосредственно испол-

няют роль аргумента при поиске экстремума. Функция $\tau(x)$ имеет ярко выраженный безусловный экстремум. Функция $\sigma(x)$ линейная и безусловный экстремум для нее найти нельзя. Максимум и минимум функции определяются при задании ограничений на координату y.

Внимание

При наличии ограничений использование ключевого слова `given` обязательно.

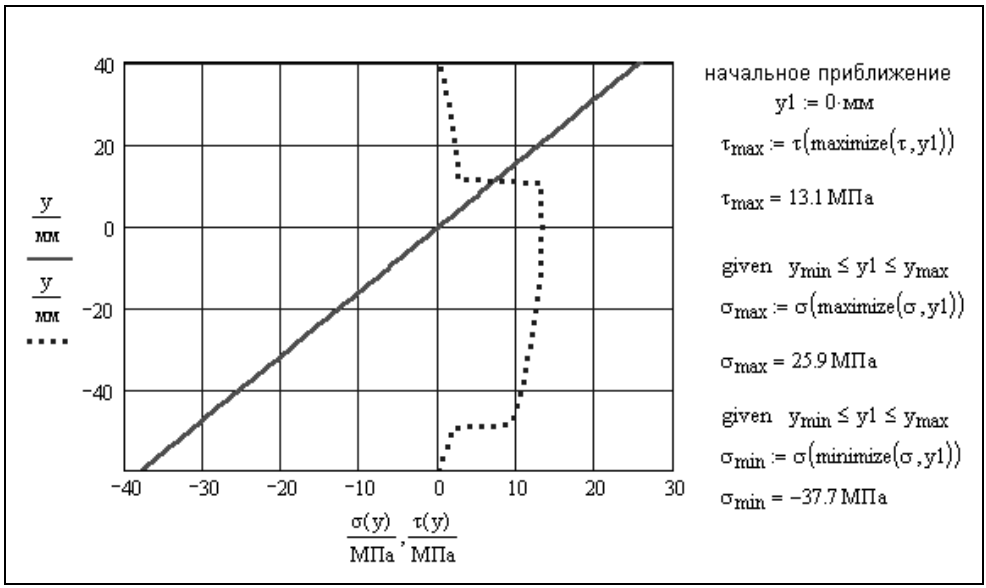


Рис. 7.29. Эпюры нормальных и касательных напряжений при изгибе балки

7.5.3. Определение перемещений балки

Самый простой способ определения перемещений балки при изгибе — непосредственное интегрирование уравнения упругой линии $EJ_z u''(x) = M_z(x)$. Этим способом Mathcad в состоянии определить перемещения почти любой балки (консольной или на двух опорах).

При решении дифференциального уравнения с помощью функции `odesolve` одно из граничных условий обязательно должно быть задано на левом конце балки.

На рис. 7.30 показано определение прогиба $u(x)$ и угла поворота сечения $\phi(x)$ для балки на двух опорах с двумя консолями (слева и справа).

Граничные условия: прогиб на опорах A и B равен нулю.

Функция `odesolve` абсолютно правильно решает дифференциальное уравнение и выводит результаты расчета при $x > L_{RA}$. Для левой консоли результат не выводится. Это существенный недостаток функции `odesolve`.

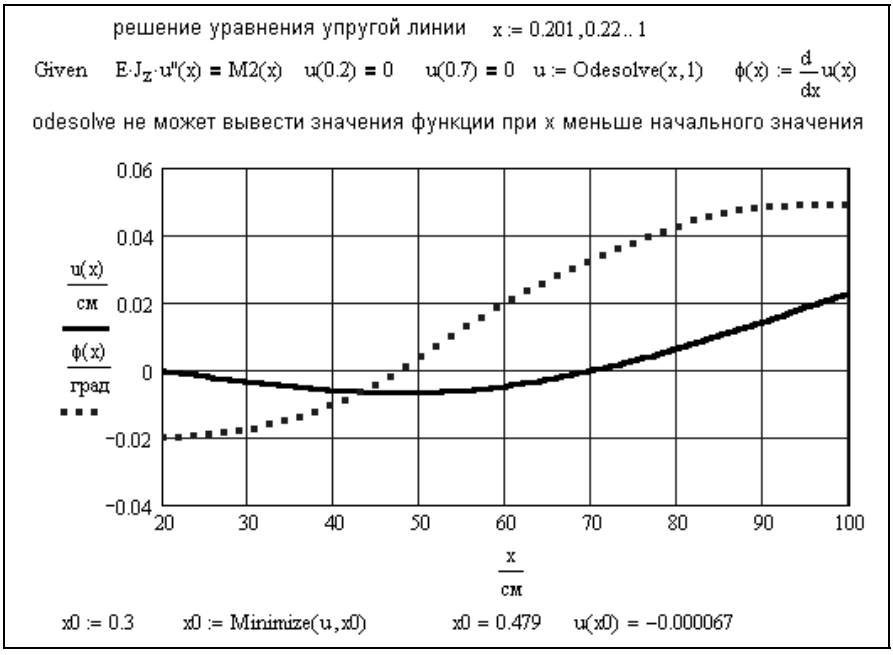


Рис. 7.30. Определение прогиба $u(x)$ и угла поворота сечения балки $\phi(x)$ методом непосредственного интегрирования уравнения упругой линии для балки на двух опорах

Другой недостаток этой функции — она не может работать с размерными величинами. В примере (рис. 7.30) граничные условия и интервал интегрирования в блоке `given–odesolve` должны быть безразмерными. Результат $u(x)$ — величина безразмерная, хотя изгибающий момент, модуль Юнга и момент инерции в исходном уравнении величины размерные. Соответственно минимальный прогиб, определяемый функцией `minimize`, также величина безразмерная. А вот графики перемещений построены с учетом размерностей. Дело в том, что любой график, в принципе, не приемлет размерность. Если в поле графика введено, например, $u(x)/\text{см}$, то для Mathcad это просто

число, деленное на число. Выведенные результаты расчета соответствуют системе СИ.

Рассмотрим определение перемещений балки методом начальных параметров. На рис. 7.31 вверху записано уравнение Крылова для прогибов консольной балки. Далее записано уравнение углов поворота сечений. Вот его писать уже необязательно. Достаточно записать $\theta = du/dx$. Это выражение в программе отключено. Включите его. Результат не изменится, хотя скорость вычислений упадет.

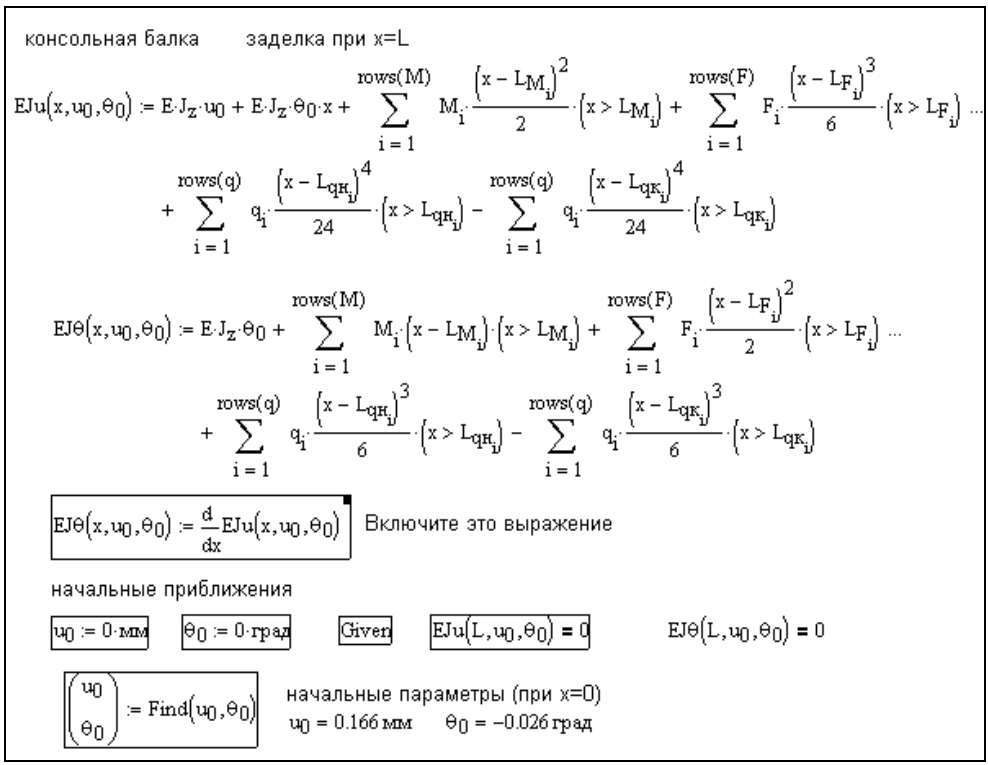


Рис. 7.31. Уравнения метода начальных параметров для консольной балки

Неизвестные пока начальные параметры u_0 и θ_0 включены в параметры функций. Далее они определяются из граничных условий путем решения системы уравнений с помощью вычислительного блока `given–find`.

Поскольку в примере заделка находится справа, граничные условия $u(L) = 0$ и $\theta(L) = 0$. Результаты расчета перемещений приведены на рис. 7.32.

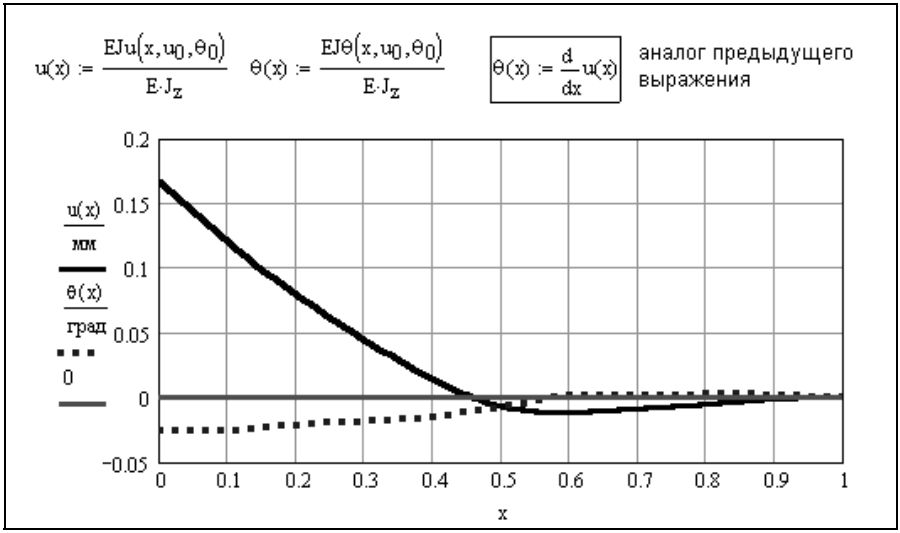


Рис. 7.32. Изменение прогиба $u(x)$ и угла поворота сечения $\theta(x)$ по длине консольной балки

балка на двух опорах

$$EJu(x,u_0,\theta_0) := E \cdot J_z \cdot u_0 + E \cdot J_z \cdot \theta_0 \cdot x + \sum_{i=1}^{rows(M)} M_i \cdot \frac{(x - L_{M_i})^2}{2} \cdot (x \geq L_{M_i}) + \sum_{i=1}^{rows(F)} F_i \cdot \frac{(x - L_{F_i})^3}{6} \cdot (x \geq L_{F_i}) \ldots$$
$$+ \sum_{i=1}^{rows(q)} q_i \cdot \frac{(x - L_{qн_i})^4}{24} \cdot (x \geq L_{qн_i}) - \sum_{i=1}^{rows(q)} q_i \cdot \frac{(x - L_{qк_i})^4}{24} \cdot (x \geq L_{qк_i}) \ldots$$
$$+ R_A \cdot \frac{(x - L_{RA})^3}{6} \cdot (x \geq L_{RA}) + R_B \cdot \frac{(x - L_{RB})^3}{6} \cdot (x \geq L_{RB})$$

$$EJ\theta(x,u_0,\theta_0) := E \cdot J_z \cdot \theta_0 + \sum_{i=1}^{rows(M)} M_i \cdot (x - L_{M_i}) \cdot (x \geq L_{M_i}) + \sum_{i=1}^{rows(F)} F_i \cdot \frac{(x - L_{F_i})^2}{2} \cdot (x \geq L_{F_i}) \ldots$$
$$+ \sum_{i=1}^{rows(q)} q_i \cdot \frac{(x - L_{qн_i})^3}{6} \cdot (x \geq L_{qн_i}) - \sum_{i=1}^{rows(q)} q_i \cdot \frac{(x - L_{qк_i})^3}{6} \cdot (x \geq L_{qк_i}) \ldots$$
$$+ R_A \cdot \frac{(x - L_{RA})^2}{2} \cdot (x \geq L_{RA}) + R_B \cdot \frac{(x - L_{RB})^2}{2} \cdot (x \geq L_{RB})$$

Рис. 7.33. Уравнения метода начальных параметров для балки на двух опорах

Для балки на двух опорах уравнения метода начальных параметров представлены на рис. 7.33. По сравнению с уравнениями для консольной балки в них добавлены слагаемые, учитывающие опорные реакции. Результаты расчета приведены на рис. 7.34. Сопоставляя рис. 7.30 и 7.34, отметим, что результаты расчета перемещений балки в Mathcad методом непосредственного интегрирования уравнения упругой линии и методом начальных параметров абсолютно совпадают.

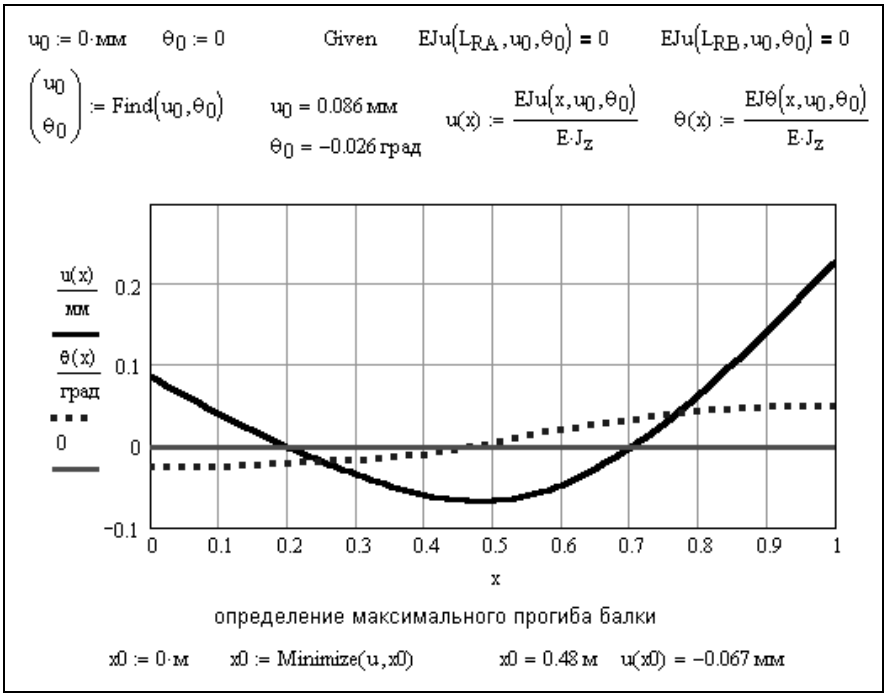


Рис. 7.34. Изменение прогиба $u(x)$ и угла поворота сечения $\theta(x)$ по длине балки на двух опорах

Приведенная запись уравнений метода начальных параметров универсальна и позволяет определять перемещения при любых нагрузках на балку.

7.6. Изгиб кривых брусьев

7.6.1. Нормальные напряжения в кривых брусьях

В кривых брусьях нормальные напряжения изменяются по гиперболическому закону (рис. 7.35), а нейтральная ось смещена в сторону центра кривизны на малую величину e. По мере увеличения радиуса кривизны бруса гипербола

распрямляется, приближаясь к прямой линии, а нейтральная ось приближается к центру тяжести.

Различают кривые брусья большой и малой кривизны (рис. 7.35).

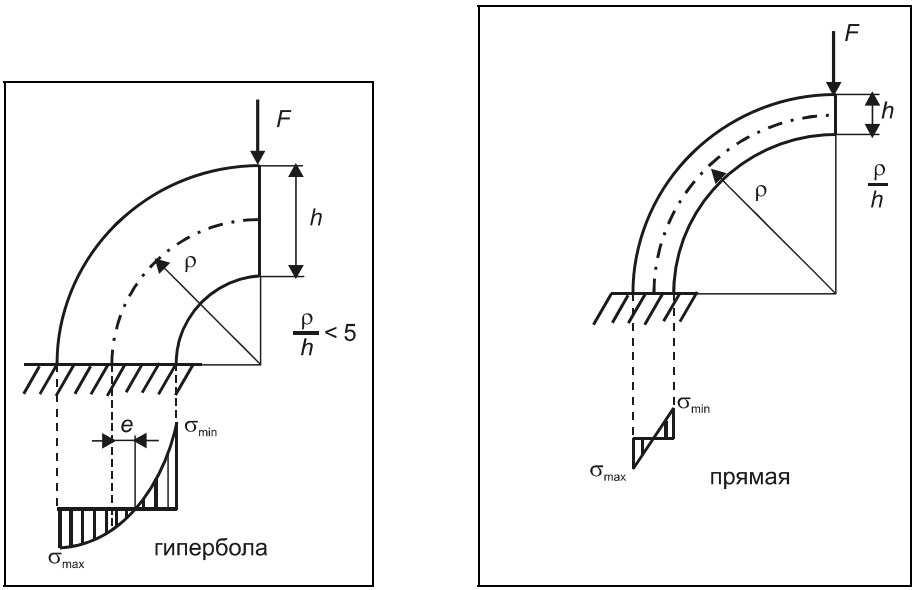


Рис. 7.35. Брусья большой и малой кривизны

Брусом большой кривизны считается брус, у которого отношение радиуса кривизны к высоте поперечного сечения $\rho/h < 5$ (рис. 7.35, *а*).

Брусом малой кривизны считается брус, у которого отношение радиуса кривизны к высоте поперечного сечения $\rho/h > 5$ (рис. 7.35, *б*).

У брусьев малой кривизны для расчета на прочность можно принимать формулу нормальных напряжений, выведенную для прямых балок $\sigma = \frac{M}{J} y$. При этом погрешность расчета составляет менее 5%.

У брусьев большой кривизны нормальные напряжения определяются по формуле Годолина $\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M \cdot S}{r + y}$, где S — статический момент площади сечения относительно нейтральной оси, r — кривизна нейтральной оси, y — расстояние от нейтральной оси до точки, где определяются напряжения.

В некоторых случаях, например, для диска с отверстием, максимальные напряжения могут примерно вдвое превышать напряжения, найденные по формуле, используемой для прямых брусьев.

На практике брусья большой кривизны встречаются довольно редко. В качестве примера брусьев большой кривизны можно привести крюк подъемного крана или звено якорной цепи.

В курсе сопротивления материалов рассматривается прочность и жесткость в основном длинных и тонких стержней. Напомним, что формула для нормальных напряжений в прямых брусьях справедлива лишь при отношении длины к высоте поперечного сечения $h/b > 10$. В дальнейшем для расчета кривых брусьев малой кривизны будем использовать формулу нормальных напряжений, выведенную для прямых брусьев.

7.6.2. Внутренние усилия в кривых брусьях

Внутренние усилия определяются методом сечений из условия равновесия отсеченной части стержня.

При плоском изгибе кривого бруса в поперечных сечениях возникают три внутренних усилия: продольное усилие N, поперечная сила Q и изгибающий момент M. Найдем внутренние усилия в брусе, геометрическая ось которого представляет собой четверть круга (рис. 7.36).

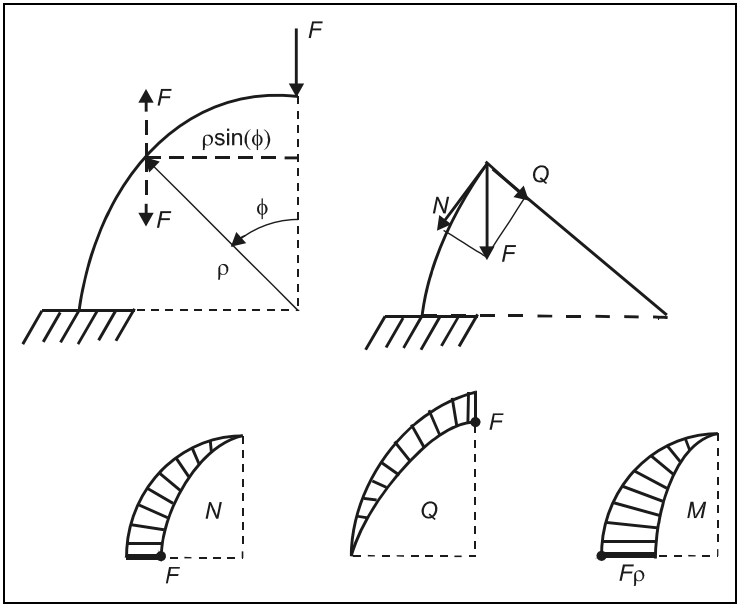


Рис. 7.36. Внутренние усилия в кривом брусе

Мысленно разрежем стержень произвольным сечением, полярные координаты которого $\rho = Const$ и φ. Действие отброшенной правой части в выбранном сечении заменим силой F и парой сил M. Силу F раскладываем на две составляющие: вдоль оси бруса $N = F \cdot \sin(\varphi)$ и по касательной к сечению $Q = F \cdot \cos(\varphi)$.

Пара сил M является изгибающим моментом в сечении и определяется как произведение силы на плечо $M_\varphi = F \cdot \rho \cdot \sin(\varphi)$, где плечо есть перпендикуляр, опущенный из центра тяжести рассматриваемого сечения на линию действия сил. Эпюры N, Q, M показаны на рис. 7.36.

Для брусьев малой кривизны влиянием продольного усилия и поперечной силы обычно пренебрегают и их эпюры N и Q не строят.

Если на кривой брус действует распределенная нагрузка, то ее обычно представляют в виде суммы двух проекций нагрузки интенсивностью q на две оси (в нашем случае y и z).

На рис. 7.37 представлен брус, криволинейная часть которого нагружена нагрузкой, равномерно распределенной по радиусу.

На криволинейном участке бруса $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$

$$M_\varphi = M_{qx} + M_{qy} = q\frac{\rho^2 \cdot \sin(\varphi)^2}{2} + q\frac{\rho^2 \cdot (1-\cos(\varphi))^2}{2} = q\rho^2(1-\cos(\varphi)).$$

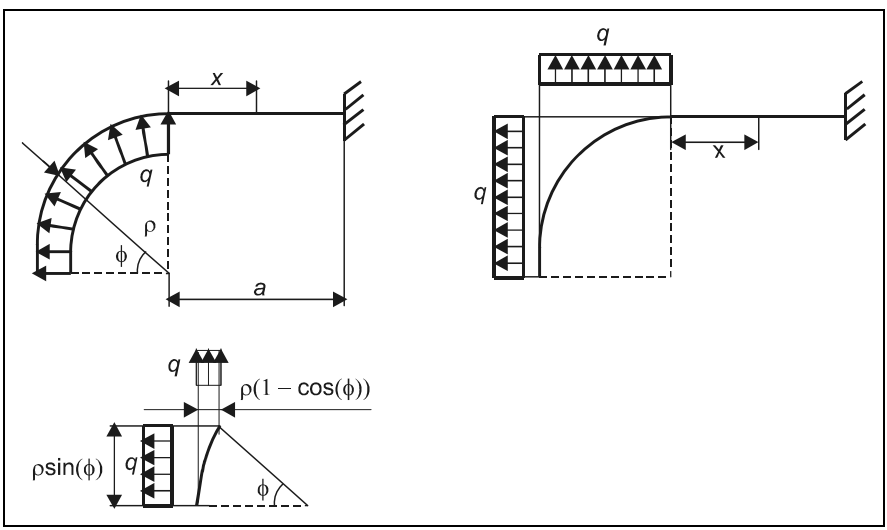


Рис. 7.37. Кривой брус, нагруженный распределенной нагрузкой

На прямолинейном участке бруса $0 < x < a$

$$M_x = M_{qx} + M_{qy} = q\frac{\rho^2}{2} + q\rho(\frac{\rho}{2} + x).$$

7.7. Расчет балок на упругом основании

В инженерной практике часто встречаются балки, лежащие на упругом основании. К таким балкам относятся шпалы железнодорожного пути, ленточные фундаменты зданий, фундаменты плотин и пр.

Сюда же можно отнести и рельсы, у которых число опор велико, а расстояние между ними мало по сравнению с длиной рельсов. Расчет балки на упругом основании не может быть выполнен с помощью уравнений равновесия.

Эта задача является статически неопределимой. Величина реакции в каждой точке зависит от прогиба балки, а прогиб балки, в свою очередь, зависит от реакции со стороны основания.

Для решения задачи примем *гипотезу о пропорциональной зависимости между реакцией и осадкой основания*, впервые предложенную академиком Н. И. Фуссом и использованной Е. Винклером для расчета балок на упругом основании.

Согласно модели Винклера, реальное основание как бы заменяется бесконечным числом упругих, не связанных между собой пружин. Реакция R в каждой точке основания балки будет пропорциональна прогибу u в этой точке, равному осадке основания

$$R = k \cdot b \cdot u,$$

где b — ширина балки, k — коэффициент жесткости упругого основания, называемый также *коэффициент постели*. Экспериментально он определяется путем вдавливания в грунт жесткого штампа. Так для песчаного грунта:

- $k = 1 - 5$ МН/м^3 — песок рыхлый;
- $k = 10 - 100$ МН/м^3 — песок утрамбованный;
- $k < 250$ — песок слежавшийся.

С учетом внешней нагрузки и реакции упругого основания суммарная интенсивность распределенной нагрузки в некоторой точке балки

$$p = q - R = q - kbu.$$

Для получения дифференциального уравнения балки на упругом основании используем последнее из уравнений (7.14)

$$EJ_z u^{\mathrm{IV}} = p = q - kbu\,.$$

Откуда

$$EJ_z u^{\mathrm{IV}} + kbu = q$$

или

$$u^{\mathrm{IV}} + \frac{kb}{EJ_z}u = \frac{q}{EJ_z}\,. \tag{7.16}$$

В уравнении (7.16) полагаем жесткость балки по длине постоянной.

Вот, собственно говоря, и вся теория расчета балок на упругом основании.

Все, что имеется в литературе по этому вопросу, относится к способам решения дифференциального уравнения четвертого порядка. Но ведь Mathcad сам в состоянии решить такое уравнение. Далее рассмотрим пример решения задачи в Mathcad.

На рис. 7.38 показаны балки на упругом основании, рассмотренные в этом примере.

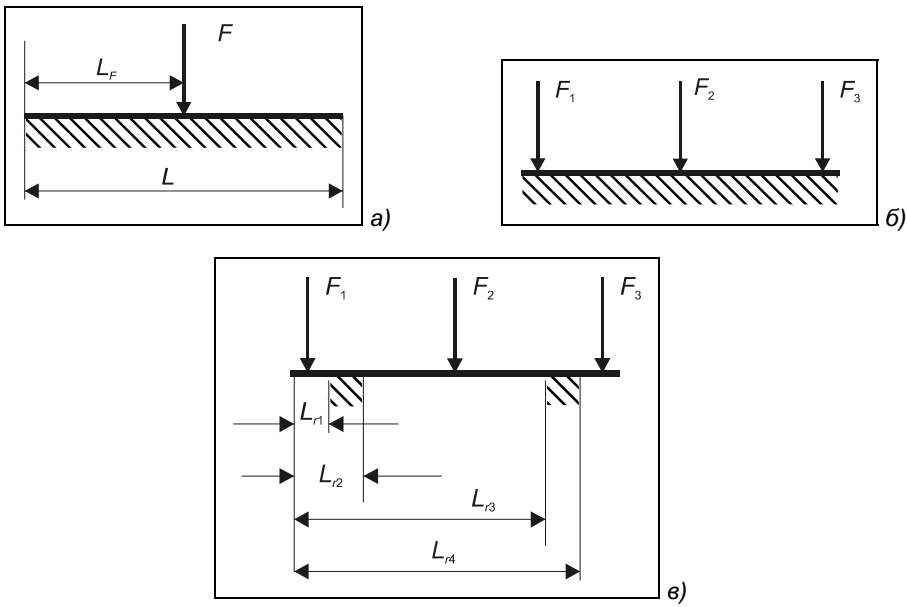


Рис. 7.38. Схемы рассматриваемых балок на упругом основании

На рис. 7.39 приведены исходные данные для расчета. Модуль Юнга для стальной балки, ширина b и высота h прямоугольного поперечного сечения, длина балки L, а также коэффициент постели упругого основания kk.

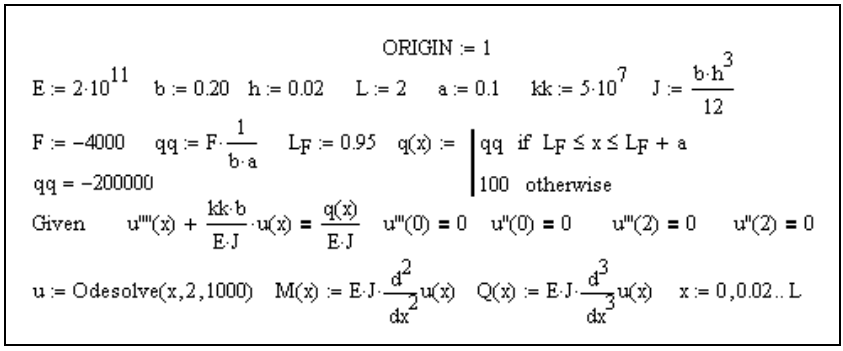


Рис. 7.39. Расчет балки с одной силой на сплошном упругом основании (рис. 7.38, *а*)

Функция `odesolve` не может работать с размерными величинами, поэтому расчеты ведутся без учета размерностей. Все исходные данные введены в системе СИ, т. е. в ньютонах и метрах.

Дифференциальное уравнение упругой линии балки на упругом основании содержит в правой части только выражение для распределенной нагрузки и не содержит выражений для сосредоточенных сил и пар сил. Чтобы учесть влияние сосредоточенных сил, заменим их нагрузкой, распределенной на малом участке длиной a. Эта операция выполнена на рис. 7.39, где задана внешняя сила F, приложенная посередине балки, и определена интенсивность распределенной нагрузки qq, заменяющей эту силу. Там же введено расстояние от левого края балки до начала распределенной нагрузки L_F.

С помощью условных операторов записана единая для всей балки функция изменения интенсивности распределенной нагрузки $q(x)$. По всей длине балки, кроме участка, где приложена сила, распределенная нагрузка должна быть равна нулю. Однако пришлось задать ничтожно малую распределенную нагрузку, т. к. иначе функция `odesolve` выдает ошибку.

Приходится учитывать, что решение дифференциального уравнения четвертого порядка чрезвычайно сложно даже для Mathcad. Для численного решения нашего уравнения приходится задавать большое число шагов (1000 или даже 10 000). Если поставить число шагов, равным 100, решение пропадает. Даже при большом числе шагов в отдельных точках Mathcad не может найти решение. В этих случаях отсутствуют точки на графиках.

Далее записан блок решения дифференциального уравнения `given—odesolve`, внутри которого заключено дифференциальное уравнение четвертого порядка и к нему четыре граничных условия. Ввиду замены сосредоточенных нагрузок распределенными, поперечная сила и изгибающий момент, т. е. вторая и третья производные от прогиба, на концах балки равны нулю.

Результаты расчета: изменение прогиба балки $u(x)$, изгибающего момента $M(x)$ и поперечной силы $Q(x)$ приведены на рис. 7.40.

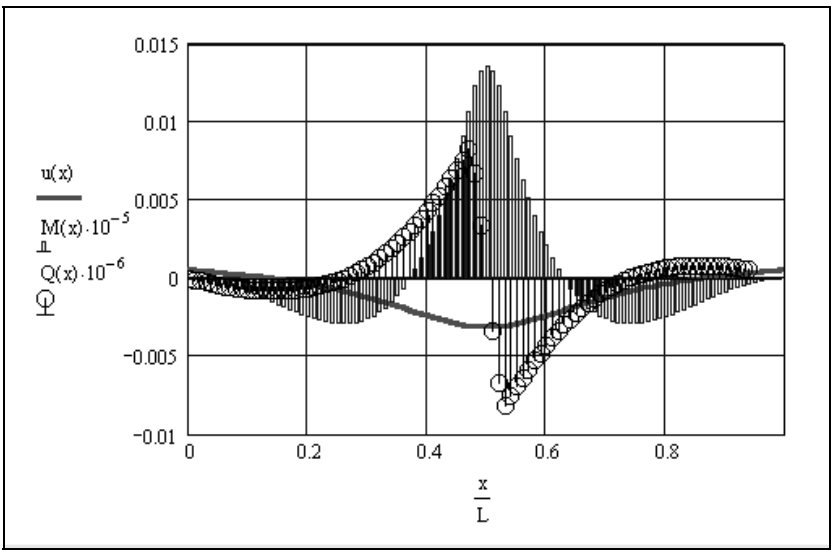


Рис. 7.40. Результаты расчета балки с одной силой на сплошном упругом основании

Количество нагрузок, действующих на балку, может быть любым. На рис. 7.38, *б* показан расчет балки на упругом основании, нагруженной тремя силами. Каждая сила заменена распределенной нагрузкой, действующей на малом участке длиной a.

С помощью условных операторов записана единая функция $q(x)$ изменения интенсивности распределенной нагрузки по длине балки. Далее записан блок решения дифференциального уравнения `given—odesolve` так же, как на рис. 7.39. Результаты расчета представлены на рис. 7.42.

Упругое основание может быть сплошным (от начала до конца балки), а может быть прерывистым в виде нескольких участков опоры балки на основание.

$$F := \begin{pmatrix} -2000 \\ -4000 \\ -2000 \end{pmatrix} \qquad qq := F \cdot \frac{1}{b \cdot a} \qquad L_F := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.95 \\ 1.9 \end{pmatrix}$$

замена сосредоточенных сил распределенной нагрузкой

$$q(x) := \begin{cases} qq_1 & \text{if } L_{F_1} \le x \le L_{F_1} + a \\ qq_2 & \text{if } L_{F_2} \le x < L_{F_2} + a \\ qq_3 & \text{if } L_{F_3} \le x \le L_{F_3} + a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{Given} \qquad u''''(x) + \frac{kk \cdot b}{E \cdot J} \cdot u(x) = \frac{q(x)}{E \cdot J}$$

$$u''(0) = 0 \quad u'(0) = 0 \qquad u''(2) = 0 \qquad u'(2) = 0$$

$$u := \text{Odesolve}(x, 2, 10000) \quad M(x) := E \cdot J \cdot \frac{d^2}{dx^2} u(x) \quad Q(x) := E \cdot J \cdot \frac{d^3}{dx^3} u(x)$$

Рис. 7.41. Расчет балки с тремя силами на сплошном упругом основании

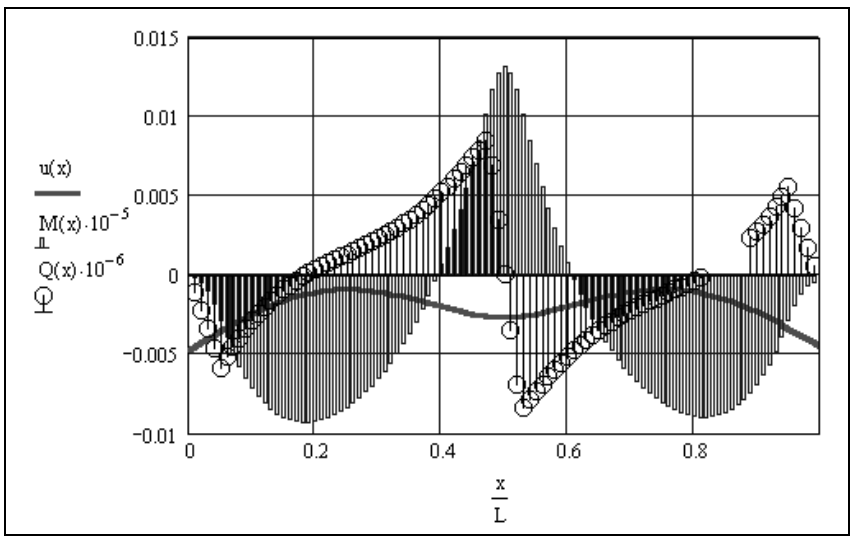


Рис. 7.42. Результаты расчета балки с тремя силами на сплошном упругом основании (см. рис. 7.38, *б*)

На рис. 7.43 приведен расчет балки на упругом основании с тремя силами и двумя участками упругого основания. Положение этих участков и их длина может быть любой.

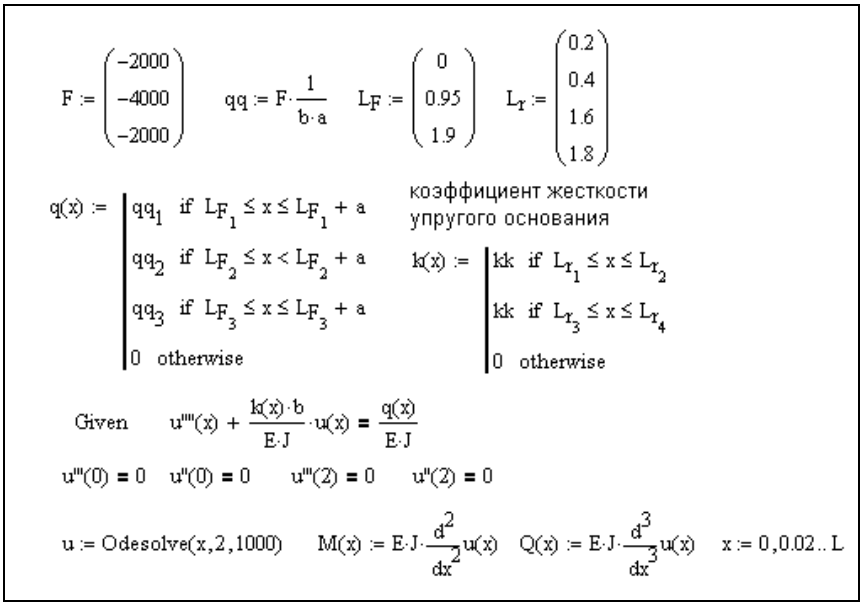


Рис. 7.43. Расчет балки с тремя силами и двумя участками упругого основания (см. рис. 7.38, *в*)

В нашем примере вектор $L_т$ задает положение начала и конца каждого участка упругого основания. Так, первое основание от $x = 0,2$ м до $x = 0,4$ м, а второе от 1,6 до 1,8 м.

Коэффициент постели упругого основания принят одинаковым для обоих участков и записан в виде единой функции с помощью условных операторов. Результаты расчета приведены на рис. 7.44.

Приведенные примеры показывают, что Mathcad в состоянии определить прогибы балки и усилия в ней почти для любой произвольно взятой балки на упругом основании. Правда, в некоторых случаях, добиться получения правильных результатов расчета непросто.

Итерационные методы решения уравнений очень чувствительны к выбору начальных приближений, в нашем случае к выбору граничных условий. Обязательным условием является задание большого числа шагов (чем больше, тем точнее расчет). Тем не менее в ряде итераций имеет место деление на машинный нуль. Чтобы уменьшить число таких сбоев, иногда полезно нули в исходных данных заменить малыми величинами, как в функции $q(x)$ на рис. 7.39.

Простота расчета балок на упругом основании в Mathcad поражает. Достаточно сравнить приведенные расчеты с теми, что приводятся в литературе по

данному вопросу. Рекомендуемый в книгах для подобных расчетов метод начальных параметров необычайно сложен и позволяет решить лишь ограниченный круг задач.

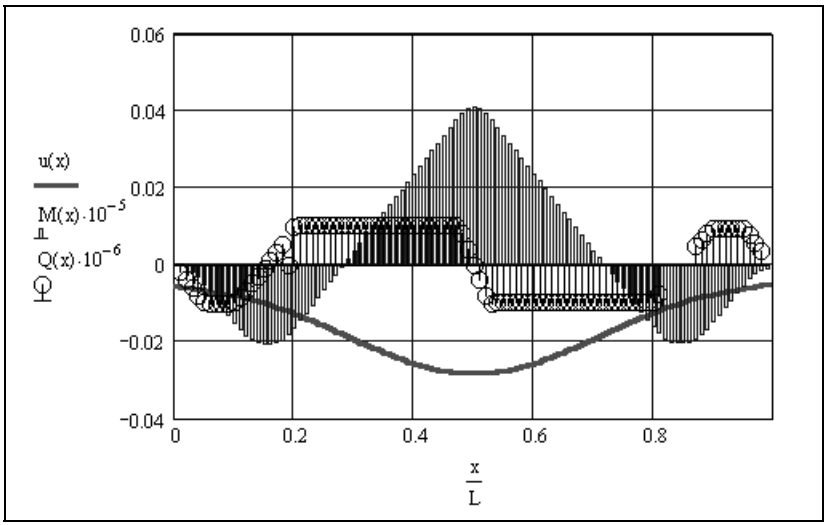
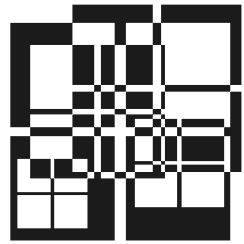


Рис. 7.44. Результаты расчета балки с тремя силами и тремя участками упругого основания



ГЛАВА 8

Учет пластических деформаций

В предыдущих главах расчеты на прочность велись с учетом только упругих деформаций. В этой главе будет рассмотрено влияние пластических деформаций на прочность конструкций. Вначале рассмотрим распределение напряжений в сечении стержня при упругопластической деформации растяжения-сжатия, изгиба, кручения. Затем опишем приближенные методы оценки предельной нагрузки на стержень.

8.1. Связь напряжений и деформаций

Напомним три вида аппроксимации, рассмотренные в *разд. 5.5.2*.

- Диаграмма идеального упругопластического тела (диаграмма Прандтля) (рис. 8.1, *б*) с бесконечно длинной площадкой текучести:
  - при $\varepsilon < \varepsilon_т$ $\quad \sigma = E \cdot \varepsilon$;
  - при $\varepsilon \geq \varepsilon_т$ $\quad \sigma = \sigma_т$.
- Диаграмма упругопластического тела с линейным упрочнением (рис. 8.1, *в*):
  - при $\varepsilon < \varepsilon_т$ $\quad \sigma = E \cdot \varepsilon$;
  - при $\varepsilon \geq \varepsilon_т$ $\quad \sigma = \sigma_т + E_1 \cdot (\varepsilon - \varepsilon_т)$,

  где E_1 — модуль упрочнения.
- Диаграмма упругопластического тела со степенным упрочнением (рис. 8.1, *г*):
  - при $\varepsilon < \varepsilon_т$ $\quad \sigma = E \cdot \varepsilon$;
  - при $\varepsilon \geq \varepsilon_т$ $\quad \sigma = \sigma_т + A \cdot \varepsilon^m$,

  где A и m — эмпирические коэффициенты.

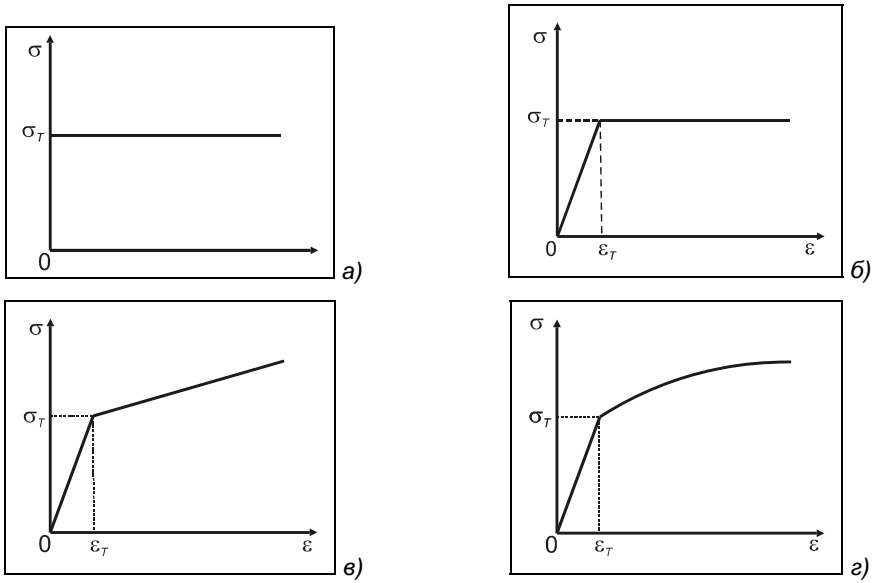


Рис. 8.1. Виды аппроксимации диаграммы деформирования

Получение уравнений для линейной и степенной аппроксимаций показано на рис. 5.14. Линейная аппроксимация заменяет рассматриваемый участок диаграммы прямой линией. Степенная аппроксимация — кривой.

В добавление к трем указанным видам аппроксимации введем еще один:

- Диаграмму деформирования идеального жесткопластического тела (рис. 8.1, *а*), представляющую собой одну горизонтальную линию $\sigma = \sigma_т$.

При $\sigma < \sigma_т$ деформация $\varepsilon = 0$, т. е. материал считается абсолютно жестким (недеформируемым). При $\sigma = \sigma_т$ деформация $\varepsilon \to \infty$.

Все 4 вида аппроксимации диаграммы деформирования материала показаны на рис. 8.1.

8.2. Учет пластических деформаций при растяжении-сжатии

При растяжении-сжатии распределение деформаций и напряжений по сечению стержня равномерное, т. е. $\sigma = Const$ и $\varepsilon = Const$.

При растяжении-сжатии, как упругом, так и упругопластическом, нормальные напряжения во всех точках сечения одинаковы. Справедлива формула для напряжения $\sigma = \dfrac{N}{A}$.

В статически определимых задачах из условий равновесия определяются продольные усилия N, а по ним напряжения σ. Определить удлинения стержней по старой формуле $\Delta L = \frac{NL}{EA}$, основанной на законе Гука, уже нельзя. Надо по диаграмме деформирования, зная напряжения, найти деформацию $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$ и по ней определить удлинение ΔL.

В статически неопределимых задачах под действием пластических деформаций происходит перераспределение напряжений, что ведет к изменению условий равновесия системы.

Поскольку именно напряжение зависит от деформации, а не наоборот, при расчетах в упругопластической области целесообразно задаваться не нагрузкой, а деформацией или связанным с ней перемещением. Как будет видно из расчета, с ростом пластической деформации нагрузка может возрастать лишь в очень ограниченных пределах. Задаваясь нагрузкой, можно просто не получить никакого ответа в расчетах.

Рассмотрим пример определения нагрузки, соответствующей заданной деформации статически неопределимой стержневой системы, изображенной на рис. 4.14. В упругой постановке задачи напряжения в стержнях и перемещения этой системы определены в *главе 4*. В исходных данных, приведенных на рис. 8.2, отсутствует величина силы F, зато присутствует координата точки ее приложения L_F.

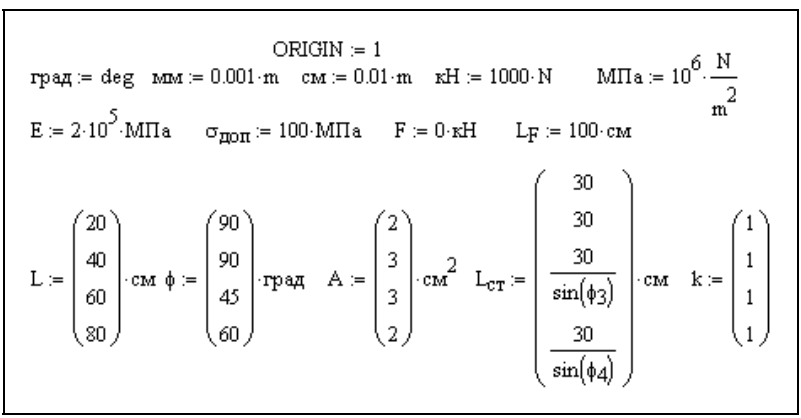


Рис. 8.2. Исходные данные к расчету шарнирно-стержневой системы (см. рис. 4.14)

Обозначим δ — перемещение точки приложения силы. Задаваясь величиной δ, найдем соответствующие ей деформации стержней и возникающие в

них напряжения. Зная напряжения, из уравнений равновесия системы найдем вызывающую их силу F (рис. 8.3).

Для заданного перемещения δ точки приложения силы F находим из подобия треугольников (см. рис. 4.15) перемещения $\Delta(\delta)$ точек крепления стержней к жесткой балке (шарниров).

По методу засечек из треугольников перемещения шарниров находим удлинения стержней $\Delta L(\delta)$.

Зная удлинения, определяем деформацию каждого стержня $\varepsilon(\delta)$.

Найдя деформации, определяем напряжения $\sigma(\delta)$ в стержнях.

Расчетные формулы приведены на рис. 8.3.

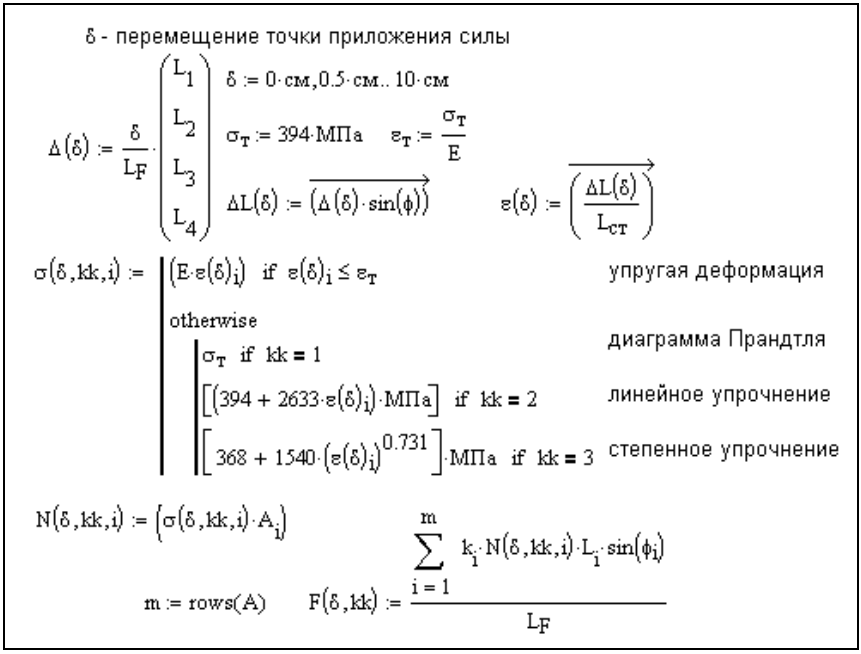


Рис. 8.3. Определение нагрузки на шарнирно-стержневую систему, вызывающей заданное перемещение δ точки приложения силы F

Связь между напряжением и деформацией зависит от принятой формы аппроксимации диаграммы деформирования. На рис. 8.3 выражение для напряжений записано с помощью условных операторов сразу для трех форм аппроксимации. В параметры функции напряжений $\sigma(\delta, kk, i)$ введен указатель выбранной аппроксимации kk и номер стержня i, для которого определяется

напряжение. Получение аппроксимирующего выражения с помощью функций регрессии было показано на рис. 5.15.

По напряжениям были найдены продольные усилия в стержнях $N(\delta, kk, i)$.

Из уравнения равновесия шарнирно-стержневой системы найдена сила $F(\delta, kk)$, вызывающая перемещение δ.

Результаты расчета приведены на рис. 8.4. При выборе диаграммы Прандтля (бесконечно длинной площадки текучести) нагрузка F, достигнув предельного значения, остается постоянной при росте перемещения δ. Несущая способность системы исчерпана. Происходит перемещение при постоянной нагрузке.

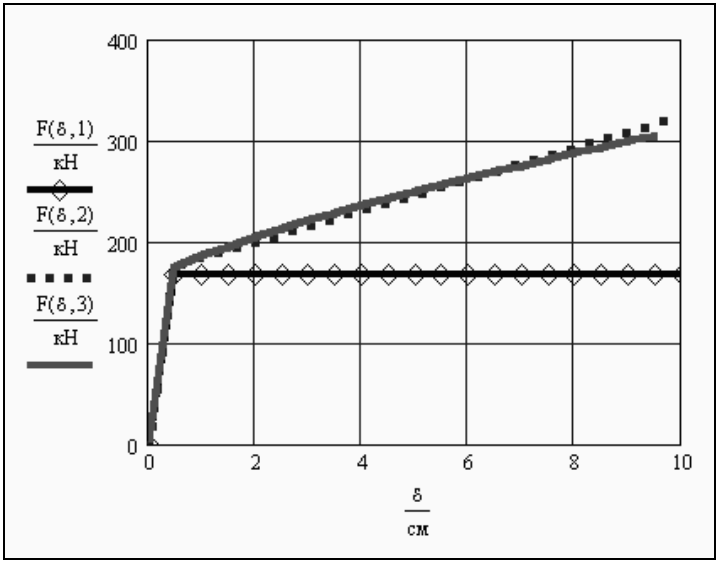


Рис. 8.4. Зависимость напряжений σ в стержнях и нагрузки F от заданного перемещения δ точки приложения силы

При линейном или степенном упрочнении материала нагрузка F возрастает с ростом перемещения δ.

8.3. Учет упругопластических деформаций при изгибе

При изгибе статически определимых балок изгибающий момент определяется методом сечений независимо от величины деформации, как указано в *главе 3*.

Характер распределения напряжений в поперечных сечениях балки оказывается различным при упругих и упругопластических деформациях.

Важная гипотеза

> В теории пластичности принято, что гипотеза плоских сечений справедлива как при упругих, так и упругопластических деформациях балки.

Это положение является основным при расчетах балок в упругопластической области, без принятия гипотезы о распределении деформаций расчет оказывается невозможным.

На основании этой гипотезы можно считать, что при изгибе деформации распределены по высоте сечения по линейному закону как при упругой, так и при упругопластической деформации (рис. 8.5).

Для определения напряжений при упругопластической деформации необходимо по диаграмме деформирования для заданного значения деформации ε определить соответствующее ей значение напряжения σ. Величина этого напряжения будет зависеть от выбранного вида аппроксимации диаграммы деформирования (рис. 8.5).

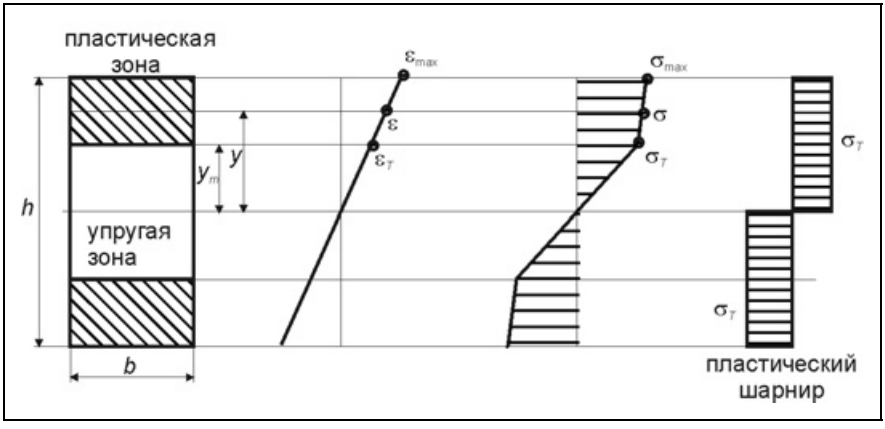


Рис. 8.5. Распределение деформаций и напряжений при упругопластическом изгибе балки

Будем постепенно увеличивать нагрузку на балку и, соответственно, изгибающий момент.

При чисто упругой деформации напряжения в сечении распределены по линейному закону, пока на поверхности балки они не достигнут предела текучести $\sigma_{max} = \sigma_т$.

Найдем предельный изгибающий момент при упругой деформации

$$M_{\text{упр}} = \sigma_{\text{т}} W = \sigma_{\text{т}} \frac{bh^2}{6}.$$

При дальнейшем увеличении нагрузки у поверхности балки появляется пластическая зона, которая увеличивается с ростом нагрузки. В центре балки сохраняется упругая зона (рис. 8.5).

При дальнейшем увеличении нагрузки зона упругопластической деформации растет, постепенно захватывая почти все сечение.

Рассмотрим идеальный случай, когда все сечение пластически деформируется. Напряжения во всех точках сечения равны пределу текучести. Такое предельное состояние называется *пластический шарнир.* При постоянной нагрузке части балки слева и справа от сечения взаимно разворачиваются (балка представляет собой пластический механизм).

Найдем предельный изгибающий момент, возникающий в пластическом шарнире.

Из условия эквивалентности напряжений и внутренних усилий (1.3).

$$M = \int_A \sigma \cdot y \cdot dA.$$

При изгибе напряжения в верхних и нижних волокнах балки имеют различный знак. Однако в функциях аппроксимации диаграммы напряжения, при перемене знака координаты y, знак автоматически не изменяется. Сделать это можно, но не хочется усложнять выражение для σ. Проще взять сумму интегралов для сжатой и растянутой частей сечения

$$M_{\text{пласт}} = \int_{A_{\text{раст}}} \sigma_{\text{т}} \cdot y \cdot dA + \int_{A_{\text{сжат}}} \sigma_{\text{т}} \cdot y \cdot dA.$$

С учетом $dA = b \cdot dy$ выражение для изгибающего момента в прямоугольном поперечном сечении примет вид

$$M_{\text{пласт}} = 2 \int_0^{h/2} \sigma_{\text{т}} \cdot y \cdot b \cdot dy = \sigma_{\text{т}} \frac{bh^2}{4}.$$

В условиях пластической деформации балка может выдержать в полтора раза бóльшую нагрузку, чем при упругой деформации

$$\frac{M_{\text{пласт}}}{M_{\text{упр}}} = 1{,}5.$$

Найдем изгибающий момент при упругопластическом изгибе

$$M_{\text{упр-пласт}} = \int_A \sigma \cdot y \cdot dA . \qquad (8.1)$$

Напряжения σ по высоте сечения переменные.

$$\sigma = E \cdot \varepsilon ,$$

если деформация упругая $\varepsilon < \varepsilon_{\text{т}}$,

$$\sigma = \Phi(\varepsilon) , \qquad (8.2)$$

если деформация упругопластическая $\varepsilon \geq \varepsilon_{\text{т}}$.

Здесь $\Phi(\varepsilon)$ — уравнение диаграммы деформирования, зависящее от принятой аппроксимации диаграммы.

Mathcad позволяет записать зависимость σ от координаты выбранной точки y в виде одной функции с помощью булевых операторов условия (см. рис. 8.7).

Для этого надо знать координату границы упругой и упругопластической зон $y_{\text{т}}$.

На эпюре деформаций ε (см. рис. 8.5) рассмотрим три подобных треугольника. Запишем отношение их катетов

$$\frac{\varepsilon_{\max}}{h/2} = \frac{\varepsilon_{\text{т}}}{y_{\text{т}}} = \frac{\varepsilon}{y} .$$

Из этого выражения находим величины ε и $\varepsilon_{\text{т}}$ в зависимости от $\varepsilon_{\max}$ (рис. 8.6).

$$y_{\text{т}} = \frac{\varepsilon_{\text{т}}}{\varepsilon_{\max}} \frac{h}{2} \qquad \varepsilon = \frac{\varepsilon_{\max}}{h/2} y . \qquad (8.3)$$

Здесь $\varepsilon_{\text{т}} = \sigma_{\text{т}} / E$ — деформация, соответствующая пределу текучести.

Как и в предыдущем случае *(см. разд. 8.2)*, очень трудно решить упругопластическую задачу, задаваясь нагрузкой. Гораздо легче и удобнее задаваться величиной максимальной деформации $\varepsilon_{\max}$, которая пропорциональна приложенной нагрузке.

Порядок расчета. Задаемся $\varepsilon_{\max}$. По выражениям (8.3), затем (8.2) и (8.1) определяем изгибающий момент $M_{\text{упр-пласт}}$. Строим график M от ε, и уже по графику для заданного момента определяем соответствующую ему деформацию $\varepsilon_{\max}$. Для найденного значения $\varepsilon_{\max}$ находим зависимость σ от y.

Рассмотрим численный пример определения напряжений при упругопластическом изгибе балки. Исходные данные для расчета приведены на рис. 8.6.

м := m мм := 0.001·m см := 0.01·m кН := 1000·N МПа := $10^6 \cdot \frac{N}{m^2}$

кНм := 1·кН·м

исходные данные

материал - сталь30

$E := 2 \cdot 10^5 \cdot МПа$ $\sigma_т := 400 \cdot МПа$ $\sigma_в := 600 \cdot МПа$ $\varepsilon_в := 0.1$

$\varepsilon_т := \frac{\sigma_т}{E}$ $E1 := \frac{\sigma_в - \sigma_т}{\varepsilon_в - \varepsilon_т}$ $E1 = 2 \times 10^3 МПа$

прямоугольное сечение $b := 10 \cdot мм$ $h := 40 \cdot мм$

Рис. 8.6. Исходные данные для расчета напряжений при упругопластическом изгибе балки

Характеристики прочности материала взяты из справочника [12]. Деформацией, соответствующей пределу прочности $\varepsilon_в \approx 0{,}1$, задаемся "на глазок".

Обратите внимание, что модуль упрочнения $E1$, равный тангенсу угла наклона линейной аппроксимации диаграммы деформирования, в 100 раз меньше модуля Юнга E. То есть одно и то же приращение деформации при упругопластической деформации вызывает приращение напряжений в 100 раз меньшее, чем при упругой деформации. В этом причина того, что большая ошибка в аппроксимации диаграммы вызывает маленькую ошибку в распределении напряжений.

Рассматриваем балку прямоугольного поперечного сечения с размерами b и h. Длина балки для расчета не имеет значения, т. к. будем искать не нагрузки на балку, а изгибающий момент в сечении.

Задаваясь максимальной деформацией в крайних волокнах балки, определяем распределение деформаций по высоте сечения балки. Затем, введя аппроксимацию диаграммы деформирования, определяем распределение напряжений, соответствующих найденным деформациям.

Вид аппроксимирующей функции приведен на рис. 8.7, распределение напряжений по высоте сечения балки в зависимости от принятой аппроксимации диаграммы деформирования показано на рис. 8.8.

Изгибающий момент в поперечном сечении балки определяем по условию эквивалентности напряжений и внутренних усилий

$$M = \int_A \sigma \cdot y \cdot dA .$$

из гипотезы плоских сечений

$$y_T(\varepsilon_{max}) := \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_{max}} \cdot \frac{h}{2} \qquad \varepsilon(\varepsilon_{max}, y) := \varepsilon_{max} \cdot \frac{y}{\left(\frac{h}{2}\right)} \qquad y := 0, \frac{h}{20} .. \frac{h}{2}$$

$$\sigma(\varepsilon_{max}, y, k) := \begin{cases} E \cdot \varepsilon(\varepsilon_{max}, y) & \text{if } \varepsilon(\varepsilon_{max}, y) \le \varepsilon_T \quad \text{упругая деформация} \\ \text{otherwise} & \\ \quad \sigma_T & \text{if } k = 1 \quad \text{диаграмма Прандтля} \\ \quad \left[390 \cdot МПа + E1 \cdot \left(\varepsilon(\varepsilon_{max}, y) - \varepsilon_T\right)\right] & \text{if } k = 2 \quad \text{линейное упрочнение} \\ \quad 240 \cdot МПа + 700 \cdot \left(\varepsilon(\varepsilon_{max}, y) - \varepsilon_T\right)^{0.3} \cdot МПа & \text{if } k = 3 \quad \text{степенное упрочнение} \end{cases}$$

Рис. 8.7. Определение деформаций и напряжений при упругопластическом изгибе балки

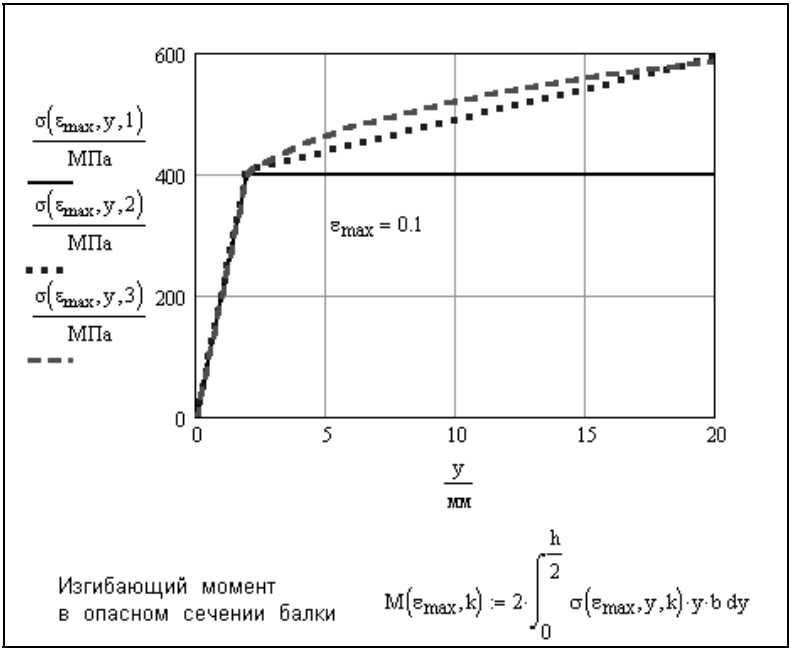


Рис. 8.8. Распределение напряжений по высоте сечения балки

Зависимость изгибающего момента M от величины максимальной деформации ε_{max} и вида аппроксимации диаграммы деформирования представлена на рис. 8.9.

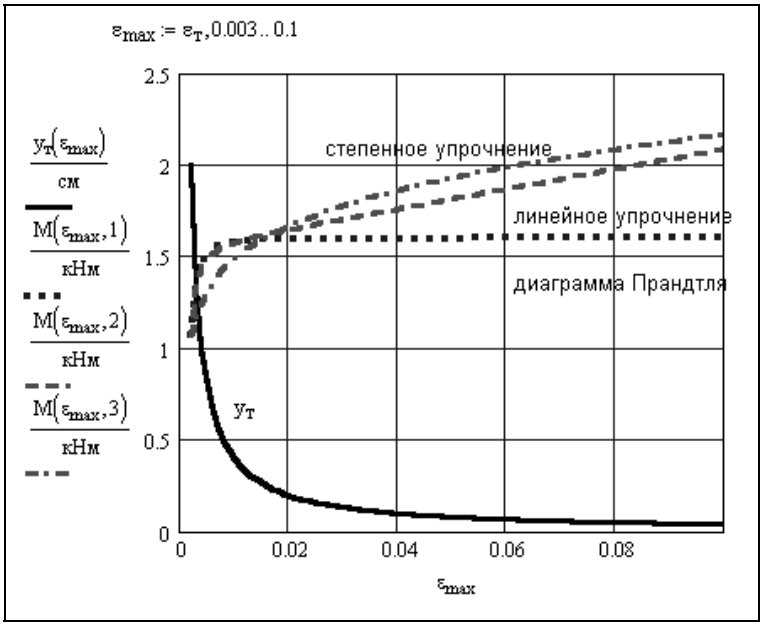


Рис. 8.9. Зависимость размера упругого ядра сечения $y_т$ и изгибающего момента от деформации ε_{max} и от вида аппроксимации диаграммы деформирования

На том же рисунке сплошной линией показано изменение границы зоны пластичности $y_т$ от ε_{max}. При $\sigma_{max} = \sigma_т$ $y_т = h/2$.

С ростом ε_{max} величина $y_т$ уменьшается и при $\varepsilon_{max} \to \infty$ $y_т \to 0$, но практически (и теоретически) вблизи нейтральной оси всегда существует упругая зона (пусть и очень маленькая).

Изгибающий момент при использовании линейной или степенной аппроксимации диаграммы деформирования медленно растет с ростом ε_{max}. При использовании диаграммы Прандтля изгибающий момент с ростом пластических деформаций растет очень медленно, практически оставаясь постоянным.

Такое состояние, когда изгибающий момент практически не растет, а значит, деформация происходит при постоянной нагрузке, называется *пластическим шарниром*. Понятие пластический шарнир имеет смысл только при использовании диаграммы Прандтля.

В нашем примере можно считать, что пластический шарнир уже существует при $\varepsilon_{max} = 0,02$ или $y_т = 2$ мм.

Если задан изгибающий момент и требуется найти соответствующее ему распределение напряжений по сечению балки, то надо по графику $M - \varepsilon_{max}$ найти величину ε_{max}, соответствующую заданному значению M. Затем построить график зависимости σ от y при найденном значении ε_{max}, подобный рис. 8.8.

Эту же задачу можно решить с помощью функции `root` (рис. 8.10), предварительно записав зависимости, приведенные на рис. 8.7 и 8.8.

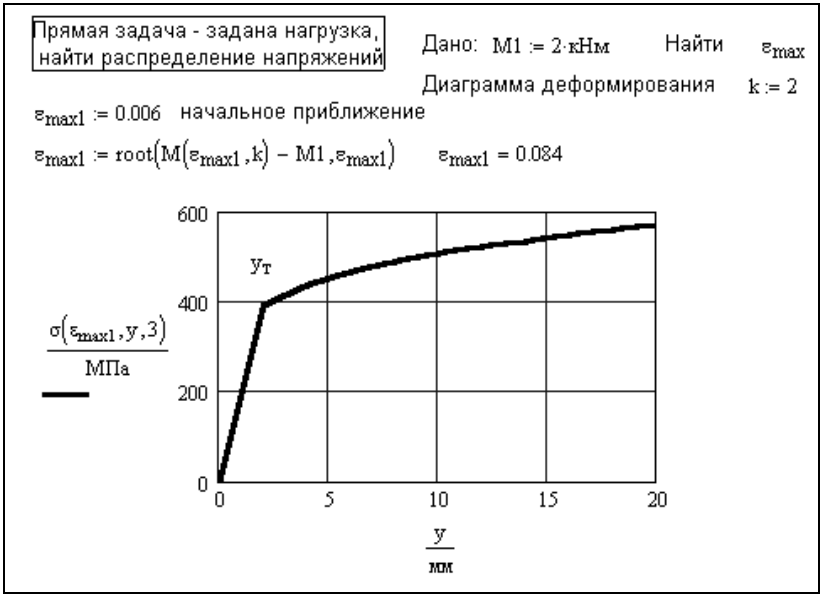


Рис. 8.10. Определение распределения напряжений по высоте сечения по заданной нагрузке на балку

В пластически деформированной балке при разгрузке возникают остаточные напряжения. Определим величину остаточных напряжений.

При определении остаточных напряжений следует учесть, что *при нагрузке распределение напряжений упругопластическое, при разгрузке — чисто упругое*.

Пусть балку нагрузили моментом $M_{нагр}$. После разгрузки $M = 0$. Состояние разгрузки можно представить как сумму моментов нагрузки и разгрузки, равную нулю $M_{нагр} + M_{разгр} = 0$. Откуда

$$-M_{нагр} = -\int_A \sigma_{пласт} y \cdot dA = M_{разгр} = \sigma_{max,\,разгр} W \,, \qquad (8.4)$$

где W — момент сопротивления сечения. Для прямоугольного сечения $W = \frac{b \cdot h^2}{6}$.

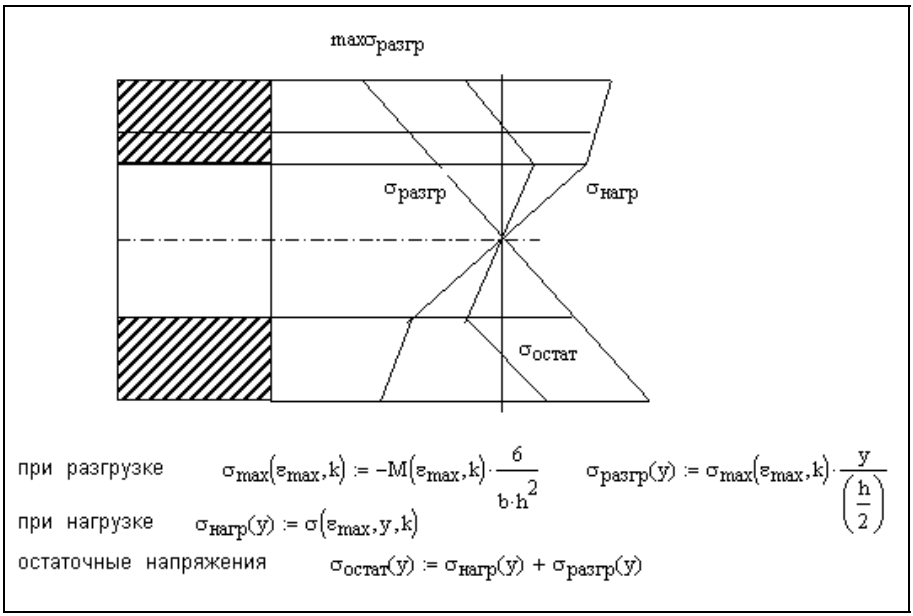


Рис. 8.11. Определение остаточных напряжений при упругопластическом изгибе балки

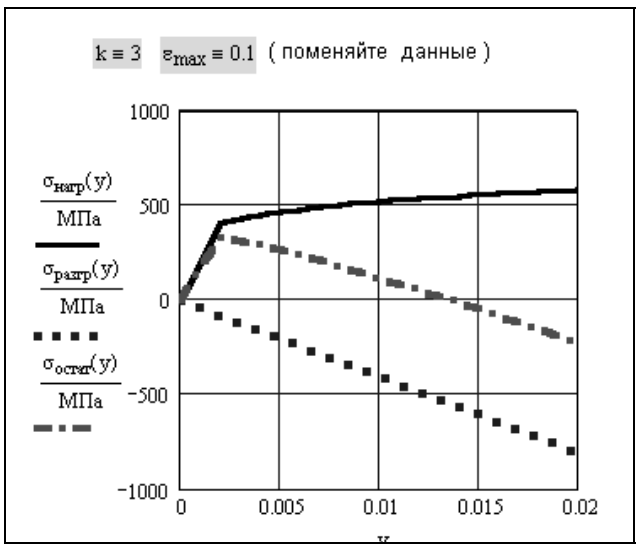


Рис. 8.12. Остаточные напряжения при изгибе

Из выражения (8.4) находим максимальное упругое напряжение при разгрузке $\sigma_{max,разгр}$ (рис. 8.11). По высоте сечения упругие напряжения распределены по линейному закону. Тогда из подобия треугольников $\sigma_{разгр} = \frac{\sigma_{max,разгр}}{h/2} y$.

Остаточные напряжения определяются как сумма напряжений нагрузки и разгрузки.

$$\sigma_{ост} = \sigma_{нагр} + \sigma_{разгр}.$$

Работая с программой, поменяйте значение ε_{max} и посмотрите на характер эпюр и величину остаточных напряжений (рис. 8.12).

8.4. Учет пластических деформаций при кручении

При кручении крутящий момент определяется методом сечений, как указано в *главе 2*, независимо от величины деформации, а вот характер распределения напряжений в поперечных сечениях стержня оказывается различным при упругих и упругопластических деформациях.

Как и при изгибе, для облегчения расчетов примем дополнительную гипотезу, аналогичную гипотезе плоских сечений.

Гипотеза

> При кручении прямолинейные радиусы остаются прямыми как при упругих, так и при упругопластических деформациях балки.

На основании этой гипотезы можно считать, что при кручении деформации пропорциональны радиусу-вектору точки как при упругой, так и при упругопластической деформации (рис. 8.13).

Для определения напряжений при упругопластической деформации надо перестроить диаграмму деформирования в координатах $\gamma - \tau$, и по этой диаграмме для заданного значения деформации γ определить соответствующее ей значение напряжения τ. Величина напряжения τ будет зависеть от выбранного вида аппроксимации диаграммы деформирования.

Будем постепенно увеличивать нагрузку на стержень и, соответственно, крутящий момент.

Деформации и напряжения в сечении распределены по линейному закону до тех пор, пока на поверхности стержня напряжения не достигнут предела текучести $\tau_{max} = \tau_т$.

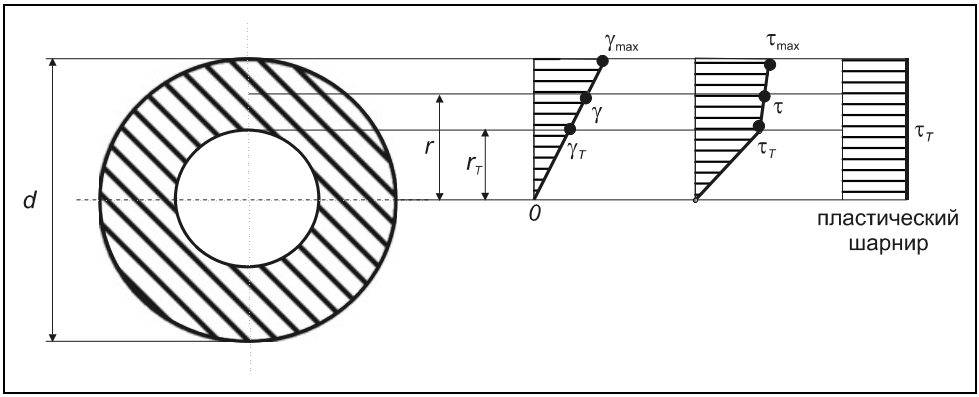


Рис. 8.13. Распределение деформаций и напряжений при упругопластическом кручении стержня

Найдем предельный крутящий момент при упругой деформации

$$M_{\text{к.упр}} = \tau_{\text{т}} W_p = \tau_{\text{т}} \frac{\pi d^3}{16}.$$

При дальнейшем увеличении нагрузки у поверхности стержня появляется пластическая зона, которая увеличивается с ростом нагрузки. В центре стержня сохраняется упругая зона (рис. 8.13).

При дальнейшем увеличении нагрузки зона упругопластической деформации растет, постепенно захватывая почти все сечение.

Рассмотрим идеальный случай, когда все сечение пластически деформируется. Напряжения во всех точках сечения равны пределу текучести. Как и при изгибе, такое предельное состояние называется *пластический шарнир.*

Пластическим шарниром считается состояние, при котором крутящий момент практически не растет и деформация происходит при постоянной нагрузке.

При постоянной нагрузке части стержня слева и справа от сечения взаимно разворачиваются (стержень превратился в пластический механизм).

Понятие *пластический шарнир* имеет смысл только при использовании диаграммы Прандтля.

Справедливости ради надо отметить, что и при использовании диаграммы Прандтля крутящий момент, хоть и очень медленно, но растет за счет уменьшения упругого ядра в центре сечения стержня.

Найдем предельный крутящий момент, возникающий в пластическом шарнире.

Из условия эквивалентности напряжений и внутренних усилий (1.3).

$$M_{\text{к}} = \int_A \tau \cdot \rho \cdot dA .$$

С учетом $dA = 2\pi\rho \cdot d\rho$ выражение для крутящего момента в круглом поперечном сечении примет вид:

$$M_{\text{к.пласт}} = 2\pi \int_0^{\frac{d}{2}} \tau_{\text{т}} \cdot \rho^2 d\rho = \tau_{\text{т}} \frac{\pi d^3}{12} .$$

В условиях пластической деформации балка может выдержать значительно большую нагрузку, чем при упругой деформации:

$$\frac{M_{\text{к.пласт}}}{M_{\text{к.упр}}} = 1{,}33 .$$

Найдем изгибающий момент при упругопластическом кручении

$$M_{\text{к.пласт}} = \int_A \tau \cdot \rho \cdot dA . \qquad (8.5)$$

Напряжения τ по высоте сечения переменные.

$$\tau = G \cdot \gamma ,$$

если деформация упругая $\gamma < \gamma_{\text{т}}$,

$$\tau = \Phi(\gamma) , \qquad (8.6)$$

если деформация упругопластическая $\gamma \geq \gamma_{\text{т}}$.

Здесь $\Phi(\gamma)$ — уравнение диаграммы деформирования при кручении, зависящее от принятой аппроксимации диаграммы.

С помощью панели программирования Mathcad можно записать зависимость τ от координаты выбранной точки ρ в виде одной функции.

Для этого надо знать координату границы упругой и упругопластической зон $\rho_{\text{т}}$.

На эпюре деформаций γ (см. рис. 8.13) рассмотрим три подобных треугольника. Запишем отношение их катетов:

$$\frac{\gamma_{\max}}{d/2} = \frac{\gamma_{\text{т}}}{r_{\text{т}}} = \frac{\gamma}{r} .$$

Из этого выражения находим величины γ и $\rho_т$ в зависимости от γ_{max}

$$\gamma_т = \rho_т = \frac{\gamma_т}{\gamma_{max}}\frac{d}{2} \qquad \gamma = \frac{\gamma_{max}}{d/2}\rho\,. \tag{8.7}$$

Здесь $\gamma_т = \tau_т / G$ — деформация, соответствующая пределу текучести.

Выберем переменную для расчета. Как и при изгибе, можно задаваться величиной деформации γ_{max} и по ней находить распределение напряжений по сечению стержня и соответствующий ей крутящий момент, но при кручении удобнее задаваться углом поворота сечения ϕ.

Запишем связь между углами ϕ и γ. Как видно из рис. 8.14,

$$AA_1 = \gamma_{max} \cdot L = \frac{d}{2} \cdot \phi\,,$$

откуда

$$\phi = \frac{2\gamma_{max} L}{d}\,. \tag{8.8}$$

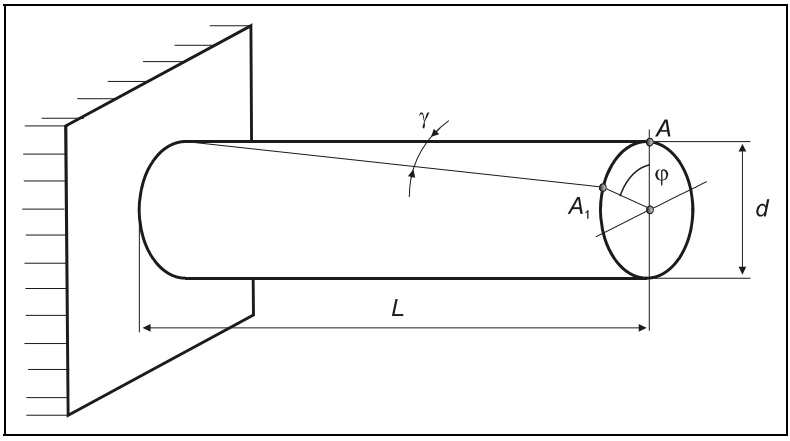


Рис. 8.14. Связь угла закручивания и угла сдвига

Порядок расчета. Задаемся ϕ. По выражениям (8.8), затем (8.7), (8.6) и (8.5) определяем изгибающий момент $M_{к.упр\text{-}пласт}$.

Строим график зависимости $M_к$ от ε и уже по графику для заданного момента определяем соответствующий ему угол закручивания ϕ.

Для найденного значения ϕ находим зависимость τ от ρ.

В качестве примера для расчета выбран стержень из стали 30 диаметром 6 мм и длиной 150 мм, применяемый при лабораторных испытаниях на кручение, что позволяет сравнить расчетные данные с результатами испытаний. Для расчета использованы результаты испытания этой стали на растяжение (предел текучести $\sigma_т$, сопротивление разрыву $\sigma_р$ и деформация в шейке при разрыве $\varepsilon_р$). Исходные данные для расчета приведены на рис. 8.15.

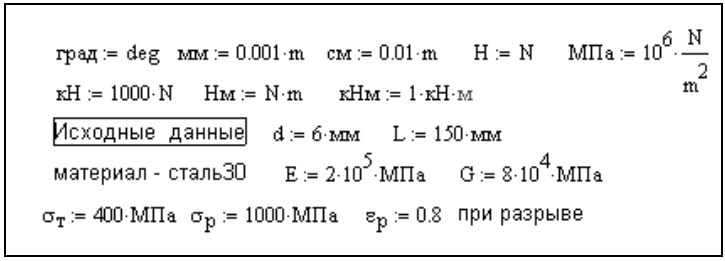


Рис. 8.15. Исходные данные для расчета на упругопластическое кручение

Вначале строим диаграмму деформирования при растяжении. Поскольку заданы лишь две характеристики прочности, диаграмму деформирования проведем через две точки, т. е. используем аппроксимацию диаграммы деформирования с линейным упрочнением. Обратите внимание, что модуль упрочнения $E1$ в 300 раз меньше модуля Юнга E (рис. 8.16).

Для перехода к диаграмме кручения запишем связь между касательными и нормальными напряжениями $\tau = \sigma/\sqrt{3}$ и между углом сдвига и линейной деформацией $\gamma = \varepsilon\sqrt{3}$. Эти соотношения даются в теории пластичности [4, 9] в соответствии с четвертой гипотезой прочности (гипотезой Мизеса), о которой речь пойдет в *следующей главе*.

Осуществив с помощью этих соотношений переход от диаграммы растяжения к диаграмме кручения, строим обе диаграммы (для сравнения) (рис. 8.16). Диаграмма кручения получается в $\sqrt{3}$ раз ниже и в $\sqrt{3}$ раз длиннее.

Далее вводим расчетные выражения (8.5)—(8.8). Они приведены на рис. 8.17.

Результаты расчета представлены на рис. 8.18 и 8.19.

В процессе деформации, с ростом угла закручивания стержня, крутящий момент быстро растет до появления пластических деформаций, затем рост $M_к$ резко замедляется при линейной аппроксимации диаграммы деформирования и почти полностью прекращается при использовании диаграммы Прандтля.

Пластические деформации на поверхности стержня появляются при угле закручивания $\phi_т \approx 10°$ и крутящем моменте $M_к \approx 10$ Нм. Разрушается стержень

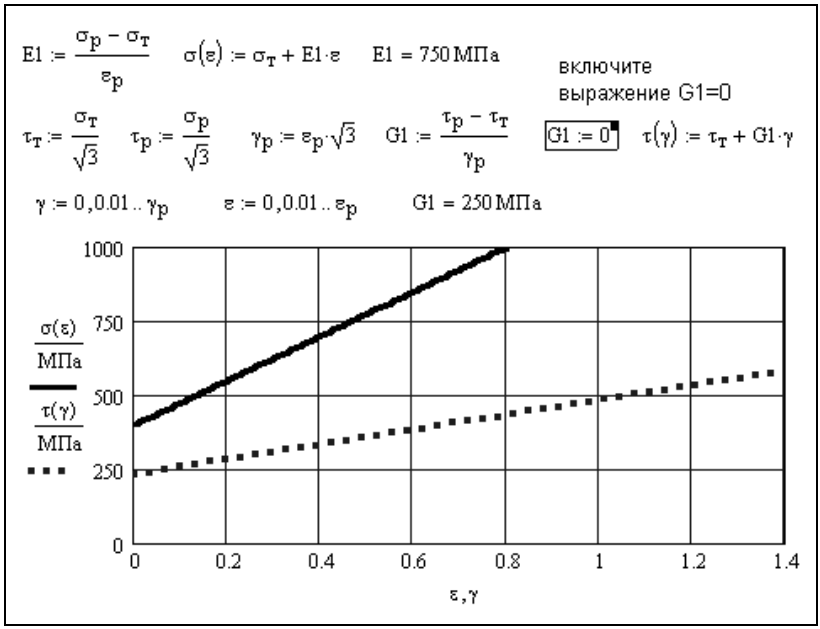


Рис. 8.16. Диаграммы деформирования при растяжении и при кручении

Рис. 8.17. Расчет стержня на упругопластическое кручение

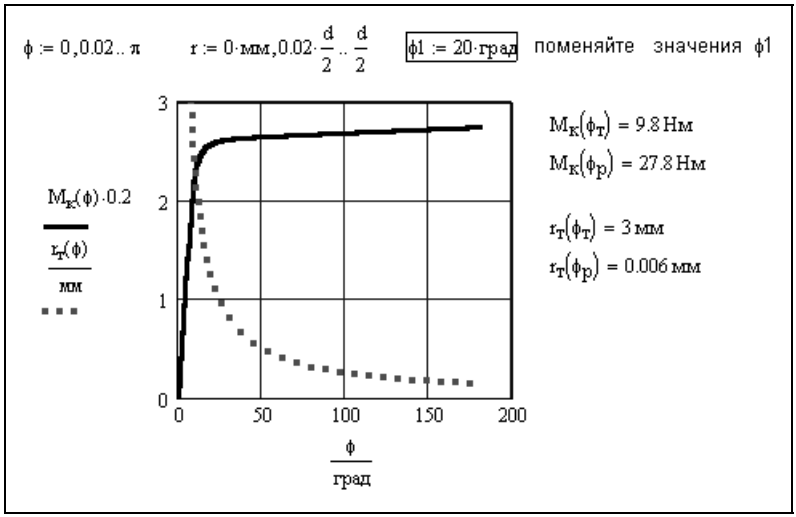


Рис. 8.18. Зависимость крутящего момента $M_к$ и радиуса границы упругой зоны $r_т$ от угла закручивания стержня ϕ

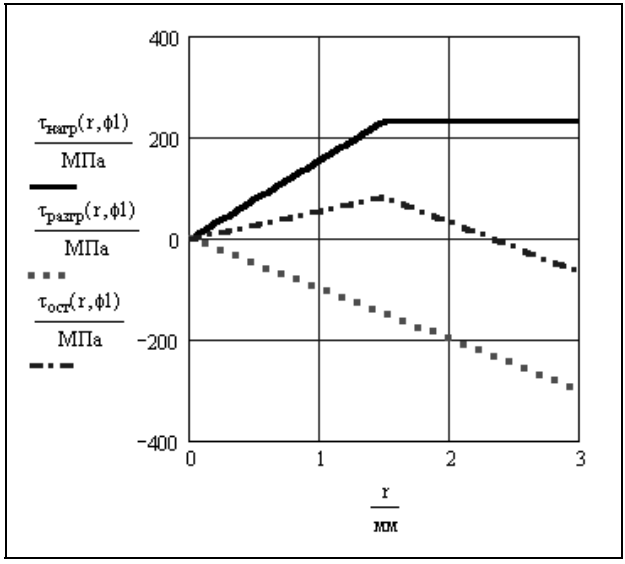


Рис. 8.19. Остаточные напряжения при упругопластическом кручении

при угле закручивания $\phi_р \approx 4000°$ (свыше 11 оборотов) и крутящем моменте $M_{кр} \approx 28$ Нм при линейном упрочнении, или $M_{кр} \approx 13$ Нм при использовании диаграммы Прандтля.

Определим остаточные напряжения при упругопластическом кручении. Основная мысль расчета та же, что и при изгибе. Нагрузка — упругопластическая, разгрузка — чисто упругая.

$$M_{\text{к.нагр}} + M_{\text{к.разгр}} = 0, \tag{8.9}$$

где:

- $M_{\text{к.нагр}} = \int_A \tau_{\text{пласт}} r \cdot dA$ — момент нагрузки;
- $M_{\text{к.разгр}} = \int_A \tau_{\text{упр}} r \cdot dA = \tau_{\max} W_{\text{р}}$ — момент разгрузки.

Из условия (8.4) находим $\tau_{\max}$ при разгрузке.

Упругие напряжения разгрузки изменяются по линейному закону пропорционально радиусу r.

Остаточные напряжения равняются сумме напряжений при нагрузке и при разгрузке:

$$\tau_{\text{ост}} = \tau_{\text{нагр}} + \tau_{\text{разгр}}.$$

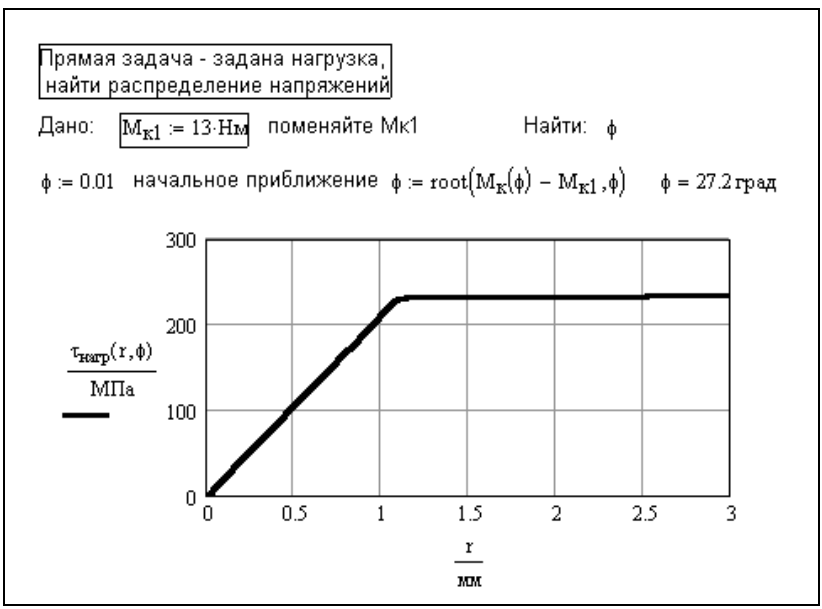


Рис. 8.20. Определение касательных напряжений τ при заданном крутящем моменте $M_{\text{к}}$

При работе с программой переключите выражения для $G1$. На рис. 8.16 включено выражение $G1$ для линейной аппроксимации диаграммы деформирования. Включите $G1 = 0$ для использования диаграммы Прандтля и посмотрите на изменение результатов расчета. Сможете увидеть, что при углах закручивания $\phi > 30°$ крутящий момент практически не растет, следовательно, образовался пластический шарнир. При $\phi = 30°$ упругая зона имеет размер $r_т \approx r_{max}/3$ мм.

При заданном крутящем моменте можно непосредственно по графику (см. рис. 8.18) найти соответствующий ему угол закручивания.

Задаваться "на глазок" крутящим моментом не имеет смысла, т. к. упругопластический момент изменяется в очень небольших пределах, и велика вероятность, что не будет найдено никакого решения.

Как показано на рис. 8.20, можно задаться реальным значением $M_к$ (из графика на рис. 8.18), с помощью функции `root` определить угол закручивания, соответствующий этому моменту, и построить эпюру касательных напряжений в сечении стержня.

8.5. Расчеты по предельной нагрузке

Рассмотрим приближенные методы оценки допускаемой нагрузки на рассматриваемую конструкцию.

Во всех предыдущих разделах в качестве условия выхода конструкции из строя принималось $\sigma_{max} = \sigma_{пред}$, где в качестве $\sigma_{пред}$ принимался предел прочности для материалов в хрупком состоянии или предел текучести для материалов в пластичном состоянии.

Другими словами, конструкция из пластичного материала выходит из строя, если в самой нагруженной точке напряжение достигает предела текучести. А условие прочности имеет вид $\sigma_{max} \le [\sigma] = \sigma_т/n$, где n — коэффициент запаса.

Такой расчет носит название *расчет по допускаемым напряжениям.*

Однако, как видно из первых трех разделов этой главы, появление пластических деформаций в конструкции еще не означает выход конструкции из строя. Конструкция из пластичных материалов вполне может воспринимать нагрузку, гораздо большую, чем найденная расчетом по допускаемым напряжениям.

Был предложен другой метод расчета, названный *расчетом по несущей способности или расчетом по допускаемым нагрузкам.*

За выход из строя в этом методе принимается перемещение конструкции или части ее при постоянной нагрузке, т. е. превращение системы в пластический механизм при появлении в ней пластических шарниров.

При этом условие выхода из строя $P = P_{\text{пред}}$.

Условие прочности $P \le [P] = P_{\text{пред}} / n$, где $P_{\text{пред}}$ — нагрузка, при которой система превращается в пластический механизм.

В расчетах по допускаемым нагрузкам используется схематизированная диаграмма деформирования идеального жесткопластического тела, представляющая собой одну горизонтальную линию $\sigma = \sigma_{\text{т}}$ (без учета упругих деформаций).

При $\sigma < \sigma_{\text{т}}$, деформация $\varepsilon = 0$, т. е. материал считается абсолютно жестким (недеформируемым). При $\sigma = \sigma_{\text{т}}$, деформация $\varepsilon \to \infty$.

Возможны два состояния конструкции при использовании такой диаграммы.

- Пластический шарнир уже есть, но система еще не механизм — это *статически возможное состояние.*

  В статически возможном состоянии выполняются уравнения равновесия.

- Система уже превратилась в пластический механизм — это *кинематически возможное состояние.*

  В кинематически возможном состоянии выполняются уравнения неразрывности деформаций, т. к. разрушения конструкции не происходит.

В теории пластичности [4, 9] доказываются статическая и кинематическая теоремы. Приведем их формулировки без доказательств.

Статическая теорема

Нагрузка, соответствующая статически возможному состоянию, всегда меньше предельной нагрузки. Эта теорема — основа метода нижней оценки.

Кинематическая теорема

Нагрузка, соответствующая кинематически возможному состоянию, всегда больше предельной нагрузки. Эта теорема — основа метода верхней оценки.

Для определения предельной нагрузки рассматриваются различные возможные состояния и определяется нагрузка для каждого из них.

Наибольшая из всех статически возможных нагрузок ближе всего к предельной (метод нижней оценки).

В методе нижней оценки величина предельной нагрузки определяется из условий равновесия системы.

Наименьшая из всех кинематически возможных нагрузок ближе всего к предельной (метод верхней оценки).

В методе верхней оценки величина предельной нагрузки определяется из условия равенства работ внешних и внутренних сил при перемещении системы.

Рассмотрим примеры определения предельной нагрузки.

Пример 1

Рассмотрим балку, защемленную двумя концами, нагруженную силой F (рис. 8.21, *а*). В упругой постановке эта балка 2 раза статически неопределима. Решение такой задачи методом сил будет рассмотрено в *главе 12.*

На рис. 8.21, *б* приведена эпюра изгибающих моментов в сечениях балки, найденная методом сил при упругой деформации (при $c = 2a$). Однако предельную нагрузку на балку можно оценить уже сейчас методами верхней и нижней оценки (наличия упругого решения не требуется).

Метод нижней оценки

При постепенном увеличении нагрузки пластические шарниры образуются сначала в сечении *D*, потом в сечении *B*, затем в сечении *A*. Это три статически возможных состояния. Предельным является состояние, когда в балке образуются 3 пластических шарнира. После этого система превращается в пластический механизм.

Рассматриваем предельное состояние, когда шарниры уже есть, но система еще не превратилась в пластический механизм. Схема нагружения балки в предельном состоянии (с тремя шарнирами) показана на рис. 8.21, *в*, эпюра изгибающих моментов в предельном состоянии — на рис. 8.21, *г*.

В пластическом шарнире в каждой точке сечения $\sigma = \sigma_т$. Тогда изгибающий момент в пластическом шарнире

$$M_{пл} = \int_A \sigma_т y \cdot dA = 0 .$$

Поскольку в этом выражении не учтен знак напряжения (плюс в растянутых волокнах и минус в сжатых), запишем изгибающий момент как сумму моментов от напряжений в растянутых и сжатых волокнах.

$$M_{пл} = \int_{A_{раст}} \sigma_т y \cdot dA + \int_{A_{сжат}} \sigma_т y \cdot dA .$$

Для балки прямоугольного сечения это выражение примет вид:

$$M_{пл} = 2 \int_{A/2} \sigma_т y \cdot dA = \sigma_т \frac{bh^2}{4} = Const .$$

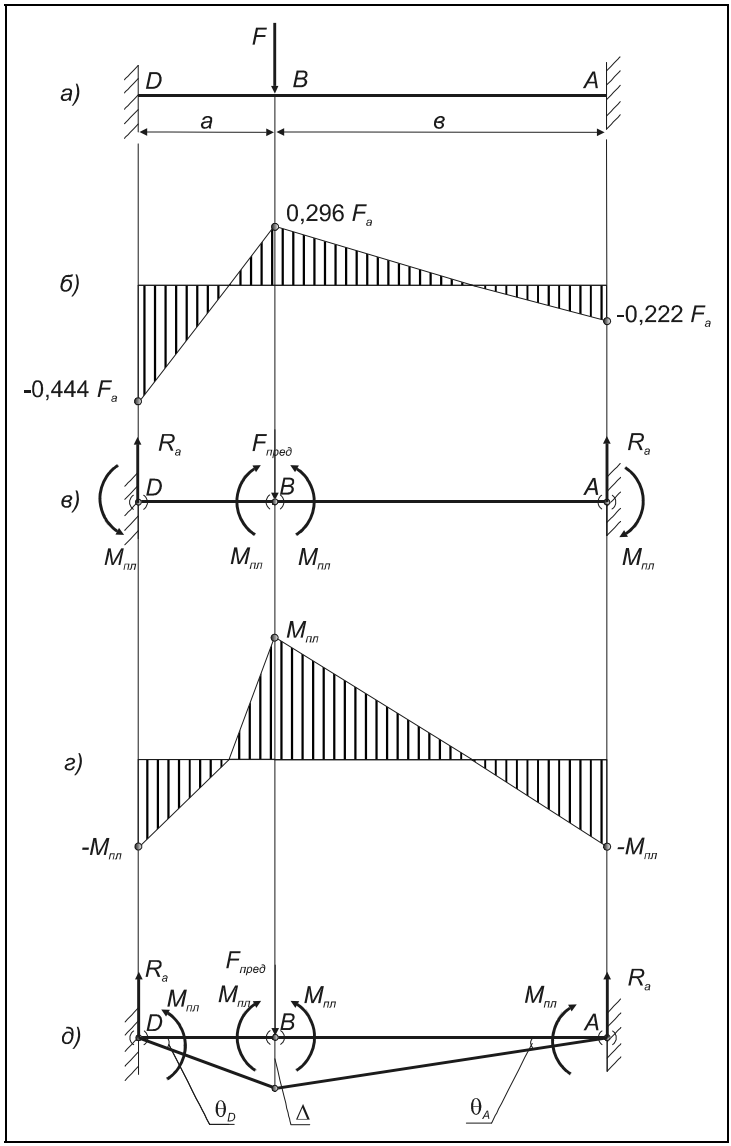


Рис. 8.21. Образование пластических шарниров в балке

Запишем условия равновесия балки в шарнирах A, B и D.

$$M_A = -M_{\text{пл}},$$

$$M_B = -M_{\text{пл}} + R_A \cdot c = M_{\text{пл}},$$

$$M_C = -M_{\text{пл}} + R_A(a+c) - F_{\text{пред}}a = -M_{\text{пл}}.$$

Из третьего условия

$$R_A = F_{\text{пред}} \frac{a}{a+c}.$$

Из второго условия

$$2M_{\text{пл}} = R_A \cdot c = F_{\text{пред}} \frac{a \cdot c}{a+c},$$

$$F_{\text{пред}} = 2M_{\text{пл}} \frac{a+c}{a \cdot c}.$$

При $c = 2a$

$$F_{\text{пред}} = 2M_{\text{пл}} \frac{a+2a}{a \cdot 2a} = 3\frac{M_{\text{пл}}}{a} = \frac{3}{4}\sigma_{\text{т}} \frac{bh^2}{4}. \qquad (8.10)$$

Метод верхней оценки

Есть три пластических шарнира. Система уже пластический механизм. Происходит перемещение при постоянной нагрузке (предельной). Шарнир *B* перемещается при постоянной нагрузке, его перемещение в некоторый момент времени — Δ (рис. 8.21, *д*). Работа внешних сил (силы F)

$$A_{\text{внеш}} = F \cdot \Delta.$$

Участки *AB* и *BD* прямолинейные, т. к. используется диаграмма жесткопластического тела, и при $\sigma < \sigma_{\text{т}}$ деформаций нет. Участок *AB* поворачивается на угол θ_A, участок *BD* — на угол θ_D.

Работа внутренних сил складывается из работ моментов в пластических шарнирах *A*, *B*, *D*. В среднем шарнире *B* взаимный угол поворота двух частей балки равен сумме углов θ_A и θ_D.

$$A_{\text{внутр}} = M_{\text{пл}}\theta_A + M_{\text{пл}}\theta_D + M_{\text{пл}}(\theta_A + \theta_D).$$

Найдем связь между углами θ_A и θ_D

$$\text{tg}(\theta_A) = \frac{\Delta}{b} \qquad \text{tg}(\theta_D) = \frac{\Delta}{a},$$

тогда $\Delta = b \cdot \theta_A = a \cdot \theta_D$, откуда $\theta_D = \theta_A \frac{b}{a}$.

Приравняв работу внешних и внутренних сил, находим предельную силу

$$F_{\text{пред}} b \cdot \theta_A = M_{\text{пл}} \left(2\theta_A + 2\left(\theta_A \frac{b}{a} \right) \right).$$

Откуда

$$F_{\text{пред}} = 2M_{\text{пл}}\left(\frac{a+b}{a\cdot b}\right).$$

При $b = 2a$ $F_{\text{пред}} = \dfrac{3M_{\text{пл}}}{a} = \dfrac{3}{4}\sigma_{\text{т}}\dfrac{bh^2}{a}$.

Значения предельной нагрузки $F_{\text{пред}}$, найденные методами верхней и нижней оценки совпали, следовательно, решение верное и полное.

Если решения не совпадают, это означает, что проанализированы не все возможные состояния системы и правильное решение находится как раз среди нерассмотренных состояний.

Следует отметить, что определение предельной нагрузки методом верхней оценки, как правило, значительно проще, чем методом нижней оценки.

Покажем еще один пример, где для определения предельной нагрузки надо исследовать несколько возможных состояний.

Пример 2

Рассмотрим раму, нагруженную двумя силами (рис. 8.22, *а*). Определим предельную нагрузку F методом верхней оценки.

Обозначим места возможного образования пластических шарниров цифрами 1—5. Есть несколько вариантов превращения системы в пластический механизм.

Система превращается в механизм при образовании пластических шарниров в сечениях 2, 3, 4 (рис. 8.22, *б*). При этом верхняя часть рамы начинает перемещаться без увеличения нагрузки (балочный механизм).

Система превращается в механизм при образовании пластических шарниров в сечениях 1, 2, 4, 5 (рис. 8.22, *в*). Рама складывается как параллелограмм (механизм бокового смещения).

Система превращается в механизм при образовании пластических шарниров в сечениях 1, 3, 4, 5 (рис. 8.22, *г*). Это комбинированный механизм из двух предыдущих.

Определим предельную нагрузку в каждом из трех указанных возможных состояний системы.

Балочный механизм

$$A_{\text{внеш}} = 2F_{\text{пред}}\Delta_{\text{верт}} = 2F_{\text{пред}}\theta\cdot l = A_{\text{внутр}} = 4M_{\text{пл}}\theta\,.$$

$$F_{\text{пред}} = 2M_{\text{пл}}/l\,.$$

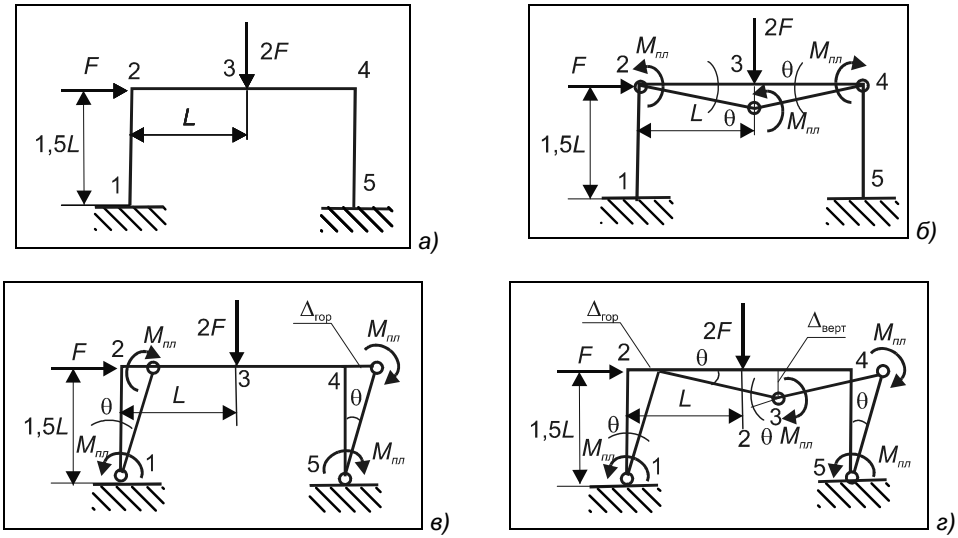


Рис. 8.22. Кинематически возможные состояния рамы

Вертикальная сила $2F$ совершает работу на вертикальном перемещении $\Delta_{верт}$. Горизонтальная сила F работу не совершает.

В пластических шарнирах 2 и 4 момент $M_{пл}$ совершает работу на угле поворота сечения θ. В шарнире 3 $M_{пл}$ совершает работу на взаимном угле поворота двух частей рамы 2θ.

Механизм бокового смещения

$$A_{внеш} = F_{пред}\Delta_{гор} = F_{пред}\theta \cdot 1,5l = A_{внутр} = 4M_{пл}\theta .$$

$$F_{пред} = 2,67\,M_{пл}/l .$$

Горизонтальная сила F совершает работу на горизонтальном перемещении $\Delta_{гор}$. Вертикальная сила $2F$ работу не совершает.

В пластических шарнирах 1, 2, 4, 5 момент $M_{пл}$ совершает работу на угле поворота сечения θ.

Комбинированный механизм

$$A_{внеш} = 2F \cdot \Delta_{верт} + F \cdot \Delta_{гор} = 2F_{пред}\theta \cdot l + F_{пред}\theta \cdot 1,5l = A_{внутр} = 6M_{пл} .$$

$$F_{пред} = 1,71M_{пл}/l .$$

Вертикальная сила $2F$ совершает работу на вертикальном перемещении $\Delta_{\text{верт}}$. Горизонтальная сила F совершает работу на горизонтальном перемещении $\Delta_{\text{гор}}$.

В пластических шарнирах 1 и 5 момент $M_{\text{пл}}$ совершает работу на угле поворота сечения θ. В шарнирах 3 и 4 $M_{\text{пл}}$ совершает работу на взаимном угле поворота двух частей рамы 2θ.

Для трех кинематически возможных состояний рамы найдено предельное значение силы F. Наименьшее из них, $F_{\text{пред}} = 1,71 M_{\text{пл}}/l$, ближе всего к действительному предельному значению.

По методу нижней оценки решение задачи сводится к составлению уравнений равновесия и решению системы этих уравнений для каждого статически возможного состояния. Такое решение значительно более сложное, чем метод верхней оценки, и здесь не рассматривается.

Пример 3

Статически неопределимая балка (рис. 8.23, *а*) нагружена распределенной нагрузкой. Требуется определить предельную величину интенсивности распределенной нагрузки. Найдем решение методом верхней оценки.

Для различных кинематически возможных состояний переменными могут быть не только число пластических шарниров, но и их положение.

В нашей задаче система превращается в пластический механизм при образовании трех пластических шарниров: в точках *A*, *B* и *D* (рис. 8.23, *б*). Положение шарнира *D* может быть различным. Обозначим его положение координатой x. Найти положение шарнира *D*, при котором предельная нагрузка на балку будет минимальной.

Подсчитаем работы внешних и внутренних сил.

$$A_{\text{внеш}} = q\Omega = q\frac{\Delta \cdot L}{2},$$

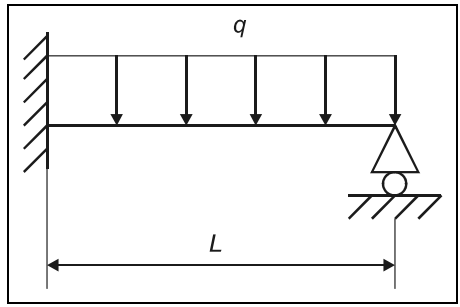
$$A_{\text{внутр}} = M_{\text{пл}}\left(\theta_A + \theta_A + \theta_B\right).$$

Из равенства работ внешних и внутренних сил найдем

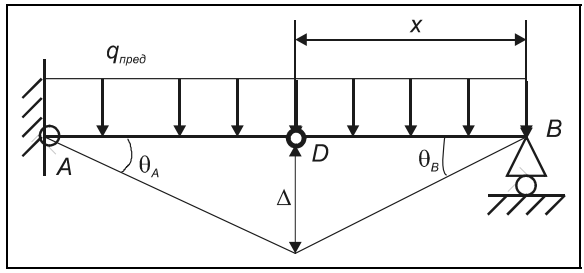
$$q = \frac{2M_{\text{пл}}}{\Delta \cdot L}\left(\theta_A + \theta_A + \theta_B\right).$$

Величина углов θ_A и θ_B зависит от x

$$\theta_A = \frac{\Delta}{L - x} \qquad \theta_B = \frac{\Delta}{x}.$$



а)



б)

Рис. 8.23. Кинематически возможное состояние балки

м := m см := 0.01·m мм := 0.001·m МПа := $10^6 \cdot \frac{N}{m^2}$

кН := 1000·N кг := kg Н := N

$\sigma_т := 300 \cdot МПа$ b := 1·см h := 2·см

$M_{пл} := \sigma_т \cdot b \cdot \frac{h^2}{4}$ L := 2·м

$q(x) := 2 \cdot \frac{M_{пл}}{L} \cdot \left(\frac{2}{L - x} + \frac{1}{x} \right)$

x := 1·м xx := Minimize(q, x) xx = 82.843 см

$q(xx) = 8.743 \frac{Н}{см}$ x := 0.·м, 0.1·м .. L

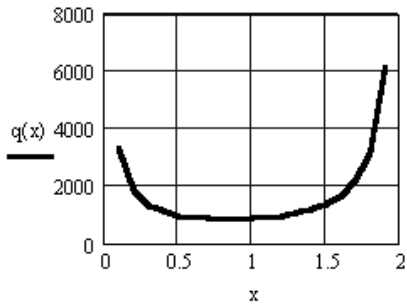


Рис. 8.24. Определение предельной нагрузки методом верхней оценки

С учетом выражений для углов выражение для предельной нагрузки q

$$q(x) = \frac{2M_{\text{пл}}}{L}\left(2\frac{\Delta}{L-x} + \frac{\Delta}{x}\right).$$

Для нашего примера $M_{\text{пл}} = \sigma_{\text{т}}\frac{bh^2}{4}$ — предельный пластический момент в прямоугольном сечении балки.

Решение задачи в Mathcad показано на рис. 8.24. На графике зависимости q от x виден минимум нагрузки $q(x)$. Это и есть предельная нагрузка на балку. Ее величину определяем с помощью функции `minimize`, как минимальную предельную нагрузку в методе верхней оценки.

8.6. Понятие о приспособляемости конструкций

В этой главе говорилось о возможности и условиях возникновения пластических деформаций в конструкциях при статическом однократном нагружении. Однако практически любая конструкция испытывает многократное нагружение.

Казалось бы, статически нагруженные здания и сооружения испытывают многократное температурное нагружение (зима – лето, ночь – день). Для трубопроводов повторной нагрузкой является периодическое изменение давления, для самолета — взлет – посадка и т. д.

При многократном нагружении пластическая деформация приводит к сравнительно быстрому разрушению конструкции.

Работа конструкций при повторных пластических деформациях недопустима.

В зависимости от условий эксплуатации возможны два варианта поведения конструкции при повторных нагружениях.

- Накопление пластических деформаций, ведущее к разрушению конструкции.
- Приспособление конструкции, когда после одного или нескольких циклов повторного нагружения пластические деформации исчезают и конструкция испытывает чисто упругое нагружение.

Важнейшим фактором приспособляемости является наличие остаточных сжимающих напряжений в опасных местах конструкции. Остаточные напряжения сжатия складываются с рабочими растягивающими напряжениями. Их сумма должна оставаться меньше предела текучести материала.

Создание остаточных напряжений сжатия широко используется в промышленности. О технологических приемах создания остаточных напряжений сжатия рассказано в *главе 17*.

В *главе 5*, при рассмотрении диаграммы деформирования мягкой стали, говорилось о явлении наклепа. Нагружение образца выше предела текучести, разгрузка и повторное нагружение приводят к повышению пределов пропорциональности и текучести.

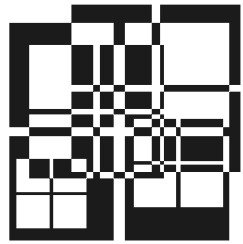
Предварительная пластическая деформация используется, в частности, для увеличения рабочего диапазона нагрузок пружин (заневоливание пружин).

Опрессовка труб и сосудов давлением, вызывающим в них появление пластической деформации, ведет к повышению допустимого рабочего давления.

Но не все так просто. Оптимальное давление опрессовки или нагрузка предварительной пластической деформацией требуют тщательного, чаще всего экспериментального, определения оптимальной величины остаточных напряжений, дающей наибольший эффект упрочнения.

Для приспособляемости конструкции необходимо, чтобы рабочая нагрузка была меньше предельной, определяемой, как описано в *предыдущем разделе*.

Есть и другие условия, ограничивающие приспособляемость конструкций, но они выходят за рамки курса сопротивления материалов.



ГЛАВА 9

Основы напряженно-деформированного состояния

В предыдущих главах были рассмотрены простые виды деформации (растяжение-сжатие, сдвиг, кручение, изгиб), где в условие прочности входило одно напряжение: либо нормальное σ_{max}, либо касательное τ_{max}, т. к. второе напряжение было или мало по сравнению с первым, как при изгибе, или отсутствовало в рассматриваемом сечении, как при растяжении, сдвиге и кручении.

Чтобы перейти к рассмотрению общего случая нагружения тела (к сложному сопротивлению), при котором величины σ и τ в точке тела могут быть одного порядка, надо вначале получить общую форму записи условия прочности, в которой учитывалось бы влияние и σ и τ.

В общей постановке уравнения связи между перемещениями, деформациями, напряжениями и внешними нагрузками рассматриваются в механике деформируемого твердого тела и в теории упругости. В этой главе приводятся только основные сведения, необходимые для решения поставленных задач.

Рассмотрим напряжения и деформации, которые возникают в некоторой точке тела при произвольном нагружении.

9.1. Деформации

Под действием внешних нагрузок тело деформируется. Как следствие деформаций, появляются напряжения в теле. Нет деформаций — нет и напряжений.

Напомним разницу между перемещением и деформацией.

Перемещение — изменение положения точки в пространстве.

Деформация — изменение формы и размеров тела.

Полная деформация тела складывается из линейной и угловой деформаций (рис. 9.1). Поскольку деформация тела, как правило, неоднородна, дальше будем говорить о деформации бесконечно малого элемента тела, выделенного в окрестностях рассматриваемой точки тела.

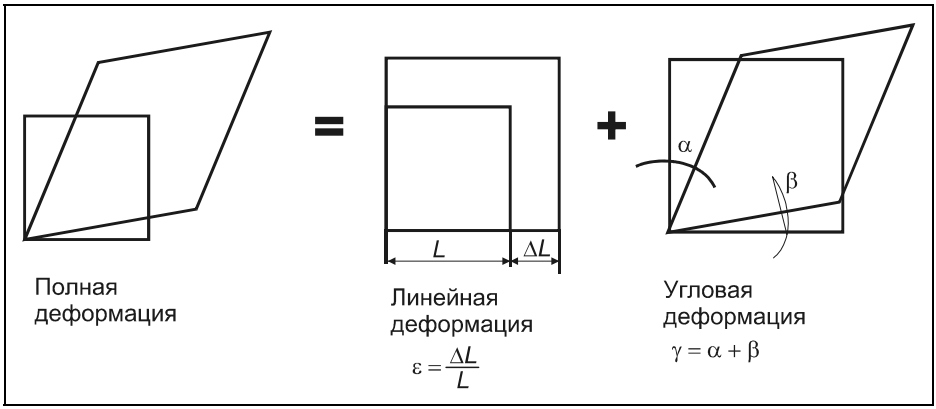


Рис. 9.1. Деформации

Линейная деформация — относительное изменение размеров элемента тела.

Угловая деформация — изменение первоначально прямого угла выделенного элемента тела.

Если элемент тела — параллелепипед, ориентированный по осям x, y, z, то соответственно возникают три линейные деформации (вдоль осей x, y, z): ε_x, ε_y, ε_z, и три угловые деформации: γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx} в трех взаимно перпендикулярных плоскостях.

Под действием указанных деформаций на гранях выделенного элемента возникают напряжения.

9.2. Напряжения

В теле произвольной формы, нагруженном произвольными силами, выделим элементарный объем dV. По граням этого элемента действуют векторы полных напряжений $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, $\vec{p}_3$ (рис. 9.2). Величина и направление полных напряжений неизвестны. Для определения этих векторов представим каждый из них в виде проекций на оси координат x, y, z.

Пусть объем выделенного элемента стремится к нулю, тогда можно считать, что напряжения на противоположных гранях элемента одинаковы и определяют напряженное состояние в точке тела, около которой выделен этот объем.

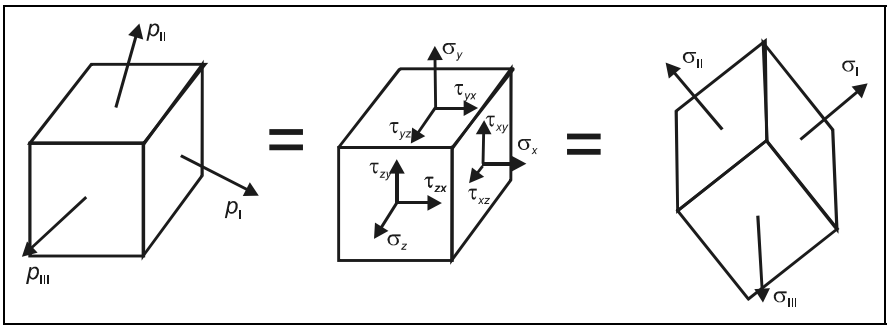


Рис. 9.2. Напряжения в точке тела

Запишем напряжения, действующие по граням элемента, в упорядоченном виде, в виде матрицы размерностью 3×3. Каждый столбец этой матрицы представляет собой совокупность напряжений, действующих на одной из граней элемента. Такая матрица называется *тензором напряжений*

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}. \qquad (9.1)$$

По закону парности касательные напряжения на взаимно перпендикулярных площадках равны, поэтому $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$. Следовательно, тензор напряжений — симметричная матрица, и напряженное состояние в произвольной точке тела однозначно определяется шестью независимыми напряжениями.

Следует отметить, что тензор не просто матрица. Компоненты тензора подчиняются строгим правилам преобразования, излагаемым в тензорной алгебре. Механика деформируемого твердого тела, теория упругости и численная механика строятся на таких ключевых понятиях, как тензор напряжений и тензор деформаций. Без них невозможно создание численных методов расчета, таких как методы конечных и граничных элементов.

В сопротивлении материалов используются не сами тензоры напряжений и деформаций, а лишь их отдельные компоненты.

При повороте осей координат, совпадающих с нормалями к граням выделенного элемента, компоненты напряжений изменяются. Вращая выделенный элемент вокруг осей координат, можно найти такое положение элемента, при котором все касательные напряжения на гранях элемента равны нулю.

Площадка, на которой касательные напряжения равны нулю, называется *главной площадкой.*

Нормальное напряжение на главной площадке называется *главным напряжением*.

Нормаль к главной площадке называется *главной осью напряжений.*

В каждой точке можно провести три взаимно перпендикулярных главных площадки.

При повороте осей координат изменяются компоненты напряжений, но не меняется напряженно-деформированное состояние тела (НДС).

Для расчетов на прочность можно использовать как тензор из девяти компонентов напряжений, найденных при заданных осях координат, так и вектор из трех главных напряжений. Естественно, работать с тремя неизвестными напряжениями значительно проще, чем с девятью, поэтому при решении сложных задач стараются использовать главные напряжения.

В теории упругости есть формула подобных преобразований для определения компонентов напряжений при повороте осей координат. Эта формула используется в методе вращений Якоби, применяемом для определения величины и направления главных напряжений. Рассмотрим основную идею метода Якоби.

Вращаем элемент последовательно вокруг трех осей координат, добиваясь того, чтобы касательные напряжения обратились в нули. Строго говоря, в алгоритме метода нет последовательного вращения, а есть формула для определения угла, на который надо развернуть ось, чтобы касательные напряжения на двух площадках обратились в нули.

В Mathcad метод Якоби реализуется в программе `eigenvals`, возвращающей величины трех главных напряжений, называемых собственными числами, и в программе `eigenvecs`, возвращающей косинусы углов между нормалью к главной площадке и исходными осями координат, называемые собственным вектором.

Рассмотрим пример определения величины и направления главных напряжений в Mathcad (рис. 9.3).

Для заданного напряженного состояния следует ввести напряжения, действующие по граням элемента, в виде тензора напряжений T_σ. Вызовите функции `eigenvals`, возвращающую значения главных напряжений, и `eigenvecs`, возвращающую для всех трех главных площадок косинусы углов между нормалью к главной площадке и исходными осями координат *x*, *y*, *z* (нормалями к исходным площадкам). Посмотрите на выведенные результаты расчета. Для удобства анализа косинусы углов преобразованы в углы. Чтобы увидеть значения углов в градусах, а не в радианах, надо щелкнуть левой кнопкой мыши в поле выведенных чисел, и в появившемся черном прямоугольнике ввода вписать `deg`. Появится результат расчета в градусах.

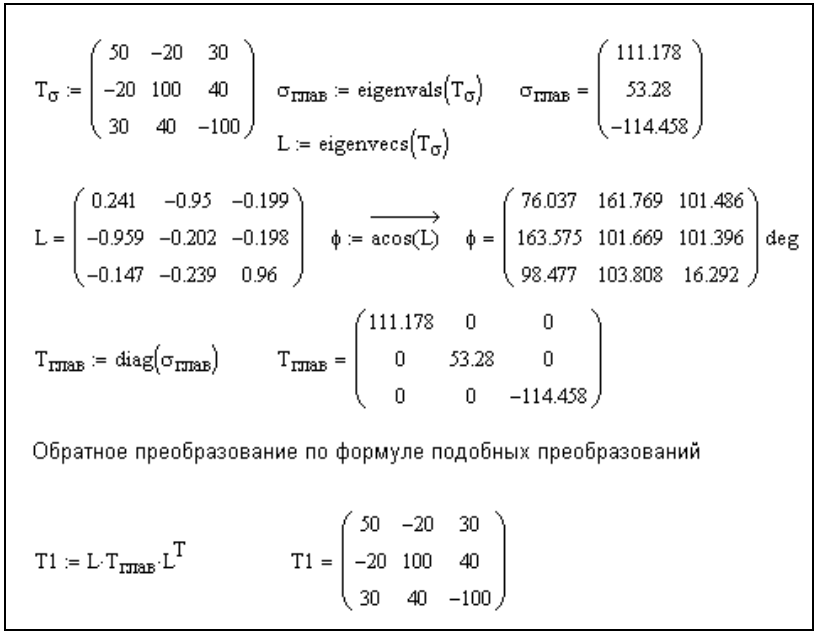


Рис. 9.3. Определение главных напряжений и главных площадок в Mathcad

Выведенные в виде вектора (столбца чисел) значения главных напряжений $\sigma_{глав}$ можно записать в форме диагональной матрицы (в данном случае тензора напряжений, ориентированного по главным площадкам) $T_{глав}$.

Внизу на рис. 9.3 показано использование формулы подобных преобразований для определения значений тензора при повороте осей координат. Подстановка в эту формулу найденной матрицы направляющих косинусов позволяет вернуться к исходному тензору напряжений T_σ.

9.3. Виды напряженного состояния

В зависимости от количества неравных нулю главных напряжений различают объемное, плоское и линейное напряженные состояния (рис. 9.4).

- *Линейное напряженное состояние* — одно главное напряжение не равно нулю (рис. 9.4, *а*).

  Примером линейного напряженного состояния являются растяжение-сжатие и чистый изгиб. При растяжении $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. При сжатии $\sigma_3 \neq 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$.

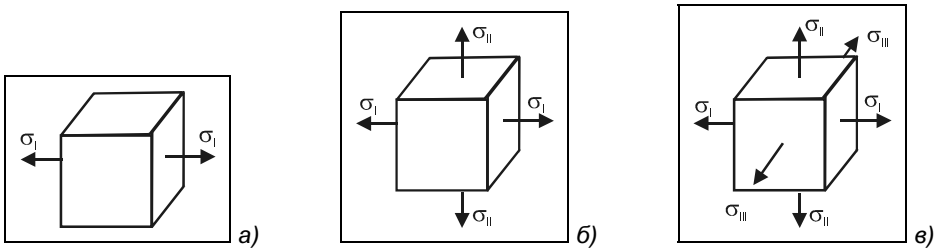


Рис. 9.4. Виды напряженного состояния

- *Плоское напряженное состояние* — два главных напряжения не равны нулю (рис. 9.4, *б*).

  Примером плоского напряженного состояния являются сдвиг, изгиб и кручение длинных и тонких стержней, тонкостенные пластины и оболочки.

- *Объемное напряженное состояние* — все три главных напряжения не равны нулю (рис. 9.4, *в*).

  Примером объемного напряженного состояния является нагружение массивных тел.

Решение объемной задачи на порядок сложнее решения плоской задачи. Однако часто и для массивных тел можно использовать решения, найденные для плоского напряженного состояния.

Разрушение массивных тел чаще всего начинается с поверхности, а на поверхности одно из главных напряжений равно нулю. Следовательно, вблизи поверхности можно использовать зависимости, полученные при плоском напряженном состоянии.

Кроме того, на практике часто встречаются частные случаи объемного напряженного состояния: плоское деформированное состояние и осесимметричное нагружение. Для этих случаев используют уравнения плоского напряженного состояния с небольшой поправкой. Большинство расчетных программ, составленных для плоского напряженного состояния, как правило, решают и задачи плоской деформации и осесимметричного нагружения.

9.4. Плоское напряженное состояние

К плоскому напряженному состоянию относятся большинство рассматриваемых в сопротивлении материалов случаев нагружения стержней, поэтому плоскому напряженному состоянию уделим особое внимание.

Найдем связь между напряжениями на гранях выделенного элемента и напряжениями на наклонной площадке. Рассмотрим прямую и обратную задачи.

9.4.1. Прямая задача

Предположим, что в какой-то точке тела известны главные напряжения $\sigma_{\text{I}} \neq 0$, $\sigma_{\text{II}} = 0$, $\sigma_{\text{III}} \neq 0$.

Требуется найти напряжения σ_α и τ_α на площадке, наклоненной под углом α к главной площадке (рис. 9.5, *а*).

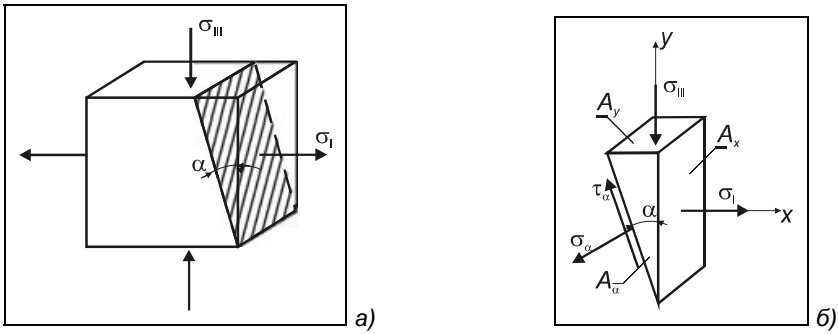


Рис. 9.5. Напряжения на наклонной площадке

Условимся, что знак касательного напряжения τ совпадает со знаком поперечной силы. Это не согласуется с правилом знаков для τ, принятым в теории упругости, но необходимо для построения круговой диаграммы Мора, о которой далее пойдет речь.

Рассмотрим равновесие части выделенного элемента, отрезанного сечением под углом α (рис. 9.5, *б*). Спроектируем силы, действующие на отрезанную часть элемента, на нормаль к наклонной площадке ν и на касательную к наклонной площадке $\nu + 90°$.

Площади граней рассматриваемой части элемента обозначим A_α, A_x, A_y.

$$\sum F_\alpha = \sigma_\alpha A_\alpha - \sigma_{\text{I}} A_x \cos(\alpha) - \sigma_{\text{III}} A_y \sin(\alpha) = 0,$$

$$\sum F_{\nu+90°} = \tau_\alpha A_\alpha - \sigma_{\text{I}} A_x \sin(\alpha) + \sigma_{\text{III}} A_y \cos(\alpha) = 0.$$

С учетом $\cos(\alpha) = \dfrac{A_x}{A_\alpha}$ и $\sin(\alpha) = \dfrac{A_y}{A_\alpha}$, разделив оба выражения на A_α, получаем

$$\sigma_\alpha = \sigma_{\text{I}} \cos^2(\alpha) + \sigma_{\text{III}} \sin^2(\alpha),$$
$$\tau_\alpha = (\sigma_{\text{I}} - \sigma_{\text{III}}) \sin(\alpha) \cos(\alpha).$$

С учетом $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$, $\sin^2(\alpha) = \dfrac{1-\cos(2\alpha)}{2}$, $\cos^2(\alpha) = \dfrac{1+\cos(2\alpha)}{2}$ можно записать

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} + \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}\cos(2\alpha), \\ \tau_\alpha &= \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}\sin(2\alpha). \end{aligned} \qquad (9.2)$$

Уравнения (9.2) представляют собой параметрическое уравнение окружности типа

$$\begin{aligned} x &= x_0 + R\cos(\alpha) \\ y &= y_0 + R\sin(\alpha) \end{aligned}.$$

В выражении (9.2) $\dfrac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}$ — радиус окружности, $\dfrac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2}$ — смещение центра окружности.

Построим такую окружность в координатах $\sigma_\alpha - \tau_\alpha$ (рис. 9.6). Она называется *круговой диаграммой Мора*.

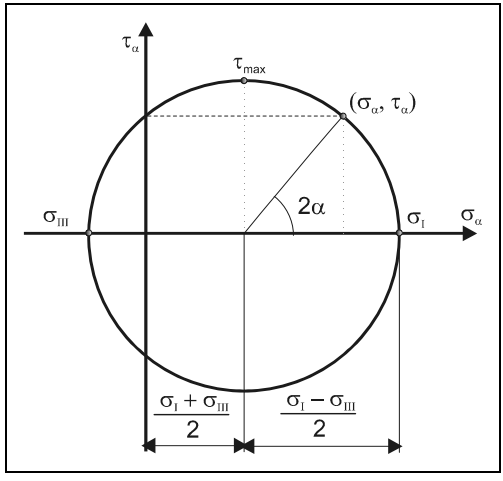


Рис. 9.6. Круговая диаграмма Мора

Чтобы с помощью круга Мора определить напряжения на площадке, наклоненной на угол α, надо из центра круга провести луч под углом 2α и определить координаты σ_α, τ_α точки пересечения луча с окружностью.

Примечание

Обратите внимание, что точки, соответствующие напряжениям на двух взаимно перпендикулярных площадках, лежат на одном диаметре.

В качестве примера построим круги Мора для растяжения и сжатия (рис. 9.7).

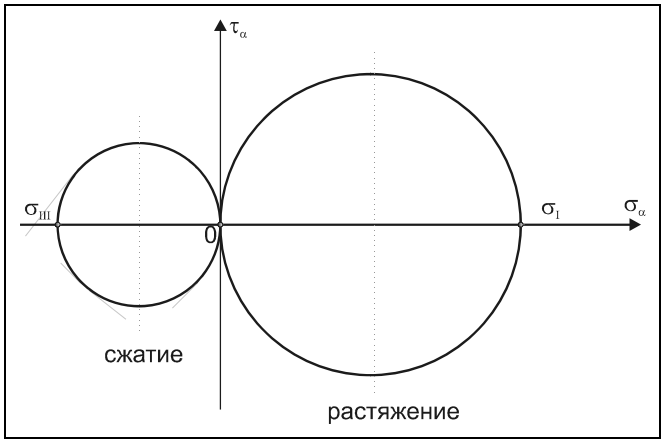


Рис. 9.7. Круги Мора для растяжения и сжатия

При растяжении $\sigma_I \neq 0$, $\sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$. На оси σ_α отложить напряжение σ_I. Радиус круга $\sigma_I/2$. Смещение центра круга $\sigma_I/2$. Строим круг Мора.

При сжатии $\sigma_{III} \neq 0$, $\sigma_I = \sigma_{II} = 0$. На оси σ_α отложить напряжение σ_{III}. Радиус круга $\sigma_{III}/2$. Смещение центра круга $\sigma_{III}/2$. Строим круг Мора.

Круг Мора предназначен для определения напряжений при плоском напряженном состоянии, т. к. в построении используют напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках.

Для объемного напряженного состояния круг Мора можно применить для нахождения напряжений на площадках, параллельных одной из главных осей. В этом случае при построении круга будут участвовать напряжения только на двух площадках, как и при плоском напряженном состоянии.

На рис. 9.8, *а* изображен элемент, ориентированный по главным площадкам, при объемном напряженном состоянии. Возьмем три площадки, каждая из которых параллельна одной из главных осей, и построим для них круги Мора (рис. 9.8, *б*).

Если площадка параллельна напряжению σ_I, то в построении круга участвуют напряжения σ_{II} и σ_{III}. Отложить на оси σ_α величины этих напряжений. Их разность — диаметр круга. Посередине — центр круга.

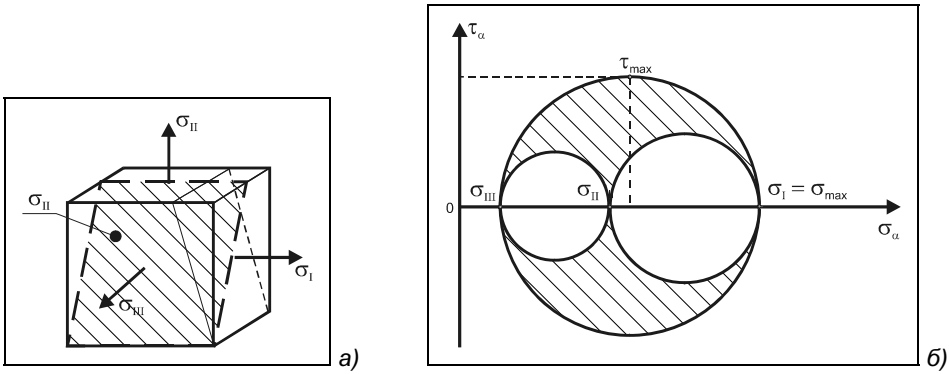


Рис. 9.8. Круговая диаграмма Мора при объемном напряженном состоянии

Аналогично строятся круги Мора для площадок, параллельных осям σ_{II} и σ_{III}. Точки, соответствующие напряженному состоянию произвольных площадок, лежат в заштрихованной области между тремя кругами.

Анализируя круговую диаграмму Мора для объемного напряженного состояния, сделаем важный для последующего изложения вывод о максимальных напряжениях в точке тела.

$$\sigma_{max} = \sigma_I \qquad \tau_{max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}. \tag{9.3}$$

Максимальные касательные напряжения всегда направлены под углом 45° к максимальным нормальным напряжениям.

9.4.2. Обратная задача

При плоском напряженном состоянии известны напряжения на гранях произвольно выделенного элемента σ_x, σ_y, τ (рис. 9.9, *а*). Требуется определить величину и направление главных напряжений $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$.

Построим круг Мора (рис. 9.9, *б*).

На площадке *А* действуют напряжения σ_x и τ.

На площадке *Б* действуют напряжения σ_y и $-\tau$.

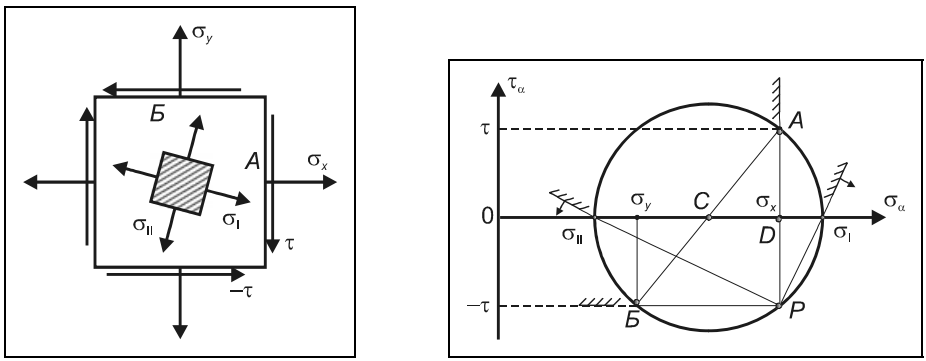
В системе координат $\sigma_\alpha - \tau_\alpha$ отложим две точки, соответствующие напряженному состоянию на двух взаимно перпендикулярных площадках *А* и *Б*.

Эти две точки лежат на одном диаметре. Проведя прямую *АБ*, находим центр круга *С* на оси σ_α. Зная центр и радиус круга, проводим окружность. Точки пересечения круга с осью σ_α дают величину главных напряжений σ_I и σ_{III}.

Для определения направления главных напряжений через точки *А* и *Б* на окружности проведем прямые, параллельные площадкам *А* и *Б*, до пересечения друг с другом. Точка пересечения *Р* лежит на окружности и называется полюсом круга.

Прямая, проведенная из полюса до любой точки окружности, будет параллельна площадке, напряженное состояние на которой соответствует точке пересечения с кругом.

Для наглядности по найденным направлениям внутри рассматриваемого элемента (рис. 9.9, *а*) построены главные площадки и показаны направления главных напряжений на них.



а) *б)*

Рис. 9.9. Обратная задача построения круга Мора

Прямые, проведенные из полюса до точек пересечения круга с осью σ_α, параллельны главным площадкам. Соответственно, перпендикуляры к ним указывают направления главных напряжений σ_I и σ_{III} на этих площадках.

Обратите внимание, что оси $\sigma_\alpha - \tau_\alpha$ необязательно должны быть параллельны граням выделенного элемента.

Наклоните выбранный элемент на некоторый угол. Поменяйте значения и направления действующих на него напряжений. Постройте для него круг Мора и определите значения и направления главных напряжений. Найдите напряжения на произвольно выбранной вами площадке или для любой точки круга, определите направление соответствующей ей площадки.

Рассмотренный метод определения направлений площадок и напряжений прост и элегантен, но... не очень важен. Круги Мора крайне редко используются в инженерной практике.

Воспользуемся кругом Мора (рис. 9.9), чтобы получить расчетную формулу для определения главных напряжений при плоском напряженном состоянии.

$$\sigma_{\text{I}} = OC + AC\,,\ \sigma_{\text{III}} = OC - AC\,,$$

где $OC = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ — смещение центра круга, AC — радиус круга.

По теореме Пифагора $AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} = \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$.

Окончательно

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{I}} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau^2} \\ \sigma_{\text{III}} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau^2}\end{aligned}\,. \tag{9.4}$$

Направление главных напряжений $\alpha_{\text{глав}}$ определим через тангенс двойного угла

$$\operatorname{tg}(2\alpha_{\text{глав}}) = \frac{AD}{AC} = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}\,. \tag{9.5}$$

В качестве примера рассмотрим определение главных напряжений при чистом сдвиге (рис. 9.10).

На площадке *А* действуют напряжения $\sigma = 0$ и τ .

На площадке *Б* действуют $\sigma = 0$ и $-\tau$. Строим круг Мора, по которому определяем главные напряжения $\sigma_{\text{I}} = \tau$ и $\sigma_{\text{III}} = -\tau$.

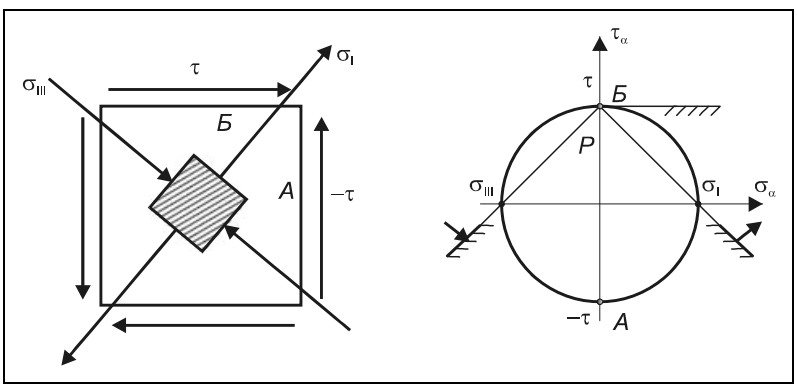


Рис. 9.10. Круг Мора при чистом сдвиге

9.5. Связь напряжений и деформаций. Обобщенный закон Гука

В предыдущих главах уже рассматривалась связь напряжений и деформаций при простых видах упругой деформации. Пришло время установить такую связь в общем случае нагружения. Напомним закон Гука при растяжении и при сдвиге.

При растяжении (рис. 9.11, *а*) $\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$.

Деформация в продольном направлении $\varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E}$.

Деформация в поперечном направлении $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu\varepsilon_x = -\mu\dfrac{\sigma_x}{E}$.

Следует отметить, что линейная деформация не вызывает сдвига. Прямые углы в растянутом элементе остаются прямыми.

При сдвиге (рис. 9.11, *б*) $\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$.

Откуда угол сдвига $\gamma_{xy} = \dfrac{\tau_{xy}}{G}$.

Следует отметить, что сдвиг не вызывает линейной деформации. Размеры элемента при сдвиге не меняются, т. к. упругий сдвиг мал.

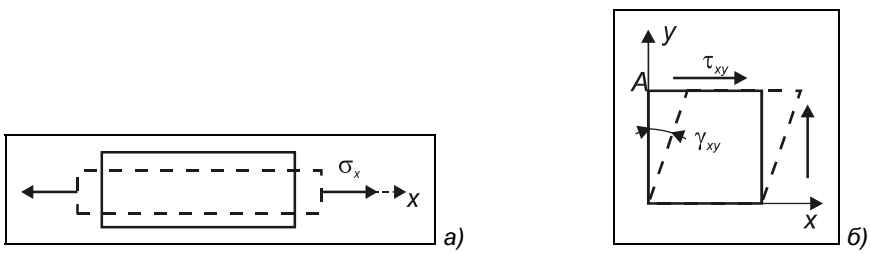


Рис. 9.11. Линейная и угловая деформации

В общем случае нагружения, 6 независимых компонентов напряжений вызывают появление шести компонентов деформации.

Каждое напряжение вносит свой вклад в каждую деформацию. На основании принципа независимости действия сил

$$\varepsilon_i = \sum_{i=1}^{6} B_{i,j}\sigma_i ,$$

где B_i — неизвестный коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом податливости.

Запишем последнее выражение в упорядоченном виде (в виде табл. 9.1).

Таблица 9.1

	от σ_x	от σ_y	от σ_z	от τ_{xy}	от τ_{yz}	от τ_{zx}
ε_x	$\frac{\sigma_x}{E}$	$-\mu\frac{\sigma_y}{E}$	$-\mu\frac{\sigma_z}{E}$	0	0	0
ε_y	$-\mu\frac{\sigma_x}{E}$	$\frac{\sigma_y}{E}$	$-\mu\frac{\sigma_z}{E}$	0	0	0
ε_z	$-\mu\frac{\sigma_x}{E}$	$-\mu\frac{\sigma_y}{E}$	$\frac{\sigma_z}{E}$	0	0	0
y_{xy}	0	0	0	$\frac{\tau_{xy}}{G}$	0	0
y_{yz}	0	0	0	0	$\frac{\tau_{yz}}{G}$	0
y_{zx}	0	0	0	0	0	$\frac{\tau_{zx}}{G}$

От нормальных напряжений возникает удлинение в продольном направлении и сужение в поперечном. Нормальные напряжения не вызывают сдвига.

От каждой пары касательных напряжений возникает сдвиг в одной плоскости и не возникает удлинений.

Каждую строчку таблицы запишем как сумму слагаемых (деформаций):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z\right) & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \mu\sigma_z - \mu\sigma_x\right) & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \mu\sigma_x - \mu\sigma_y\right) & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned} \qquad (9.6)$$

Выражения (9.6) представляют собой обобщенный закон Гука для общего случая нагружения тела.

9.6. Гипотезы прочности и пластичности

При рассмотрении простых видов деформации в качестве условия выхода конструкции из строя принималось равенство максимальных (либо нормальных, либо касательных) напряжений в конструкции и предельных напряжений, определяемых опытным путем:

- $\sigma_{max} = \sigma_{пред}$ — при растяжении и при изгибе;
- $\tau_{max} = \tau_{пред}$ — при сдвиге и при кручении.

Для материалов в хрупком состоянии в качестве критерия выхода из строя принимается разделение тела на части $\sigma_{пред} = \sigma_в$.

Для материалов в пластичном состоянии в качестве критерия выхода из строя принимается появление недопустимых пластических деформаций $\sigma_{пред} = \sigma_т$.

В общем случае нагружения, в теле возникает 6 компонентов напряжений, и задача определения критерия выхода из строя становится весьма сложной.

Задачу эту можно немного упростить, если вместо 6 компонентов напряжений рассматривать эквивалентные им 3 главных напряжения.

Как экспериментальный факт, следует отметить, что момент выхода из строя зависит не только от величины, но и от соотношения действующих напряжений.

Например, при сжатии образцов из материала в хрупком состоянии $\sigma_I = \sigma_{II} = 0$, $\sigma_{III} < 0$ образец разрушается. Тот же образец, брошенный на дно океана (всестороннее сжатие), $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III} < 0$ не разрушается.

Следовательно, в качестве критерия выхода из строя надо рассматривать функцию трех главных напряжений. Введем понятие эквивалентного напряжения.

Эквивалентным напряжением называется некоторая функция трех главных напряжений, которая в момент выхода из строя равна предельному напряжению при простом линейном растяжении.

Условие выхода из строя: $\sigma_{экв} = f(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = \sigma_{пред}$.

В качестве критерия выбрано напряжение $\sigma_{пред}$ при растяжении, потому что эти характеристики есть во всех справочниках.

Чтобы конструкция гарантировано сохраняла работоспособность, надо снизить рабочие напряжения в n раз, где n — коэффициент запаса.

Условие прочности: $\sigma_{экв} = f(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = \sigma_{пред} / n = [\sigma]$.

Различные варианты эквивалентного напряжения получаются на основании гипотез прочности, число которых велико (свыше 20). Ввиду большого многообразия материалов невозможно подобрать гипотезу, справедливую для всех материалов.

Для различных групп материалов: аморфных, таких как резина, глина, лаки и краски; кристаллических, таких как металлы в хрупком состоянии или металлы в пластичном состоянии, применяются свои (кстати, тоже многочисленные) гипотезы.

Рассмотрим основные гипотезы.

1. **Гипотеза максимальных нормальных напряжений.**

   Конструкция выходит из строя, когда максимальные нормальные напряжения в ней такие же, как при простом линейном растяжении.

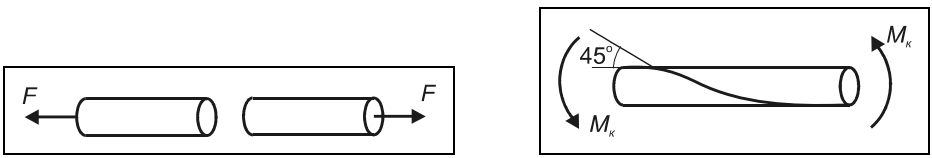
   Эту гипотезу в литературе называют первой гипотезой прочности.

   Условие выхода из строя: $\max \sigma_{экв1} = \max \sigma = \sigma_I = \sigma_{пред}$.

   Условие прочности: $\max \sigma_{экв1} = \max \sigma = \sigma_I \le [\sigma] = \sigma_{пред} / n$.

   Применение — для материалов в хрупком состоянии $\sigma_{пред} = \sigma_в$.

   Экспериментальное подтверждение — растяжение чугуна (рис. 9.12, *а*) (напряжение σ_I действует в плоскости поперечного сечения) и кручение чугуна (рис. 9.12, *б*) (σ_I действует по винтовой поверхности, наклоненной под углом 45° к плоскости поперечного сечения). Разрушение в этих случаях происходит под действием максимальных нормальных напряжений.



а) *б)*

Рис. 9.12. Экспериментальное подтверждение первой гипотезы прочности

Напомним

Признаки хрупкого и пластического разрушения. *Хрупкое разрушение* вызывается нормальными напряжениями и происходит без видимых пластических деформаций.

Пластическое разрушение вызывается (в основном) касательными напряжениями и сопровождается большой пластической деформацией.

2. **Гипотеза максимальных линейных деформаций.**

Конструкция выходит из строя, когда максимальные линейные деформации в ней такие же, как при простом линейном растяжении.

Эту гипотезу в литературе называют второй гипотезой прочности.

Условие выхода из строя: $\max\varepsilon = \frac{1}{E}\left(\sigma_{\text{I}} - \mu\sigma_{\text{II}} - \mu\sigma_{\text{III}}\right) = \varepsilon_{\text{пред}} = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{E}$.

Или, сократив слева и справа на E: $\max\sigma_{\text{экв2}} = \sigma_{\text{I}} - \mu\sigma_{\text{II}} - \mu\sigma_{\text{III}} = \sigma_{\text{пред}}$.

Условие прочности: $\max\sigma_{\text{экв2}} = \sigma_{\text{I}} - \mu\sigma_{\text{II}} - \mu\sigma_{\text{III}} \le \left[\sigma\right] = \sigma_{\text{пред}}/n$.

Применение — для материалов в хрупком состоянии $\sigma_{\text{пред}} = \sigma_{\text{в}}$.

Экспериментальное подтверждение — сжатие дерева вдоль волокон, камня, хрупкой стали (после закалки без отпуска) (рис. 9.13).

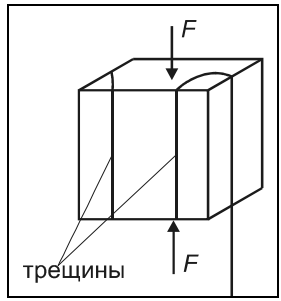


Рис. 9.13. Экспериментальное подтверждение второй гипотезы прочности

При сжатии напряжения $\sigma_{\text{I}} = \sigma_{\text{II}} = 0$, $\sigma_{\text{III}} = -\frac{F}{A}$, деформации $\varepsilon_{\text{III}} = \frac{\sigma_{\text{III}}}{E} = -\frac{F}{E\cdot A}$, $\varepsilon_{\text{I}} = \varepsilon_{\text{II}} = -\mu\varepsilon_{\text{III}} = \mu\frac{F}{E\cdot A}$. Следовательно, в поперечном направлении действует максимальная растягивающая деформация. Она и является причиной разрушения образцов вертикальными трещинами.

3. **Гипотеза максимальных касательных напряжений.**

Конструкция выходит из строя, когда максимальные касательные напряжения в ней такие же, как при простом линейном растяжении.

Эту гипотезу в литературе называют третьей гипотезой прочности.

Условие выхода из строя: $\max\tau = \frac{\sigma_{\text{I}} - \sigma_{\text{III}}}{2} = \tau_{\text{пред}} = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{2}$.

Или, сократив на 2 в знаменателе: $\max \sigma_{экв3} = \sigma_{I} - \sigma_{III} = \sigma_{пред}$.

Условие прочности: $\max \sigma_{экв3} = \sigma_{I} - \sigma_{III} \le [\sigma] = \sigma_{пред} / n$.

Применение — для материалов в пластичном состоянии $\sigma_{пред} = \sigma_{т}$.

Экспериментальное подтверждение — растяжение мягкой стали (рис. 9.14, *а*), кручение стали (рис. 9.14, *б*), сжатие чугуна (рис. 9.14, *в*).

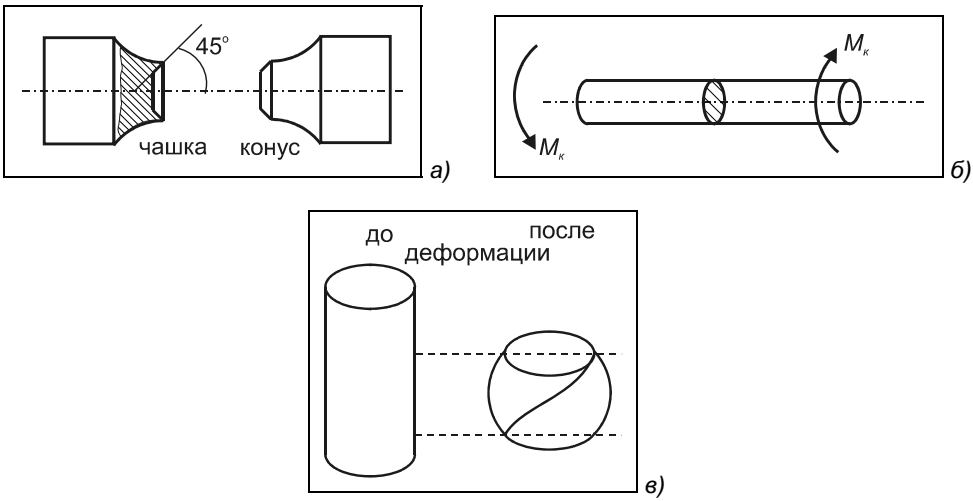


Рис. 9.14. Экспериментальное подтверждение третьей гипотезы прочности

При растяжении стали излом в шейке имеет вид "чашка-конус" с наклоном под 45° по конической поверхности действия максимальных касательных напряжений.

Разрушение образца — сложное. В центре шейки имеется перпендикулярная оси образца трещина, вызванная нормальными напряжениями вследствие объемного трехосного растяжения в центре шейки. Касательные напряжения в центре значительно меньше, чем у поверхности, где напряженное состояние плоское $\tau_{max} = \dfrac{\sigma_{I} - \sigma_{III}}{2}$. У поверхности $\sigma_{III} = 0$, в центре $\sigma_{III} > 0$.

При кручении стали разрушение происходит от касательных напряжений в плоскости поперечного сечения, где $\sigma = 0$, $\tau \ne 0$.

При сжатии чугуна (в условиях смазки контактных поверхностей для уменьшения трения) разрушение происходит по плоскости действия максимальных касательных напряжений под углом 45° к оси образца при

большой пластической деформации (высота образца намного уменьшилась).

4. **Энергетическая гипотеза. Поверхность пластичности.**

Существует целый ряд доказательств, приводящих к этой гипотезе. В качестве критерия в них используются такие понятия, как максимальная удельная потенциальная энергия изменения формы, максимальные октаэдрические касательные напряжения, интенсивность напряжений, поверхность пластичности.

Рассмотрим используемый в теории пластичности, не требующий математических выводов подход с использованием поверхности пластичности.

Если в системе координат трех главных напряжений σ_I, σ_{II}, σ_{III} откладывать точки, координаты которых соответствуют началу пластической деформации в теле при различных сочетаниях главных напряжений, то эти точки образуют поверхность, называемую *поверхностью пластичности.*

Точки внутри поверхности не вызывают пластических деформаций. Точки на поверхности соответствуют началу пластичности. Точек за пределами поверхности быть не может, а сама поверхность с ростом пластических деформаций расширяется так, чтобы точка оставалась на поверхности пластичности.

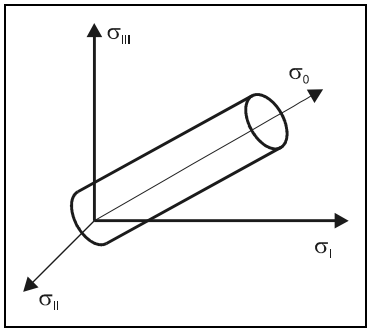
Равномерное трехосное растяжение или сжатие $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$ не вызывает появления касательных напряжений. Круг Мора для этих случаев превращается в точку на оси σ_α и касательные напряжения τ отсутствуют, а следовательно, не может быть пластических деформаций, вызываемых τ.

Аналогом равномерного трехосного растяжения или сжатия является среднее напряжение $\sigma_0 = \dfrac{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}}{3}$. Будучи приложенным по всем трем осям, среднее напряжение не вызывает появления пластических деформаций. Чтобы исключить влияние среднего напряжения на условие пластичности, поверхность пластичности должна представлять собой цилиндр, равнонаклоненный ко всем трем осям (рис. 9.15, *а*).

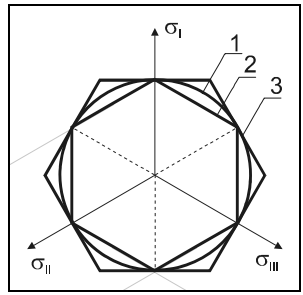
Рассмотрим сечение поверхности пластичности, перпендикулярное оси цилиндра (рис. 9.15, *б*). Это сечение и представляет собой условие пластичности.

Сечение цилиндра должно иметь 6 осей симметрии, т. к. три напряжения $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ равнозначны с точки зрения пластичности, кроме того, принимается, что пределы текучести при растяжении и сжатии равны. При од-

ноосной деформации условие пластичности $\sigma = \sigma_т$, поэтому поверхность пластичности отсекает на всех осях напряжение $\sigma_т$.



а)



б)

Рис. 9.15. Поверхность пластичности и ее сечение

Различными авторами были предложены три формы сечения цилиндрической поверхности пластичности, удовлетворяющие указанным условиям:

- окружность — гипотеза Мизеса:

  ее уравнение $\left(\sigma_I - \sigma_{II}\right)^2 + \left(\sigma_{II} - \sigma_{III}\right)^2 + \left(\sigma_{III} - \sigma_I\right)^2 = 2\sigma_т^2$,

- шестигранник, вписанный в окружность, — гипотеза Треска:

  уравнение его граней $\left|\sigma_I - \sigma_{II}\right| = \left|\sigma_{II} - \sigma_{III}\right| = \left|\sigma_{III} - \sigma_I\right| = \sigma_т$,

- шестигранник, описывающий окружность, — гипотеза Ишлинского:

  уравнение его граней $\left|\sigma_I - \sigma_0\right| = \left|\sigma_{II} - \sigma_0\right| = \left|\sigma_{III} - \sigma_0\right| = \frac{2}{3}\sigma_т$.

Как показали экспериментальные данные, лучше всего согласуется с опытом гипотеза Мизеса (окружность). Гипотеза Треска (вписанный шестигранник) дает заниженные значения (увеличивает коэффициент запаса), гипотеза Ишлинского — завышенные (уменьшает коэффициент запаса).

В практике расчетов гипотеза Ишлинского используется редко, и далее ее не рассматриваем.

Гипотеза Треска с учетом $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$ дает условие пластичности, совпадающее с гипотезой максимальных касательных напряжений (третьей гипотезой)

$$\max \sigma_{экв3} = \sigma_I - \sigma_{III} = \sigma_т .$$

Гипотеза Мизеса дает условие пластичности

$$\sigma_{экв4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2} = \sigma_т$$

и условие прочности

$$\max \sigma_{экв4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2} \le [\sigma] = \frac{\sigma_т}{n}.$$

Это же условие было получено другими исследователями при использовании в качестве критерия пластичности удельной потенциальной энергии изменения формы, поэтому и гипотеза получила название *энергетическая*. По аналогии с другими гипотезами можно записать ее формулировку.

Конструкция выходит из строя, когда удельная потенциальная энергия изменения формы в ней такая же, как при простом линейном растяжении.

Эту гипотезу в литературе называют четвертой гипотезой прочности.

5. **Гипотеза Мора.**

Эту гипотезу в литературе называют пятой гипотезой прочности. Она выведена из рассмотрения огибающей кругов Мора при различных напряженных состояниях и не имеет четкой формулировки.

Условие прочности по гипотезе Мора имеет вид

$$\max \sigma_{экв3} = \sigma_I - \nu\sigma_{III} \le [\sigma] = \sigma_{пред}/n,$$

где $\nu = \dfrac{\sigma_{в.раст}}{\sigma_{в.сжат}}$ — отношение пределов прочности материала при растяжении и при сжатии.

Для пластичных, в обычных условиях, материалов $\nu = 1$ и пятая гипотеза (Мора) превращается в третью гипотезу (максимальных касательных напряжений).

Для хрупких, в обычных условиях, материалов $\nu < 1$. Так, для чугуна $\nu = \dfrac{1}{4}$. Для идеально хрупкого тела $\nu = \dfrac{1}{8}$. В этих случаях пятая гипотеза приближается к первой (максимальных нормальных напряжений).

Подводя итог этого раздела, следует отметить, что для материалов в хрупком состоянии вторая гипотеза практически не используется, пятая применяется редко, т. к. не всегда можно отыскать в справочниках предел прочности материала при сжатии. Чаще всего используется первая гипотеза.

Рассчитывать на прочность конструкции из хрупких материалов приходится редко. Как правило, это неответственные конструкции.

В ответственных конструкциях возможное хрупкое разрушение может привести к серьезным последствиям, поэтому материал конструкции всегда должен находиться в пластичном состоянии.

Для расчета конструкций из пластичных материалов используют третью и четвертую гипотезы прочности, причем одинаково часто.

9.7. Условие прочности при плоском напряженном состоянии

При плоском напряженном состоянии условия прочности по различным гипотезам прочности можно упростить.

При рассмотрении круговой диаграммы Мора были получены формулы для главных напряжений при плоском напряженном состоянии (формула (9.4))

$$\sigma_{\text{I}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_{\text{III}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_{\text{II}} = 0$$

Подставив эти выражения в условия прочности по третьей и четвертой гипотезам прочности, получаем:

- По третьей гипотезе

$$\max \sigma_{\text{экв3}} = \sigma_{\text{I}} - \sigma_{\text{III}} = \sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau^2} \le [\sigma].$$

- По четвертой гипотезе

$$\max \sigma_{\text{экв4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\sigma_{\text{I}} - \sigma_{\text{II}}\right)^2 + \left(\sigma_{\text{II}} - \sigma_{\text{III}}\right)^2 + \left(\sigma_{\text{III}} - \sigma_{\text{I}}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 3\tau^2} \le [\sigma].$$

В большинстве задач сопротивления материалов и при расчетах многих деталей машин используются схемы с длинными и тонкими стержнями, например валы и оси. При изгибе и кручении таких стержней считают, что волокна друг на друга не давят $\sigma_y = 0$.

Условие прочности для длинных и тонких стержней принимает вид:

- По третьей гипотезе

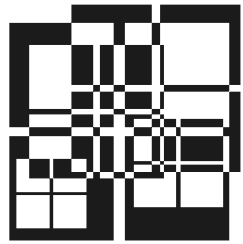
$$\max \sigma_{экв3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma], \tag{9.7}$$

- По четвертой гипотезе

$$\max \sigma_{экв4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \le [\sigma]. \tag{9.8}$$

Условия прочности (9.7) и (9.8) используются при расчете большинства конструкций и деталей машин.

ГЛАВА 10



Сложное сопротивление

Сложным сопротивлением называется одновременное действие нескольких простых видов деформации (растяжения, кручения и изгиба).

10.1. Внутренние усилия при сложном сопротивлении

Внутренние усилия определяются методом сечений. Пожалуйста, перечитайте *разд. 1.4.*

В общем случае в произвольном сечении могут действовать 6 внутренних усилий: три проекции главного вектора сил N_x, Q_y, Q_z и три проекции главного момента сил M_x, M_y, M_z, которые определяются из условий равновесия отсеченной части тела.

Напомним приведенное в *главе 1* общее правило определения любого внутреннего усилия.

Правило определения внутренних усилий

N_x, Q_y, Q_z равняются алгебраической сумме проекций всех сил, расположенных по одну сторону от выбранного сечения, соответственно на оси x, y или z.

M_x, M_y, M_z равняются алгебраической сумме моментов всех сил, расположенных по одну сторону от выбранного сечения, соответственно относительно осей x, y или z, проходящих через центр тяжести выбранного сечения.

Три внутренних усилия являются результатом действия нормальных напряжений в сечении — это N_x, M_y, M_z.

Три внутренних усилия являются результатом действия касательных напряжений в сечении — это Q_y, Q_z, $M_x = M_к$.

Влиянием поперечных сил для длинных и тонких стержней пренебрегают, поскольку касательные напряжения от них малы по сравнению с нормальными напряжениями от M_y, M_z и касательными напряжениями от $M_к$.

Влиянием продольного усилия N_x, как правило, пренебрегают, поскольку нормальные напряжения от него малы по сравнению с нормальными напряжениями от M_y, M_z. Учитывать продольное усилие надо, если нет изгибающих и крутящего моментов или они малы.

При сложном сопротивлении правила знаков для продольного усилия и крутящего момента те же, что и ранее при растяжении и при кручении. Для изгибающего момента вводится новое правило знаков.

Правило знаков

Продольное усилие положительное, если вызывает растяжение.

Изгибающий момент положительный, если вызывает растяжение в волокнах первой четверти. Первой четвертью считают часть поперечного сечения между положительными направлениями осей координат.

Знак крутящего момента безразличен, т. к. прочность стержня при кручении против часовой стрелки или по часовой стрелке одинакова. Важно лишь отличить сумму моментов от разности.

10.1.1. Построение эпюр внутренних усилий

При определении внутренних усилий методом сечений все силы, действующие по одну сторону от рассматриваемого сечения, должны быть известны, поэтому в случае необходимости надо определить опорные реакции из условий равновесия системы.

Единственной целью построения эпюр внутренних усилий является выбор опасного сечения, для которого будет произведен расчет на прочность.

Рассмотрим порядок построения эпюр для стержневой системы, состоящей из прямолинейных, взаимно перпендикулярных элементов.

1. Разбить стержневую систему на участки. Границами участков являются сечения, где приложены нагрузки или резко изменяются форма и размеры сечения.

2. На каждом участке выбрать произвольное сечение и поместить в центр тяжести его систему координат. Направление осей координат может быть постоянным для всех участков. В таком случае легче построить эпюры изгибающих моментов в плоскостях изгиба.

   В случае использования компьютерных программ для расчетов ось x всегда совпадает с осью стержня (является нормалью к поперечному сечению). Оси y и z лежат в плоскости рассматриваемого сечения и являются главными центральными осями инерции сечения. Для симметричных сечений это оси симметрии.

   Для определения знака изгибающего момента на каждом участке отметить первую четверть сечения (между положительными направлениями осей координат).

3. Для каждого участка определить действующие в произвольном сечении внутренние усилия: продольное усилие N_x, крутящий момент $M_x = M_к$, изгибающие моменты M_y и M_z (продольным усилием в большинстве расчетов на прочность можно пренебречь).

4. Построить эпюры внутренних усилий. Эпюры N_x и $M_к$ строятся в произвольной плоскости.

   Эпюры изгибающих моментов строятся в плоскости изгиба. Причем если в машиностроительных вузах принято строить эпюры изгибающих моментов на сжатых волокнах, то в строительных вузах строят эпюры на растянутых волокнах. В принципе, направление построенных эпюр не имеет никакого значения.

Рассмотрим пример построения эпюр внутренних усилий для пространственной рамы (рис. 10.1).

Исходные данные для расчета: $F1 = 5$ кН, $F2 = 10$ кН, $F3 = 8$ кН, $F4 = 10$ кН, $q = 30$ кН / м, $L1 = 20$ см, $L2 = 40$ см, $L3 = 30$ см, $L4 = 50$ см.

Для каждого участка определяются 4 внутренних усилия: N_x, M_x, M_y, M_z.

Для этого подсчитывается сумма проекций всех сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, на ось x и сумму моментов этих сил относительно осей x, y, z, проходящих через центр тяжести рассматриваемого сечения.

Напомним, что *момент — это произведение силы на плечо*. Плечо в случае пространственного действия сил — кратчайшее расстояние между линией действия сил и осью, относительно которой определяется момент.

Результаты определения усилий сведены в табл. 10.1, где, кроме уравнений усилий, для построения эпюр приведены численные значения усилий в начале и в конце участка.

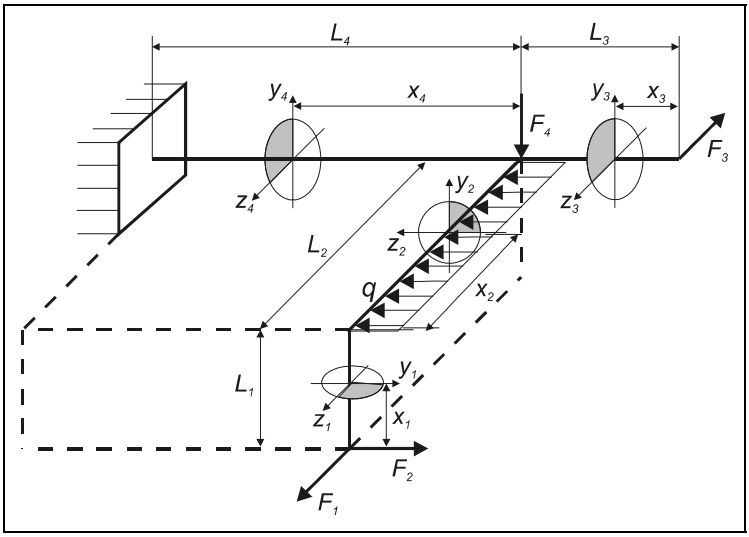


Рис. 10.1. Схема нагружения пространственной рамы

Таблица 10.1. Внутренние усилия в сечениях рамы (рис. 10.1)

Координата	N, кН	M_x, кНм	M_y, кНм	M_z, кНм
$0 < x_1 < L_1$	0	0	$-F_1x_1$ (0 / –1)	$-F_2x_1$ (0 / –2)
$0 < x_2 < L_2$	F_1 (5 / 5)	$-F_2L_1$ (–2 / –2)	$-F_2x_2+\frac{qx_2^2}{2}$ (0 / –1,6)	$-F_1L_1$ (–1 / –1)
$0 < x_3 < L_3$	0	0	F_3x_3 (0 / 2,4)	0
$0 < x_4 < L_4$	F_2-qL_2 (–2 / –2)	$-F_1L_1$ (–1 / –1)	$F_2L_2+F_3(L_3+x_4)-\frac{qL_2^2}{2}$ (4 / 8)	$F_4x_4-F_2L_1$ (–2 / 3)

По результатам расчета построены эпюры внутренних усилий (рис. 10.2). Эпюра продольных усилий (горизонтальная) и эпюра крутящих моментов (вертикальная) представлены на рис. 10.2, *а*. Эпюры изгибающих моментов, построенные в плоскостях изгиба на сжатых волокнах, показаны на рис. 10.2, *б*.

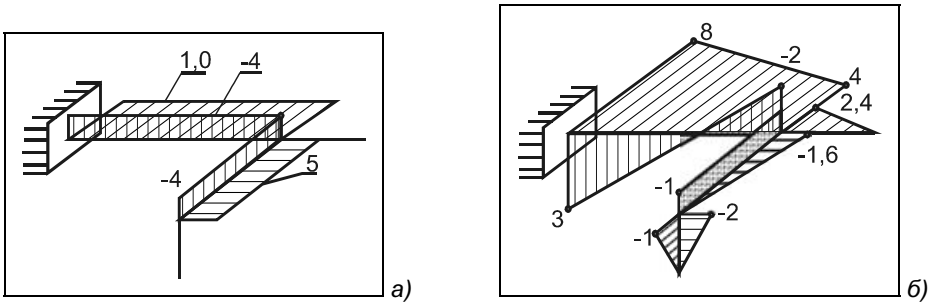


Рис. 10.2. Эпюры внутренних усилий для пространственной рамы

Опасным является сечение в заделке, где действуют:

$$N = 10 \text{ кН},\ M_{\text{к}} = 4 \text{ кНм},\ M_y = 8 \text{ кНм},\ M_z = -3 \text{ кНм}.$$

В этом сечении необходимо произвести расчет на прочность.

10.2. Напряжения

Сложное сопротивление — общий случай нагружения длинных и тонких стержней. Напряженно-деформированное состояние при этом плоское, т. е. одно из трех главных напряжений равно нулю. Для получения условия прочности при сложном сопротивлении надо получить выражения для напряжений, действующих в поперечных сечениях стержня, затем найти главные напряжения и, используя гипотезы прочности, составить условие прочности.

10.2.1. Гипотезы

Для упрощения расчетов вводятся гипотезы и допущения.

Примечание

При сложном сопротивлении справедливы все гипотезы из *разд. 1.9*.

Далее рассмотрим только те гипотезы, которые непосредственно используются в расчетах.

- Справедлив закон Гука.

$$\varepsilon_i = \frac{1}{E}(\sigma_i - \mu\sigma_j - \mu\sigma_k), \tag{10.1}$$

где $i, j, k = x, y, z$. Подставляя индексы x, y, z по правилу круговой подстановки, получаем три физических уравнения связи деформаций и напряжений.

❒ Волокна друг на друга не давят (рис. 10.3).

Тогда из выражения (10.1)

$$\sigma_y = \sigma_z = 0 \qquad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

или $\sigma = E \cdot \varepsilon$ как при простом растяжении-сжатии.

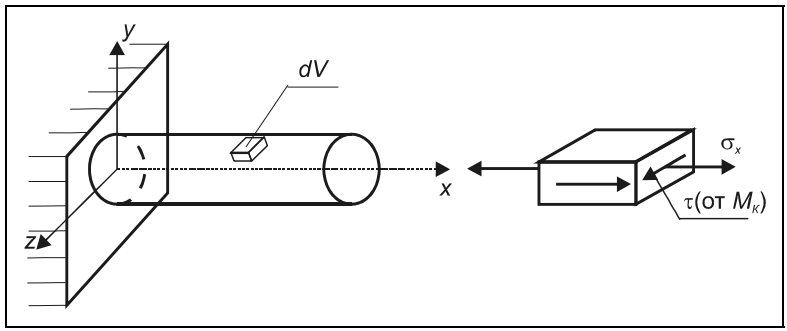


Рис. 10.3. Напряжения на гранях элемента

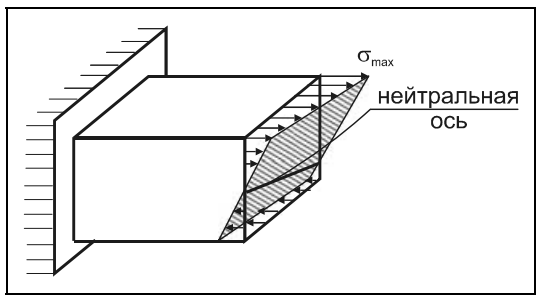


Рис. 10.4. Сечение стержня до и после деформации

❒ Гипотеза плоских сечений. Сечения, плоские до деформации, остаются плоскими после деформации (рис. 10.4).

Линия пересечения сечений до и после деформации является нейтральной осью, т. к. на ней $\varepsilon = 0$ и $\sigma = 0$.

Чем дальше находится рассматриваемая точка от нейтральной оси, тем больше деформация и напряжения в этом волокне.

Наибольшие напряжения действуют в точке наиболее удаленной от нейтральной оси.

- Принцип независимости действия сил.

  В любой точке поперечного сечения стержня напряжения равны сумме напряжений от действия каждого внутреннего усилия в отдельности.

Определим отдельно нормальные и касательные напряжения.

10.2.2. Нормальные напряжения

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_N + \vec{\sigma}_{M_y} + \vec{\sigma}_{M_z} .$$

Векторы напряжений $\vec{\sigma}_N, \vec{\sigma}_{M_y}, \vec{\sigma}_{M_z}$ направлены вдоль одной прямой (рис. 10.5), следовательно, векторную сумму можно заменить алгебраической

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{M_y} + \sigma_{M_z} ,$$

где:

- $\sigma_N = \dfrac{N}{A}$ — напряжения при растяжении стержня;
- $\sigma_{M_y} = \dfrac{M_y}{J_y} z$ — напряжения при изгибе в плоскости xz;
- $\sigma_{M_z} = \dfrac{M_z}{J_z} y$ — напряжения при изгибе в плоскости xy.

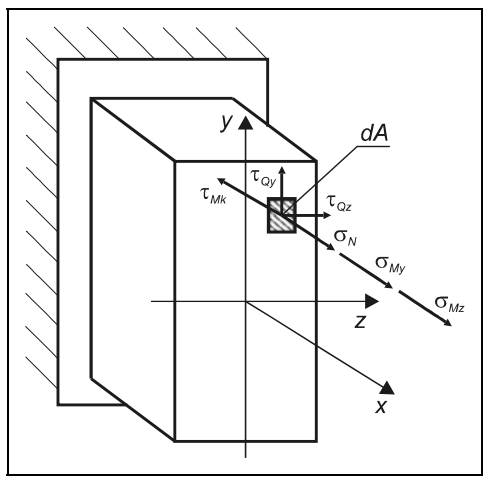


Рис. 10.5. Векторы напряжений в сечении стержня

Окончательно получаем

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y \,. \tag{10.2}$$

Уравнение нейтральной оси $\sigma = 0$ или

$$\frac{N}{A} + \frac{M_y}{J_y} z_{\text{н}} + \frac{M_z}{J_z} y_{\text{н}} = 0 \,, \tag{10.3}$$

где $y_{\text{н}}, z_{\text{н}}$ — координаты точки, лежащей на нейтральной оси.

10.2.3. Касательные напряжения

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_{Q_y} + \vec{\tau}_{Q_z} + \vec{\tau}_{M_{\text{к}}} \,. \tag{10.4}$$

Векторы напряжений $\vec{\tau}_{Q_y}, \vec{\tau}_{Q_z}, \vec{\tau}_{M_{\text{к}}}$ расположены в плоскости поперечного сечения стержня, но в разных направлениях (см. рис. 10.5), поэтому заменить геометрическую сумму алгебраической уже нельзя.

Слагаемые в выражении (10.4) имеют различный порядок. Касательные напряжения от поперечных сил малы по сравнению с касательными напряжениями от крутящего момента, поэтому в дальнейших расчетах ими пренебрегают.

Тогда $\tau \approx \tau_{M_{\text{к}}}$.

Для стержней круглого поперечного сечения $\tau = \dfrac{M_{\text{к}}}{J_p} \rho$.

Для стержней некруглого поперечного сечения касательные напряжения определяются по формулам, взятым из справочников, или используя метод конечных элементов.

10.2.4. Условие прочности

При сложном сопротивлении длинных и тонких стержней в поперечных сечениях действуют только одно нормальное напряжение σ_x вдоль оси стержня ($\sigma_y = \sigma_z = 0$) и одно касательное напряжение $\tau_{M_{\text{к}}}$ (τ_{Q_y} и τ_{Q_z} малы).

Условие прочности при плоском напряженном состоянии записано в *конце предыдущей главы*.

По третьей гипотезе прочности

$$\max \sigma_{\text{экв3}} = \sigma_{\text{I}} - \sigma_{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma].$$

По четвертой гипотезе прочности

$$\max \sigma_{\text{экв4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{\text{I}} - \sigma_{\text{II}})^2 + (\sigma_{\text{II}} - \sigma_{\text{III}})^2 + (\sigma_{\text{III}} - \sigma_{\text{I}})^2} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \le [\sigma].$$

10.3. Расчет на прочность при сложном сопротивлении

10.3.1. Стержень произвольного сечения

Оценивая прочность стержней при сложном сопротивлении, необходимо следующее.

- ❒ Построить эпюры внутренних усилий и выбрать опасное сечение.
- ❒ В опасном сечении построить нейтральную ось.

  В точке наиболее удаленной от нейтральной оси действуют максимальные нормальные напряжения $\sigma_{\max}$. Эта точка является одной из опасных точек. Проведите касательную к сечению параллельно нейтральной оси (рис. 10.6).

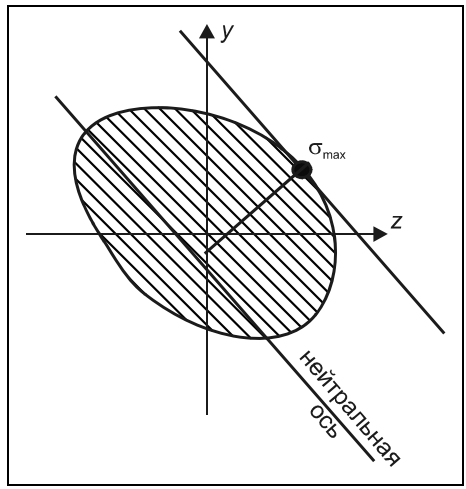


Рис. 10.6. Выбор опасной точки в произвольном сечении

Точка пересечения касательной с контуром сечения — опасная точка. Подставьте координаты этой точки B в формулу (10.2) для нормальных напряжений

$$\sigma_B = \sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{J_y} z_B + \frac{M_z}{J_z} y_B .$$

Касательные напряжения в этой точке, в общем случае, неизвестны и определяются, как сказано ранее, методом конечных элементов.

- Кроме рассмотренной точки в опасном сечении могут оказаться и другие опасные точки. В каждой из них надо определить нормальные σ, касательные τ и эквивалентные напряжения либо по третьей, либо по четвертой гипотезам прочности. Выбрать максимальное эквивалентное напряжение.
- Из условия прочности определить какую-либо одну величину: либо размер сечения, либо допускаемую нагрузку.

10.3.2. Прямоугольное сечение

В прямоугольном сечении главными центральными осями инерции являются оси симметрии y и z, поэтому определяем изгибающие моменты относительно осей симметрии y и z. На рис. 10.7 показаны эпюры нормальных и касательных напряжений, вызванных каждым из внутренних усилий отдельно. Из этого рисунка видно, что в прямоугольном сечении есть три точки, которые могут быть опасными. Это точки A, B и C.

- В точке B (угловая), максимально удаленной сразу от двух осей y и z, действуют

$$\sigma_B = \sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{J_y} z_{\max} + \frac{M_z}{J_z} y_{\max}$$

или

$$\sigma_B = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z}, \qquad (10.5)$$

$\tau_B = 0$, тогда $\sigma_{B\text{экв III}} = \sqrt{\sigma_B^{\,2} + 4\tau_B^{\,2}} = \sigma_B$.

- В точке A (посередине длинной стороны прямоугольника на оси z) $y_A = 0$, поэтому

$$\sigma_A = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{J_z} y_{\max} \text{ или } \sigma_A = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y}$$

$\tau_A = \tau_{\max} = \dfrac{M_к}{W_к}$, где $W_к = \beta \cdot b^2 h$, b — меньшая сторона прямоугольника, β — коэффициент, который берется из справочника в зависимости от отношения h/b.

Эквивалентное напряжение в точке A

$$\sigma_{A\text{экв III}} = \sqrt{\sigma_A^{\,2} + 4\tau_A^{\,2}}\ .$$

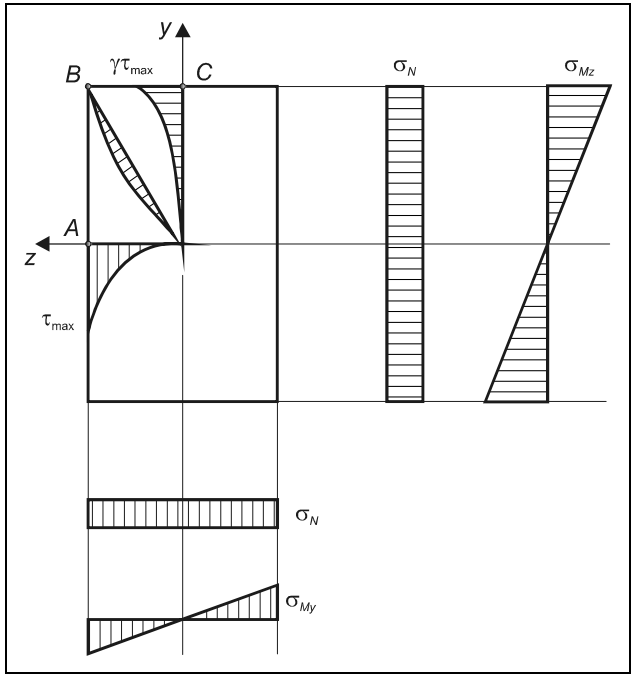


Рис. 10.7. Напряжения в опасных точках прямоугольного сечения

- В точке C (посередине короткой стороны прямоугольника на оси y) $z = 0$, поэтому

$$\sigma_{C\text{экв III}} = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{J_z} y_{\max} \text{ или } \sigma_{C\text{экв III}} = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{W_z}$$

$\tau_C = \gamma \cdot \tau_{\max} = \gamma \dfrac{M_к}{W_к}$, где γ — коэффициент, который берется из справочника в зависимости от отношения h/b.

Эквивалентное напряжение в точке C

$$\sigma_{C\text{экв III}} = \sqrt{\sigma_C{}^2 + 4\tau_C{}^2} \ .$$

Из трех значений $\sigma_{\text{экв III}}$ в точках A, B, C следует выбрать большее и подставить его в условие прочности $\sigma_{\text{экв.max}} \le [\sigma]$.

10.3.3. Круглое или кольцевое сечение

Для стержней такого сечения неприменима формула (10.5), т. к. в них не существует точки, одновременно находящейся на максимальном удалении от осей y и z (такая точка находится за пределами сечения).

Ввиду круговой симметрии моменты инерции относительно любой центральной оси одинаковы. С учетом этого, удобно два изгибающих момента заменить их геометрической суммой $M_{\text{изг}} = \sqrt{M_y{}^2 + M_z{}^2}$ и далее рассмотреть плоский изгиб под действием $M_{\text{изг}}$ (рис. 10.8). Тогда максимальные нормальные напряжения действуют на поверхности круглого сечения в точке пересечения круга с плоскостью действия суммарного изгибающего момента (точке D).

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_{\text{изг}}}{W} = \frac{N}{A} + \frac{\sqrt{M_y{}^2 + M_z{}^2}}{W} \ .$$

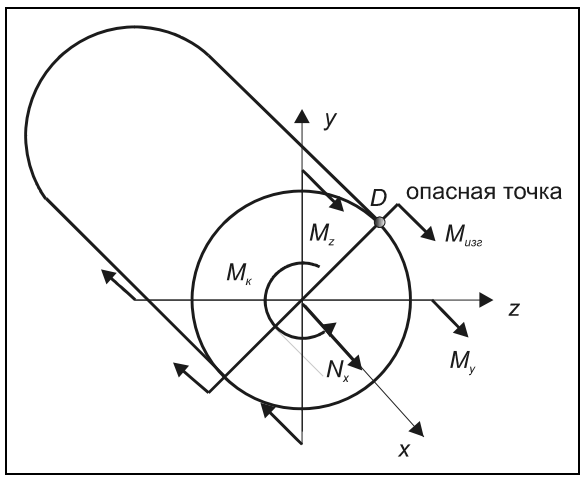


Рис. 10.8. Опасная точка в круглом поперечном сечении

Максимальные касательные напряжения от кручения стержня действуют во всех точках на поверхности круглого сечения и равны

$$\tau_{max} = \frac{M_к}{W_p}.$$

Следовательно, на поверхности круглого сечения есть точка, где одновременно действуют σ_{max} и τ_{max}. Эта точка является опасной. Эквивалентное напряжение в ней

$$\sigma_{max.экв III} = \sqrt{\sigma_{max}{}^2 + 4\tau_{max}{}^2} = \sqrt{\left(\frac{N}{A} + \frac{\sqrt{M_y{}^2 + M_z{}^2}}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{M_к{}^2}{W_p}\right)^2}.$$

Упростим последнее выражение. Нормальное напряжение от продольного усилия во много раз меньше, чем от действия изгибающих моментов, поэтому продольным усилием можно пренебречь. Тогда, с учетом $W_p = 2 \cdot W$, условие прочности для стержней круглого и кольцевого сечений по третьей гипотезе прочности примет вид

$$\sigma_{max.экв III} = \sqrt{\sigma_{max}{}^2 + 4\tau_{max}{}^2} = \frac{\sqrt{M_y{}^2 + M_z{}^2 + M_к{}^2}}{W} \le [\sigma]. \qquad (10.6)$$

По четвертой гипотезе прочности

$$\sigma_{max.экв IV} = \sqrt{\sigma_{max}{}^2 + 3\tau_{max}{}^2} = \frac{\sqrt{M_y{}^2 + M_z{}^2 + 0{,}75M_к{}^2}}{W} \le [\sigma].$$

10.4. Частные случаи сложного сопротивления

- Косой изгиб — сочетание двух плоских изгибов. $N = 0$, $M_к = 0$, $M_y \neq 0$, $M_z \neq 0$.
- Внецентренное растяжение (изгиб с растяжением) — сочетание двух плоских изгибов и растяжения-сжатия. $M_к = 0$, $M_y \neq 0$, $M_z \neq 0$, $N \neq 0$.
- Изгиб с кручением — сочетание кручения и изгиба в двух плоскостях. Продольное усилие мало или отсутствует. $N = 0$, $M_к \neq 0$, $M_y \neq 0$, $M_z \neq 0$.

Расчетные формулы для напряжений и условия прочности для частных случаев сложного сопротивления получаются из общих формул, записанных в *предыдущем разделе*, в которых надо приравнять нулю отсутствующие внутренние усилия.

Для построения нейтральной оси в поперечном сечении нужно приравнять нулю выражение для нормальных напряжений $\sigma = 0$, подставить все известные величины и, получив линейную зависимость $y_н$ от $z_н$, построить соответствующую прямую линию, как правило, по двум любым точкам.

10.5. Пример расчета стержня при сложном сопротивлении

Рассмотрим стержень произвольного сечения, защемленный одним концом и нагруженный произвольными нагрузками. Форма сечения стержня показана на рис. 10.9. Условная схема нагружения стержня приведена на рис. 10.10. Условность схемы состоит в том, что на ней показаны всего несколько нагрузок, чтобы ввести условные обозначения нагрузок и координат их точек приложения.

В расчет введено по несколько нагрузок в каждом направлении (число их может быть любым) в виде векторов. Всего на стержень действуют 23 нагрузки.

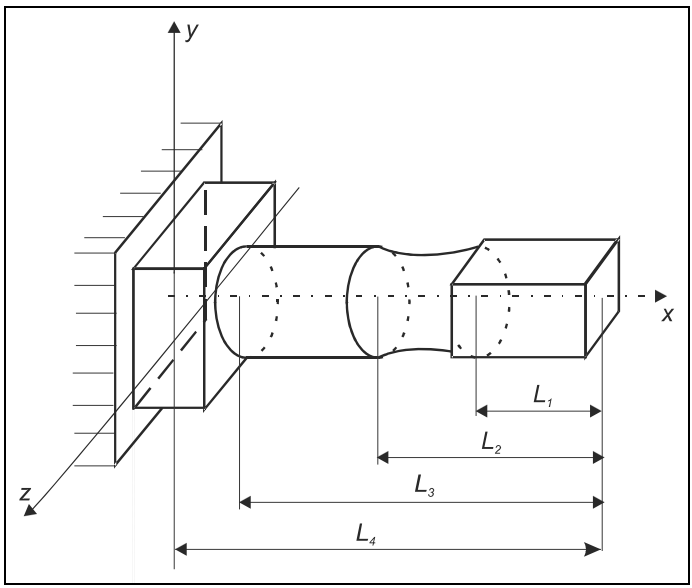


Рис. 10.9. Форма сечения стержня

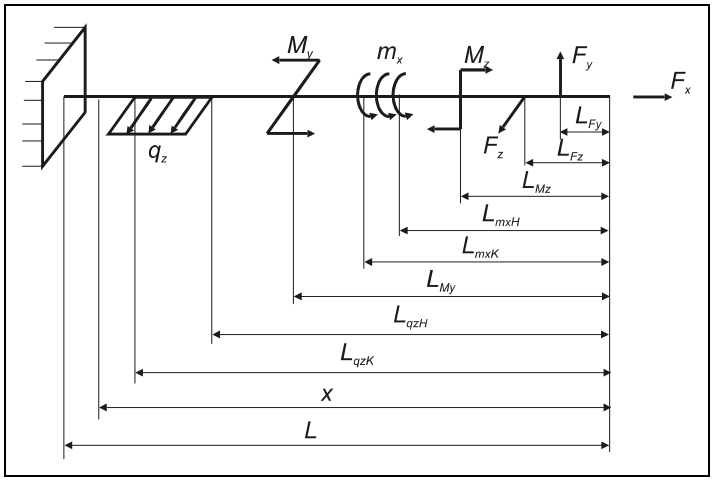


Рис. 10.10. Условная схема нагружения стержня

Определение внутренних усилий ORIGIN := 1

м := m см := 0.01·m мм := 0.001·m кН := 1000·N кНм := 1000·N·m Нм := N·m МПа := $10^6 \cdot \frac{N}{m^2}$

продольное усилие L := 1·м x := $0 \cdot м, \frac{L}{100} .. L$ град := deg

$F_x := \begin{pmatrix} 50 \\ -20 \\ -50 \end{pmatrix} \cdot кН$ $L_{Fx} := \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 80 \end{pmatrix} \cdot см$ $q_x := \begin{pmatrix} -70 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{кН}{м}$ $L_{qxн} := \begin{pmatrix} 10 \\ 70 \end{pmatrix} \cdot см$ $L_{qxк} := \begin{pmatrix} 70 \\ 100 \end{pmatrix} \cdot см$

Здесь скрыто определение продольных усилий N(x)

крутящий момент

$m_x := \begin{pmatrix} -1000 \\ 2000 \end{pmatrix} \cdot \frac{Нм}{м}$ $L_{mxн} := \begin{pmatrix} 10 \\ 70 \end{pmatrix} \cdot см$ $L_{mxк} := \begin{pmatrix} 40 \\ 100 \end{pmatrix} \cdot см$ $M_x := \begin{pmatrix} 500 \\ -300 \end{pmatrix} \cdot Нм$ $L_{Mx} := \begin{pmatrix} 10 \\ 50 \end{pmatrix} \cdot см$

Здесь скрыто определение крутящих моментов Mk(x)

изгиб вокруг оси y

$F_z := \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} \cdot кН$ $L_{Fz} := \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \\ 60 \end{pmatrix} \cdot см$ $q_z := \begin{pmatrix} -30 \\ 30 \end{pmatrix} \cdot \frac{кН}{м}$ $L_{qzн} := \begin{pmatrix} 10 \\ 50 \end{pmatrix} \cdot см$ $L_{qzк} := \begin{pmatrix} 40 \\ 100 \end{pmatrix} \cdot см$

$M_y := \begin{pmatrix} 500 \\ -200 \end{pmatrix} \cdot Нм$ $L_{My} := \begin{pmatrix} 20 \\ 60 \end{pmatrix} \cdot см$

Здесь скрыто определение изгибающих моментов My(x)

изгиб вокруг оси z

$F_y := \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot кН$ $L_{Fy} := \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \\ 80 \end{pmatrix} \cdot см$ $q_y := \begin{pmatrix} -20 \\ 40 \end{pmatrix} \cdot \frac{кН}{м}$ $L_{qyн} := \begin{pmatrix} 0 \\ 70 \end{pmatrix} \cdot см$ $L_{qyк} := \begin{pmatrix} 40 \\ 100 \end{pmatrix} \cdot см$

$M_z := \begin{pmatrix} 500 \\ -400 \end{pmatrix} \cdot Нм$ $L_{Mz} := \begin{pmatrix} 20 \\ 60 \end{pmatrix} \cdot см$

Здесь скрыто определение изгибающих моментов Mz(x)

Рис. 10.11. Исходные данные для расчета внутренних усилий

Исходные данные для определения внутренних усилий представлены на рис. 10.11. Расчет ведется с учетом размерностей, поэтому перед вводом данных приведены производные размерности.

В предлагаемой вам программе выражения для расчета внутренних усилий скрыты в закрытых зонах для уменьшения размера документа. На экране закрытая зона отмечена сплошной линией (рис. 10.11). Двойной щелчок левой кнопкой мыши на этой линии вызывает появление содержимого закрытой зоны на экране. Чтобы снова скрыть появившийся фрагмент программы, надо щелкнуть правой кнопкой мыши на границе зоны и, в появившемся контекстном меню, выбрать **Collapse** (Сжать). На рис. 10.12—10.14 показано определение внутренних усилий, скрытое в закрытых зонах.

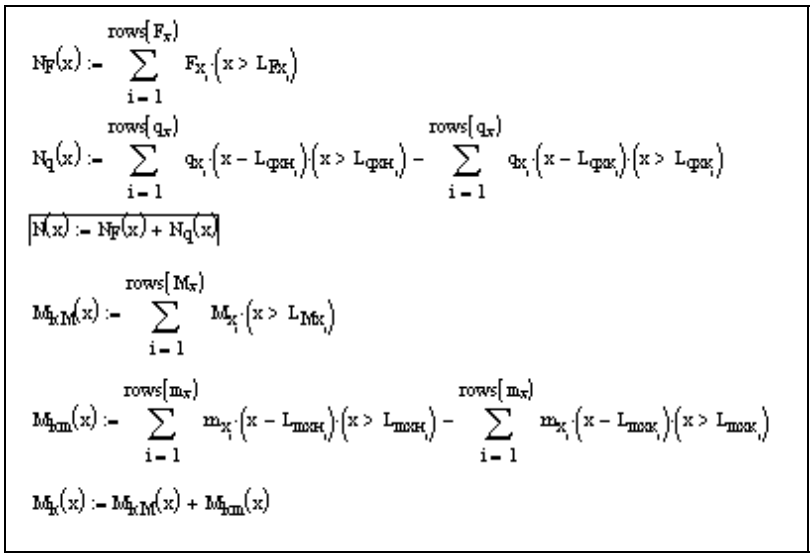


Рис. 10.12. Расчет продольных усилий и крутящих моментов

При определении внутренних усилий заимствованы выражения из *главы 3* (см. рис. 3.3, 3.6, 3.11). В этих выражениях использованы пары сил, сосредоточенные силы и распределенные нагрузки постоянной интенсивности. При необходимости можно вставить готовые выражения и для нагрузки переменной интенсивности. При этом, в силу использования интегральных выражений, несколько увеличивается время расчета. Эпюры внутренних усилий показаны на рис. 10.15 и 10.16.

При работе с программой вначале решите тестовые задачи. Для этого по каждому направлению оставьте по одной нагрузке, удалив старую нагрузку и вписав нуль на ее место.

$$Q_{Fz}(x) := \sum_{i=1}^{rows(F_z)} F_{z_i} \cdot \langle x > L_{Fz_i} \rangle$$

$$Q_{qz}(x) := \sum_{i=1}^{rows(q_z)} q_{z_i} \cdot \langle x - L_{qzн_i} \rangle \cdot \langle x > L_{qzн_i} \rangle - \sum_{i=1}^{rows(q_z)} q_{z_i} \cdot \langle x - L_{qzк_i} \rangle \cdot \langle x > L_{qzк_i} \rangle$$

$$\boxed{Q_z(x) := Q_{Fz}(x) + Q_{qz}(x)}$$

$$M_{yMy}(x) := \sum_{i=1}^{rows(M_y)} M_{y_i} \cdot \langle x > L_{My_i} \rangle$$

$$M_{yFz}(x) := \sum_{i=1}^{rows(F_z)} F_{z_i} \cdot \langle x - L_{Fz_i} \rangle \cdot \langle x > L_{Fz_i} \rangle$$

$$M_{yqz}(x) := \sum_{i=1}^{rows(q_z)} q_{z_i} \cdot \frac{\langle x - L_{qzн_i} \rangle^2}{2} \cdot \langle x > L_{qzн_i} \rangle - \sum_{i=1}^{rows(q_z)} q_{z_i} \cdot \frac{\langle x - L_{qzк_i} \rangle^2}{2} \cdot \langle x > L_{qzк_i} \rangle$$

$$\boxed{M_y(x) := M_{yMy}(x) + M_{yFz}(x) + M_{yqz}(x)}$$

Рис. 10.13. Внутренние усилия при изгибе вокруг оси y

$$Q_{Fy}(x) := \sum_{i=1}^{rows(F_y)} F_{y_i} \cdot \langle x > L_{Fy_i} \rangle$$

$$Q_{qy}(x) := \sum_{i=1}^{rows(q_y)} q_{y_i} \cdot \langle x - L_{qyн_i} \rangle \cdot \langle x > L_{qyн_i} \rangle - \sum_{i=1}^{rows(q_y)} q_{y_i} \cdot \langle x - L_{qyк_i} \rangle \cdot \langle x > L_{qyк_i} \rangle$$

$$\boxed{Q_y(x) := Q_{Fy}(x) + Q_{qy}(x)}$$

$$M_{zMz}(x) := \sum_{i=1}^{rows(M_z)} M_{z_i} \cdot \langle x > L_{Mz_i} \rangle$$

$$M_{zFy}(x) := \sum_{i=1}^{rows(F_z)} F_{y_i} \cdot \langle x - L_{Fy_i} \rangle \cdot \langle x > L_{Fy_i} \rangle$$

$$M_{zqy}(x) := \sum_{i=1}^{rows(q_y)} q_{y_i} \cdot \frac{\langle x - L_{qyн_i} \rangle^2}{2} \cdot \langle x > L_{qyн_i} \rangle - \sum_{i=1}^{rows(q_y)} q_{y_i} \cdot \frac{\langle x - L_{qyк_i} \rangle^2}{2} \cdot \langle x > L_{qyк_i} \rangle$$

$$\boxed{M_z(x) := M_{zMz}(x) + M_{zFy}(x) + M_{zqy}(x)}$$

Рис. 10.14. Внутренние усилия при изгибе вокруг оси z

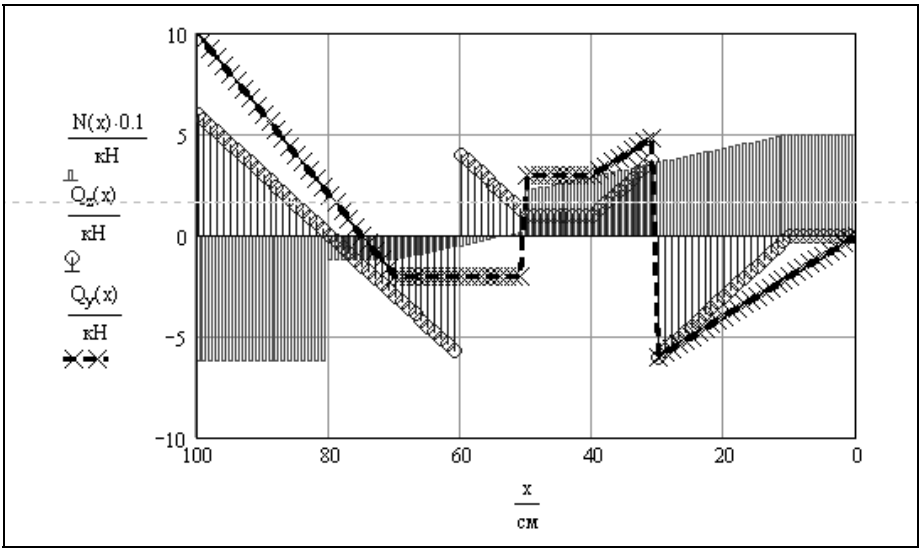


Рис. 10.15. Эпюры продольных усилий N и поперечных сил Q_y и Q_z

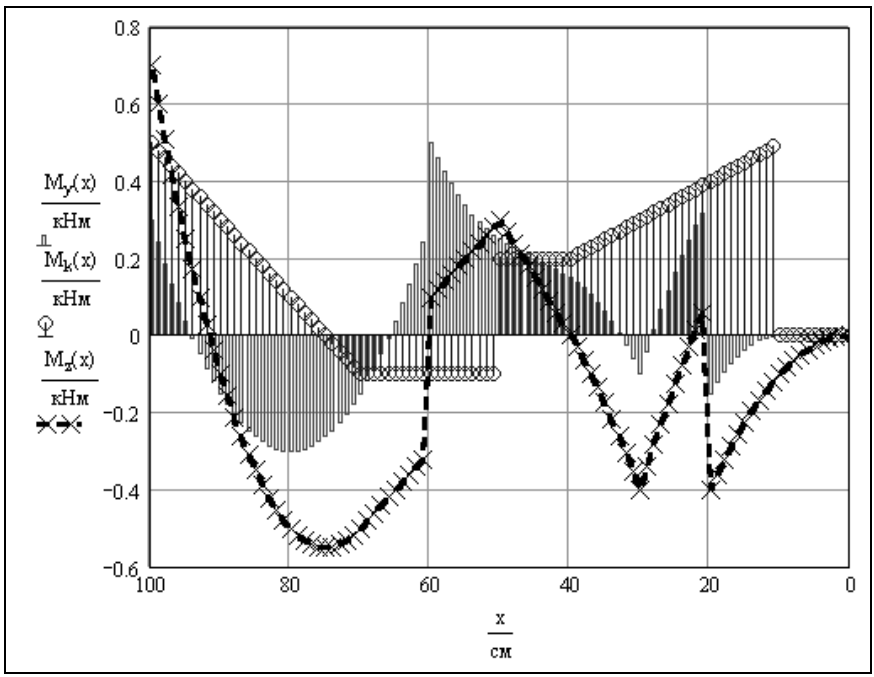


Рис. 10.16. Эпюры изгибающих моментов M_y, M_z и крутящего момента $M_к$

Число нагрузок можно и увеличить, добавив строки в соответствующие векторы нагрузок и точки их приложения (см. рис. 10.11).

Определив внутренние усилия, приступаем к расчету напряжений в поперечных сечениях стержня. Форма и размеры сечений по длине стержня могут изменяться произвольно.

Для расчета взят стержень, состоящий из четырех участков различного поперечного сечения. Первый участок прямоугольный, второй — круглый, третий — кольцевой, четвертый — квадратного сечения. Размеры сечения по длине участка могут изменяться. В нашем примере второй участок круглого поперечного сечения имеет кольцевую канавку параболической формы. Размеры сечения и длины участков приведены на рис. 10.17.

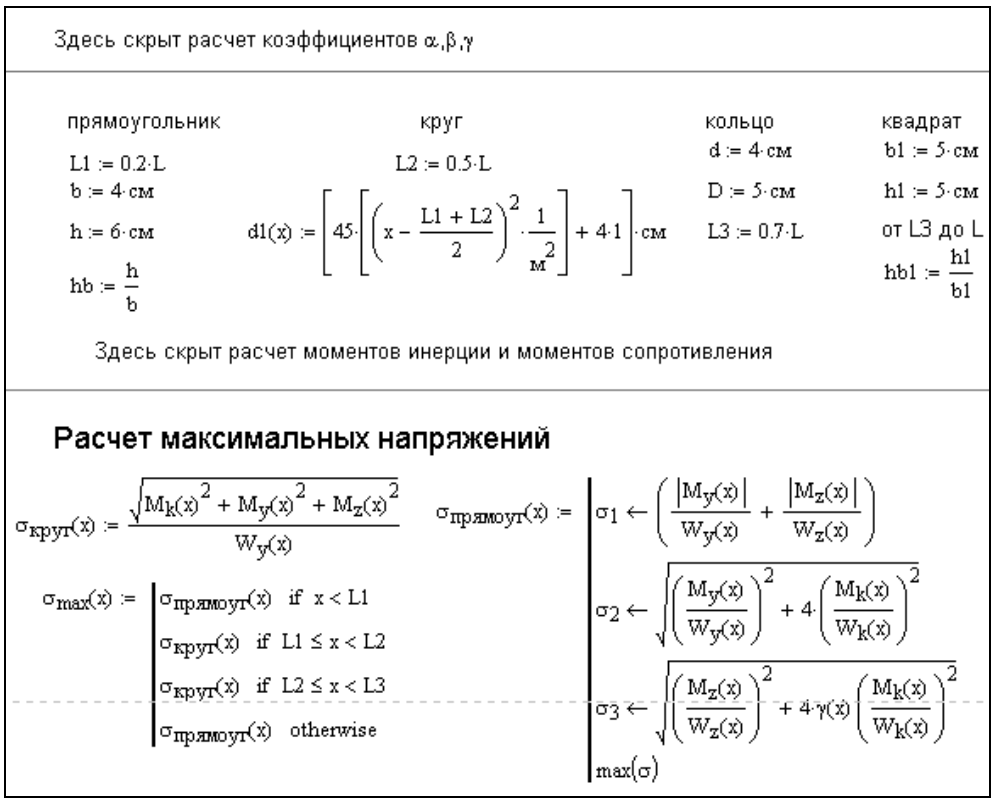


Рис. 10.17. Расчет напряжений в стержне при сложном сопротивлении

Для расчета касательных напряжений в сечениях прямоугольной формы необходимо задавать коэффициенты α, β, γ, зависящие от соотношения сторон прямоугольника h/b. В программу введена таблица этих коэффициентов, ко-

торая с помощью встроенной функции `interp` превращена в функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ (рис. 10.18). На этом же рисунке показан график зависимости коэффициентов α, β, γ от h/b.

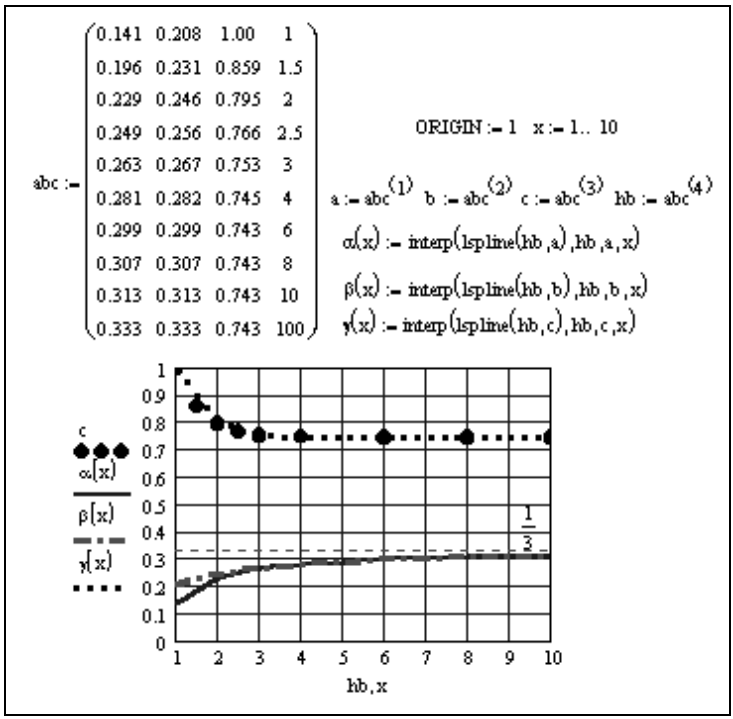


Рис. 10.18. Преобразование таблицы коэффициентов α, β, γ в функции

Для расчета напряжений в сечениях необходимо определить моменты инерции и моменты сопротивления сечений. В основной программе они вставлены и скрыты сразу после ввода размеров сечений. В развернутом виде этот фрагмент показан на рис. 10.19. Результаты расчета моментов инерции приведены на рис. 10.20.

При использовании программы геометрические характеристики надо переопределить в соответствии с реальной задачей, ввести свои формы сечений и их характеристики.

Максимальные напряжения для сечений прямоугольной и круглой формы определяются по разным формулам. Эти формулы приведены на рис. 10.17.

Для прямоугольных сечений напряжения определяются в трех точках, и из них выбирается наибольшее. Далее, в виде маленькой подпрограммы

Моменты инерции

$$J_z(x) := \begin{cases} \frac{b \cdot h^3}{12} & \text{if } x < L1 \\ \frac{\pi \cdot d1(x)^4}{64} & \text{if } L1 \le x < L2 \\ \left[\frac{\pi}{64} \cdot D^4 \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right]\right] & \text{if } L2 \le x < L3 \\ \frac{b1 \cdot h1^3}{12} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$J_y(x) := \begin{cases} \frac{b^3 \cdot h}{12} & \text{if } x < L1 \\ \frac{\pi \cdot d1(x)^4}{64} & \text{if } L1 \le x < L2 \\ \left[\frac{\pi}{64} \cdot D^4 \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right]\right] & \text{if } L2 \le x < L3 \\ \frac{b1^3 \cdot h1}{12} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$J_k(x) := \begin{cases} \alpha(hb) \cdot b^3 \cdot h & \text{if } x < L1 \\ \frac{\pi \cdot d1(x)^4}{32} & \text{if } L1 \le x < L2 \\ \left[\frac{\pi}{32} \cdot D^4 \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right]\right] & \text{if } L2 \le x < L3 \\ \alpha(hb1) \cdot b1^3 h1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Моменты сопротивления

$$W_z(x) := \begin{cases} \frac{b^2 \cdot h}{6} & \text{if } x < L1 \\ \frac{\pi \cdot d1(x)^3}{32} & \text{if } L1 \le x < L2 \\ \left[\frac{\pi}{32} \cdot D^3 \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^3\right]\right] & \text{if } L2 \le x < L3 \\ \frac{b1 \cdot h1^2}{6} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$W_y(x) := \begin{cases} \frac{b \cdot h^2}{6} & \text{if } x < L1 \\ \frac{\pi \cdot d1(x)^3}{32} & \text{if } L1 \le x < L2 \\ \left[\frac{\pi}{32} \cdot D^3 \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right]\right] & \text{if } L2 \le x < L3 \\ \frac{b1^3}{6} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$W_k(x) := \begin{cases} \beta(hb) \cdot b^2 \cdot h & \text{if } x < L1 \\ \frac{\pi \cdot d1(x)^3}{16} & \text{if } L1 \le x < L2 \\ \left[\frac{\pi}{16} \cdot D^3 \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right]\right] & \text{if } L2 \le x < L3 \\ \beta(hb1) \cdot b1^2 \cdot h1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\gamma(x) := \begin{cases} \gamma(hb) & \text{if } x < L1 \\ \gamma(hb1) & \text{if } x \ge L3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$A(x) := \begin{cases} (b \cdot h) & \text{if } x < L1 \\ \frac{\pi \cdot d1(x)^2}{4} & \text{if } L1 \le x < L2 \\ \left(\frac{\pi}{4} \cdot D^2 - \frac{\pi}{4} \cdot d^2\right) & \text{if } L2 \le x < L3 \\ ((b1 \cdot h1)) & \text{otherwise} \end{cases}$$

Рис. 10.19. Функции моментов инерции и моментов сопротивления по длине стержня

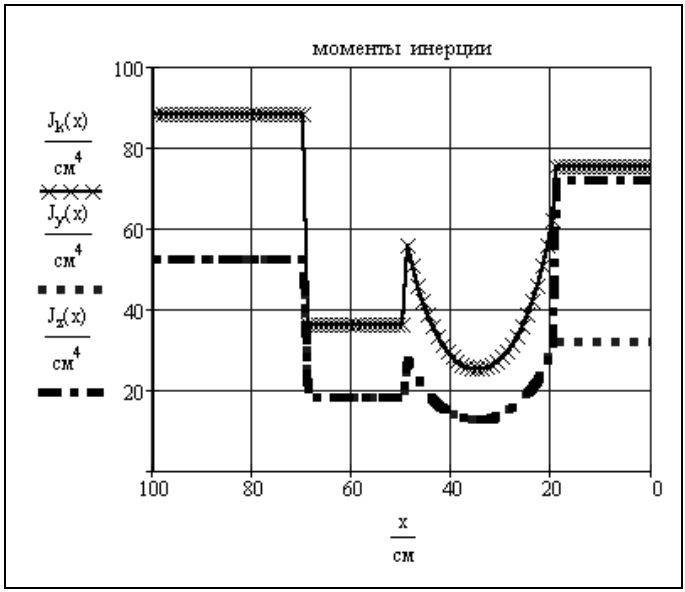


Рис. 10.20. Графики моментов инерции по длине стержня

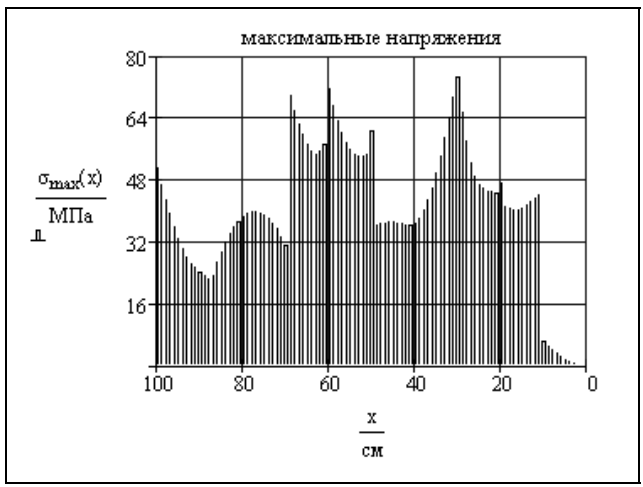


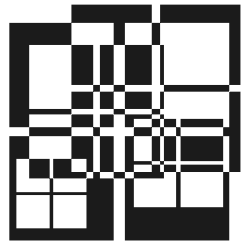
Рис. 10.21. Изменение максимального эквивалентного напряжения в опасных точках сечений по длине стержня

записана функция распределения максимальных напряжений по длине стержня. Результаты расчета максимальных напряжений приведены на рис. 10.21.

Функция напряжений получается прерывистой, с большим количеством пиков. Определить максимальное значение такой функции Mathcad не может. Следовательно, $\sigma_{max.экв}$ следует определить непосредственно по графику и сравнить с допускаемым напряжением.

В этой же программе (`слож-сопр`), после нахождения максимальных напряжений, определяются перемещения стержня (удлинение, прогибы вдоль осей y и z, углы поворота сечений вокруг трех осей x, y, z). Перемещения определены энергетическим методом, о котором речь пойдет в *следующей главе*, поэтому и пояснения к определению перемещений будут приведены там же.

ГЛАВА 11



Энергетический метод расчета упругих систем

При изучении простых видов деформации: растяжения-сжатия, сдвига, кручения, плоского изгиба, каждый раз определялась потенциальная энергия упругой деформации с целью получения в дальнейшем энергетического метода расчета упругих систем. Этот метод часто используется в практике инженерных расчетов при решении сложных задач.

Особенностями метода являются универсальность и простота использования. Формулы и уравнения этого метода справедливы при любых видах деформации, в том числе и при сложном сопротивлении, при решении как статически определимых, так и статически неопределимых задач.

Для объяснения энергетического метода введем универсальные обозначения.

Обозначим:

- F — *любой силовой фактор* (сосредоточенную силу, пару сил, распределенную нагрузку) и назовем его *обобщенная сила*, хотя это и не совсем верно с точки зрения теоретической механики;
- Δ — перемещение, на котором совершает работу обобщенная сила, назовем его *обобщенное перемещение*.

Каждой силе соответствует свое обобщенное перемещение.

Сосредоточенная сила F совершает работу на линейном перемещении Δ (рис. 11.1, *а*). Работа A внешней сосредоточенной силы $A = F \cdot \Delta$ имеет размерность ньютон × метр.

Пара сил $F = M$ совершает работу на угловом перемещении $\Delta = \theta$ (рис. 11.1, *б*). Тогда работа пары сил $A = F \cdot \Delta = M \cdot \theta$ также имеет размерность ньютон × метр.

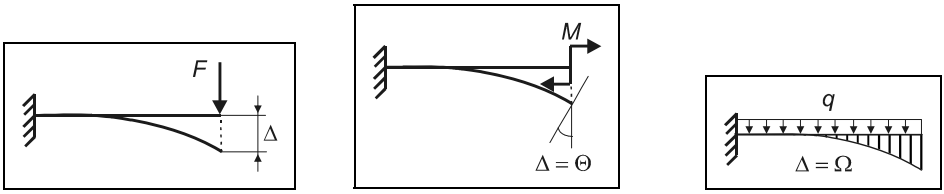


Рис. 11.1. Обобщенные перемещения от различных нагрузок

Для распределенной нагрузки $F = q$ обобщенным перемещением является площадь Ω, ограниченная упругой осью балки до и после деформации (рис. 11.1, *в*). Работа, совершенная распределенной нагрузкой $A = F \cdot \Delta = q \cdot \Omega$, имеет размерность ньютон × метр.

Введем понятие перемещения от единичной силы.

При упругой деформации, когда справедлив закон Гука, перемещение прямо пропорционально приложенной нагрузке. Это перемещение Δ можно записать как произведение нагрузки на перемещение от единичной силы $\Delta = F \cdot \delta$, где δ — перемещение от $F = 1$, которому в дальнейшем дадим название *коэффициент податливости.*

Например, при растяжении стержня силой F

$$\Delta = \frac{F \cdot L}{E \cdot A} = F \cdot \frac{1 \cdot L}{E \cdot A} = F \cdot \delta, \text{ где } \delta = \frac{1 \cdot L}{E \cdot A},$$

при изгибе консольной балки, нагруженной на конце силой F

$$\Delta = \frac{F \cdot L^3}{3E \cdot J} = F \cdot \frac{1 \cdot L^3}{3E \cdot J} = F \cdot \delta, \text{ где } \delta = \frac{1 \cdot L^3}{3E \cdot J}.$$

Введя основные понятия, необходимые для объяснения энергетического метода расчета упругих систем, перейдем к выводу формулы для определения упругих перемещений.

11.1. Интеграл Мора

При сложном сопротивлении в поперечных сечениях стержня действуют 6 внутренних усилий $N_x, Q_y, Q_z, M_x, M_y, M_z$. В соответствии с принципом независимости действия сил, потенциальная энергия упругой деформации равна сумме потенциальной энергии от всех шести внутренних усилий. Запишем

потенциальную энергию упругой деформации при сложном сопротивлении, используя выражения, полученные в предыдущих разделах.

$$П=\sum\int_L\frac{N^2dx}{E\cdot A}+\sum k_y\int_L\frac{Q_y{}^2dx}{G\cdot A}+\sum k_z\int_L\frac{Q_z{}^2dx}{G\cdot A}+\sum\int_L\frac{M_к{}^2dx}{G\cdot J_к}+\sum\int_L\frac{M_y{}^2dx}{E\cdot J_y}\sum\int_L\frac{M_z{}^2dx}{E\cdot J_z}.$$

В механике есть теорема Кастильяно, позволяющая находить перемещения, как производную от потенциальной энергии по обобщенной силе $\Delta=\frac{\partial П}{\partial F}$.

Приведем пример использования теоремы Кастильяно.

Для консольной балки, нагруженной силой на конце, изгибающий момент в произвольном сечении x $M=F\cdot x$.

Потенциальная энергия упругой деформации

$$П=\int_0^L\frac{M^2dx}{2E\cdot J}=\int_0^L\frac{(F\cdot x)^2dx}{2E\cdot J}.$$

Перемещение под силой

$$\Delta=\frac{\partial П}{\partial F}=\int_0^L\frac{2Fx\cdot xdx}{2E\cdot J}=\frac{F\cdot L^3}{3E\cdot J}.$$

Если необходимо определить перемещение в точке, где не приложено никакой силы, надо в этой точке приложить фиктивную силу, $F_ф$. Тогда изгибающий момент в произвольном сечении равен сумме изгибающих моментов от внешних сил и от фиктивной силы $F_ф$

$$M=M_F+M_ф=M_F+F_ф\cdot\bar{M},$$

где $\bar{M}$ — изгибающий момент от $F_ф=1$, т. к. внутренние усилия пропорциональны приложенной силе $F_ф$. Поскольку реально фиктивной силы нет, в выражении для перемещения надо положить $F_ф=0$.

Тогда перемещение точки приложения фиктивной силы

$$\Delta=\frac{\partial П}{\partial F_ф}=\sum\int_L\frac{\left(M_F+F_ф\bar{M}\right)^2dx}{2EJ}=\sum\int_L\frac{2\left(M_F+F_ф\bar{M}\right)\bar{M}dx}{2EJ}=\sum\int_L\frac{M_F\bar{M}dx}{EJ}.$$

Последнее выражение есть частный случай интеграла Мора.

По аналогии:

- при растяжении, продольное усилие $N = N_F + F_\phi \bar{N}$, где $\bar{N}$ — продольное усилие от $F_\phi = 1$;
- при кручении, крутящий момент $M_к = M_{кF} + F_\phi \bar{M}_к$, где $\bar{M}_к$ — крутящий момент от $F_\phi = 1$.

В общем случае, при действии шести внутренних усилий перемещение в точке, где приложена фиктивная сила

$$\Delta = \sum \int_L \frac{N_F \bar{N} dx}{EA} + \sum k_y \int_L \frac{Q_{yF} \bar{Q}_y dx}{GA} + \sum k_z \int_L \frac{Q_{zF} \bar{Q}_z dx}{GA} +$$
$$+ \sum \int_L \frac{M_{yF} \bar{M}_y dx}{EJ_y} + \sum \int_L \frac{M_{zF} \bar{M}_z dx}{EJ_z} + \sum \int_L \frac{M_{кF} \bar{M}_к dx}{GJ_к}.$$

Это выражение представляет собой интеграл Мора для определения перемещения в самом общем случае.

В этом выражении $N_{xF}, Q_{yF}, Q_{zF}, M_{yF}, M_{zF}, M_{кF}$ — внутренние усилия в произвольном сечении от действия всех внешних сил, $\bar{N}_x, \bar{Q}_y, \bar{Q}_z, \bar{M}_y, \bar{M}_z, \bar{M}_к$ — внутренние усилия в произвольном сечении от действия $F_\phi = 1$ (от единичной силы).

Каждый интеграл вносит свой вклад в перемещение, но эти вклады различны. Если есть хоть один момент (изгибающий или крутящий), то влиянием первых трех слагаемых (от продольного усилия и от поперечных сил) можно пренебречь.

На практике не приходится рассчитывать все шесть интегралов.

При растяжении-сжатии используется только первый интеграл (в сечениях действует только продольное усилие N_x). При кручении — только шестой интеграл.

При плоском изгибе влиянием поперечной силы можно пренебречь, тогда в расчет включается только один пятый интеграл от изгибающего момента.

При сложном сопротивлении учитываются три интеграла от двух изгибающих моментов и крутящего момента.

Интеграл Мора можно использовать для определения перемещений как прямолинейных, так и криволинейных стержневых систем.

Поскольку интеграл Мора вычисляется по длине, для криволинейных стержней вместо dx в подынтегральном выражении используется элемент длины дуги $ds = \rho \cdot d\varphi$, где ρ — радиус кривизны стержня, который может быть постоянным, а может быть функцией от угловой координаты φ.

Перепишем интеграл Мора в более общем виде, справедливом как для прямолинейных, так и для криволинейных стержней

$$\Delta = \sum \int_L \frac{N_F \bar{N} ds}{EA} + \sum k_y \int_L \frac{Q_{yF} \bar{Q}_y ds}{GA} + \sum k_z \int_L \frac{Q_{zF} \bar{Q}_z ds}{GA} + \sum \int_L \frac{M_{yF} \bar{M}_y ds}{EJ_y} + \sum \int_L \frac{M_{zF} \bar{M}_z ds}{EJ_z} + \sum \int_L \frac{M_{кF} \bar{M}_к ds}{GJ_к}, \quad (11.1)$$

где $ds = dx$ — для прямолинейных стержней и $ds = \rho \cdot d\varphi$ — для криволинейных стержней.

Пример вычисления интеграла Мора

Для консольной балки (рис. 11.2) найти прогиб посередине балки Δ_B и угол поворота конца балки θ_D.

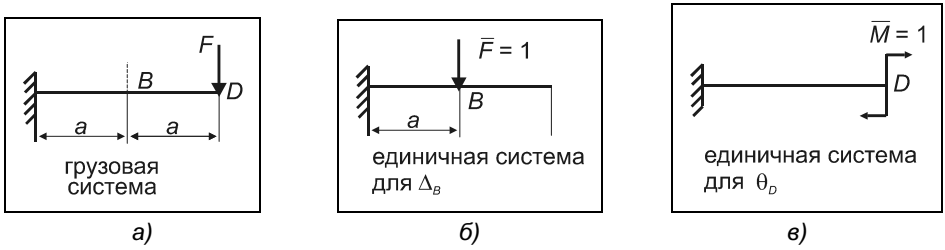


Рис. 11.2. Грузовая и единичные системы для вычисления перемещений консольной балки

Балку, нагруженную внешней силой F, будем называть *грузовой системой* (рис. 11.2, *а*). Нарисуем балку, нагруженную единичной силой в точке, где ищем перемещение. Назовем ее *единичной системой.* Поскольку ищем два перемещения, для каждого из них надо нарисовать свою единичную систему (рис. 11.2, *б* и *в*).

Для определения линейного перемещения единичную систему нагружают сосредоточенной единичной силой $\bar{F} = 1$, для определения угла поворота сечения единичную систему нагружают единичным моментом $\bar{M} = 1$.

Разобьем балку на два участка. Произвольные сечения на этих участках обозначим x_1 и x_2. Запишем изгибающие моменты на каждом участке от внешних и от единичных сил. При этом обозначим M_{i1} — момент на участке i от $\overline{F}=1$, M_{i2} — момент на участке i от $\overline{M}=1$.

$$\begin{array}{ll} 0<x_1<a & a<x_2<2a \\ M_{F1}=F\cdot x_1 & M_{F2}=F\cdot x_2 \\ \overline{M}_{11}=0 & \overline{M}_{21}=1(x_2-a) \\ \overline{M}_{12}=1 & \overline{M}_{22}=1 \end{array}.$$

Подставляем найденные выражения для изгибающих моментов под интеграл Мора

$$\Delta_B=\sum_{i=1}^{2}\int_{L_i}\frac{M_{Fi}\overline{M}_{i1}dx}{EJ}=\int_0^a\frac{Fx_1\cdot 0\cdot dx_1}{EJ}+\int_a^{2a}\frac{Fx_2\cdot 1x_2\cdot dx_2}{EJ}=\frac{5}{6}\frac{Fa^3}{EJ},$$

$$\theta_D=\sum_{i=1}^{2}\int_{L_i}\frac{M_{Fi}\overline{M}_{i2}dx}{EJ}=\int_0^a\frac{Fx_1\cdot 1\cdot dx_1}{EJ}+\int_a^{2a}\frac{Fx_2\cdot 1\cdot dx_2}{EJ}=\frac{1}{2}\frac{Fa^2}{EJ}.$$

Определение перемещений в кривом брусе

Для кривого бруса в форме четверти круга (рис. 11.3) найти горизонтальное перемещение точки *A*. Нарисуем вспомогательную единичную систему и нагрузим ее горизонтальной единичной силой в точке *A*.

В полярной системе координат положение произвольного сечения характеризуется радиусом-вектором ρ (в нашей задаче $\rho=Const$ — радиус круга) и углом φ от произвольно выбранной начальной точки дуги.

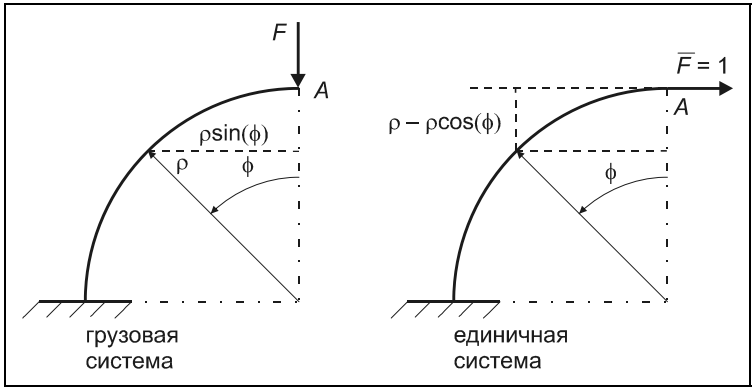


Рис. 11.3. Грузовая и единичная системы для вычисления перемещений кривого бруса

Изгибающий момент от внешних сил $M_{F\varphi} = F \cdot \rho \cdot \sin(\varphi)$.

Изгибающий момент от единичной силы $\bar{M}_{\varphi} = 1 \cdot \rho \cdot (1 - \cos(\varphi))$.

Горизонтальное перемещение точки A

$$\Delta_{A\text{гор}} = \int_L \frac{M_F \bar{M}}{EJ} ds = \int_0^{\pi/2} \frac{F\rho\sin(\varphi) \cdot 1\rho(1-\cos(\varphi))}{EJ} \rho d\varphi = \frac{F\rho^3}{2EJ}.$$

Внимание

При вычислении интеграла Мора для криволинейных брусьев не забудьте дифференциал писать, как $\rho d\varphi$. Если записать дифференциал просто $d\varphi$, это приведет к различным размерностям слагаемых для прямолинейных и для криволинейных участков одного и того же бруса и невозможности правильно определить перемещение.

Порядок определения перемещений с помощью интеграла Мора:

1. Изобразить отдельно заданную систему, нагруженную всеми внешними силами (грузовую систему), и систему, нагруженную одной-единственной единичной силой (единичная система).

   Единичная система нагружается сосредоточенной силой $\bar{F} = 1$, если определяется линейное перемещение, и парой сил $\bar{M} = 1$, если определяется угловое перемещение.

   Единичная сила $\bar{F} = 1$ или единичный момент $\bar{M} = 1$ прикладывается в точке, где ищем перемещение в направлении этого перемещения.

2. Определить, если нужно, опорные реакции отдельно для грузовой системы и для единичной системы с помощью уравнений равновесия.

   Для балок и рам, защемленных одним концом, определение реакций в заделке нецелесообразно. В этом случае внутренние усилия определяют, рассматривая свободную (без заделки) часть балки или рамы.

3. Разбить заданную систему на участки и указать текущую координату в произвольном сечении каждого участка.

   Количество участков и их границы должны быть одинаковы для грузовой и единичной системы.

4. Для каждого участка записать внутренние усилия от внешних сил для грузовой системы и от единичной силы или момента для единичной системы.

Правило знаков для внутренних усилий может быть произвольным, но постоянным для рассматриваемой задачи, т. к. важен лишь знак произведения усилий.

Произведение усилий, например, $M_F \cdot \bar{M}$, положительное, если изгибающие моменты действуют в одном направлении, и отрицательное, если в разных.

5. Определить искомое перемещение, используя интеграл Мора, например, $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \int_{L_i} \frac{M_{Fi} \bar{M}_i dx}{EJ}$, где n — число участков, на которые разбита система.

Рассмотрим примеры определения перемещений.

11.2. Примеры определения перемещений статически определимых систем

11.2.1. Определение перемещений балок при изгибе

Определить перемещения при изгибе двух балок, рассмотренных в *разд. 7.5*.

Приводимый далее расчет является заключительной частью программы, описанной в *разд. 7.5*.

Рассмотрим две балки: консольную балку и балку на двух опорах (см. рис. 7.19). Нагрузки, приложенные к балкам, могут быть любыми.

В данном примере используем нагрузки, указанные на рис. 7.21. На каждую балку действуют 2 пары сил, 3 сосредоточенные силы и две распределенные нагрузки постоянной интенсивности. Балки стальные длиной $L = 1$ м.

Изгибающий момент от внешних сил $M1_z(x)$ в консольной балке определен на рис. 7.22, в балке на двух опорах $M_z(x)$ на рис. 7.24. Остается найти изгибающие моменты от единичных сил.

Достоинство Mathcad в данной задаче в том, что изгибающий момент по всей длине балки записан в виде одной функции с помощью булевых операторов условия. Тем самым отпадает необходимость вычислять сумму интегралов по количеству участков.

Грузовые системы для обеих балок представлены на рис. 7.19, а единичные системы для определения прогиба и угла поворота сечения балки показаны на рис. 11.4 для консольной балки и на рис. 11.5 для балки на двух опорах.

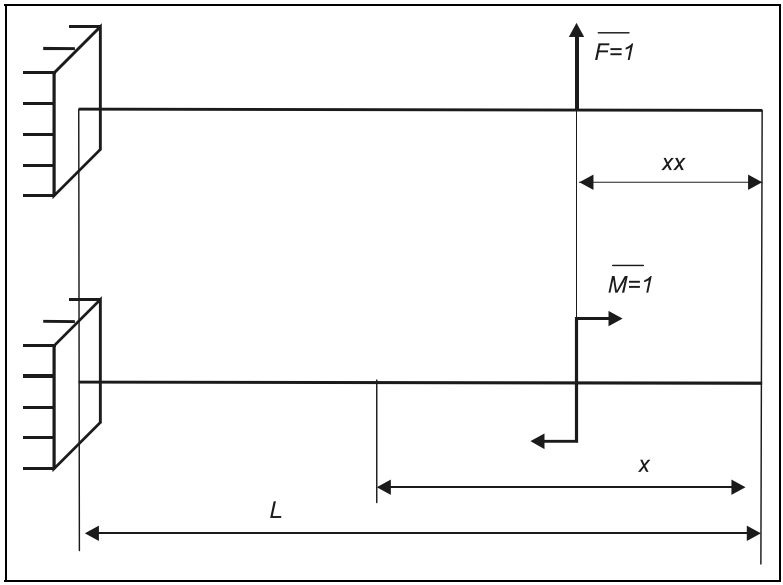


Рис. 11.4. Единичные системы для консольной балки

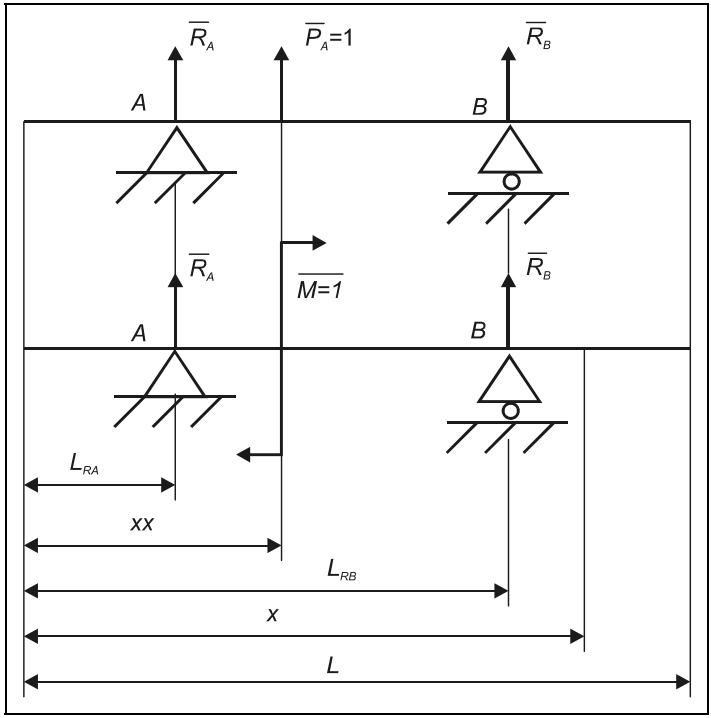


Рис. 11.5. Единичные системы для балки на двух опорах

Единичная сила приложена в произвольном сечении xx. Тогда, задаваясь диапазоном значений xx, можно определить перемещения по всей длине балки и построить графики перемещений.

момент от единичной силы для определения прогиба балки

$M1(xx,x) := -1 \cdot (x - xx) \cdot (x > xx)$

момент от единичной силы для определения угла поворота балки

$M2(xx,x) := -1 \cdot (x \geq xx)$

Прогиб балки $\Delta(xx) := \int_0^L \frac{M1_Z(x) \cdot M1(xx,x)}{E \cdot J_Z} dx$

$\Delta(0 \cdot мм) = -0.162\,мм$

Угол поворота сечения $\Theta(xx) := \int_0^L \frac{M1_Z(x) \cdot M2(xx,x)}{E \cdot J_Z} dx$

$\Theta(0 \cdot м) = -0.026\,deg$

Рис. 11.6. Определение перемещений консольной балки

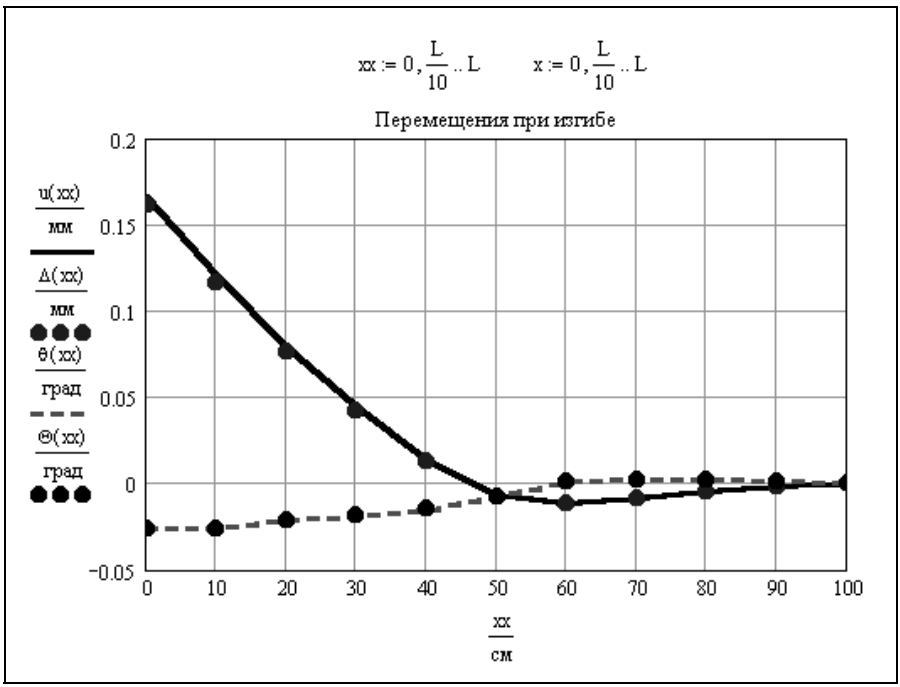


Рис. 11.7. Результаты расчета перемещений консольной балки

Изгибающие моменты от единичных сил для консольной балки приведены на рис. 11.6. Там же записаны интегралы Мора для определения прогиба и угла поворота сечения балки.

Результаты расчета перемещений консольной балки показаны на рис. 11.7. Точки на графике — результаты расчета с помощью интеграла Мора, сплошные линии — расчет методом начальных параметров из *разд. 7.5*.

Для балки на двух опорах в выражения для изгибающих моментов входят опорные реакции. Пока реакции не определены, они должны входить в параметры функции изгибающего момента.

Далее из условий равновесия балки с помощью функции `find` определяются опорные реакции.

Изгибающие моменты от единичных сил в балке на двух опорах, определение опорных реакций и интегралы Мора приведены на рис. 11.8.

момент от единичной силы для определения прогиба балки

$$M1(R_A, R_B, xx, x) := R_A \cdot (x - L_{RA}) \cdot (x \geq L_{RA}) + R_B \cdot (x - L_{RB}) \cdot (x \geq L_{RB}) + 1 \cdot (x - xx) \cdot (x >$$

определение опорных реакций

$Ra1 := 1$ $Rb1 := 1$ начальные приближения

Given $M1(Ra1, Rb1, xx, L) = 0$ $1 + Ra1 + Rb1 = 0$

$Rab(xx) := Find(Ra1, Rb1)$ $Ra1(xx) := Rab(xx)_1$ $Rb1(xx) := Rab(xx)_2$

момент от единичной силы для определения угла поворота балки

$$M2(R_A, R_B, xx, x) := R_A \cdot (x - L_{RA}) \cdot (x \geq L_{RA}) + R_B \cdot (x - L_{RB}) \cdot (x \geq L_{RB}) + 1 \cdot (x \geq xx)$$

определение опорных реакций

$Ra2 := \frac{1}{L}$ $Rb2 := \frac{1}{L}$ начальные приближения

Given $M2(Ra2, Rb2, xx, L) = 0$ $Ra2 + Rb2 = 0$

$Rab2(xx) := Find(Ra2, Rb2)$ $Ra2(xx) := Rab2(xx)_1$ $Rb2(xx) := Rab2(xx)_2$

Прогиб балки $\Delta(xx) := \int_0^L \frac{M_z(R_A, R_B, x) \cdot M1(Ra1(xx), Rb1(xx), xx, x)}{E \cdot J_z} dx$

$\Delta(0 \cdot мм) = 0.086\,мм$

Угол поворота сечения $\Theta(xx) := \int_0^L \frac{M_z(R_A, R_B, x) \cdot M2(Ra2(xx), Rb2(xx), xx, x)}{E \cdot J_z} dx$

$\Theta(0 \cdot м) = 0.026\,deg$

Рис. 11.8. Определение перемещений балки на двух опорах с помощью интеграла Мора

Результаты расчета перемещений в балке на двух опорах — на рис. 11.9. Точки на графике — результаты расчета с помощью интеграла Мора, сплошные линии — расчет методом начальных параметров из *разд. 7.5.*

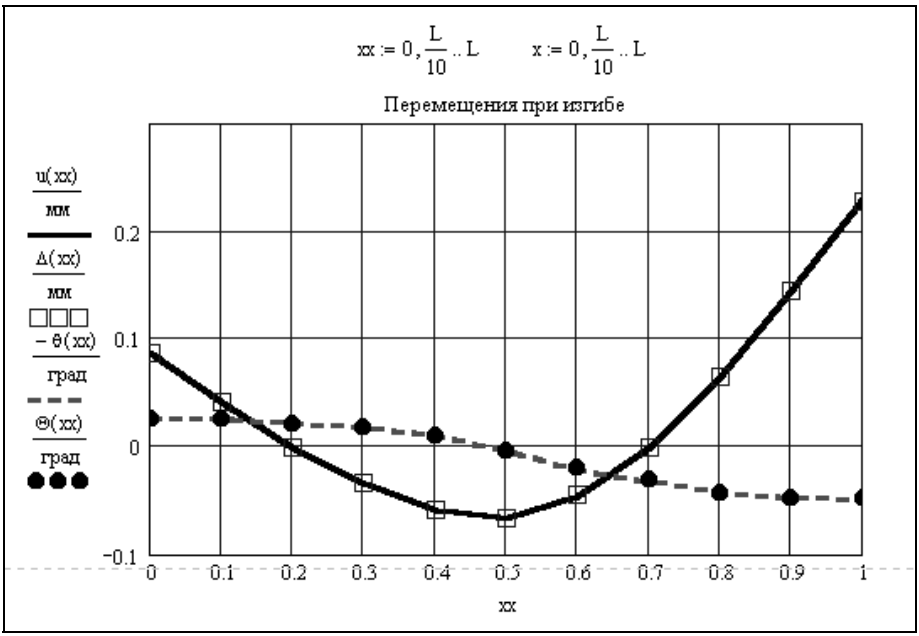


Рис. 11.9. Результаты расчета перемещений при изгибе балки на двух опорах

11.2.2. Определение перемещений пространственной стержневой системы

Определим перемещения при сложном сопротивлении произвольно нагруженного стержня.

Приводимый далее расчет является заключительной частью программы, описанной в *разд. 10.4*. Форма сечения стержня показана на рис. 10.9. Схема нагружения стержня (грузовая система) представлена на рис. 10.10. Исходные данные для расчета — на рис. 10.11. Внутренние усилия от внешних сил — на рис. 10.12—10.14.

Единичные системы для определения перемещений стержня показаны на рис. 11.10. Они такие же, как для плоской задачи. Изменение плоскости изгиба не меняет вида единичной системы и выражений для моментов от единичной силы. Внутренние усилия от единичных сил приведены на рис. 11.11.

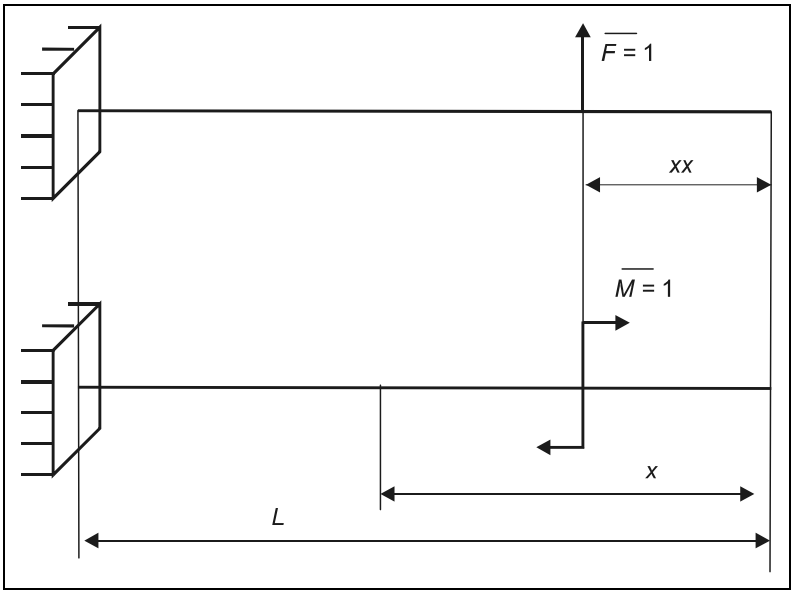


Рис. 11.10. Единичные системы для консольного стержня при пространственном нагружении

$xx := 0 \cdot м, \frac{L}{50} .. L \qquad x := 0 \cdot м, \frac{L}{50} .. L \qquad E := 2 \cdot 10^5 \cdot МПа \qquad G := 8 \cdot 10^4 \cdot МПа$

Моменты от единичной силы

для прогиба $M1(xx,x) := 1 \cdot (x - xx) \cdot (x > xx)$

для углов поворота $M2(xx,x) := 1 \cdot (x \geq xx)$

для удлинения $N1(xx,x) := 1 \cdot (x \geq xx)$

Прогибы стержня по осям y и z

$$\Delta_y(xx) := \int_0^L \frac{M_y(x) \cdot M1(xx,x)}{E \cdot J_y(x)} dx \qquad \Delta_z(xx) := \int_0^L \frac{M_z(x) \cdot M1(xx,x)}{E \cdot J_z(x)} dx$$

Удлинение стержня

$$\Delta_x(xx) := \int_0^L \frac{N(x) \cdot N1(xx,x)}{E \cdot A(x)} dx$$

Угол поворота сечения стержня вокруг осей x,y,z

$$\Theta_z(xx) := \int_0^L \frac{M_y(x) \cdot M2(xx,x)}{E \cdot J_y(x)} dx \qquad \Theta_y(xx) := \int_0^L \frac{M_z(x) \cdot M2(xx,x)}{E \cdot J_z(x)} dx$$

$$\Theta_x(xx) := \int_0^L \frac{M_k(x) \cdot M2(xx,x)}{G \cdot J_k(x)} dx$$

Рис. 11.11. Определение перемещений стержня при сложном сопротивлении с помощью интеграла Мора

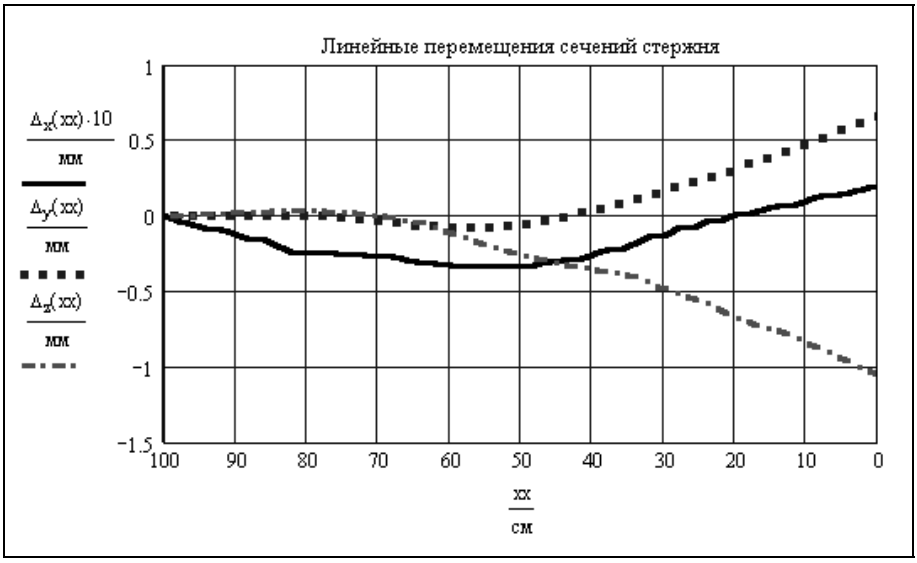


Рис. 11.12. Линейные перемещения стержня при сложном сопротивлении

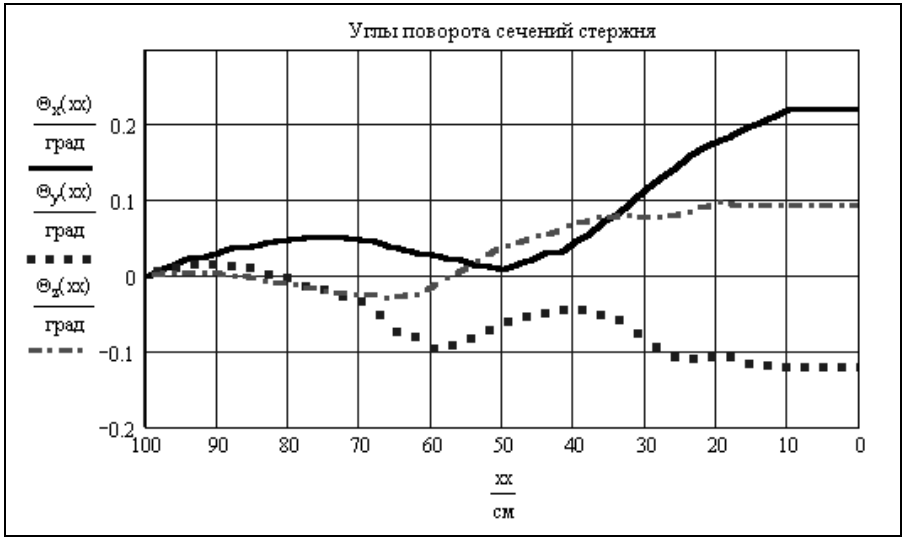


Рис. 11.13. Угловые перемещения стержня при сложном сопротивлении

Там же приведены интегралы Мора для определения трех линейных и трех угловых перемещений стержня.

Вместо шести единичных систем нарисовано только две, т. к. уравнения изгибающих моментов от единичной силы не зависят от плоскости изгиба.

Точно так же момент от пары сил равен единице по всей длине стержня независимо от направления вращения.

Результаты расчета перемещений при сложном сопротивлении стержня приведены на рис. 11.12 и 11.13.

Обратите внимание на краткость и простоту записи в Mathcad исключительно сложной и трудоемкой задачи определения всех перемещений произвольно нагруженного стержня переменного ступенчатого поперечного сечения. Поразительно элегантная программа, как, впрочем, и все программы в этой книге.

Этими словами я нахваливаю не себя, а хочу показать читателям огромные возможности Mathcad, увлечь работой с Mathcad.

11.3. Метод сил

Метод сил и метод перемещений — основные методы, используемые в строительной механике для расчета напряженно-деформированного состояния конструкций. При упругой деформации в выражении закона Гука в методе сил известны перемещения, надо найти нагрузки, в методе перемещений известны нагрузки, необходимо найти перемещения.

Метод перемещений более удобен при расчете конструкции методом конечных элементов. Метод сил проще при расчете вручную с использованием микрокалькулятора.

Метод перемещений не включается в курс сопротивления материалов, поскольку требует более глубоких знаний теории упругости и строительной механики.

В сопротивлении материалов метод сил используется для раскрытия статической неопределимости стержневых систем.

11.3.1. Степень статической неопределимости

Прежде чем приступить к рассмотрению сущности метода сил, напомним приведенное в *разд. 1.12* определение статической неопределимости.

Статически неопределимой называется система, в которой число неизвестных больше, чем число полезных уравнений равновесия.

Система на рис. 11.14, *а* три раза статически неопределима. В ней 6 неизвестных реакций (по 3 в каждой заделке). Уравнений равновесия 3, как для всякой плоской системы. Степень статической неопределимости $6-3=3$. Для решения системы надо построить еще 3 дополнительных уравнения.

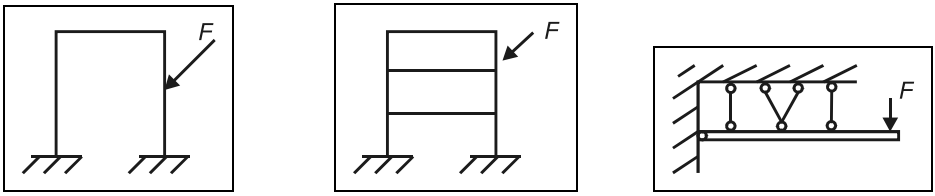


Рис. 11.14. Примеры статически неопределимых систем

Степень статической неопределимости системы возрастает, если в системе есть замкнутые контуры.

Всякий плоский замкнутый контур три раза статически неопределим. Дополнительными неизвестными становятся внутренние усилия в сечениях контура: продольное усилие N, поперечная сила Q и изгибающий момент M.

Система на рис. 11.14, *б* девять раз статически неопределима. В ней 6 неизвестных реакций (по 3 в каждой заделке) и два замкнутых контура по три дополнительных неизвестных в каждом контуре. Всего неизвестных сил 6 + 6 = 12. Уравнений равновесия 3, как для всякой плоской системы. Степень статической неопределимости 12 – 3 = 9. Для решения системы необходимы еще 9 дополнительных уравнений.

Степень статической неопределимости системы уменьшается, если в системе есть промежуточные (подвесные) шарниры.

Всякий подвесной шарнир дает дополнительное уравнение равновесия — равенство нулю изгибающего момента в шарнире, т. е. равенство нулю суммы моментов всех сил, расположенных по одну сторону от шарнира. Шарнирное соединение n стержней можно считать наложением шарниров друг на друга. Такое шарнирное соединение стержней дает $n-1$ дополнительное уравнение.

Система на рис. 11.14, *в* три раза статически неопределима. В ней 10 неизвестных реакций (по 2 в каждой шарнирной опоре). Уравнений равновесия: 3 — как для всякой плоской системы и 4 дополнительных уравнения дают подвесные шарниры (1 — в шарнире *B*, 2 — в шарнире *C*, 1 — в шарнире *D*). Всего 7 уравнений равновесия. Степень статической неопределимости 10 – 7 = 3. Для решения системы надо построить еще 3 дополнительных уравнения.

11.3.2. Перемещение от единичной силы (коэффициент податливости)

Рассмотрим прогиб консольной балки под действием приложенной на конце силы F (рис. 11.15, *а*).

$$\Delta = \frac{FL^3}{3EJ} = F\frac{1L^3}{3EJ} = F\delta,$$

где $\delta = \dfrac{1L^3}{3EJ}$ — перемещение от единичной силы.

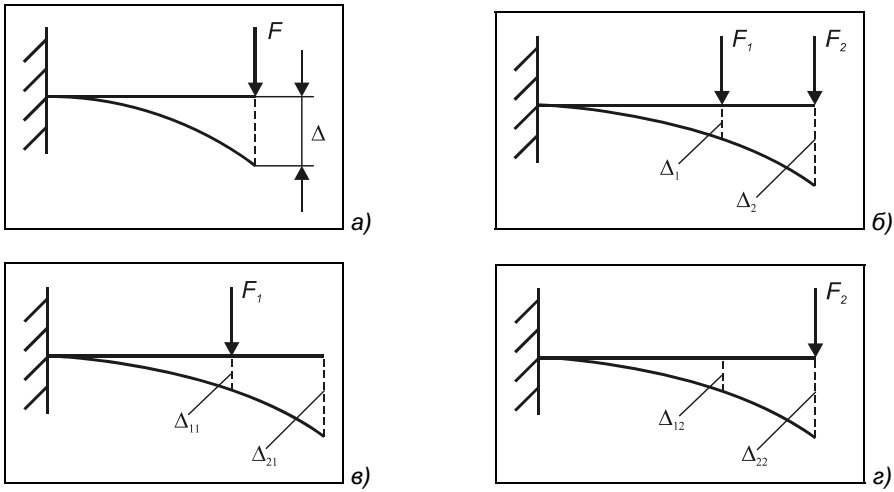


Рис. 11.15. К определению перемещений балки

Пусть на эту балку действуют две силы (рис. 11.15, *б*). Найдем прогибы балки в точках приложения каждой силы.

Согласно принципу независимости действия сил, прогиб балки от двух сил равен сумме прогибов балки от каждой силы в отдельности (рис. 11.15, *в* и *г*).

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \Delta_{11} + \Delta_{12} = F_1\delta_{11} + F_2\delta_{12}\\ \Delta_2 &= \Delta_{21} + \Delta_{22} = F_1\delta_{21} + F_2\delta_{22}\end{aligned}.$$

Для системы n сил

$$\begin{cases}\Delta_1 = F_1\delta_{11} + F_2\delta_{12} + ... + F_n\delta_{1n}\\ \Delta_2 = F_1\delta_{21} + F_2\delta_{22} + ... + F_n\delta_{2n}\\ .....\\ \Delta_n = F_1\delta_{n1} + F_2\delta_{n2} + ... + F_n\delta_{nn}\end{cases}, \qquad (11.2)$$

где $\delta_{i,j}$ — коэффициент податливости — перемещение по направлению i от силы $F_j = 1$.

В общем виде формула (11.2) принимает вид

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^{n} F_j \delta_{i,j} .$$

Выражение (11.2) представляет собой закон Гука для внешних сил.

11.3.3. Канонические уравнения метода сил

Сущность метода сил

Заданную статически неопределимую систему заменить статически определимой, ей эквивалентной, путем отбрасывания лишних связей и замены их неизвестными силами. Величину этих сил определяем из условий эквивалентности.

Две системы считаются эквивалентными, если напряжения, деформации и перемещения в них одинаковы.

Если системы упругие, для их эквивалентности достаточно, чтобы перемещения в них были одинаковы.

Реализацию описанной идеи рассмотрим на примере два раза статически неопределимой системы (рис. 11.16, *а*). Отбросим две связи (любые), система станет статически определимой. Назовем ее *основной системой.*

Из одной заданной системы можно получить несколько основных (статически определимых систем) путем отбрасывания разных связей. Выбранная основная система (рис. 11.16, *б*) обеспечивает более простое решение.

Нагрузим основную систему всеми внешними силами, действие отброшенных связей заменим неизвестными силами X_1 и X_2, получим эквивалентную систему (рис. 11.16, *в*).

На опоре *A* линейные перемещения равны нулю. Используем равенство нулю этих перемещений в качестве условий эквивалентности

$$\Delta_{A.\text{верт}} = 0,$$
$$\Delta_{A.\text{гор}} = 0.$$

Согласно принципу независимости действия сил и закону Гука для внешних сил (11.2)

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{А.гор}} &= X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + \Delta_{1F} = 0 \\ \Delta_{\text{А.верт}} &= X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + \Delta_{2F} = 0 \end{aligned}, \qquad (11.3)$$

где:

- $\Delta_{1F} = \sum_{k=1}^{3} \int_{L_k} \frac{M_{F,k}\bar{M}_{1,k}dx}{EJ}$ и $\Delta_{2F} = \sum_{k=1}^{3} \int_{L_k} \frac{M_{F,k}\bar{M}_{2,k}dx}{EJ}$ — перемещения по направлениям 1 и 2 от внешних сил;
- $\delta_{11} = \sum_{k=1}^{3} \int_{L_k} \frac{\bar{M}_{1,k}{}^2 dx}{EJ}$ $\delta_{22} = \sum_{k=1}^{3} \int_{L_k} \frac{\bar{M}_{2,k}{}^2 dx}{EJ}$ $\delta_{12} = \delta_{21} = \sum_{k=1}^{3} \int_{L_k} \frac{\bar{M}_{1,k}\bar{M}_{2,k}dx}{EJ}$ — коэффициенты податливости, учитывающие только изгиб элементов рамы;
- k — номер участка;
- $M_{F,k}$ — изгибающий момент от внешних сил на участке k;
- $\bar{M}_{1,k}$ и $\bar{M}_{2,k}$ — изгибающие моменты от единичных сил $X_1 = 1$ и $X_2 = 1$ на участке k.

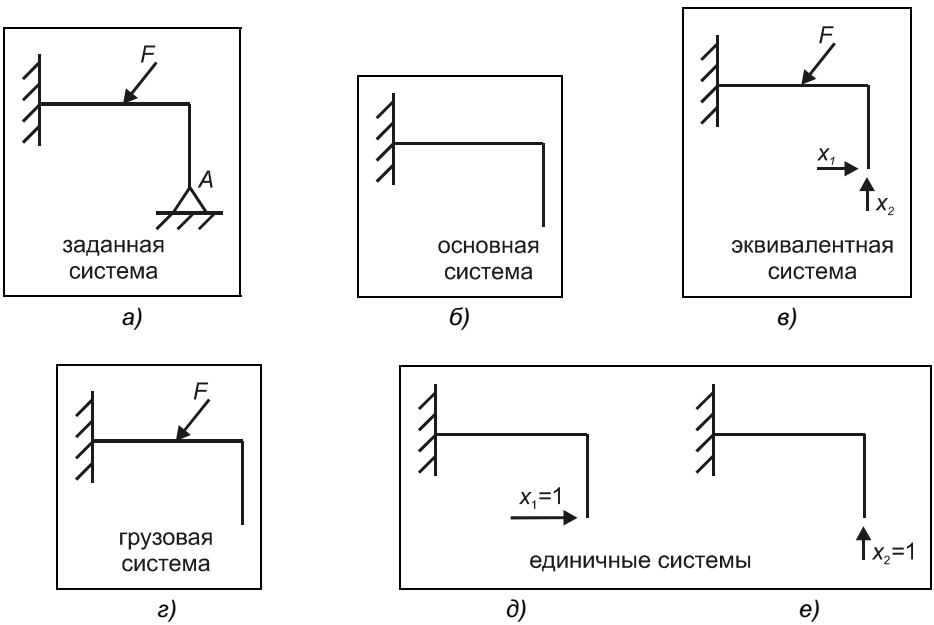


Рис. 11.16. Расчетные схемы, используемые в методе сил

Для определения указанных изгибающих моментов на рис. 11.1, *б* нарисованы еще три системы: грузовая (рис. 11.16, *г*) и две единичные от силы $X_1 = 1$ (рис. 11.16, *д*) и от силы $X_2 = 1$ (рис. 11.16, *е*).

Решая систему уравнений (11.3), определяем неизвестные силы X_1 и X_2. Статическая неопределимость раскрыта.

Далее, для статически определимой эквивалентной системы можно определить напряжения и перемещения, как было описано ранее.

Для n раз статически неопределимой системы надо записать n условий эквивалентности

$$\begin{cases} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + ... + X_n\delta_{1n} = 0 \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + ... + X_n\delta_{2n} = 0 \\ ..... \\ X_1\delta_{n1} + X_2\delta_{n2} + ... + X_n\delta_{nn} = 0 \end{cases} \qquad (11.4)$$

Это *система канонических уравнений метода сил.* Она не изменяется для любой задачи.

В общем виде систему уравнений (11.4) можно записать как перемещение по направлению i

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^{n} X_i\delta_{i,j} + \Delta_{i,F} = 0, \qquad (11.5)$$

где n — степень статической неопределимости (число неизвестных сил X_i).

В выражениях (11.4) и (11.5) все коэффициенты представляют собой перемещения, которые определяются с помощью интеграла Мора.

В общем случае, в интеграл Мора можно включать слагаемые, учитывающие продольные усилия, изгибающие моменты и крутящие моменты.

$$\Delta_{i,F} = \sum_{k=1}^{m} \int_{L_k} \frac{N_{F,k}\bar{N}_{i,k}dS}{EA_k} \sum_{j=1}^{m} \int_{L_k} \frac{M_{F,k}\bar{M}_{i,k}dS}{EJ_k} \sum_{j=1}^{m} \int_{L_k} \frac{M_{\text{к},F,k}\bar{M}_{\text{к},i,k}dS}{G(J_{\text{к}})_k}, \qquad (11.6)$$

перемещение от внешних сил по направлению i,

$$\delta_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} \int_{L_k} \frac{\bar{N}_{i,k}\bar{N}_{j,k}dS}{EA_k} \sum_{k=1}^{m} \int_{L_k} \frac{\bar{M}_{i,k}\bar{M}_{j,k}dS}{EJ_k} \sum_{k=1}^{m} \int_{L_k} \frac{\bar{M}_{\text{к},i,k}\bar{M}_{\text{к},j,k}dS}{G(J_{\text{к}})_k}, \qquad (11.7)$$

коэффициенты податливости.

На практике, как правило, пренебрегают влиянием продольных усилий, если есть изгибающие или крутящие моменты. Численные расчеты в приведенных далее примерах показали, что слагаемые перемещений от продольных усилий

примерно в тысячу раз меньше слагаемых от моментов (изгибающих или крутящих).

Определив все коэффициенты, решают систему уравнений (11.4) и находят все неизвестные силы X_i.

После нахождения неизвестных сил становится возможным работать с эквивалентной системой, для которой теперь можно найти все моменты. Далее они называются *эквивалентные моменты*.

На основании принципа независимости действия сил эквивалентный момент равен сумме моментов от каждой силы в отдельности или

$$M_{\text{экв}} = M_F + \sum_{i=1}^{n} X_i \bar{M}_i \,. \tag{11.8}$$

Для эквивалентной статически определимой системы можно найти напряжения и перемещения, которые являются такими же, как в заданной системе.

Зная эквивалентные моменты относительно осей x, y, z, надо выбрать опасное сечение, где действуют максимальные эквивалентные напряжения по третьей или четвертой гипотезам прочности, как показано в *предыдущей главе* при сложном сопротивлении.

Если требуется найти перемещение какой-либо точки заданной системы, то это перемещение определяется для эквивалентной системы с помощью интеграла Мора. При этом в качестве моментов от внешних сил используются выражения для эквивалентных моментов, найденные ранее.

11.3.4. Учет монтажных и температурных напряжений

При необходимости учета температурных или монтажных напряжений соответствующие слагаемые добавляются в канонические уравнения метода сил (11.5).

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^{n} X_i \delta_{i,j} + \Delta_{i,F} + \Delta_{i,t} + \Delta_{i,\text{монт}} = 0 \,, \tag{11.9}$$

здесь $\Delta_{i,t}$ и $\Delta_{i,\text{монт}}$ — перемещения точки приложения силы X_i в направлении этой силы соответственно от действия температуры и от монтажной погрешности при сборке конструкции, n — степень статической неопределимости.

$$\Delta_{i,t} = \sum_{k=1}^{m} \alpha \tilde{L}_k \Delta t \,,$$

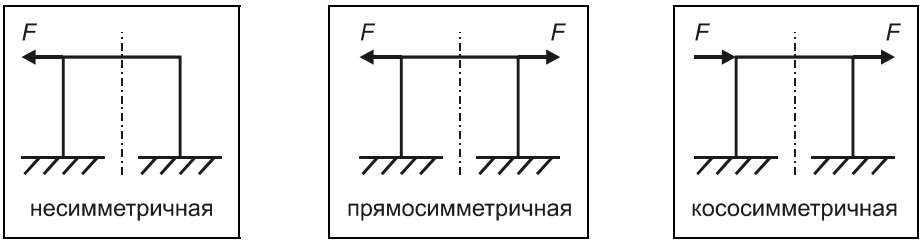
где α — коэффициент температурного расширения материала стержней, Δt — приращение температуры, $\tilde{L}_k$ — проекция расстояния от неподвижной точки до точки приложения силы X_i на направление этой силы, $\Delta_{i,\text{монт}}$ — монтажная погрешность при сборке (задается).

11.3.5. Учет симметрии в методе сил

Степень статической неопределимости системы уменьшается в случае симметрии системы. Если система геометрически симметрична, но нет симметрии нагрузок (рис. 11.17, *а*), то в этом случае степень статической неопределимости не меняется. Система на рисунке 3 раза статически неопределима.

При наличии геометрической симметрии и симметрии нагружения различают системы *прямосимметричные* и *кососимметричные*.

Если при сложении половинок системы по геометрической оси симметрии, направления внешних сил совпадают, то такая система называется *прямосимметричной* (рис. 11.17, *б*), если направления внешних сил противоположны, то система называется *кососимметричной* (рис. 11.17, *в*).



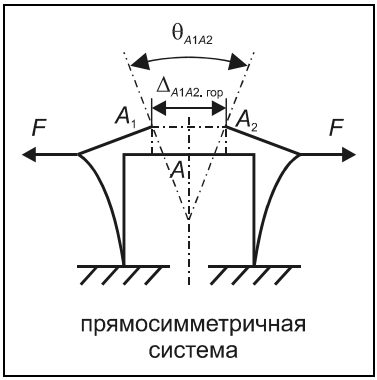
а) *б)* *в)*

Рис. 11.17. Несимметричная, прямосимметричная и кососимметричная системы

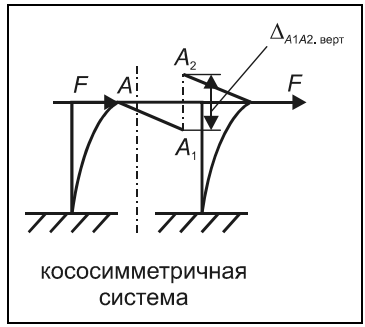
Прямосимметричную систему разрежем по оси симметрии и посмотрим на перемещения половинок системы (рис. 11.18, *а*). Точка A, лежащая на оси симметрии, при этом превращается в две точки A_1 и A_2 соответственно на левой и правой половинках системы.

По вертикали точки A_1 и A_2 остаются на одном уровне $\Delta_{A_1A_2\text{верт}} = 0$, следовательно, сила, стягивающая вместе две половинки, в этом случае равна нулю $Q = 0$.

По горизонтали точки A_1 и A_2 разошлись, поэтому необходимо приложить горизонтальную силу, чтобы свести две половинки вместе $N \neq 0$.



а)



б)

Рис. 11.18. Учет симметрии в методе сил

Поперечные сечения в точках A_1 и A_2 развернулись друг относительно друга на некоторый угол $\theta_{A_1A_2} \neq 0$. Чтобы этот угол был равен нулю, следует приложить пару сил $M \neq 0$.

Рассматриваемая прямосимметричная система стала два раза статически неопределимой. В качестве эквивалентной системы можно взять одну половину системы и в месте разреза приложить неизвестные силы $X_1 = N$ и $X_2 = M$.

Кососимметричную систему разрежем по оси симметрии и посмотрим на перемещения половинок системы (рис. 11.18, *б*).

По вертикали точки A_1 и A_2 расходятся $\Delta_{A_1A_2\text{верт}} \neq 0$, следовательно, необходима сила, стягивающая вместе две половинки $Q \neq 0$.

По горизонтали точки A_1 и A_2 находятся на одном уровне, поэтому горизонтальная сила, сводящая две половинки вместе, равна нулю $N = 0$.

Поперечные сечения в точках A_1 и A_2 развернулись на один и тот же угол. Таким образом, взаимный угол поворота сечений $\theta_{A_1A_2} = 0$ и пара сил, сводящая две половинки вместе, равна нулю $M = 0$. Рассматриваемая кососимметричная система стала один раз статически неопределимой. В качестве эквивалентной системы можно взять одну половину системы и в месте разреза приложить неизвестную силу $X_1 = Q$.

Правило

При разрезании системы по оси симметрии:

- ❒ В прямосимметричной системе обращаются в нуль кососимметричные усилия (поперечная сила Q и крутящий момент $M_к$);

- ❒ в кососимметричной системе обращаются в нуль прямосимметричные усилия (продольное усилие N и изгибающий момент M).

11.3.6. Проверка правильности решения системы

Если подставить найденные значения сил в канонические уравнения, то ответ должен быть равен нулю, т. е. перемещения в местах раскрепления системы должны быть равны нулю.

Проверку желательно делать при другом раскреплении системы (для другой эквивалентной системы). Если определять перемещения в местах раскрепления первоначальной эквивалентной системы, то при этом проверяется лишь правильность решения системы канонических уравнений.

При выборе для проверки другой эквивалентной системы внутренние усилия в ней остаются такими же, как в первоначально взятой эквивалентной системе, а вот усилия от единичной силы становятся другими. Хотя единичная сила теперь прикладывается в другой точке раскрепления, текущие координаты x_i берутся так же, как при раскрытии статической неопределимости. Это необходимо, чтобы использовать уже готовые выражения для эквивалентных моментов.

11.3.7. Порядок решения статически неопределимой задачи методом сил

1. Изобразить основную статически определимую систему, полученную из заданной путем отбрасывания лишних связей.
2. Изобразить систему, эквивалентную заданной, нагруженную всеми внешними силами и реакциями отброшенных связей.
3. Изобразить грузовое и единичное состояние основной системы. Количество единичных состояний равно степени статической неопределимости заданной системы.
4. Для каждого участка грузового и всех единичных состояний основной системы указать текущую координату для произвольного сечения (x — для прямолинейных и φ — для криволинейных участков).
5. Найти опорные реакции отдельно для грузового состояния и всех единичных состояний. Если основная система защемлена одним концом, реакции в заделке можно не определять.
6. Для произвольного сечения на каждом участке основной системы записать выражения для внутренних усилий (как правило, только для изгибающих и крутящих моментов) для грузового и всех единичных состояний.

7. Записать систему канонических уравнений метода сил (11.4) для эквивалентной системы. Определить коэффициенты податливости (11.7) и перемещения от внешних сил (11.6), входящие в канонические уравнения. Решив систему канонических уравнений, определить все неизвестные силы.
8. Последующие действия производятся с эквивалентной системой.
   - Найти внутренние усилия (11.8).
   - Определить необходимые перемещения. При этом в качестве усилий от внешних сил берутся усилия в эквивалентной системе. Единичное состояние основной системы соответствует искомому перемещению.
   - Произвести расчет на прочность с использованием условия прочности.

11.4. Примеры раскрытия статической неопределимости методом сил

11.4.1. Раскрытие статической неопределимости плоской рамы

Задана плоская рама (рис. 11.19, *а*), состоящая из двух прямолинейных и одного криволинейного участка. Рама три раза статически неопределима.

Отбросив правую заделку, получаем статически определимую основную систему (рис. 11.19, *б*).

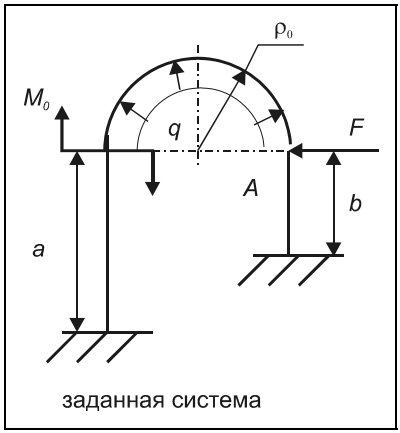
Нагрузим основную систему всеми внешними силами. Действие отброшенных связей заменяем неизвестными силами X_1, X_2, X_3, получаем эквивалентную систему (рис. 11.19, *в*).

Система канонических уравнений метода сил для три раза статически неопределимой системы имеет вид:

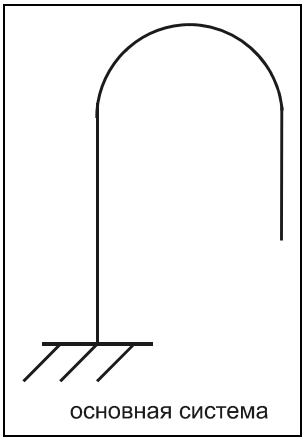
$$X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + \Delta_{1F} = 0,$$
$$X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + \Delta_{2F} = 0,$$
$$X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + \Delta_{3F} = 0.$$

Для вычисления коэффициентов податливости $\delta_{i,j}$ и перемещений основной системы от внешних сил нарисуем 4 вспомогательных системы: грузовую, нагруженную только внешними силами (рис. 11.19, *г*), и 3 единичные системы, каждая из которых нагружена одной-единственной единичной силой $X_i = 1$ (рис. 11.19, *д*, *е*, *ж*).

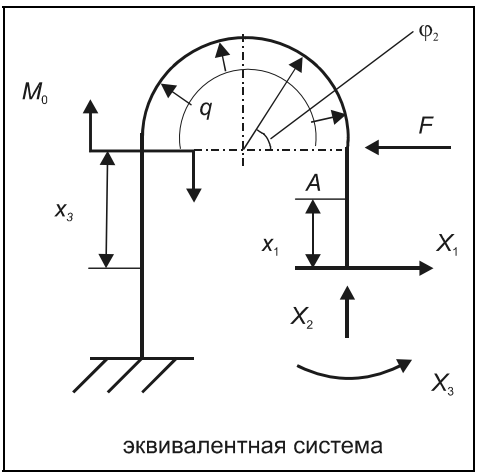
На каждом из трех участков выбираем произвольное сечение. Положение выбранных сечений отмечаем координатами x_1, φ_2, x_3, строго одинаково для всех систем.



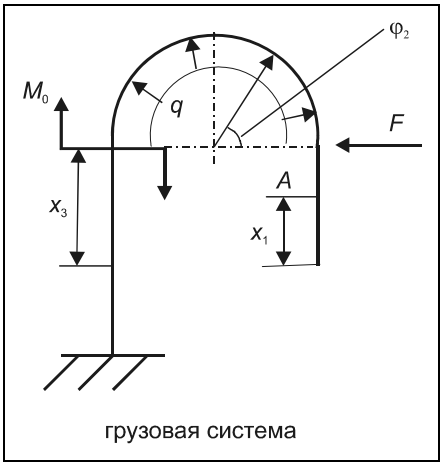
а)



б)



в)



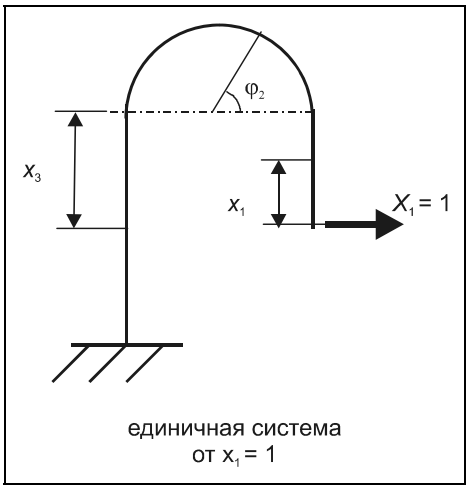
г)

Рис. 11.19. Расчетные схемы для плоской рамы *(см. также с. 304, 305)*

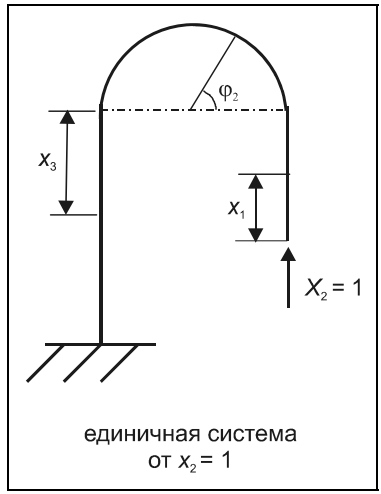
Исходные данные для расчета приведены на рис. 11.20. Заданы размеры рамы, материал — сталь (задан модуль Юнга E).

Расчет ведется без использования размерностей. Это связано с тем, что некоторые матрицы, применяемые в ходе расчета, содержат члены разной размерности, например, силы и пары сил. Mathcad считает это ошибкой. Далее в программе размерности вписаны от руки просто для справки.

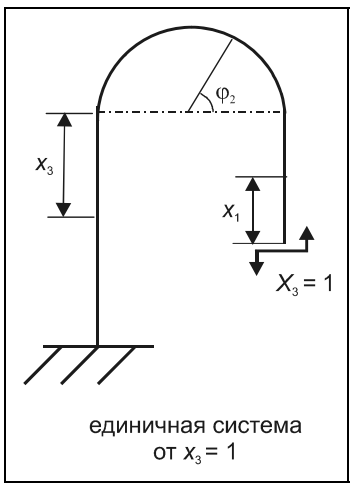
Кроме внешних нагрузок на перемещения системы влияют приращение температуры и монтажная ошибка при сборке. Заданы приращение температуры Δt и коэффициент линейного расширения α, монтажная ошибка при сборке



д)



е)



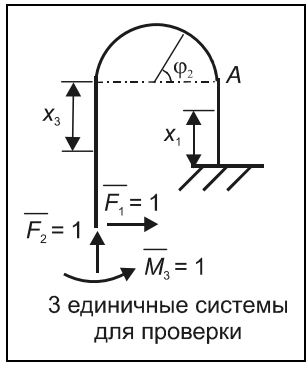
ж)

з)

Рис. 11.19. *Продолжение*

по направлениям действия X_1 и X_2. Определяются перемещения основной системы под действием приращения температуры ΔL_t.

Изгибающие моменты от действия внешних сил записаны в виде вектора (рис. 11.21). Изгибающие моменты от действия единичных сил $X_i = 1$ записаны в виде матрицы размерностью $m \times n$, где n — степень статической неопределимости, m — число участков основной системы.



и)

Рис. 11.19. *Окончание*

дано F := 10 кг q := 4 кг/см M_0 := 20 кгсм E := $2 \cdot 10^6$ кг/$см^2$

для расчета без нагрузок включите эти выражения F := 0 q := 0 M_0 := 0

J := 10 $см^4$ a := 10 см b := 20 см ρ_0 := 10 см
n := 3 степень статической неопределимости
m := 3 число участков

ρ - радиус кривизны (для прямых участков ρ=1)

k := 1 .. m ρ_k := 1 ρ_2 := ρ_0

Δt := 0 градусов монтажный зазор длины участков

α := $12.5 \cdot 10^{-6}$ температурное расширение

$$\Delta := \begin{pmatrix} 0.0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ см} \qquad L := \begin{pmatrix} b \\ \pi \\ a \end{pmatrix}$$

$$\Delta L_t := \begin{bmatrix} 2 \cdot \rho_0 \cdot \alpha \cdot \Delta t \\ (a - b) \cdot \alpha \cdot \Delta t \\ 0 \end{bmatrix}$$

по направлению X1
по направлению X2
по направлению X3

Рис. 11.20. Исходные данные для расчета плоской рамы

Выражения для расчета коэффициентов податливости и перемещений от внешних сил записаны в программе в соответствии с формулами (11.6) и (11.7). Рядом выведены результаты их расчета.

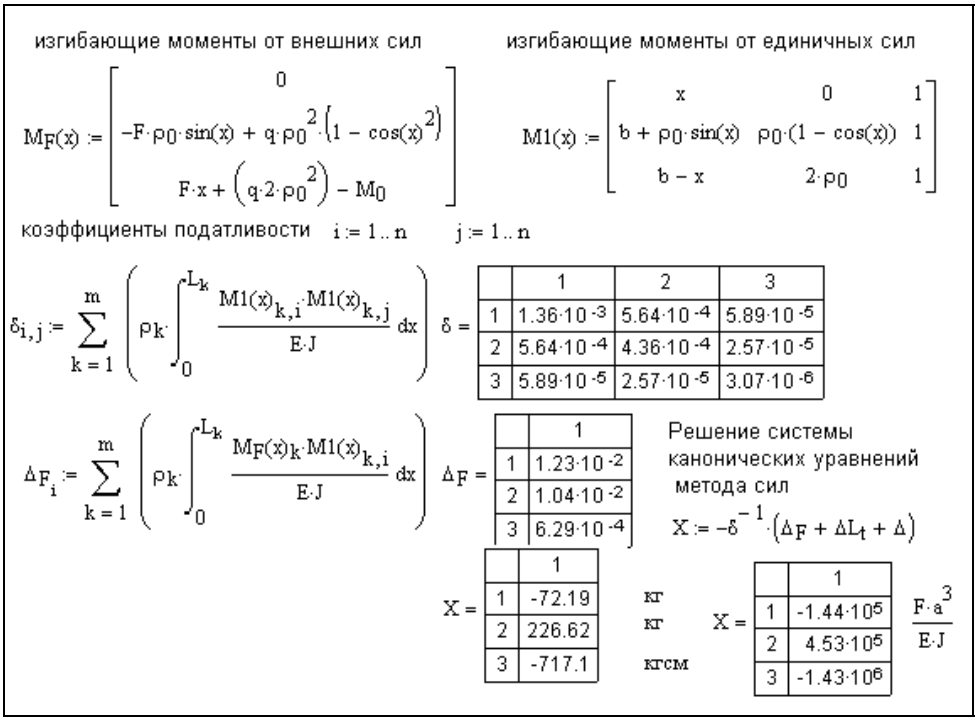


Рис. 11.21. Раскрытие статической неопределимости плоской рамы методом сил

Выражения интеграла Мора для прямолинейных и криволинейных брусьев различаются. Согласно формуле (11.1) для прямолинейных брусьев $ds = dx$, для криволинейных $ds = \rho d\varphi$.

Для единообразия выражений в Mathcad обозначим элемент длины любого бруса dx. Тогда для кривых брусьев $x = \varphi$ — угловая координата, а в интеграле Мора появляется дополнительный множитель ρ.

Формула получается общей, если для прямолинейных брусьев поставить $\rho = 1$.

В нашей задаче вектор значений ρ задается в исходных данных (рис. 11.20) и входит множителем в выражения для перемещений (рис. 11.21).

Система канонических уравнений метода сил решается путем обращения матрицы коэффициентов податливости δ.

$$X = \delta^{-1}\Delta, \text{ где } \Delta = \Delta_F + \Delta L_t + \Delta_{\text{монт}}.$$

Результаты расчета неизвестных сил выведены в численном виде и в виде коэффициентов при буквенном выражении. В данном случае $\frac{Fa^3}{EJ}$.

На рис. 11.22 показано определение перемещения заданной точки A (рис. 11.19, *а*, *в*) эквивалентной системы. Изгибающие моменты от единичного момента (для определения угла поворота) определяются по схеме рис. 11.19, *з*. Изгибающие моменты для эквивалентной системы определяются по формуле (11.8) и в виде функции пользователя подставляются в интеграл Мора.

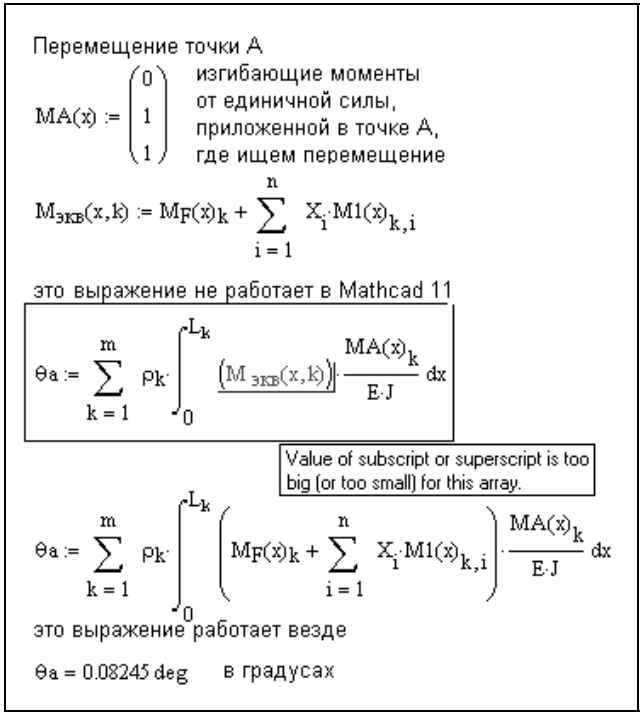


Рис. 11.22. Определение перемещения плоской статически неопределимой рамы

Предупреждение

В версии Mathcad 11 выражение интеграла Мора с $M_{экв}$, записанным как функция пользователя, не идет (выдает ошибку). Необходимо скопировать развернутое выражение $M_{экв}$ и подставить его под интеграл вместо $M_{экв}(x,k)$. В предыдущей версии Mathcad 2001i выражение проходит нормально.

Числовой результат для угла поворота выводится в радианах. Чтобы перевести его в градусы, надо вписать deg в поле ввода размерности справа от числового результата.

Для проверки правильности нахождения неизвестных сил определяется перемещение эквивалентной системы, взятой при другом раскреплении (была заделка слева, теперь заделка справа). Саму эквивалентную систему можно не рисовать. Внутренние усилия в любой эквивалентной системе должны быть одинаковы (такие же, как в заданной системе). Они уже найдены (рис. 11.22).

Нужно нарисовать единичную систему при новом раскреплении и определить усилия от единичной силы. На рис. 11.19 нарисованы три единичные силы для определения трех перемещений. Изгибающие моменты от каждой единичной силы объединены в одну матрицу $MB(x)$ (рис. 11.23), что позволяет в одном математическом выражении определить сразу три перемещения. Критерием правильности решения является равенство нулю всех перемещений по направлениям отброшенных связей.

При действии только внешних сил этот критерий справедлив всегда, при любой геометрии системы и любых сочетаниях нагрузок.

При воздействии перепада температуры и монтажных погрешностей указанный критерий выполняется не всегда, что связано, по-видимому, с появлением неопределенных угловых смещений, сопровождающих линейные смещения в местах отброшенных связей. Сложности, сопутствующие проверке в этих случаях, выходят за рамки курса сопротивления материалов.

Рекомендуем при проверке решения положить $\Delta t = 0$ и $\Delta_{монт} = 0$.

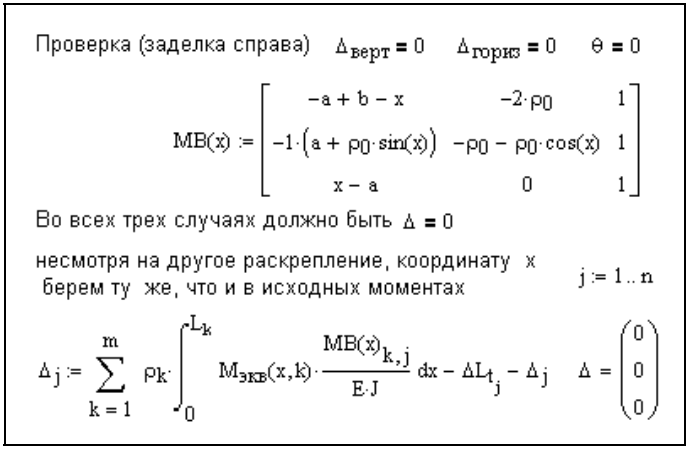


Рис. 11.23. Проверка правильности решения задачи

Для анализа результатов расчета рекомендуем исходные данные задать глобально в конце программы, там же вывести результаты расчета и, меняя исходные данные, наблюдать результаты расчета (рис. 11.24).

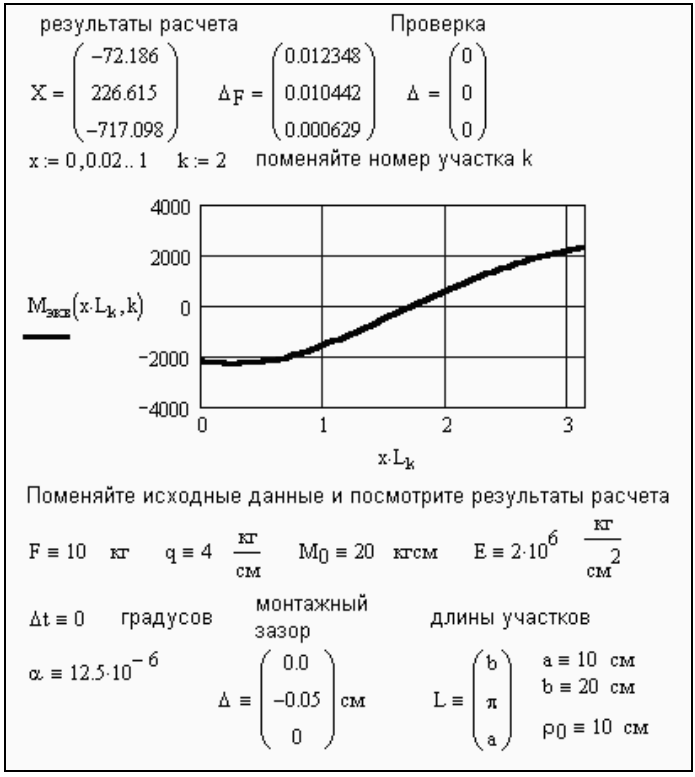


Рис. 11.24. Вывод результатов расчета

11.4.2. Расчет пространственной статически неопределимой рамы

Для заданной пять раз статически неопределимой пространственной рамы требуется раскрыть статическую неопределимость и сделать проверку правильности решения, выбрать опасное сечение и определить диаметр стержней рамы из условия прочности.

Пространственная рама имеет 4 взаимно перпендикулярных участка. Опорами рамы являются слева — заделка, справа — сферическая шарнирная опора, внизу — ось вращения вокруг горизонтальной оси, допускающая горизонтальное перемещение (рис. 11.25, *а*).

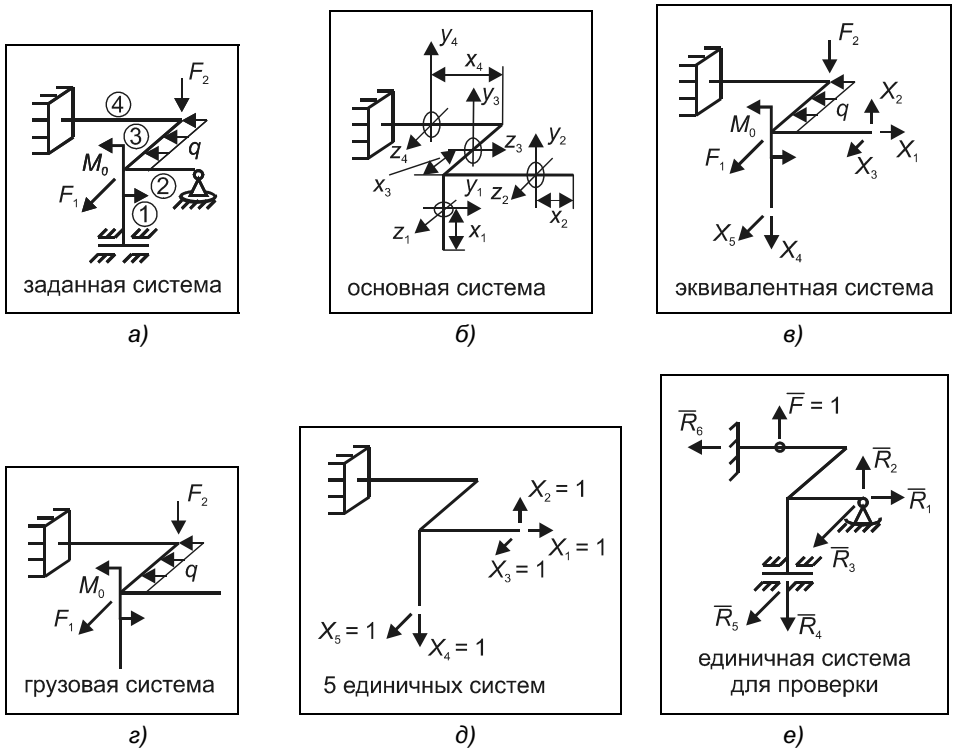


Рис. 11.25. Расчетные схемы для пространственной стержневой системы

В качестве основной системы выбираем раму с заделкой слева. Отбрасываем шарнирные опоры (рис. 11.25, *б*). На этом же рисунке выбраны произвольные сечения на каждом участке и показаны оси координат. Ось x на всех участках направлена вдоль оси стержня.

В каждом выбранном сечении показана первая четверть. Чтобы не запутаться со знаками, изгибающие моменты, вызывающие растяжение в первой четверти сечений (где сходятся положительные направления осей), считаем положительными.

Действие отброшенных связей заменяем неизвестными силами. Эквивалентная система, нагруженная всеми внешними силами и реакциями отброшенных связей, показана на рис. 11.25, *в*.

Для определения перемещений используются грузовая система, нагруженная всеми внешними силами (рис. 11.25, *г*), и 5 единичных систем (рис. 11.25, *д*), каждая из которых нагружена одной-единственной силой $X_i = 1$.

Исходные данные для расчета показаны на рис. 11.26. Кроме внешних нагрузок, задано повышение температуры $\Delta t = 50$ градусов.

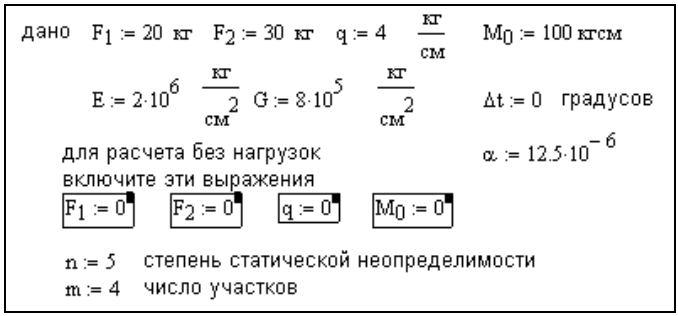


Рис. 11.26. Исходные данные для расчета пространственной стержневой системы

Рама представляет собой стальной стержень круглого поперечного сечения. Для проведения расчетов в качестве первого приближения задан диаметр стержня $d = 1$ см.

В конце расчета значение диаметра определяется из условия прочности.

Кроме внешних нагрузок и повышения температуры на напряжения в стержнях влияет и монтажная ошибка при сборке рамы $\Delta_{монт}$. Величину этой монтажной ошибки можно задать по каждому направлению отброшенной связи (рис. 11.27).

На этом же рисунке определены геометрические характеристики поперечных сечений на каждом участке рамы. Характеристики эти могут быть различными для разных участков, в том числе и переменными (в виде функции от x).

Обратите внимание, что модуль Юнга E задан в виде вектора из трех значений G, E, E. Сделано это для единообразия выражений интеграла Мора при кручении и при изгибе. При кручении (вокруг оси x) в знаменателе формулы стоит модуль сдвига G, при изгибе — модуль Юнга E.

Рис. 11.27. Геометрические характеристики сечений

На рис. 11.28 приведены внутренние усилия от внешних сил $M_F(x)$ и усилия от каждой из пяти единичных сил $M_i(x)$ в виде матриц. Первые столбцы этих матриц представляют собой крутящие моменты (вокруг оси x), вторые столбцы — изгибающие моменты вокруг оси y и третьи столбцы — изгибающие моменты вокруг оси z.

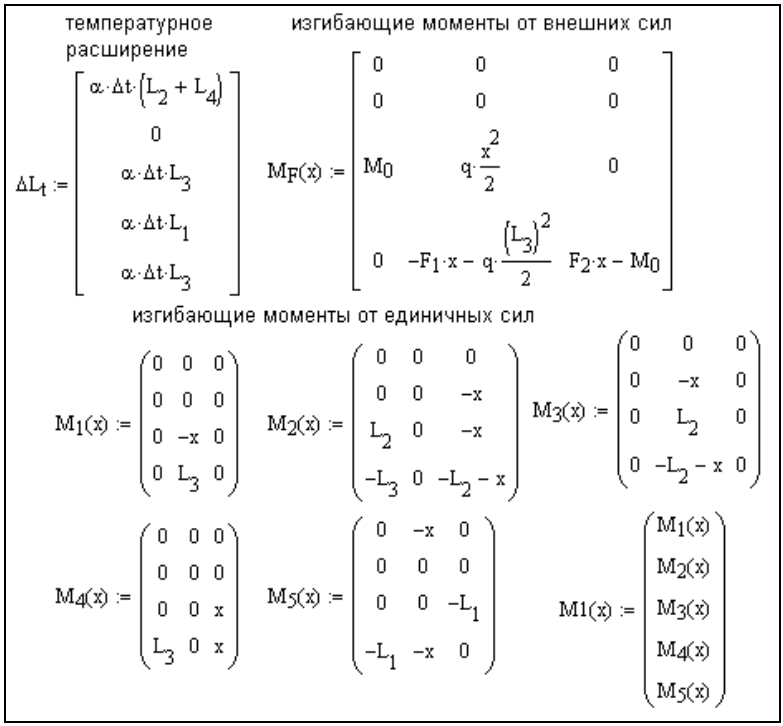


Рис. 11.28. Моменты от внешних и единичных сил

Продольными усилиями в расчетах пренебрегаем. Решение этой задачи с учетом продольных усилий показало, что перемещения от продольных усилий примерно в тысячу раз меньше, чем от изгибающих или крутящих моментов. К тому же при учете продольных усилий каждый интеграл Мора приходится записывать в виде четырех слагаемых, и задача теряет свою краткость и элегантность.

Для универсальности формул и краткости записи алгоритма решения задачи моменты от всех пяти единичных сил $M_i(x)$ объединены в вектор $M1(x)$, представляющий собой аналог трехмерного массива. Каждый член этого вектора является матрицей.

На том же рис. 11.28 вверху показаны перемещения точек приложения реакций отброшенных связей в направлении этих реакций при нагревании рамы на Δt градусов.

На рис. 11.29 приведены общие формулы для определения коэффициентов податливости $\delta_{i,j}$ и перемещений от внешних сил Δ_{Fi}. Каждое выражение представляет собой сумму из 12 интегралов (по четырем участкам и по трем усилиям M_x, M_y, M_z).

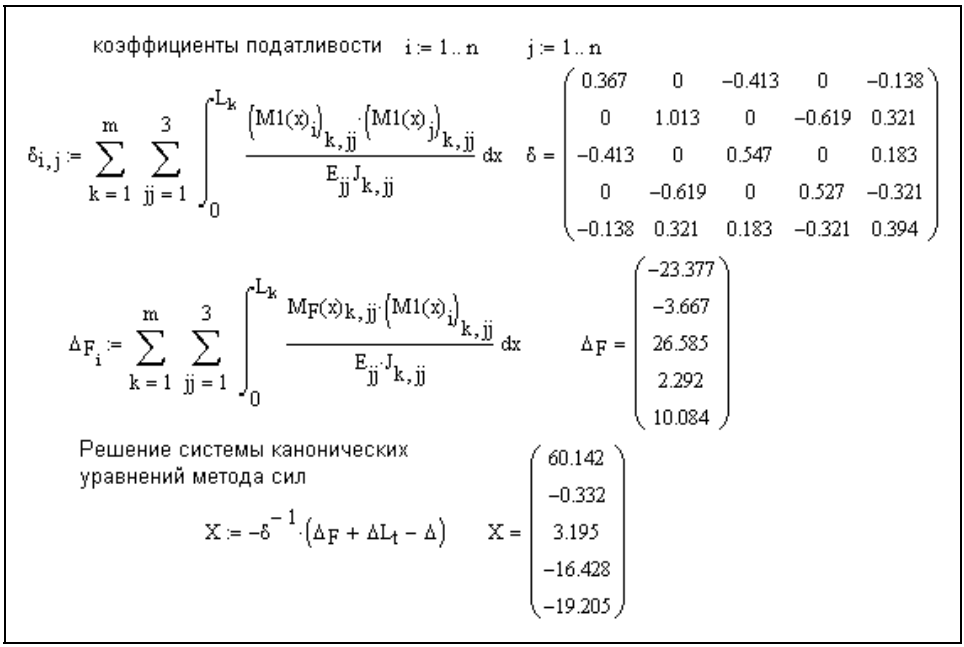


Рис. 11.29. Определение неизвестных реакций

Там же приведено решение системы канонических уравнений в матричном виде $X = -\delta^{-1}\Delta$, где $\Delta = \Delta_F + \Delta_t + \Delta_{монт}$.

Для проверки правильности решения выбираем другую основную систему — убираем заделку слева. Но в заделке 6 связей, а отбросить надо только 5 связей, поэтому оставляем одну (любую) из этих связей (см. рис. 11.25, *е*).

Проверка состоит в определении перемещений Δ отброшенных связей. По всем этим направлениям должно быть $\Delta = 0$.

В качестве усилий от внешних сил используем моменты для эквивалентной системы, представленные на рис. 11.31, как сумма усилий от внешних сил и

от уже найденных реакций отброшенных связей. При использовании Mathcad 11 вместо $M_{экв}(x,k,j)$ под интеграл нужно подставить развернутое выражение эквивалентного момента.

Чтобы определить усилия от единичной силы, надо вначале определить опорные реакции в новой единичной системе (см. рис. 11.25, *е*). Они определяются с помощью вычислительного блока `given-find`, в который поставлены 6 уравнений равновесия единичной системы (рис. 11.30). С учетом найденных реакций записаны усилия от единичной силы $M_A(x)$.

Рис. 11.30. Определение опорных реакций при новом закреплении системы

Далее с помощью интеграла Мора определяется искомое перемещение Δ_A (рис. 11.31).

Как и в плоской задаче, при проверке рекомендуется положить равными нулю перемещения от температуры и от монтажных неточностей. При правильно записанных моментах от сил проверка всегда дает $\Delta_A = 0$.

Рис. 11.31. Проверка правильности решения задачи

Для расчета рамы на прочность далее построены эпюры крутящих и изгибающих моментов в двух плоскостях (рис. 11.32) на одном из участков стержневой системы. Поменяйте номер участка и посмотрите вид эпюр внутренних усилий на различных участках.

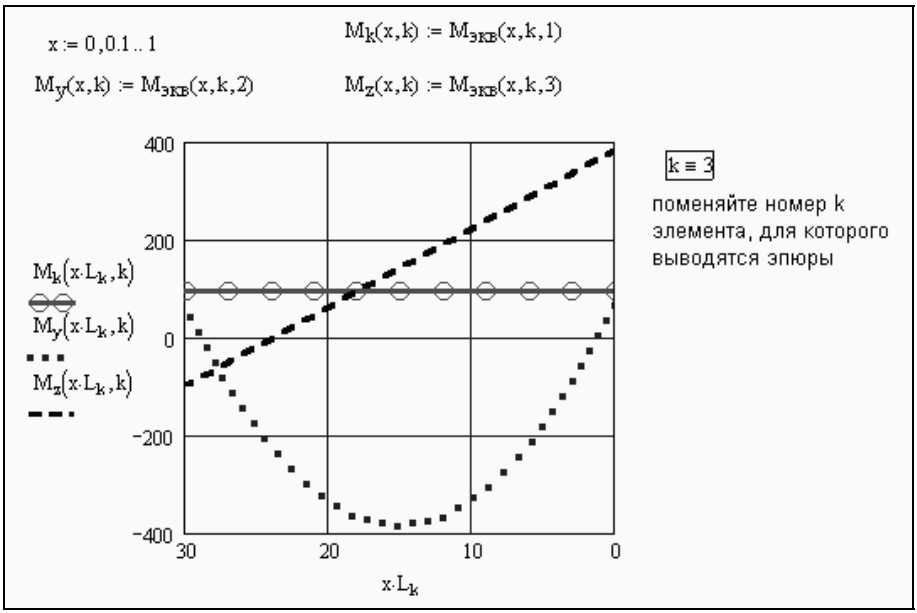


Рис. 11.32. Эпюры моментов для участка k

Далее для подстановки в условие прочности определяются расчетные моменты в соответствии с третьей гипотезой прочности $M_{\text{расч}} = \sqrt{M_{\text{к}}^2 + M_y^2 + M_z^2}$ (рис. 11.33) строятся графики $M_{\text{расч}}(x)$ для всех четырех участков.

С помощью функции `maximize` определяется максимальное значение $M_{\text{расч}}(x)$, которое подставляется в условие прочности (рис. 11.34).

При нахождении максимума сложной функции, имеющей несколько локальных экстремумов, необходимо задавать условие (границы диапазона, в котором находится глобальный экстремум, хорошо видимый на графике).

Из условия прочности с помощью функции `root` определяется диаметр стержней рамы.

Для удобства анализа результатов расчета рекомендуется исходные данные задать глобально в конце программы. Там же вывести результаты расчета.

Меняя исходные данные, можно сразу наблюдать изменение результатов расчета (рис. 11.35).

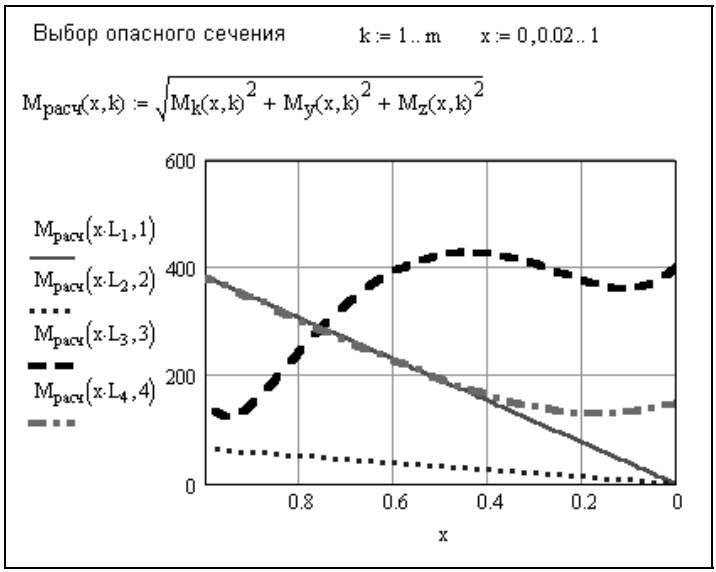


Рис. 11.33. Изменение расчетных моментов по длине всех участков

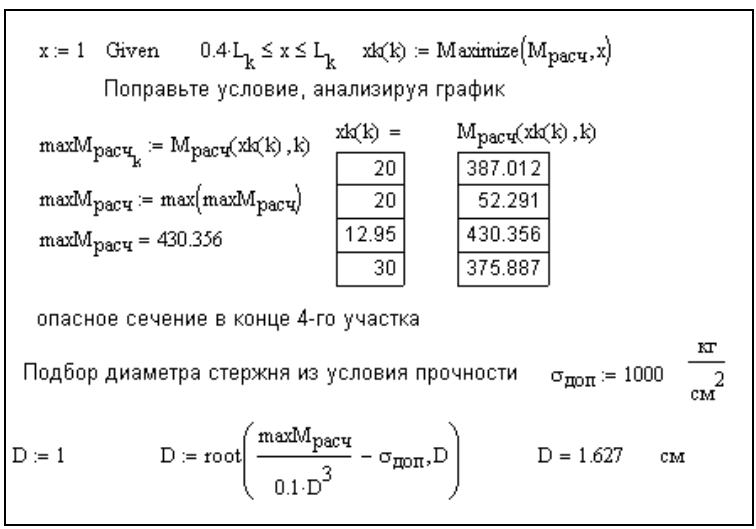


Рис. 11.34. Определение максимального расчетного момента и диаметра стержней

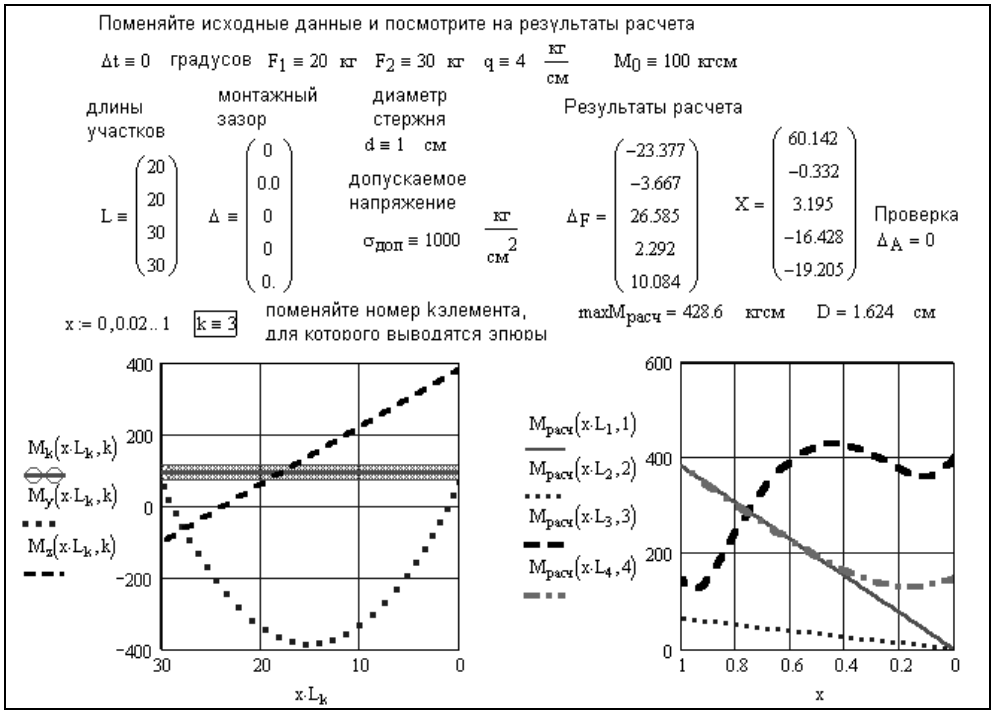


Рис. 11.35. Исходные данные заданы глобально

11.4.3. Определение перемещений систем из нескольких элементов

Энергетический метод позволяет определить перемещения любых упругих систем. Для систем, собранных из большого количества элементов, сохраняется тот же порядок расчета, но общий объем расчетов многократно увеличивается.

Порядок расчета перемещений — обычный для энергетического метода:

1. Нарисовать грузовую и единичную системы. Единичную систему нагрузить единичной силой в точке, где ищем перемещение в направлении перемещения.
2. Определить внутренние усилия в элементах системы для грузового и единичного состояния.
3. Определить перемещение с помощью интеграла Мора.

Для определения внутренних усилий в элементах системы ее надо разобрать и рассмотреть силы, действующие на каждый элемент в отдельности.

В качестве примера рассмотрим перемещение плоской системы, состоящей из балок, связанных между собой стержнями и пружинами.

Вклад в общее перемещение изогнутых балок определяется по формуле:

$$\Delta = \sum \int_L \frac{M_F \bar{M}}{EJ} dx .$$

Вклад в перемещение сжатых или растянутых стержней

$$\Delta = \sum \int_L \frac{N_F \bar{N}}{EA} dx .$$

В стержнях, соединяющих балки, продольное усилие постоянное $N = Const$ и может быть вынесено из под знака интеграла

$$\Delta = \sum \frac{N_F \bar{N}}{EA} L = \sum \frac{N_F \bar{N}}{K_{\text{ст}}},$$

где $K_{\text{ст}} = \dfrac{EA}{L}$ — жесткость стержня.

По аналогии для пружин, нагруженных осевой нагрузкой

$$\Delta = \frac{N_F \bar{N}}{K_{\text{пр}}} .$$

Жесткость пружины $K_{\text{пр}}$ выбирается по справочникам при подборе пружины или рассчитывается.

Примечание

В роли пружины может выступать "черный ящик", сложная конструкция, жесткость которой сложно рассчитать, но легко определить опытным путем. Достаточно приложить известную нагрузку, чаще всего вес груза, и измерить перемещение по направлению действия нагрузки.

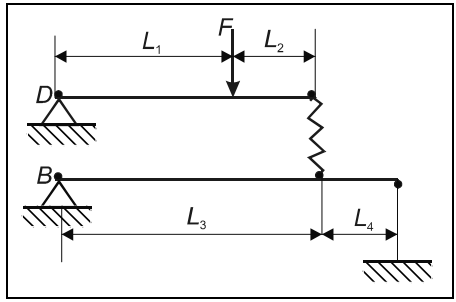
Формула для определения перемещения сложной системы принимает вид:

$$\Delta = \sum \frac{N_F \bar{N}}{K_{\text{ст}}} + \frac{N_F \bar{N}}{K_{\text{пр}}} + \sum \int_L \frac{M_F \bar{M}}{EJ} dx . \qquad (11.10)$$

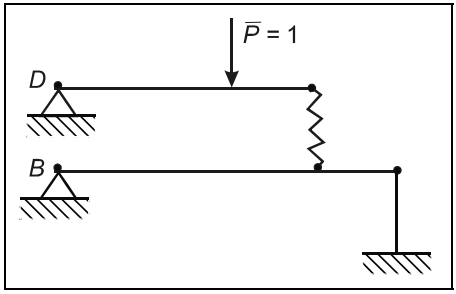
Определим перемещение системы, состоящей из двух балок, связанных пружиной и стержнем (рис. 11.36, *а*).

Исходные данные для расчета системы показаны на рис. 11.37. Все элементы системы стальные. Для балок заданы длины участков L и размеры прямоугольного поперечного сечения b и h. На том же рисунке определены

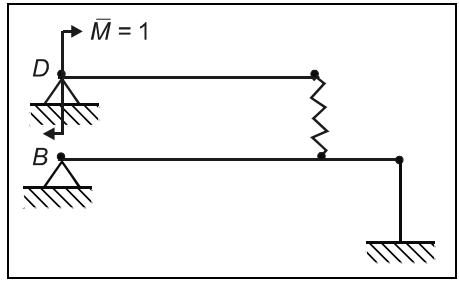
момент инерции J и момент сопротивления W сечения балок. Для стержня задана длина $L_{ст}$ и размер стороны квадратного поперечного сечения a. Для пружины задана ее жесткость $K_{пр}$.



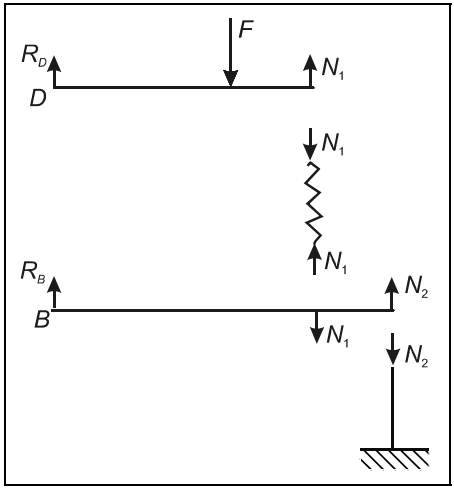
а)



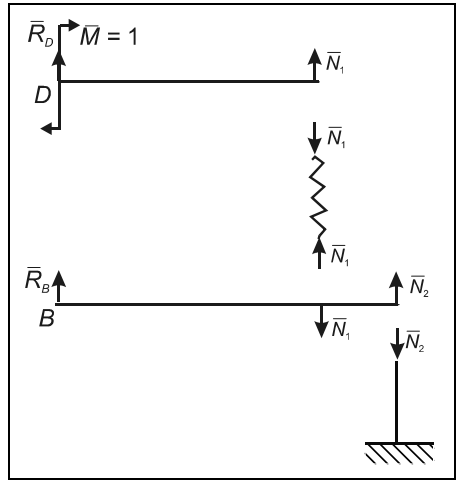
б)



в)



г)



д)

Рис. 11.36. Расчетные схемы для определения перемещений системы из нескольких элементов

Рис. 11.37. Исходные данные для расчета перемещений системы из нескольких элементов

В примере определяются два перемещения системы: линейное перемещение точки приложения силы F и угловое перемещение на опоре D.

Для каждого перемещения нарисована своя единичная система (рис. 11.36, *б* и *в*).

Для определения внутренних усилий разберем на отдельные элементы каждую из нарисованных систем (грузовую и две единичные) и из уравнений равновесия каждого элемента определим внутренние усилия. Деталировка грузовой и второй единичной системы показана на рис. 11.36, *г* и *д*. Для первой единичной системы (рис. 11.36, *б*) усилия пропорциональны усилиям в грузовой системе.

Усилия в стержне и пружине для определения перемещения точки приложения силы найдены на рис. 11.38. Опорные реакции и изгибающие моменты в балках распределены на рис. 11.39.

Подставив найденные усилия в формулу (11.10), находим перемещение Δ точки приложения силы.

На рис. 11.40 показано определение угла поворота сечения D. Для этого определены внутренние усилия для второй единичной системы (см. рис. 11.36, *б*).

Определение усилий в пружине N1 и в стержне N2
из уравнений равновесия

в грузовом состоянии

$$N1 := \frac{F \cdot L_1}{L_1 + L_2} \qquad N2 := \frac{N1 \cdot L_3}{L_3 + L_4} \qquad N1 = 0.667\,F \qquad N2 = 0.5\,F$$

в единичном состоянии

$$N11 := \frac{L_1}{L_1 + L_2} \qquad N21 := \frac{N11 \cdot L_3}{L_3 + L_4} \qquad N11 = 0.667 \qquad N21 = 0.5$$

Рис. 11.38. Определение усилий в элементах системы

Определение опорных реакций балок

в грузовом состоянии

$R_D := F - N1 \quad R_B := N1 - N2 \quad R_D = 0.333\,F \quad R_B = 0.167\,F$

в единичном состоянии

$R1_D := 1 - N11 \quad R1_B := N11 - N21 \quad R1_D = 0.333 \quad R1_B = 0.167$

Изгибающие моменты на 4-х участках 2-х балок

от внешних сил

$$M(x) := \begin{pmatrix} R_D \cdot x \\ N1 \cdot x \\ R_B \cdot x \\ N2 \cdot x \end{pmatrix}$$

от единичной силы

$$M1(x) := \begin{pmatrix} R1_D \cdot x \\ N11 \cdot x \\ R1_B \cdot x \\ N21 \cdot x \end{pmatrix}$$

статическое перемещение точки приложения силы

$$\Delta := \frac{N1 \cdot N11}{K_{пр}} + \frac{N2 \cdot N21}{E \cdot A} \cdot L_{ст} + \sum_{k=1}^{4} \int_0^{L_k} \frac{M(x) \cdot M1(x)}{E \cdot J}\,dx \qquad \boxed{\Delta = 0.238\ мм}$$

Рис. 11.39. Определение усилий в элементах системы (окончание)

Надо сказать, что расчеты в этом примере простые и использование Mathcad необязательно. Универсальную программу для расчета сложных систем составить невозможно ввиду многообразия вариантов набора элементов. Расчеты простые, но их очень много. Таким же образом, разбивая систему на элементы, можно решить и статически неопределимую систему, но объем расчетов при этом значительно возрастет.

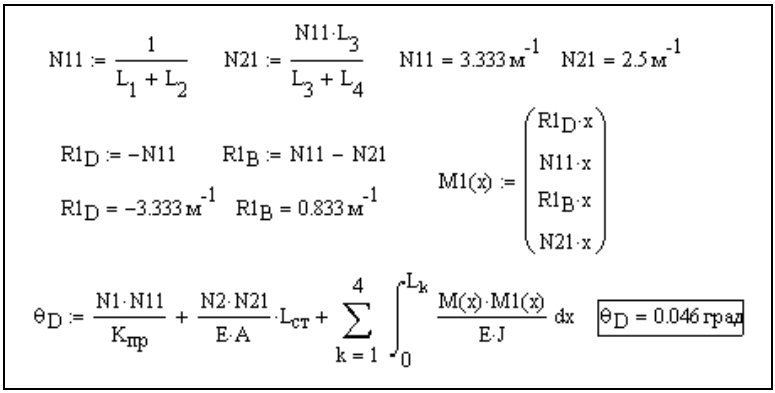


Рис. 11.40. Определение угла поворота сечения балки на опоре D

ГЛАВА 12

Устойчивость сжатых стержней

Под *механической устойчивостью* будем понимать способность тела сохранять заданную форму равновесия.

Потеря механической устойчивости — резкое изменение вида деформации. Приведем несколько примеров потери устойчивости.

На рис. 12.1, *а* показана потеря устойчивости цилиндрической оболочки при сжатии. В момент потери устойчивости сжатие оболочки сменяется ее изгибом. Правда, на практике чаще имеет место чашечная потеря устойчивости оболочек. Вспомните, как выглядит банка из-под пива, на которую наступили ногой.

На рис. 12.1, *б* показан изгиб швеллера. При достижении критического значения изгибающей силы балка скручивается.

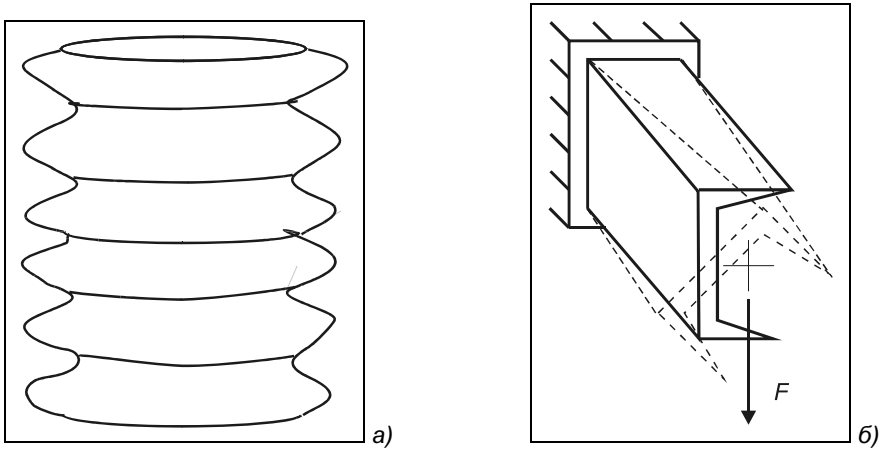


Рис. 12.1. Примеры потери устойчивости конструкций

На рис. 12.2 показано сжатие стержня. При некотором критическом значении сжимающей силы происходит изгиб стержня.

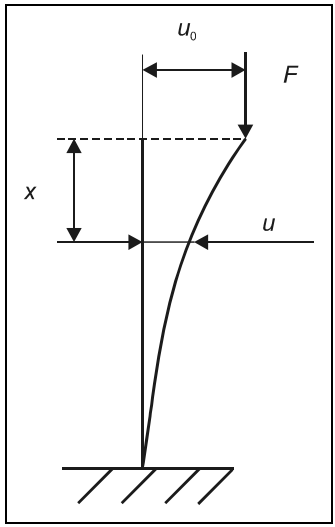


Рис. 12.2. Потеря устойчивости сжатого стержня

Критической называется минимальная нагрузка, при которой система теряет устойчивость.

Далее в этой главе рассмотрим только устойчивость сжатых стержней.

Нагрузим стержень сжимающей силой (рис. 12.2) меньше критической $F < F_{кр}$. Выведем стержень из состояния равновесия (подтолкнем в бок рукой). Уберем руку, стержень возвратится в состояние равновесия (изгиб исчезнет).

При изгибе стержня возникает изгибающий момент $M_{внеш} = F(u_0 - u)$. Ему противодействует момент внутренних сил $M_{упр} = \int_A \sigma \cdot y \cdot dA$.

Если $M_{изг} = M_{упр}$, то стержень находится в равновесии.

Если $M_{изг} > M_{упр}$, произойдет потеря устойчивости.

Если $M_{изг} < M_{упр}$, выведенный из равновесия стержень возвращается в исходное прямолинейное состояние.

Поставим задачу определить критическую силу, при которой стержень теряет устойчивость.

12.1. Определение критической силы. Формула Эйлера

Рассмотрим стержень на двух шарнирных опорах, нагруженный сжимающей силой (рис. 12.3). При увеличении нагрузки в какой-то момент стержень теряет устойчивость и изгибается в направлении наименьшей жесткости $J_{\min}$.

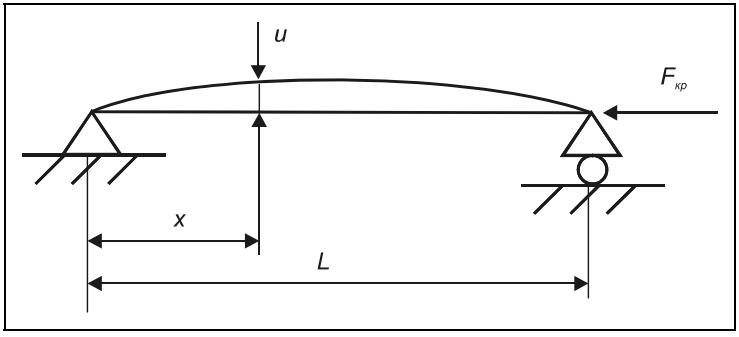


Рис. 12.3. Схема Эйлера потери устойчивости сжатого стержня

Изгибающий момент в сечениях стержня связан с кривизной стержня выражением (7.4)

$$\frac{1}{\rho}=\frac{u''}{\left(1+\left(u'\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{M}{EJ_{\min}}. \qquad (12.1)$$

Пренебрегая первой производной от прогиба (углом поворота) по сравнению с единицей, получаем

$$EJ_{\min}u''=M. \qquad (12.2)$$

При $F=F_{\text{кр}}$ изгибающий момент в произвольном сечении стержня

$$M_z=-F_{\text{кр}}u.$$

Знак минус в выражении изгибающего момента поставлен для согласования знаков прогиба и его второй производной. На рис. 12.3 прогиб балки u положительный, а вторая производная отрицательная, т. к. функция имеет максимум. Если прогиб будет отрицательным, то функция будет иметь минимум, т. е. вторая производная положительна.

Уравнение изогнутой оси стержня принимает вид

$$EJ_{\min}u''=M=-F_{\text{кр}}u.$$

Приведем это уравнение к стандартному виду, разделив на $EJ_{\min}$

$$u'' + \frac{F_{кр}}{EJ_{\min}} u = 0 .$$

Введем $k = \sqrt{\frac{F_{кр}}{EJ_{\min}}}$, уравнение примет вид

$$u'' + k^2 u = 0 . \qquad (12.3)$$

Решение уравнения (12.3) ищем в виде

$$u = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx) .$$

Произвольные постоянные интегрирования находим из граничных условий

При $x = 0$ $\quad u_L = 0$, следовательно $C_1 = 0$.

При $x = L$ $\quad u_L = 0$. Тогда либо $C_2 = 0$, либо $\sin(kL) = 0$.

Постоянная C_2 не может быть равна нулю, т. к. в этом случае невозможна потеря устойчивости. Следовательно, $\sin(kL) = 0$. Тогда $kL = \pi n$ и

$$k = \frac{\pi n}{L} ,$$

где n — любое целое число. Но n не может быть равно нулю по вышеуказанной причине. При $n = 1$ критическая сила минимальна и реально имеет место. На практике могут быть реализованы и другие значения $n > 1$, об этом будет сказано далее.

Приравняем ранее принятое значение k и только что найденное

$$k = \sqrt{\frac{F_{кр}}{EJ_{\min}}} = \frac{\pi n}{L} .$$

Откуда

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{L^2} n^2 . \qquad (12.4)$$

Минимальному значению критической силы соответствует $n = 1$. Тогда формула Эйлера для определения критической силы принимает вид

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{L^2} . \qquad (12.5)$$

Рассмотренную схему нагружения стержня будем называть схемой Эйлера.

Изогнутая ось стержня в схеме Эйлера представляет собой полволны синусоиды $u = C_2 \sin(kx)$. В этом выражении коэффициент C_2 не может быть определен из граничных условий. Поэтому максимальный прогиб стержня неопределенный.

Считается, что при достижении критической силы прогиб стержня возрастает до бесконечности, т. е. стержень ломается.

В действительности этого не происходит. Причина в использовании приближенного выражения связи кривизны и прогиба (12.2). При использовании точного выражения (12.1) получается большое, но конечное значение прогиба.

12.2. Определение критической силы при других видах закрепления

Формула Эйлера может быть использована для определения критической силы и при других видах закрепления.

На рис. 12.4 показано несколько различных способов закрепления сжатого стержня. Для стержня, защемленного одним концом (рис. 12.4, *б*), изогнутая ось в момент потери устойчивости представляет собой четверть волны синусоиды.

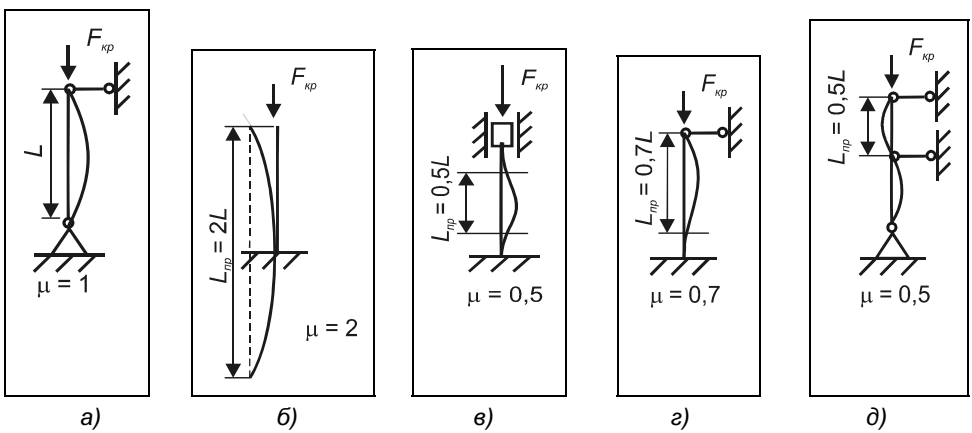


Рис. 12.4. Приведенная длина стержня при различных способах его закрепления

Критическую силу для этого (и всех последующих случаев) найдем путем сравнения изогнутой оси стержня со схемой Эйлера (рис. 12.4, *а*).

Формула Эйлера выведена для случая, когда изогнутая ось стержня представляет собой полволны синусоиды. В нашем случае 1/4 волны. Введем по-

нятие приведенной (к схеме Эйлера) длины стержня. Достроим изогнутую ось стержня так, чтобы на ней уложилось полволны синусоиды. Длина достроенного стержня и есть приведенная длина $L_{\text{пр}} = \mu L$.

Определим критическую силу по формуле Эйлера, используя в качестве длины стержня его приведенную длину

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{L_{\text{пр}}} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(\mu L)^2}, \qquad (12.6)$$

где μ — коэффициент закрепления стержня, показывающий, во сколько раз надо увеличить длину стержня, чтобы на нем уложилось полволны синусоиды.

На рис. 12.4, *в* и *г* отмечены полволны синусоиды на изогнутой оси стержня и записан коэффициент закрепления $\mu = 0,5$ и $\mu = 0,7$.

Кстати, коэффициент n в выражении (12.4) соответствует числу полуволн на изогнутой оси стержня.

Если посередине стержня добавить связь, удерживающую стержень в исходном положении, то при потере устойчивости изогнутая ось стержня будет содержать две полуволны синусоиды, соответственно критическая сила возрастет в 4 раза, в то время как реакция добавленной связи практически равна нулю. Схема Эйлера с добавленной связью посередине показана на рис. 12.4, *д*. Эта схема соответствует $n = 2$ в выражении (12.4).

Чтобы изогнутая ось стержня содержала три полуволны синусоиды, надо добавить две связи. Такая схема будет соответствовать $n = 3$ в выражении (12.4). При этом критическая сила возрастет в 9 раз.

12.3. Критические напряжения

Поскольку мы рассматриваем устойчивость стержней при сжатии, то напряжения в момент потери устойчивости определяем по формуле сжатия $\sigma = \frac{F}{A}$.

В критическом состоянии $\sigma_{\text{кр}} = \frac{F_{\text{кр}}}{\text{A}} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(\mu L)^2 A}$.

Введем понятие гибкости стержня. Обозначим $\lambda = \frac{\mu L}{i_{\min}}$, где $i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}}$ — минимальный радиус инерции поперечного сечения стержня, и назовем ко-

эффициент λ гибкостью стержня. Тогда формула критического напряжения примет вид

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \qquad (12.7)$$

Итак, мы имеем две формулы Эйлера: формулу критической силы (12.6) и формулу критического напряжения (12.7).

Формулой Эйлера можно пользоваться только при упругой деформации, т. е. в том случае, если критическое напряжение меньше предела пропорциональности материала $\sigma_{кр} < \sigma_{пц}$.

В основе вывода формулы Эйлера лежит уравнение упругой линии стержня. Ограничивает применение формулы также присутствие в ней модуля Юнга (коэффициента пропорциональности в законе Гука).

Анализируя формулу (12.7), отметим, что с уменьшением гибкости критическое напряжение возрастает, а гибкость уменьшается с уменьшением длины стержня. Чем короче стержень, тем больше критическое напряжение, при котором он теряет устойчивость.

Потерю устойчивости стержней в условиях пластических деформаций изучали многие ученые. Были предложены различные формулы для расчета критических напряжений. Все они имеют ограниченное применение.

Наибольшее распространение получила эмпирическая формула Ясинского

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda + c\lambda^2, \qquad (12.8)$$

где a, b и c — эмпирические коэффициенты (для каждого материала свои), которые берутся по справочникам [12]. Например, для стали Ст3 $\sigma_{кр} = (310 - 1{,}14\lambda)$ МПа.

12.4. Расчет сжатых стержней на устойчивость

12.4.1. Условие устойчивости стержня

Рассмотрим диаграмму зависимости критического напряжения от гибкости стержня (рис. 12.5).

При большой гибкости (участок 1 на диаграмме, для сталей $\lambda > 100$) критическое напряжение меньше предела пропорциональности $\sigma_{кр} < \sigma_{пц}$ и определяется по формуле Эйлера (12.7). Для стальных стержней круглого сечения для этого участка отношение длины стержня к диаметру $L/d > 25$.

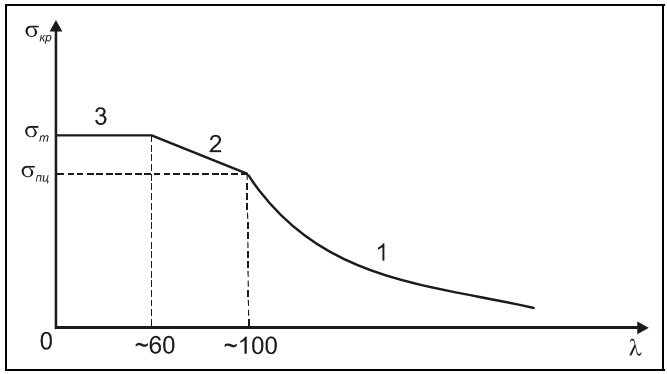


Рис. 12.5. Диаграмма зависимости критического напряжения от гибкости стержня

Условие устойчивости стержня на этом участке имеет вид

$$\sigma = \frac{F}{A} \le \left[\sigma_{\text{уст}}\right] = \frac{\sigma_{\text{кр.Эйлера}}}{n_{\text{уст}}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2 n_{\text{уст}}}, \qquad (12.9)$$

где $n_{\text{уст}}$ — коэффициент запаса устойчивости.

При средней гибкости (участок 2 на диаграмме) (для сталей $60 < \lambda < 100$) критическое напряжение лежит в диапазоне $\sigma_{\text{пц}} < \sigma_{\text{кр}} < \sigma_{\text{т}}$ и определяется по эмпирической формуле Ясинского. Для круглых стальных стержней на этом участке $15 < L/d < 25$.

Условие устойчивости стержня на этом участке имеет вид

$$\sigma = \frac{F}{A} \le \left[\sigma_{\text{уст}}\right] = \frac{\sigma_{\text{кр.Ясинского}}}{n_{\text{уст}}} = \frac{a - b\lambda + c\lambda^2}{n_{\text{уст}}}. \qquad (12.10)$$

При малой гибкости (участок 3 на диаграмме, $\lambda < 60$) критическое напряжение уже превышает предел текучести и, соответственно, наибольшую опасность представляет появление недопустимых пластических деформаций, а не потеря устойчивости.

В этой области расчет ведется не по критическому напряжению, а по пределу текучести. Для этого участка диаграммы отношение $L/d < 15$.

Условие устойчивости стержня на этом участке имеет вид

$$\sigma = \frac{F}{A} \le \left[\sigma_{\text{сж}}\right] = \frac{\sigma_{\text{т}}}{n_{\text{т}}}. \qquad (12.11)$$

При расчете стержня на устойчивость прежде всего надо определить его гибкость, чтобы выбрать одно из трех условий устойчивости.

Существует, однако, *объединенное условие прочности и устойчивости*

$$\sigma = \frac{F}{A} \le \left[\sigma_{уст}\right] = \varphi\left[\sigma_{сж}\right]. \qquad (12.12)$$

Здесь φ — коэффициент снижения допускаемых напряжений, определяемый по справочникам в зависимости от гибкости стержня λ.

Таблица коэффициентов $\varphi(\lambda)$ рассчитана по формулам Эйлера и Ясинского. Посмотрите на график $\varphi(\lambda)$, приведенный на рис. 12.7. Он очень похож на диаграмму критических напряжений (рис. 12.5) и также состоит из трех участков, соответствующих расчету на текучесть и на устойчивость по формулам Ясинского и Эйлера.

12.4.2. Рекомендации к расчету на устойчивость

1. Нерационально использовать длинные тонкие стержни с гибкостью $\lambda > 200$, т. к. $\varphi \to 0$ и допускаемая нагрузка на стержень очень мала.
2. Нерационально использовать для сжатых стержней высокопрочные стали, т. к. модуль Юнга E, входящий в формулу критической силы, почти не зависит от прочности стали.
3. Рационально использовать составные сечения, у которых осевые моменты инерции равны $J_{max} = J_{min}$.

   Для увеличения критической силы при той же площади сечения надо увеличить момент инерции сечения. С этой целью надо раздвинуть элементы сечения. Сечения открытого профиля плохо работают на устойчивость. Если в трубе сделать продольный разрез, то критическая сила при сжатии такой трубы уменьшится раз в 100.

Если размеры стержня известны и требуется определить критическую силу, то расчет весьма прост. Надо определить гибкость стержня, по гибкости выбрать нужную формулу (Эйлера или Ясинского) и по ней рассчитать критическую силу, или по гибкости найти коэффициент снижения допускаемых напряжений и по нему определить допускаемую силу.

Если размеры сечения не известны, то расчет значительно сложнее. Не зная размеров сечения, невозможно найти гибкость стержня. В этом случае расчет ведется итерационным методом.

В первом приближении задаются коэффициентом снижения допускаемого напряжения φ. Поскольку $0 < \varphi < 1$, лучше брать для первого приближения $\varphi 1 \approx 0{,}5$.

Зная коэффициент $\varphi 1$, из условия прочности определяется площадь поперечного сечения стержня $A = \dfrac{F}{\varphi 1 \left[\sigma_{уст}\right]}$ и размеры сечения.

Далее определяются момент инерции $J_{\min}$ и радиус инерции сечения $i_{\min} = \sqrt{\dfrac{J_{\min}}{A}}$.

Подсчитывается гибкость стержня $\lambda = \dfrac{\mu L}{i_{\min}}$.

По гибкости, из справочника определяется коэффициент снижения допускаемого напряжения $\varphi 2$ и сравнивается с $\varphi 1$, принятым в начале приближения.

Для второго приближения можно задаться коэффициентом $\varphi 1 = \varphi 2$, но в этом случае число итераций, необходимое для получения достоверного результата, довольно велико. Расчет сходится значительно быстрее, если для второго приближения взять $\varphi 1 = \dfrac{\varphi 1 + \varphi 2}{2}$. Для достижения погрешности в 1% достаточно трех-четырех итераций. Рассмотрим пример подбора размеров поперечного сечения стержня.

12.4.3. Пример расчета стержня на устойчивость

Для стержня круглого поперечного сечения длиной $L = 2$ м, нагруженного силой $F = 80$ кН (рис. 12.6), требуется определить диаметр стержня.

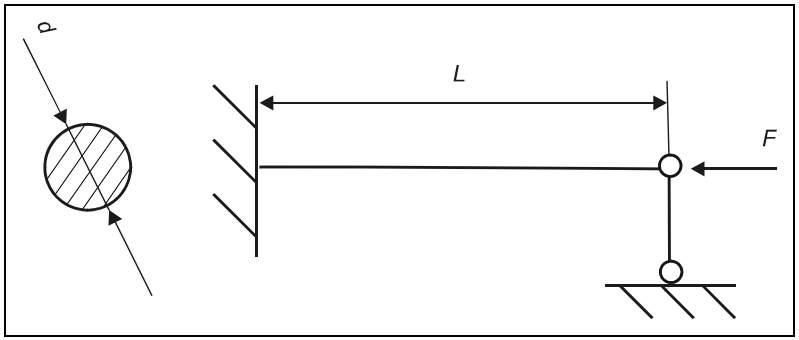


Рис. 12.6. Схема нагружения стержня

Исходные данные для расчета стержня показаны на рис. 12.7, внизу. В верхней части этого рисунка приведены справочные данные: зависимость коэффициента снижения допускаемого напряжения φ от гибкости стержня λ.

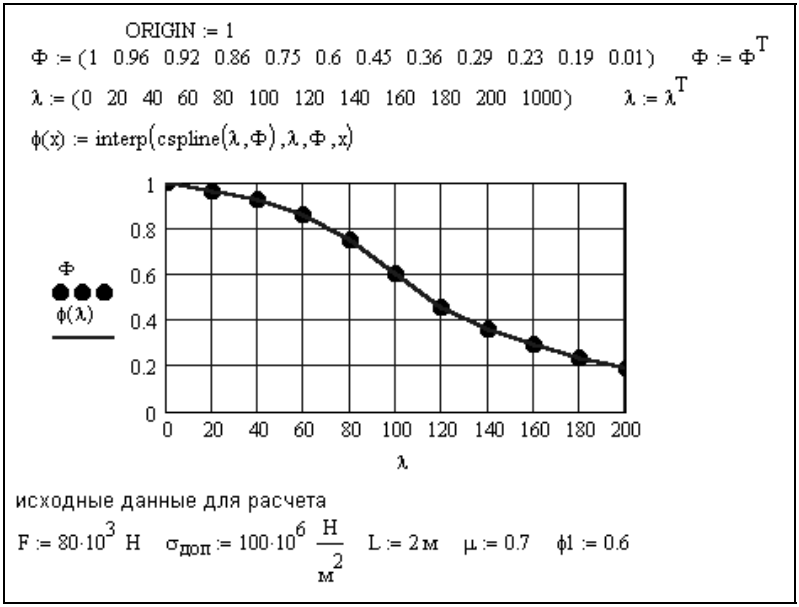


Рис. 12.7. Зависимость коэффициента снижения допускаемого напряжения φ от гибкости стержня λ

Для автоматизации расчета введена функция интерполяции и построен график зависимости φ от λ (рис. 12.7).

В справочниках приводятся значения коэффициента φ для $\lambda \le 200$. На всякий случай, в массивы данных введено $\varphi = 0,01$ для $\lambda = 1000$, т. к. в ходе итерационного процесса могут появляться значения $\lambda > 200$. На графике это значение не показано.

Для первой итерации взят совершенно неправдоподобный коэффициент $\varphi 1 = 0,9$, чтобы показать, что и в этом случае расчет сходится довольно быстро.

Поскольку расчет выполняется многократно, он оформлен в виде программы (рис. 12.8).

Хочется подчеркнуть примитивность средств программирования Mathcad. Простенькая программа занимает целую страницу, поскольку каждый оператор программы должен располагаться на отдельной строке. Второй столбец текста программы на рис. 12.8 представляет собой продолжение первого столбца.

Программа начинается с ввода значений коэффициента φ: в начале итерации $\varphi 1$, в конце итерации $\varphi 2$ и счетчик числа итераций j.

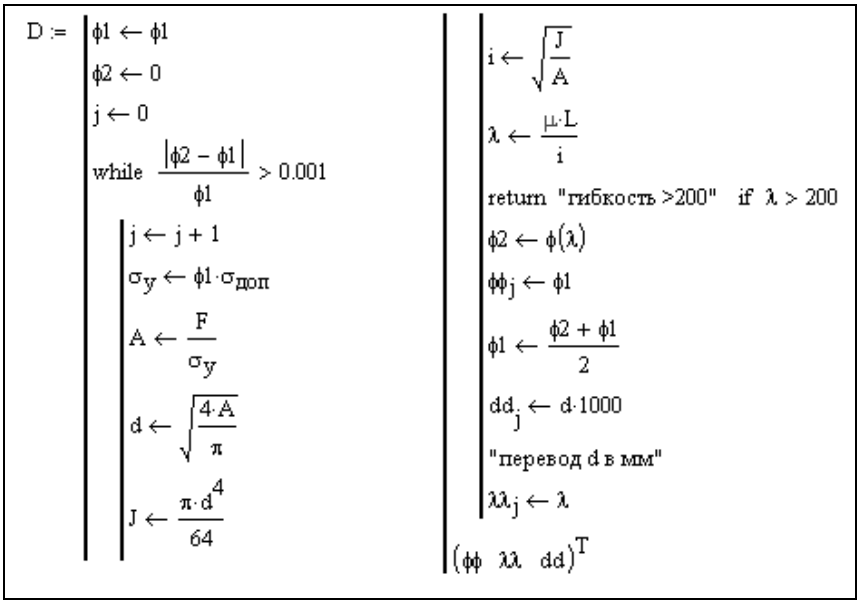


Рис. 12.8. Программа расчета диаметра сжатого стержня

Затем следует итерационный цикл, начинающийся оператором `while` — повторять цикл до выполнения заданного критерия (пока расхождение между $\varphi 1$ и $\varphi 2$ не станет меньше 0,1%).

Вся программа выделена длинной вертикальной чертой слева, итерационный цикл выделен второй вертикальной чертой.

Внутри цикла последовательно вычисляются допускаемые напряжения на устойчивость σ_y, площадь сечения A, диаметр стержня d, момент инерции J, радиус инерции i и гибкость стержня λ.

Предусмотрен выход из программы с помощью оператора `return`, если $\lambda > 200$. При выполнении этого условия после записи $D =$ появляется запись "гибкость" > 200. Если удалить этот оператор, расчет будет продолжен и для больших значений гибкости.

На каждом шаге итерации определяется новое значение коэффициента φ с помощью функции интерполяции $\varphi(\lambda)$, показанной на рис. 12.7.

Для начала следующей итерации вычисляется усредненное новое значение $\varphi 1$. Далее следует возврат к началу цикла итерации, но перед этим организуется вывод результатов расчета каждой итерации.

Значения φ, λ, d на каждой итерации записываются в массивы $\varphi\varphi$, $\lambda\lambda$, dd.

Поскольку программа выводит численные значения последнего оператора, то в качестве последнего оператора поставлен составной массив — вектор, содержащий три вложенных массива и записанный в виде строки для экономии места в программе.

При отладке программ в составной массив можно включать результаты любых внутренних операторов программы.

Результаты расчета показаны на рис. 12.9. Несмотря на высокую точность расчета (0,1%), для ее достижения оказалось достаточно четырех итераций.

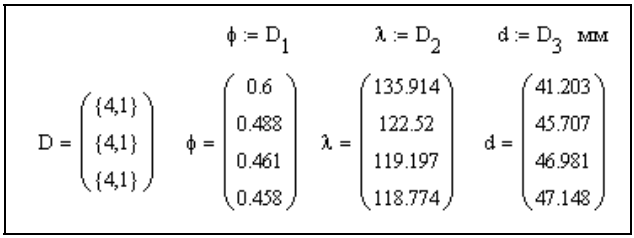


Рис. 12.9. Результаты расчета на каждой итерации

12.5. Энергетический метод определения критической силы

12.5.1. Вывод формулы Рэлея

Рассмотренный выше метод расчета на устойчивость предполагает знание гибкости стержня $\lambda = \frac{\mu L}{i_{\min}}$. Но в справочниках можно найти значения коэффициента μ лишь для нескольких случаев закрепления стержней постоянного сечения. Для стержней переменного сечения невозможно найти критическую силу изложенным методом.

Энергетический метод позволяет приближенно определить критическую силу для стержней любого сечения и любого закрепления. Он основан на использовании начала возможных перемещений. Напомним его упрощенную формулировку.

Начало возможных перемещений

Если тело находится в равновесии, то сумма работ внешних и внутренних сил равна нулю на любых возможных перемещениях.

Эта формулировка справедлива при упругой деформации системы. Перемещения, вызванные деформацией системы, всегда являются возможными.

Согласно этому принципу $A^{\text{внеш}} + A^{\text{внутр}} = 0$. При упругой деформации работа внутренних сил равна по модулю потенциальной энергии упругой деформации $П$, которая не бывает отрицательной $\left|A^{\text{внутр}}\right| = П$. Тогда $A^{\text{внеш}} = -A^{\text{внутр}} = П$.

Подсчитаем отдельно работу внешних $A^{\text{внеш}}$ и внутренних сил $A^{\text{внутр}}$, равную потенциальной энергии упругой деформации.

На рис. 12.10 показана схема деформации стержня. Сжимающая сила F совершает работу на перемещении подвижной опоры. При постепенном увеличении нагрузки стержень деформируется упруго, оставаясь прямолинейным. На диаграмме $F - \Delta$ работа силы F на упругом перемещении опоры Δ равна площади треугольника.

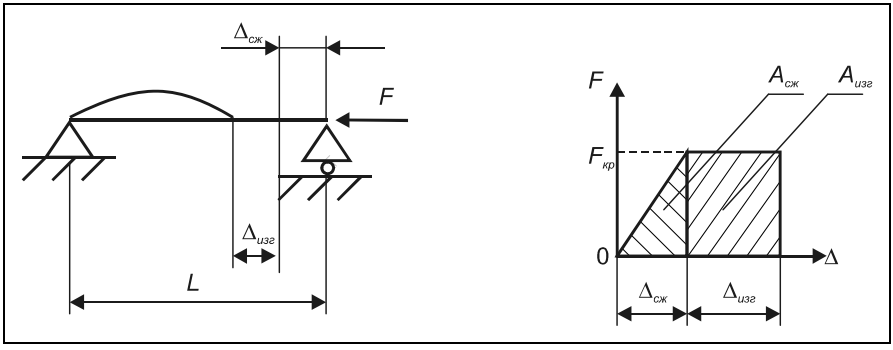


Рис. 12.10. Работа силы *F* при потере устойчивости стержня

При достижении критического значения сжимающей силы стержень изгибается при постоянной нагрузке $F = F_{\text{кр}}$. Работа изгиба равна площади прямоугольника на диаграмме $F - \Delta$.

Запишем равенство

$$A^{\text{внеш}} = A^{\text{сжат}} + A^{\text{изг}} = П = П^{\text{сжат}} + П^{\text{изг}}.$$

Работа сжатия равна потенциальной энергии сжатия $A^{\text{сжат}} = П^{\text{сжат}}$, соответственно $A^{\text{изг}} = П^{\text{изг}}$. При определении критической силы деформацию сжатия можно не учитывать. Рассмотрим деформацию изгиба.

Работа сжимающей силы при изгибе

$$A^{\text{изг}} = F_{\text{кр}}\Delta_{\text{изг}}. \qquad (12.13)$$

Потенциальная энергия, накопленная при изгибе $П^{изг} = \int\limits_L \frac{M^2 dx}{2EJ}$.

С учетом уравнения изогнутой оси балки при изгибе $EJ\frac{d^2u}{dx^2} = M$, где u — прогиб стержня при изгибе,

$$П = \frac{1}{2}\int\limits_L EJ\left(u''\right)^2 dx. \qquad (12.14)$$

Подсчитаем перемещение подвижной опоры при изгибе Δ.

Вырежем элемент стержня длиной dx, которая в процессе изгиба не меняется, ведь $F_{кр} = Const$. Найдем сближение концов элемента при изгибе $d\Delta_{изг} = dx(1-\cos(\theta))$, где θ — угол поворота элемента стержня при изгибе, равный углу поворота сечения.

Используем разложение $\cos(\theta)$ в ряд Тэйлора $\cos(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!}$.

Включим в расчет только два первых слагаемых разложения $\cos(\theta)$ в ряд Тэйлора

$$d\Delta_{изг} \approx dx\left(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2}\right) = dx\frac{\theta^2}{2}.$$

Но угол поворота сечения равен производной от прогиба (при малых перемещениях) $\theta \approx \frac{du}{dx} = u'$, тогда $d\Delta_{изг} \approx \frac{1}{2}\left(u'\right)^2 dx$.

Работа силы $F_{кр}$ при изгибе

$$A^{изг} = F_{кр}\Delta_{изг} \approx \frac{1}{2}F_{кр}\int\limits_L \left(u'\right)^2 dx. \qquad (12.15)$$

Приравнивая выражения (12.14) и (12.15), получаем формулу для определения критической силы энергетическим способом

$$F_{кр} = \frac{\int\limits_L EJ\left(u''\right)^2 dx}{\int\limits_L \left(u'\right)^2 dx}. \qquad (12.16)$$

Эта формула называется *формулой Рэлея* для определения критической силы при продольном изгибе стержня.

Чтобы воспользоваться ею, надо задаваться формой изгиба $u(x)$. Чем точнее выбрана форма изогнутой оси стержня, тем точнее будет найдена критическая сила.

Если для схемы Эйлера задаться формой изогнутой оси в виде синусоиды, то значение критической силы, найденное по формуле Рэлея (12.16), совпадает со значением, найденным по формуле Эйлера (12.6).

Любая ошибка в выборе уравнения изогнутой оси стержня ведет к завышению критической силы. Ведь отклонение изогнутой оси от своего естественного положения равносильно наложению дополнительных связей, что ведет к увеличению критической силы.

12.5.2. Примеры определения критической силы энергетическим методом

Пример 1

Для схемы Эйлера (см. рис. 12.3) определим критическую силу энергетическим методом.

В общем случае изогнутую ось стержня будем аппроксимировать полиномом степени *m*

$$u(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \ldots = \sum_{i=0}^{m} C_i x^i \ .$$

Значения коэффициентов C_i определяем из граничных условий (условий закрепления стержня), решая систему уравнений с помощью вычислительного блока `given-find` (рис. 12.11). Поскольку в программе нумерация коэффициентов начинается с 1 (`ORIGIN=1`), вид выражения полинома отличается от написанного выше.

Для стержня шарнирно закрепленного с двух концов граничными условиями являются равенство нулю прогиба на опорах $u(0) = 0$ и $u(L) = 0$, а также равенство нулю изгибающих моментов на концах стержня $M(0) = 0$ и $M(L) = 0$. Но изгибающий момент пропорционален второй производной от прогиба $M = EJu''(x)$, следовательно, на концах стержня $u''(0) = 0$ и $u''(L) = 0$.

Примечание

Внутри блока `given—find` нельзя использовать в качестве условий производные. Граничные условия не могут вычисляться внутри блока `given—find`, поэтому каждой производной в программе присваивается

имя функции, а в вычислительный блок записывается значение функции от заданного аргумента, например, для второй производной $u2(0,C)=0$.

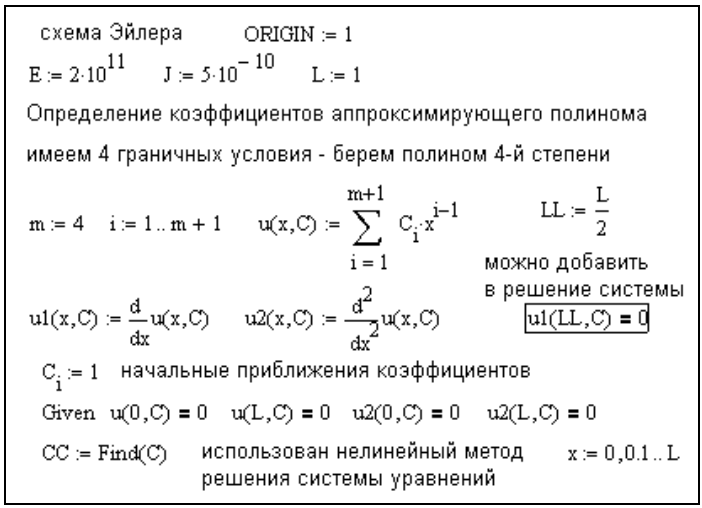


Рис. 12.11. Определение коэффициентов аппроксимирующего полинома

В рассмотренном примере используется полином четвертой степени, имеющий 5 неизвестных коэффициентов, следовательно, в вычислительный блок надо подставить 5 граничных условий. Однако ввиду симметрии системы пятое условие (равенство нулю угла поворота сечения посередине балки) выполняется автоматически.

Кроме того, в формулу Рэлея входят лишь первая и вторая производные от прогиба, поэтому в расчете используются не 5, а 4 коэффициента. И, наконец, два коэффициента оказались равны нулю.

В общем, подбирая степень полинома, смотрите на его график. Главное, чтобы выполнялись граничные условия. Помните, что решение мы ищем приближенное, что подбираемый "на глазок" полином никак не учитывает различие в форме и размерах сечений по длине стержня.

Решение системы нелинейных алгебраических уравнений требует использования нелинейных методов решения. Щелкните правой кнопкой мыши на имени функции `find` и в открывшемся контекстном меню выберите метод решения **Nonlinear**.

На рис. 12.12 приведен вектор коэффициентов полинома и представлены графики прогиба стержня и его первой и второй производных.

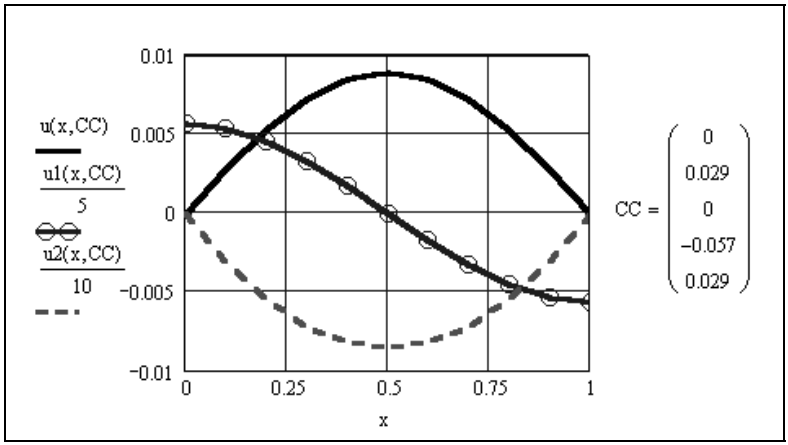


Рис. 12.12. Графики аппроксимирующего полинома и его первой и второй производных

На рис. 12.13 записана формула Рэлея и приведено расчетное значение $P_{кр}$. Получены численное значение критической силы для заданного стержня и числовой коэффициент при буквенном выражении.

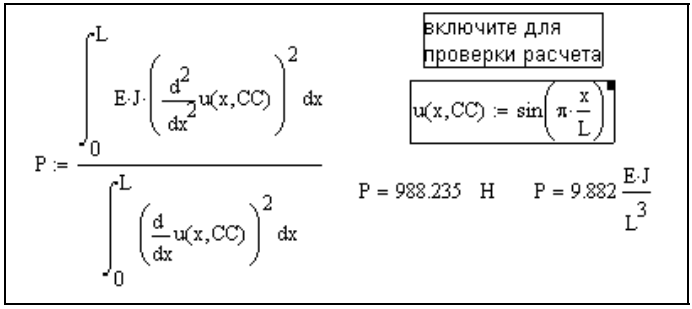


Рис. 12.13. Формула Рэлея определения критической силы

На том же рисунке предлагается проверить другой вид аппроксимации уравнения изогнутой оси стержня. При выводе формулы Эйлера использовалась синусоида для описания изогнутой оси. Включите выражение синусоиды и убедитесь, что результаты расчета совпадают для обоих видов аппроксимации изогнутой оси стержня.

Пример 2

Определить нагрузку, соответствующую потере устойчивости для ступенчатого стального стержня с двумя заделками и промежуточной шарнирной опорой, нагруженного двумя силами (рис. 12.14).

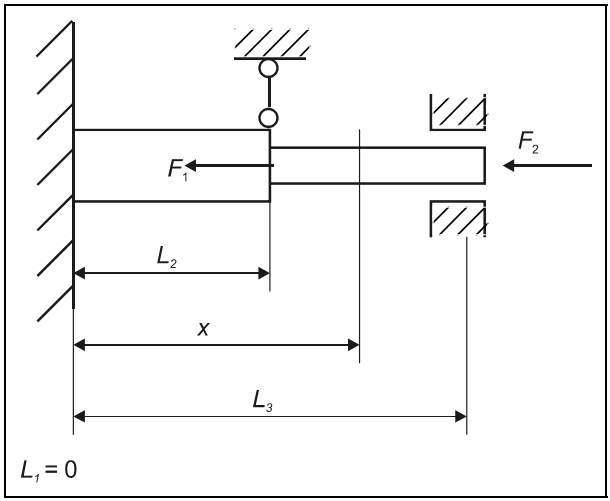


Рис. 12.14. Схема нагружения ступенчатого стального стержня

Левая заделка неподвижная, правая — подвижная. Промежуточная шарнирная опора установлена на границе толстой и тонкой частей стержня. Поскольку ищем нагрузку, то задано лишь соотношение сил на свободном конце и на границе участков $F_1 = 2F_2$. Исходные данные для расчета приведены на рис. 12.15.

ступенчатый стержень с 2-мя заделками,
промежуточной опорой и 2-мя силами

$E := 2 \cdot 10^{11}$ значения координаты x

$n := 3$ $L := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$ в заделке; на границе двух участков; на свободном конце

соотношение сил $F := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ на границе двух участков; на свободном конце

$d1 := 0.02$ ближе к заделке
$d2 := 0.01$ свободный конец стержня

$$J(x) := \begin{cases} 0.05 \cdot d1^4 & \text{if } x < L_2 \\ 0.05 \cdot d2^4 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Рис. 12.15. Исходные данные для расчета на устойчивость ступенчатого стержня

Граничными условиями для изогнутой оси стержня являются равенство нулю прогибов в заделках и шарнирной опоре, а также углов поворота в заделках.

Имеем 5 граничных условий. Ищем полином пятой степени (рис. 12.16). Графики полинома и его первой и второй производных показаны на рис. 12.17. Критические значения сил F_1 и F_2 приведены на рис. 12.18

Имеем 5 граничных условий. Берем полином 5-й степени

$m := 5 \quad i := 1..m+1 \quad u(x,C) := \sum_{i=1}^{m+1} C_i \cdot x^{i-1}$

$u1(x,C) := \frac{d}{dx} u(x,C) \qquad u2(x,C) := \frac{d^2}{dx^2} u(x,C)$

$C_i := 1$ начальные приближения коэффициентов

Given $u(L_1,C) = 0 \quad u(L_2,C) = 0 \quad u(L_3,C) = 0$

$u1(L_1,C) = 0 \quad u1(L_3,C) = 0$

$CC := Find(C)$ использован нелинейный метод

Рис. 12.16. Подбор коэффициентов аппроксимирующего полинома

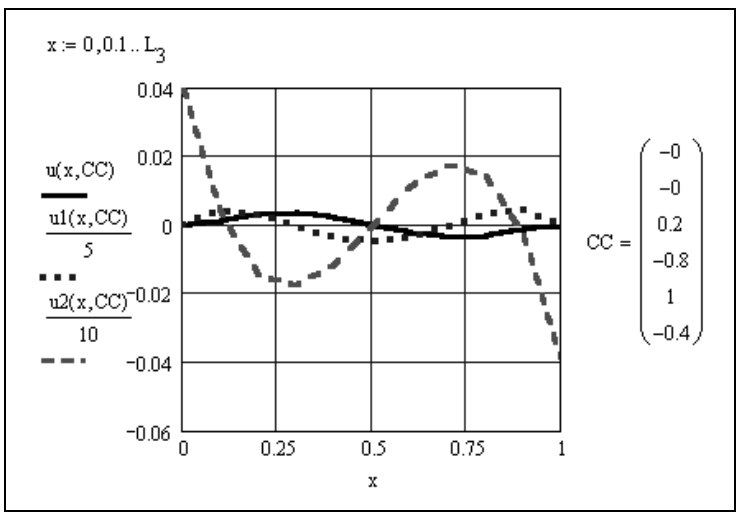


Рис. 12.17. Графики аппроксимирующего полинома и его производных

Приведенная программа позволяет приближенно определить критическую нагрузку при действии нескольких сил и нескольких участках различной формы сечения. Степень полинома определяем, исходя из числа граничных условий и "на глазок" по виду графика полинома и его производных.

Рис. 12.18. Определение критических нагрузок на ступенчатый стержень

12.6. Продольно-поперечный изгиб

12.6.1. Уравнение упругой линии стержня

Иногда на практике встречаются случаи, когда сжатый стержень испытывает еще и действие поперечных нагрузок.

Если сжимающая нагрузка близка к критической, то действие даже небольшой поперечной нагрузки вызывает значительное увеличение прогиба стержня. Принцип независимости действия сил в этом случае не выполняется.

Такой вид деформации называется продольно-поперечным изгибом.

Определим прогиб стержня при продольно-поперечном изгибе.

Изгибающий момент в сечениях стержня складывается из суммы моментов $M_{попер}$ от поперечной силы $F_{попер}$ и $M_{сж}$ от продольной сжимающей силы $F_{сж}$

$$M = M_{попер} + M_{сж} = M_{попер} + F_{сж} u \,.$$

Если кривизна стержня сравнительно мала, то можно воспользоваться уравнением изогнутой оси (7.13) $EJu''(x) = M$.

$$EJu''(x) + F_{сж} u = -M_{попер} \,. \qquad (12.17)$$

С учетом дифференциальных зависимостей $q = \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2 M}{dx^2}$

$$EJu''' + F_{сж} u'' = q \,. \qquad (12.18)$$

Решая уравнения (12.17) или (12.18), определяем прогиб стержня при продольно-поперечном изгибе.

Зная прогиб стержня, можно определить изгибающий момент в сечениях стержня

$$M = EJu''.$$

Зная изгибающий момент и момент сопротивления сечения стержня, можно определить максимальные напряжения в сечениях стержня

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W}.$$

12.6.2. Примеры расчета балок на продольно-поперечный изгиб

Рассмотрим стальной стержень прямоугольного поперечного сечения, закрепленный на двух шарнирных опорах (схема Эйлера). Стержень нагружен осевой сжимающей нагрузкой. Схема нагружения стержня показана на рис. 12.19. Исходные данные для расчета показаны на рис. 12.20.

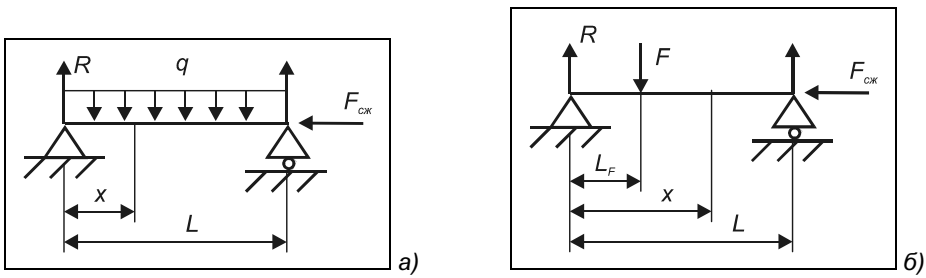


Рис. 12.19. Продольно-поперечный изгиб стержня

Рассчитаем прогиб стержня при двух видах нагрузки:

- равномерно распределенной по длине стержня;
- сосредоточенной посередине стержня.

Расчеты ведем без учета размерностей, т. к. функция решения дифференциальных уравнений `odesolve` не может работать с размерными величинами.

Расчет прогиба, поперечной силы и изгибающего момента приведен на рис. 12.20.

Для справки там же приведено значение критической силы, вычисленной по формуле Эйлера. Сжимающая сила взята $F \approx 0,8F_{\text{кр}}$.

CWD = "D:\БХВ-Сопромат\Glava 12 Устойч\"

Использование дифференциального уравнения 2-го порядка

распределенная нагрузка $q := -800$ $F_{сж} := 60000$

$E := 2 \cdot 10^{11}$ $L := 1$ $b := 0.06$ $h := 0.02$ $J := \frac{b \cdot h^3}{12}$ $R := q \cdot \frac{L}{2}$

$M(x) := R \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2}$ $x := 0, \frac{L}{50} .. L$ $M(0.5) = -100$ при $F_{сж} = 0$

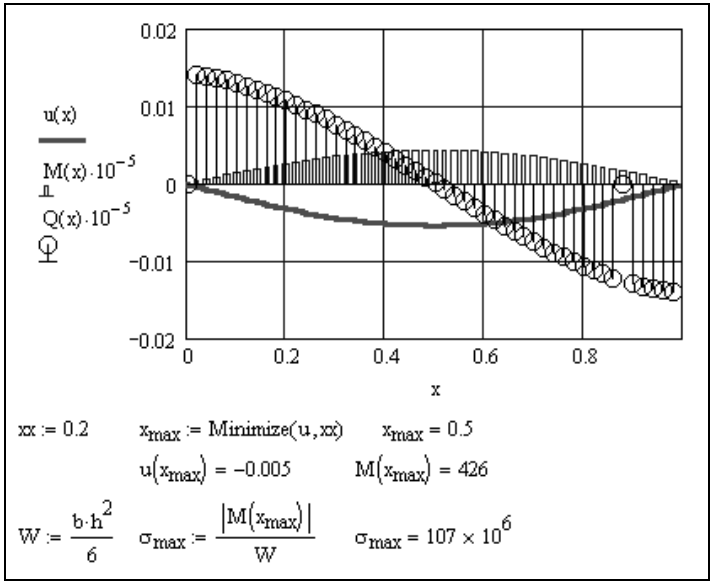
Given $u''(x) \cdot E \cdot J + F_{сж} \cdot u(x) = -M(x)$

$u(0) = 0$ $u(1) = 0$

$u := Odesolve(x, L, 200)$ $M(x) := E \cdot J \cdot \frac{d^2}{dx^2} u(x)$ $M(0.5) = 426$ при $F_{сж} = 0.8 \cdot F_{кр}$

$Q(x) := E \cdot J \cdot \frac{d^3}{dx^3} u(x)$ $\frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{L^2} = 79 \times 10^3$ дано для справки

Рис. 12.20. Расчет стержня (см. рис. 12.19, *а*) на продольно-поперечный изгиб



$xx := 0.2$ $x_{max} := Minimize(u, xx)$ $x_{max} = 0.5$

$u(x_{max}) = -0.005$ $M(x_{max}) = 426$

$W := \frac{b \cdot h^2}{6}$ $\sigma_{max} := \frac{|M(x_{max})|}{W}$ $\sigma_{max} = 107 \times 10^6$

Рис. 12.21. Результаты расчета стержня (см. рис. 12.19, *а*) при продольно-поперечном изгибе

Выведенное значение максимального изгибающего момента показывает, что под влиянием сжимающей силы изгибающий момент увеличился в 4,5 раза.

На рис. 12.21 представлены графики изменения по длине стержня прогиба поперечной силы и изгибающего момента. Там же приведен расчет максимального напряжения в стержне.

Для определения максимального изгибающего момента использована функция `maximize`, хотя делать это не обязательно. По симметрии максимум находится посередине стержня при $x = 0,5$ м. Применение функции `maximize` позволяет использовать программу при различных поперечных нагрузках.

Расчет того же стержня при другой нагрузке показан на рис. 12.22. Вместо распределенной нагрузки приложена сосредоточенная сила F. Результаты расчета приведены на рис. 12.23.

Рис. 12.22. Расчет стержня (см. рис. 12.19, *б*) на продольно-поперечный изгиб

К сожалению, нельзя в программе построить графики зависимости прогиба и напряжения от величины сжимающей силы. Функция `odesolve` не работает при переменных параметрах. Нельзя также построить программу с использованием слова `given`, а значит, с функциями `find` и `odesolve`. Это серьезный недостаток Mathcad. И таких недостатков–недоработок в Mathcad много.

Для расчета стержня на продольно-поперечный изгиб, кроме дифференциального уравнения второго порядка, можно использовать дифференциальные уравнения четвертого порядка (12.17) и (12.18). Такой расчет показан на рис. 12.24. В книге не приводятся результаты этого расчета. Они такие же, как при использовании дифференциального уравнения второго порядка. Зато они включены в программу, имеющуюся на компакт-диске, прилагаемом к книге.

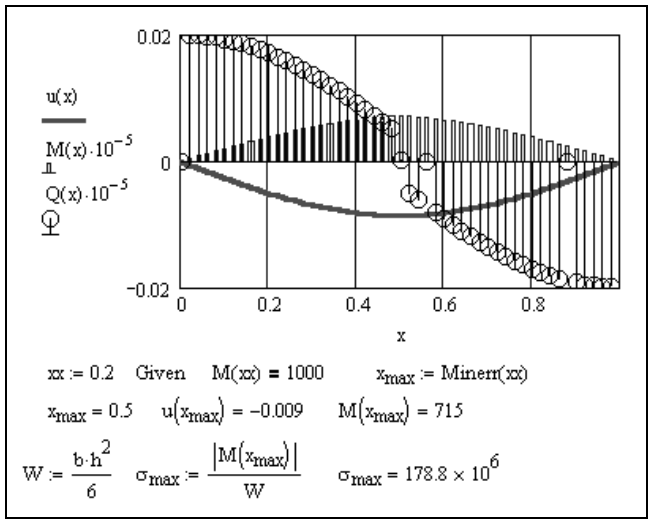


Рис. 12.23. Результаты расчета стержня (см. рис. 12.19, *б*) на продольно-поперечный изгиб

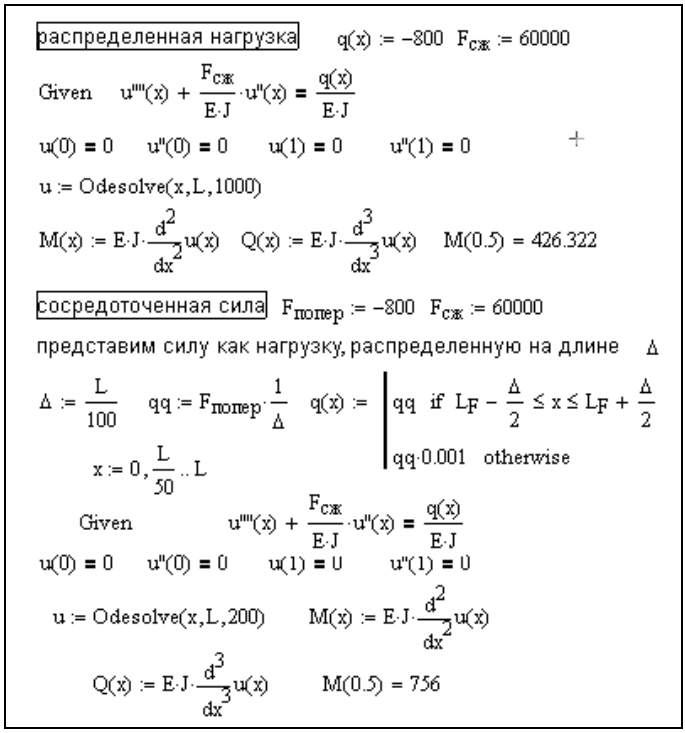


Рис. 12.24. Использование дифференциального уравнения четвертого порядка при продольно-поперечном изгибе стержня

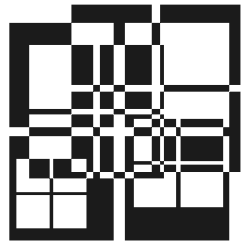
Поскольку в уравнение (12.18) входит только интенсивность поперечной распределенной нагрузки q, сосредоточенную силу надо заменить нагрузкой, распределенной на малой длине стержня Δ.

Величина Δ может быть сколь угодно малой. На остальной части стержня приходится приложить очень маленькую распределенную нагрузку. В противном случае Mathcad отказывается решать задачу.

Поскольку дифференциальное уравнение — четвертого порядка, внутри вычислительного блока `given—odesolve` записаны 4 граничных условия: равенство нулю прогиба стержня и изгибающих моментов (вторых производных от прогиба) в точках закрепления.

Решая дифференциальное уравнение четвертого порядка, не забывайте, что даже для Mathcad это чрезвычайно сложная задача. Результат вычислений (или отсутствие результата) зависит от выбора начального приближения, способа решения и числа шагов вычислений.

ГЛАВА 13



Расчет тонкостенных оболочек

В общей постановке расчет оболочек — это исключительно сложный раздел строительной механики. В этой главе рассмотрим частный случай — тонкостенные оболочки. Для их расчета с помощью упрощающих расчет гипотез будут получены простые инженерные формулы.

Тонкостенные оболочки встречаются в технике повсюду. Это сосуды сжатого газа, резервуары жидкости, корпуса подводных лодок, ракет и самолетов.

Общей чертой таких оболочек является малая толщина стенки δ по сравнению с общими габаритами оболочки. Стенки таких сосудов испытывают под действием внутреннего или наружного давления двустороннее растяжение или сжатие. По форме они представляют собой тела вращения.

13.1. Безмоментная теория тонкостенных оболочек

13.1.1. Гипотезы и допущения

1. Оболочка считается *тонкостенной*, если отношение наименьшего радиуса кривизны ρ_{min} к толщине δ стенки оболочки $\frac{\rho_{min}}{\delta} > 20$ (рис. 13.1).

   В этом случае погрешность расчета по полученным в этой главе формулам не превысит 5%.

2. Осесимметричная оболочка нагружена внутренним или наружным давлением.

   В этом случае напряжения в точках оболочки не зависят от угловой координаты.

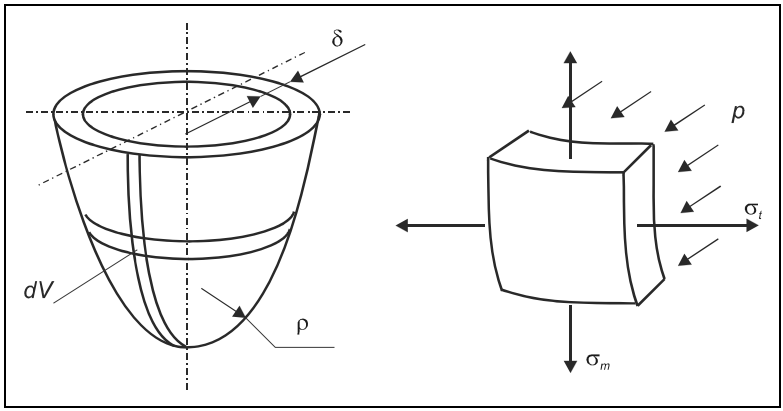


Рис. 13.1. Расчетная схема тонкостенной оболочки

3. Форма оболочки под давлением не меняется.

   При вырезании элемента оболочки двумя меридиональными (вдоль образующих) и двумя коническими сечениями (перпендикулярными поверхности оболочки) форма вырезанного элемента не меняется, меняются только размеры. Тогда касательные напряжения, которые вызывают изменение формы тела, на гранях элемента отсутствуют $\tau = 0$, а нормальные напряжения σ — главные (рис. 13.1).

   Обозначим: σ_m — меридиональные напряжения (вдоль образующей оболочки), σ_t — тангенциальные (окружные) напряжения, σ_r — радиальные напряжения.

4. Радиальными напряжениями в оболочке пренебрегаем.

   При внутреннем давлении p на внутренней поверхности оболочки $\sigma_r = p$, на наружной поверхности $\sigma_r = 0$ (рис. 13.2).

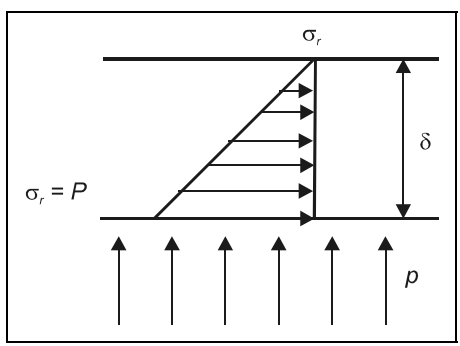


Рис. 13.2. Распределение радиальных напряжений по толщине оболочки

Как показывают практические расчеты, давление в тонкостенных оболочках, как правило, не превышают 10 атмосфер (1 МПа). При этом тангенциальные напряжения могут достигать величины $\sigma_t \sim 100$ МПа. Следовательно, радиальными напряжениями σ_r можно пренебречь. В таком случае тонкостенная оболочка находится в плоском напряженном состоянии.

5. Напряжения по толщине оболочки не меняются.

   Если нормальные напряжения по толщине оболочки переменные, то результатом действия напряжений будут продольное усилие N и изгибающий момент M (рис. 13.3, *а*).

   Поскольку оболочка тонкостенная, напряжения по толщине оболочки можно считать постоянными (рис. 13.3, *б*). Результатом действия напряжений в этом случае будет только продольное усилие N, а изгибающий момент $M = 0$.

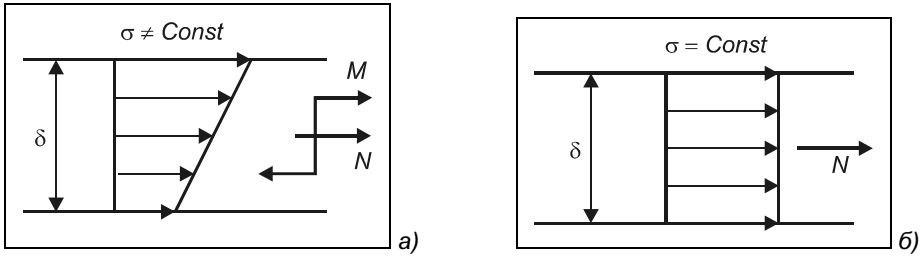


Рис. 13.3. Внутренние усилия в поперечных сечениях оболочки

Основанная на этом предположении теория называется *безмоментной* теорией оболочек. Она значительно проще моментной теории и позволяет получить простые инженерные формулы для расчета тонкостенных оболочек.

13.1.2. Формула Лапласа

Рассмотрим равновесие элемента, вырезанного из оболочки двумя меридиональными и двумя коническими сечениями, перпендикулярными поверхности оболочки. На рис. 13.4 этот элемент изображен в трех проекциях.

На этом рисунке p — давление жидкости или газа в сосуде, $\rho_m, d\alpha_m, \sigma_m$ — соответственно радиус кривизны, угол охвата элемента и нормальное напряжение в меридиональном направлении; $\rho_t, d\alpha_t, \sigma_t$ — то же самое в тангенциальном направлении.

Спроектируем все силы, действующие на элемент, на нормаль ν к поверхности элемента.

$$\sum F_\nu = pdS_t dS_m - 2\sigma_t \rho_m d\alpha_m \delta \sin\left(\frac{d\alpha_t}{2}\right) - 2\sigma_m \rho_t d\alpha_t \delta \sin\left(\frac{d\alpha_m}{2}\right) = 0 .$$

С учетом $\sin\left(\frac{d\alpha}{2}\right) \approx \frac{d\alpha}{2}$ и $dS = \rho d\alpha$ получаем

$$p\rho_t d\alpha_t \rho_m d\alpha_m = 2\sigma_t \rho_m d\alpha_m \delta \frac{d\alpha_t}{2} + 2\sigma_m \rho_t d\alpha_t \delta \frac{d\alpha_m}{2} .$$

Разделив это выражение на $\rho_m \rho_t \delta$ находим

$$\frac{\sigma_t}{\rho_t} + \frac{\sigma_m}{\rho_m} = \frac{p}{\delta} . \qquad (13.1)$$

Выражение (13.1) носит название *формула Лапласа* для тонкостенных оболочек.

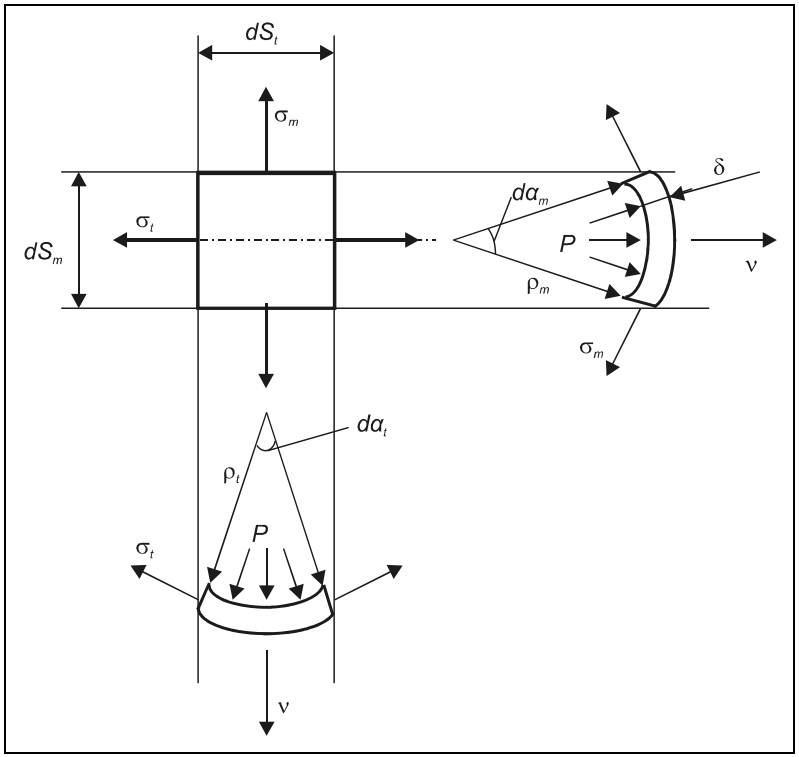


Рис. 13.4. Нагрузки, действующие на вырезанный элемент оболочки

В формуле Лапласа два неизвестных напряжения. Чтобы их найти, необходимо второе уравнение. Составим уравнение равновесия части оболочки, отсеченной коническим сечением, перпендикулярным поверхности оболочки, на том уровне, где хотим определить напряжения (рис. 13.5).

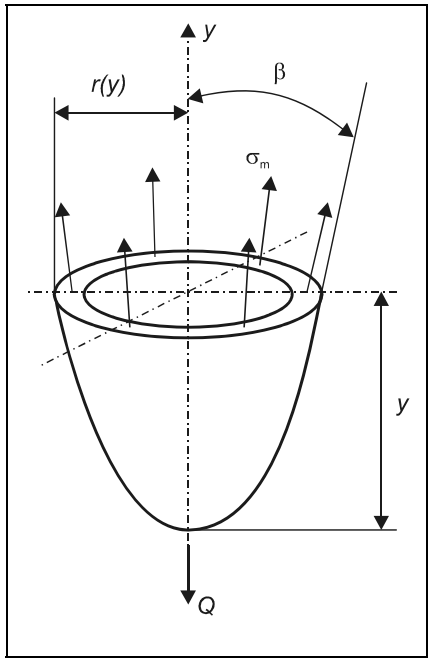


Рис. 13.5. Схема нагружения отсеченной части оболочки

Запишем сумму проекций на ось симметрии оболочки всех сил, приложенных к отсеченной части оболочки

$$\sum F_y = \sigma_m 2\pi r \delta \cos(\beta) - p\pi r^2 - Q = 0 .$$

Отсюда

$$\sigma_m = \frac{P+Q}{2\pi r \cos(\beta)}, \qquad (13.2)$$

где P — проекция сил внутреннего или внешнего давления на ось симметрии оболочки, Q — вес отсеченной части оболочки.

Если сосуд находится под давлением газа, то $P = p\pi r^2$.

Если в сосуд налита жидкость, то P — вес столба жидкости, который давит на дно сосуда.

13.1.3. Частные случаи тонкостенных оболочек

Для всех тонкостенных оболочек принято $\sigma_r = 0$, поэтому для наиболее часто используемых в технике оболочек определим σ_t и σ_m.

Сферическая оболочка

В сферической оболочке (рис. 13.6, *а*) по симметрии $\rho_t = \rho_m = r$, где r — радиус сферы и $\sigma_t = \sigma_m = \sigma$.

Из формулы Лапласа $\frac{\sigma_t}{\rho_t} + \frac{\sigma_m}{\rho_m} = \frac{p}{\delta}$ находим $2\frac{\sigma}{\rho} = \frac{p}{\delta}$.

Откуда

$$\sigma = \sigma_t = \sigma_m = \frac{pr}{2\delta}. \qquad (13.3)$$

Цилиндрическая оболочка

В цилиндрической оболочке (рис. 13.6, *б*) $\rho_m = \infty$ (образующая — прямая линия), $\rho_t = r$.

Тогда по формуле Лапласа $\frac{\sigma_t}{r} + \frac{\sigma_m}{\infty} = \frac{p}{\delta}$

$$\sigma_t = \frac{pr}{\delta}. \qquad (13.4)$$

Для определения меридионального напряжения σ_m рассмотрим равновесие отсеченной части цилиндра (рис. 13.6, *в*).

Откуда $\sum F_x = \sigma_m 2\pi r\delta - p\pi r^2 = 0$ и меридиональное напряжение

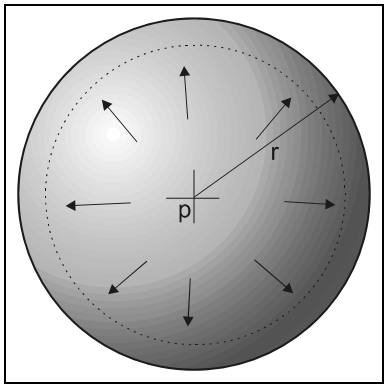
$$\sigma_m = \frac{pr}{2\delta}. \qquad (13.5)$$

Коническая оболочка

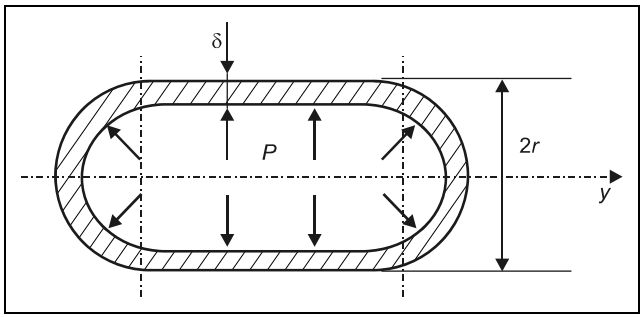
В конической оболочке (рис. 13.6, *г*) $\rho_m = \infty$, $\rho_t = \frac{r(y)}{\cos(\beta)}$, $r(y) = r_0\frac{y}{L}$.

Тогда из формулы Лапласа

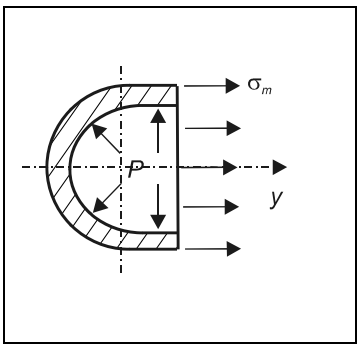
$$\sigma_t = \frac{pr(y)}{\delta\cos(\beta)} = \frac{pr_0}{\delta L\cos(\beta)}y. \qquad (13.6)$$



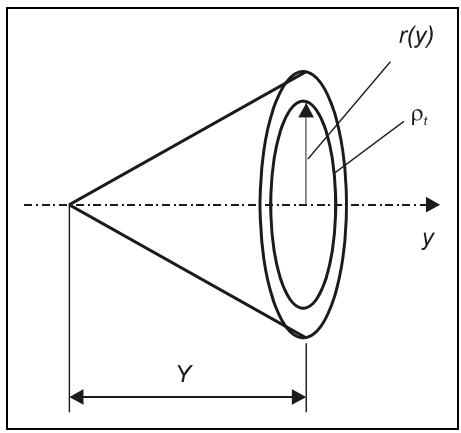
а)



б)



в)



г)

Рис. 13.6. Сферическая, цилиндрическая и коническая оболочки

Меридиональное напряжение определяем из условия равновесия отсеченной части оболочки

$$\sum F_y = \sigma_m 2\pi r(y)\cos(\beta) - P = 0\,,$$

где:

- $P = \pi r(y)^2$ — сила давления газа, если сосуд находится под давлением сжатого газа, или
- $P = \rho\pi\left(\left(r(y)\right)^2 \frac{y}{3} + \left(r(y)\right)^2 (L - y) \right)$ — вес столба жидкости, действующий на отсеченную часть оболочки, если в сосуд налита жидкость плотностью ρ.

13.1.4. Расчет на прочность

Из выражений (13.1) и (13.2) определяем напряжения σ_t и σ_m. Поскольку оболочка находится в плоском напряженном состоянии, для условия прочности необходимо определить эквивалентные напряжения.

По третьей гипотезе $\max \sigma_{эIII} = \sigma_I - \sigma_{III} \le [\sigma]$.

По четвертой гипотезе

$$\max \sigma_{эIV} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\sigma_I - \sigma_{II}\right)^2 + \left(\sigma_{II} - \sigma_{III}\right)^2 + \left(\sigma_{III} - \sigma_I\right)^2} \le [\sigma].$$

Поскольку принято расставлять главные напряжения "по росту" $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$, то $\sigma_I = \sigma_t$, $\sigma_{II} = \sigma_m$, $\sigma_{III} = \sigma_r = 0$.

Тогда по третьей гипотезе прочности

$$\max \sigma_{эIII} = \sigma_t \le [\sigma]. \tag{13.7}$$

По четвертой гипотезе прочности

$$\max \sigma_{эIV} = \sqrt{\sigma_t^{\,2} + \sigma_m^{\,2} - \sigma_t \sigma_m} \le [\sigma]. \tag{13.8}$$

Из условия прочности, подставив в него найденные значения напряжений, можно определить толщину оболочки при заданном давлении либо давление для заданной оболочки.

13.2. Расчет распорного кольца

В местах резкого изменения формы оболочки появляется изгибающий момент. Для его компенсации ставят распорное кольцо, принимающее на себя дополнительную нагрузку.

Рассмотрим часть оболочки влево и вправо от места резкого изменения формы (рис. 13.7). Считаем, что левое и правое крайние сечения настолько близки, что радиус обоих сечений одинаков.

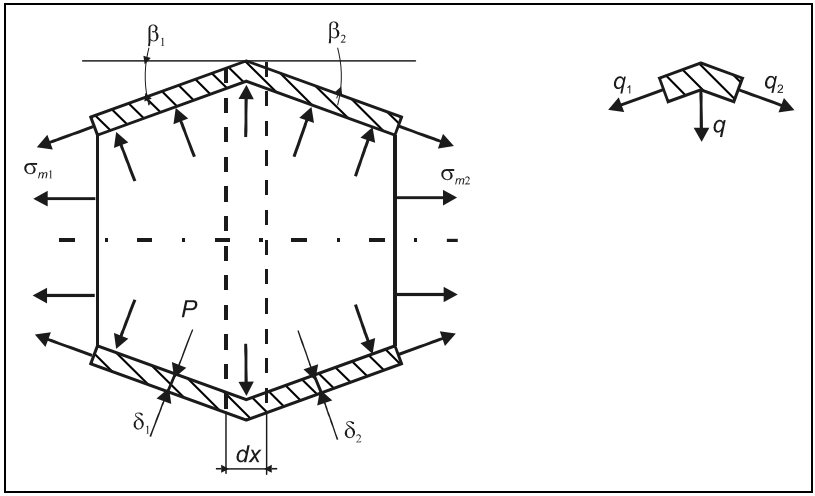


Рис. 13.7. Элемент оболочки с резким изменением ее формы

Составим уравнение равновесия вырезанной части оболочки.

$$\sum F_x = \sigma_{m1} 2\pi r \delta_1 \cos(\alpha_1) - \sigma_{m2} 2\pi r \delta_2 \cos(\alpha_2) = 0 .$$

Откуда

$$\sigma_{m1} \delta_1 \cos(a_1) = \sigma_{m2} \delta_2 \cos(\alpha_2) .$$

Обозначим $q_1 = \sigma_{m1}\delta_1$ и $q_2 = \sigma_{m2}\delta_2$ — погонную нагрузку на единицу длины окружности. В результате действия q_1 и q_2 появляется радиальная нагрузка $q = q_1 \sin(\alpha_1) + q_2 \sin(\alpha_{2)}$, вызывающая изгиб оболочки.

Если p — внутреннее давление, нагрузка q направлена к центру оболочки (сжимает ее), если p — наружное давление, q направлена от центра оболочки.

Для разгрузки от радиальной нагрузки q ставят распорное кольцо (рис. 13.8). В силу круговой симметрии нагружения изгибающий момент в кольце отсутствует. При внутреннем давлении кольцо сжато, при наружном давлении — растянуто. Из условия равновесия половинки кольца найдем продольное усилие в кольце

$$\sum F_y = 2N - q2r = 0 .$$

Откуда $N = qr$.

Из условия прочности найдем площадь поперечного сечения распорного кольца:

$$\max\sigma = \frac{N}{A} = \frac{qr}{A} \le [\sigma] \quad A \ge \frac{qr}{[\sigma]}. \tag{13.9}$$

Технологически роль распорного кольца может выполнить отбортовка края оболочки, удваивающая толщину оболочки в месте сварки двух ее частей.

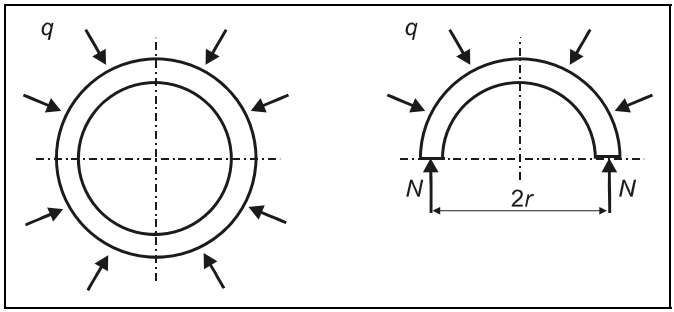


Рис. 13.8. Схема нагружения распорного кольца

13.3. Деформация трубы под давлением

Определим изменение радиуса тонкостенной оболочки под давлением. Для этого запишем окружную (тангенциальную) деформацию оболочки, равную относительному изменению длины окружности:

$$\varepsilon_t = \frac{2\pi(r+\Delta r) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{\Delta r}{r}.$$

С другой стороны из закона Гука

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}\left(\sigma_t - \mu\sigma_m - \mu\sigma_r\right).$$

Для цилиндрической оболочки

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}\left(\frac{pr}{\delta} - 0,3\frac{pr}{2\delta}\right) = \frac{\Delta r}{r}. \tag{13.10}$$

Приращение радиуса $\Delta r = 0,85\dfrac{pr^2}{E\delta}$.

13.4. Краевой эффект

Рассмотрим длинную цилиндрическую трубу, две части которой соединены жестким фланцем. Если бы фланца не было, то под действием давления в трубе ее диаметр увеличился бы по всей длине одинаково. Но фланец жест-

кий. Его радиус не изменяется, поэтому вблизи фланца оболочка изгибается (рис. 13.9). Это явление носит название краевой эффект.

Для определения изгибающего момента рассмотрим деформацию узкой полоски, вырезанной вдоль образующей оболочки вблизи жесткого фланца (рис. 13.10, *а*).

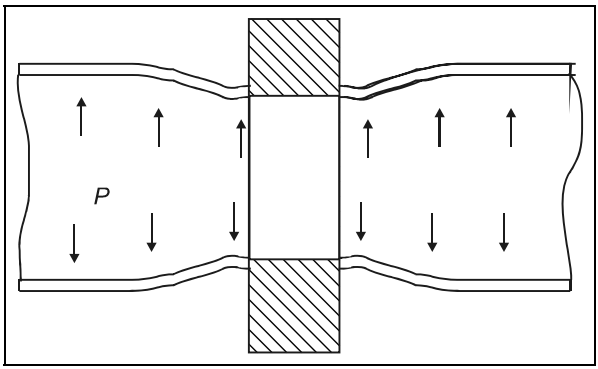
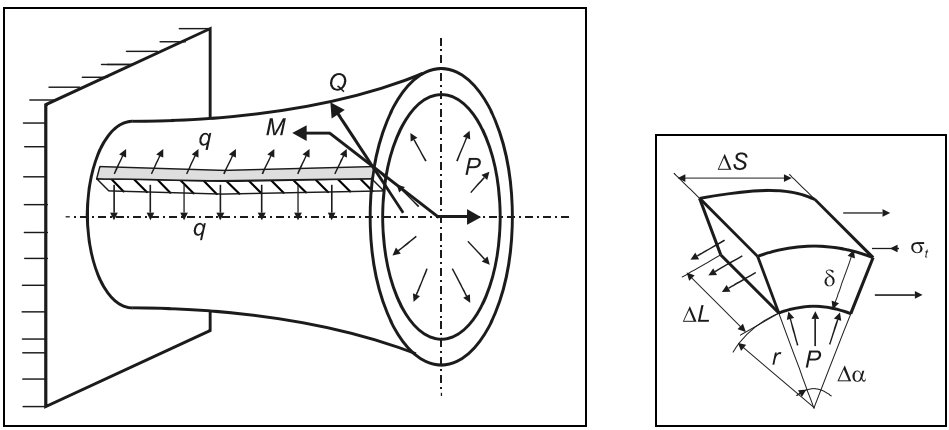


Рис. 13.9. Труба с жестким фланцем под давлением



а) *б)*

Рис. 13.10. К расчету краевого эффекта в цилиндрической оболочке

Со стороны оболочки на вырезанную полоску действуют усилия $\sigma_t \delta \cdot \Delta L$, которые играют роль упругой реакции. Определим погонную реакцию оболочки q на единицу длины оболочки $\Delta L = 1$ (рис. 13.10, *б*)

$$q = 2\sigma_t \delta \sin\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right).$$

Здесь окружное напряжение $\sigma_t = E\varepsilon_t = E\frac{u}{r}$, u — радиальное смещение полоски, $\sin\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right) = \frac{\Delta S}{2r} = \frac{1}{2r}$.

Погонная реакция оболочки

$$q = 2E\frac{u}{r}\delta\frac{1}{2r} = E\frac{u}{r^2}\delta.$$

Поскольку реакция оболочки линейно зависит от перемещения оболочки, рассматриваемую полоску можно представить как балку на упругом основании и использовать уравнение изогнутой оси такой балки (7.15)

$$u^{\mathrm{IV}} + \frac{kb}{EJ_z}u = \frac{q}{EJ_z},$$

где $k = \frac{\delta E}{r^2}$, $J = \frac{\delta^3}{12}$.

Решая это уравнение, определяем прогиб оболочки. Изгибающий момент пропорционален второй производной от прогиба $M = EJu''$.

Рассмотрим решение этой задачи в Mathcad.

Расчет ведем в системе СИ без учета размерностей, т. к. функция `odesolve` не может работать с размерными величинами.

Исходные данные для расчета и основные формулы, перечисленные ранее, приведены на рис. 13.11. Дифференциальное уравнение четвертого порядка решается функцией `odesolve`.

Граничные условия: равенство нулю прогиба и угла поворота (u и u') в заделке (в жестком фланце), равенство нулю поперечной силы и изгибающего момента (u''' и u'') вдали от заделки.

Результаты расчета приведены на рис. 13.12. Вблизи жесткого фланца наблюдается резкий всплеск изгибающего момента и резкое уменьшение прогиба до нуля (краевой эффект). Размер зоны краевого эффекта мал:

- при $\frac{r}{\delta} \sim 100$ $h \sim \frac{r_0}{4}$;
- при $\frac{r_0}{\delta} \sim 20$ $h \sim \frac{r_0}{2}$;
- при $\frac{r_0}{\delta} \sim 10$ $h \sim \frac{3}{4}r_0$.

$r_0 := 0.1 \quad \delta := 0.001 \quad p := 1 \cdot 10^6 \quad E := 2 \cdot 10^{11} \quad \mu := 0.3$

$J := \frac{\delta^3}{12} \quad kk := \frac{\delta \cdot E}{r_0^2} \quad \sigma_m := \frac{p \cdot r_0}{\delta} \quad q := p$

учет меридионального напряжения

$E := \frac{E}{1 - \mu^2}$ $\quad q := p - \frac{\mu \cdot \delta \cdot \sigma_m}{r_0}$ включите выражения в рамке

Given $u''''(x) + \frac{kk}{E \cdot J} \cdot u(x) = \frac{q}{E \cdot J} \quad u(0) = 0 \quad u'(0) = 0 \quad u'''(0.1) = 0 \quad u''(0.1) = 0$

$u := Odesolve(x, 0.1, 1000) \quad M(x) := E \cdot J \cdot \frac{d^2}{dx^2} u(x) \quad Q(x) := E \cdot J \cdot \frac{d^3}{dx^3} u(x)$

Рис. 13.11. Расчет перемещений в оболочке с жестким фланцем

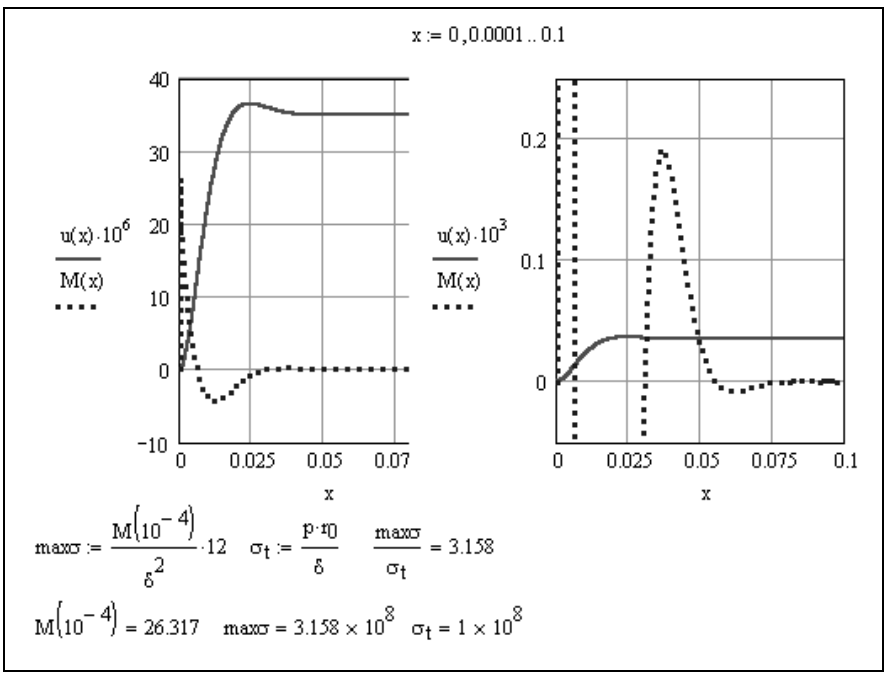


Рис. 13.12. Краевой эффект в оболочке с жестким фланцем

Функции прогиба и изгибающего момента имеют волновой быстро затухающий характер. Амплитуда каждой последующей полуволны примерно в 10 раз меньше амплитуды волны предыдущей. На рис. 13.12, слева изображе-

ны полные графики прогиба u и изгибающего момента M. Справа те же графики в увеличенном масштабе. При увеличении масштаба в 10 раз на графике появляется очередная полуволна.

Внизу на рис. 13.12 приведен расчет максимальных напряжений в месте соединения оболочки с фланцем. Они в 4 раза превышают напряжения вдали от края оболочки.

Следует отметить, что в этом расчете не учтено влияние меридионального напряжения σ_m, которое растягивает вырезанную из оболочки полоску. При этом поперечный размер полоски уменьшается, что эквивалентно уменьшению упругой реакции оболочки или, что то же самое, уменьшению давления в оболочке.

Учет меридионального напряжения несколько уменьшает краевой эффект, но не меняет характер краевого эффекта. На рис. 13.11 в программу расчета включены два слагаемых, уточняющих расчет. Они в программе выключены. Включите их и посмотрите результаты расчета.

С учетом σ_m максимальные напряжения в месте соединения оболочки с фланцем в 3 раза превышают напряжения вдали от края оболочки.

13.5. Пример расчета тонкостенной оболочки

Для оболочки, состоящей из трех частей: конической, цилиндрической и сферической (рис. 13.13) — при заданных габаритных размерах и внутреннем давлении найти толщину стенки.

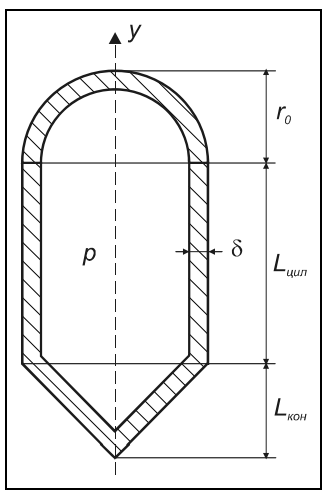


Рис. 13.13. Расчетная схема оболочки

Расчет ведем с учетом размерностей, поэтому в начале программы приведены производные размерности.

Далее приведены исходные данные для расчета (рис. 13.14): радиус цилиндрической части r_0, давление p, длины цилиндрической и конической частей оболочки $L_{кон}$ и $L_{цил}$, приближенное значение толщины оболочки δ (для вывода промежуточных результатов расчетов), допускаемое напряжение $\sigma_{доп}$.

Для построения графиков напряжений найдена зависимость радиуса поперечного сечения оболочки $r(y)$ от координаты y (вдоль оси оболочки) для конической, цилиндрической и сферической частей оболочки. Найден радиус кривизны конической части $\rho_t(y)$.

При вычислении радиуса $r(y)$ сферической части подкоренное выражение взято по модулю, т. к. в процессе вычислений при равенстве нулю подкоренного выражения машинный нуль округляется то в положительную, то в отрицательную сторону, при этом программа выдает ошибку.

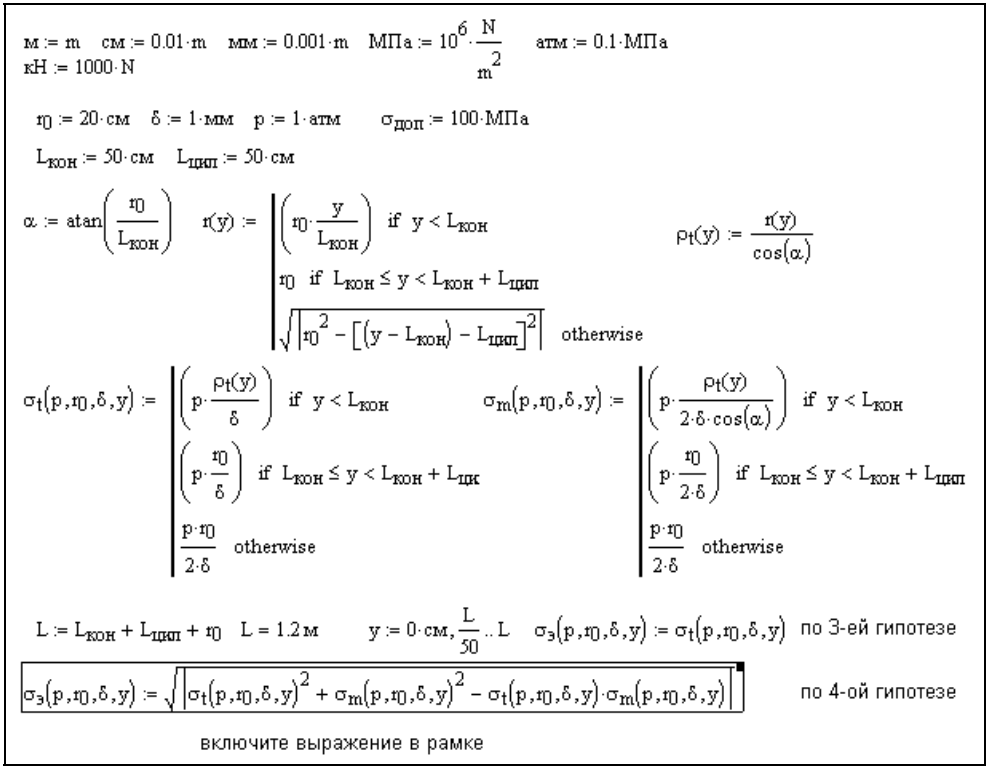


Рис. 13.14. Расчет напряжений в тонкостенной оболочке

Выражения для тангенциальных σ_t и меридиональных напряжений σ_m, как и радиус $r(y)$, записаны в виде подпрограмм.

При записи программ с условиями надо строго следить, чтобы были определены значения функции при всех значениях аргумента, уделяя особое значение знакам $<$ и $\le$.

По значениям σ_t и σ_m определяются эквивалентные напряжения по третьей или по четвертой гипотезам прочности. Выражение для эквивалентных напряжений по четвертой гипотезе в программе выключено. Включите его и посмотрите на результаты расчета.

Все выражения для напряжений записаны с четырьмя параметрами $\sigma(p, r_0, \delta, y)$. Такая форма записи делает программу расчета универсальной, позволяя определять напряжения при любых значениях этих параметров.

На рис. 13.15 показаны графики изменения напряжений $\sigma_t, \sigma_m, \sigma_э$ по длине оболочки при заданных в начале программы значениях p, r_0, δ.

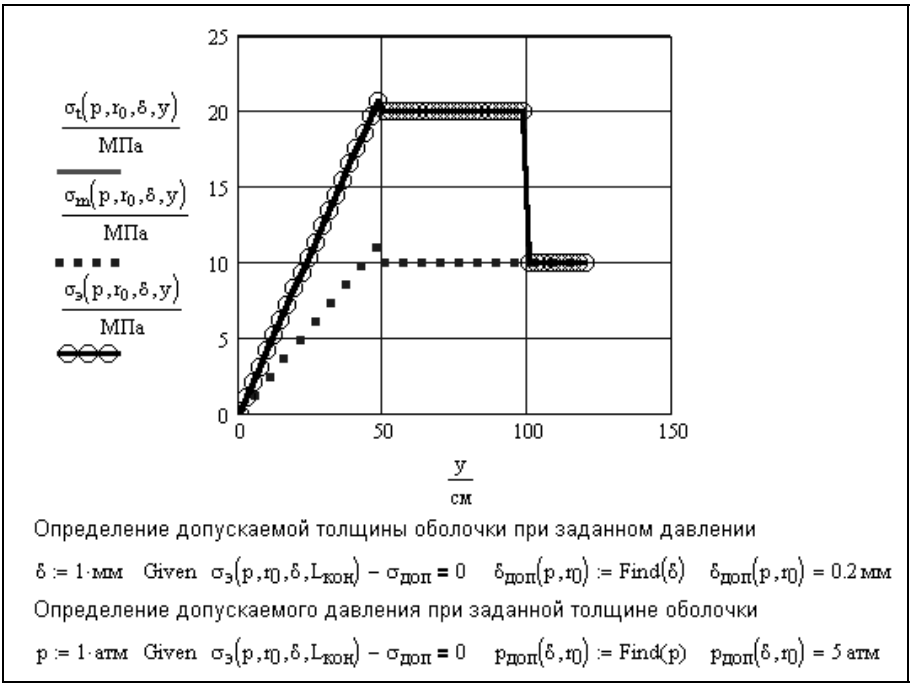


Рис. 13.15. Распределение напряжений вдоль оси оболочки

На том же рисунке внизу показано определение из условия прочности допускаемой толщины оболочки с помощью вычислительного блока `given-find`.

Вычислительному блоку предшествует начальное приближение толщины δ. Варьируя исходные значения p и r_0, можно определить допускаемую толщину оболочки $\delta_{доп}$ при любых значениях давления и радиуса оболочки.

Из условия прочности можно определить и давление p при заданных толщине δ и радиусе r_0.

Функция `root` с подобной задачей не справилась. В силу особенностей внутреннего алгоритма этой функции она выводит результаты расчета далеко не для всех значений аргументов.

Щелкните правой кнопкой мыши на слове `find`. В контекстном меню есть возможность выбора способа решения системы уравнений: `Linear` или `Nonlinear`. Такой возможности нет при использовании функции `root`.

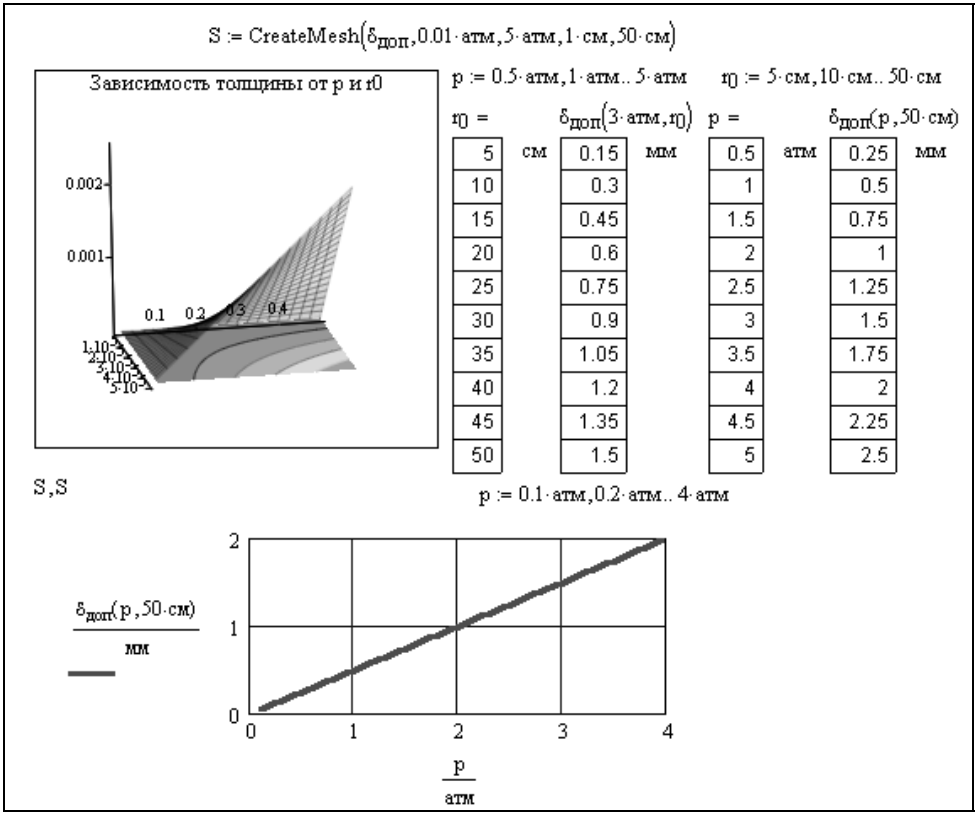


Рис. 13.16. Результаты расчета тонкостенной оболочки

На рис. 13.16 выведен трехмерный график зависимости допускаемой толщины оболочки от давления и радиуса оболочки. График построен по массиву

значений, созданному функцией `CreateMesh`, параметрами которой являются допускаемая толщина $\delta_{доп}$ и числовые диапазоны изменения давления p и радиуса оболочки r_0.

Рядом с графиком выведены таблицы значений $\delta_{доп}$ для различных p и r_0.

Внизу на рис. 13.16 выведен двумерный график зависимости $\delta_{доп}$ от p.

Обратите внимание на запись диапазона значений дискретной переменной с размерностью и численного аргумента с размерностью.

На рис. 13.17 приведен расчет радиальных перемещений оболочки по формуле (13.10). Перемещения Δ_r определяются для допускаемой толщины оболочки.

Чтобы определить перемещения при иной толщине оболочки, ее надо задать выше места определения перемещений.

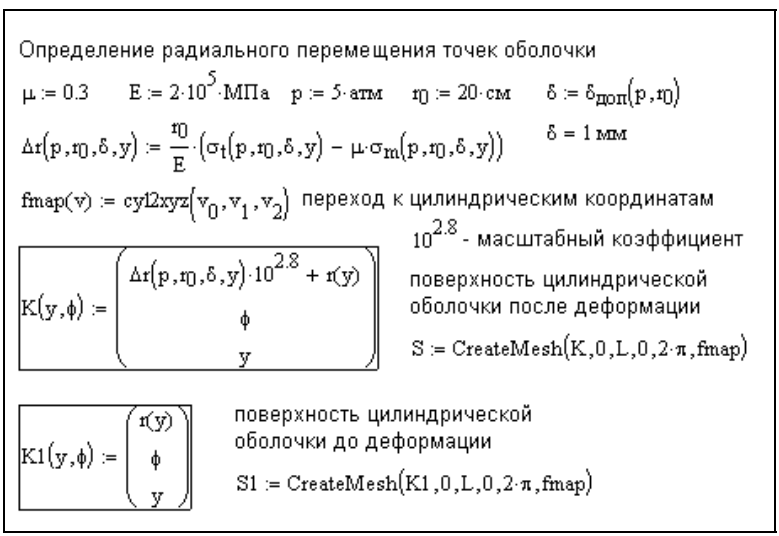


Рис. 13.17. Определение радиальных перемещений оболочки

На рис. 13.18 выведены значения рассчитанных перемещений и построен график поверхности оболочки до и после деформации. Подготовка к построению поверхности показана на рис. 13.17. Произведен переход от прямоугольных к цилиндрическим координатам с помощью встроенной функции `cyl2xyz`, которая входит параметром в функцию `CreateMesh`, создающую массив значений для построения поверхности. Параметрами функции `CreateMesh` являются K — функция полярных координат поверхности, пределы измене-

ния координат по углу и по оси оболочки, функция преобразования координат `fmap`.

Промежуточная функция $K(y,\theta)$ задает вектор координат точек поверхности (сверху вниз: вдоль радиуса, по углу, по оси оболочки).

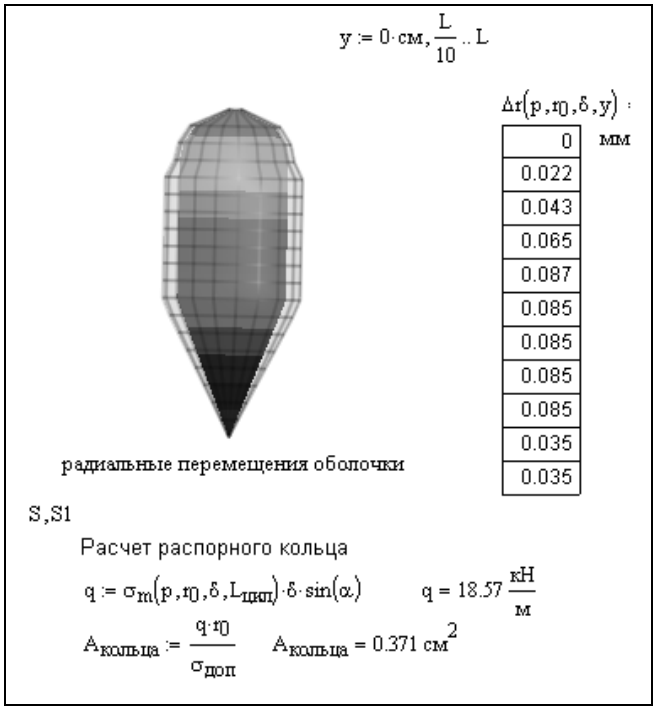


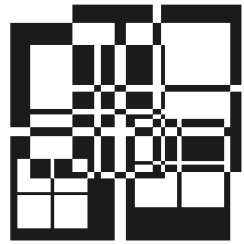
Рис. 13.18. Вид оболочки до и после деформации

Поскольку радиальные перемещения оболочки малы, для наглядности они увеличены с помощью масштабного коэффициента $10^{2.8}$. Такая форма записи масштабного коэффициента очень удобна. Она позволяет, меняя показатель степени, быстро менять масштаб графика.

В заключение расчета определена площадь распорного кольца для разгрузки оболочки от изгибающего момента в месте перехода от конической к цилиндрической части оболочки.

Получилась элегантная и универсальная программа для расчета любой тонкостенной оболочки. Для оболочки, составленной из других элементов, внесите соответствующие изменения в подпрограммы определения напряжений и радиусов кривизны на рис. 13.14.

ГЛАВА 14



Динамика упругих систем

Рассмотрим особенности динамического поведения конструкций.

1. Появление сил инерции и необходимость их учета при определении деформаций и напряжений.

   В основе динамических расчетов лежит принцип Д'Аламбера. Согласно этому принципу, движущееся тело можно рассматривать как находящееся в равновесии под действием внешних сил и сил инерции.

   Динамическим считаем нагружение, при котором силы инерции сопоставимы со статическими нагрузками, или даже значительно превосходят их.

2. Учет сил сопротивления движению. Силы сопротивления движению тела уменьшают скорость движения, вызывают затухание колебаний. К силам сопротивления относятся:

   - Сопротивление внешней среды (газа или жидкости) движению тела.

     Сила сопротивления газа примерно пропорциональна скорости движения тела $R_{\text{сопр}} \sim V$, сила сопротивления жидкости пропорциональна квадрату скорости (гидравлический тормоз) $R_{\text{сопр}} \sim V^2$.

   - Сила трения. Силу сухого трения в расчетах обычно берут постоянной $R_{\text{сопр}} \sim Const$.

   - Сила внутреннего трения пропорциональна скорости деформации тела $R_{\text{сопр}} \sim V$. Причина внутреннего трения — в микропластических деформациях, происходящих в микрочастицах металла.

3. Нагрузки, перемещения, деформации и напряжения зависят от времени.

14.1. Учет сил инерции при движении тела

При движении тела возникающие силы инерции рассматриваются как обычные внешние силы, действующие на тело. Силы инерции всегда противоположны ускорению тела $F_{\text{ин}} = m\dfrac{d^2u}{dt^2}$. При движении тела с постоянной скоростью силы инерции отсутствуют. При равноускоренном (равнозамедленном) движении сила инерции складывается с внешними силами (рис. 14.1).

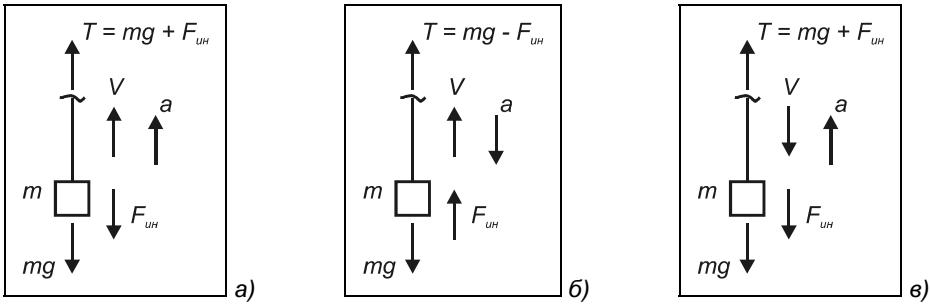


Рис. 14.1. Силы инерции при подъеме груза с постоянным ускорением

Усилие в тросе при равноускоренном подъеме (рис. 14.1, *а*) или равнозамедленном спуске (рис. 14.1, *в*)

$$N = Q + F_{\text{ин}} = mg + ma = mg\left(1 + \frac{a}{g}\right) = Q \cdot k_{\text{д}},$$

где $k_{\text{д}} = 1 + \dfrac{a}{g}$ — коэффициент динамичности.

При упругой деформации, когда справедлив закон Гука, коэффициент динамичности показывает, во сколько раз нагрузки, перемещения, деформации и напряжения возрастают по сравнению со статическим нагружением конструкции.

При равнозамедленном подъеме или равноускоренном спуске (рис. 14.1, *б*)

$$N = Q - F_{\text{ин}} = mg\left(1 - \frac{a}{g}\right) = Q \cdot k_{\text{д}}, \text{ где } k_{\text{д}} = 1 - \frac{a}{g}.$$

При вращении конструкции возникает центробежная сила. При вращении с постоянной угловой скоростью ω центробежная сила $F_{\text{ц}} = m\omega^2 R$, где R — радиус вращения (рис. 14.2).

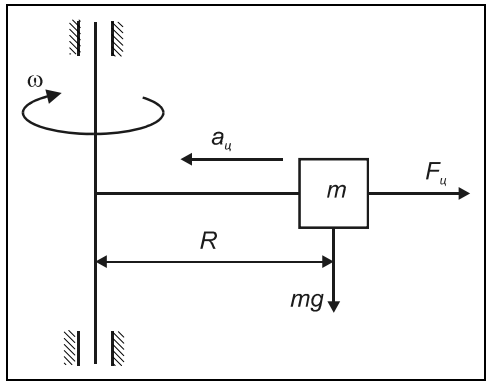


Рис. 14.2. Учет сил инерции при вращении системы

14.2. Колебания упругой системы

В этом разделе рассмотрим колебательное движение системы с одной степенью свободы.

Под степенью свободы понимаем число независимых координат, однозначно определяющих положение тела в пространстве.

Система с одной степенью свободы (рис. 14.3, *а*) — это система, вся масса которой сосредоточена в одной точке, и перемещение происходит по одному направлению.

Если в системе три сосредоточенные массы, каждая из которых движется по одному направлению (рис. 14.3, *б*), — это система с тремя степенями свободы.

Если в системе одна масса, но надо учитывать два движения: поступательное и вращательное, — это система с двумя степенями свободы (рис. 14.3, *в*).

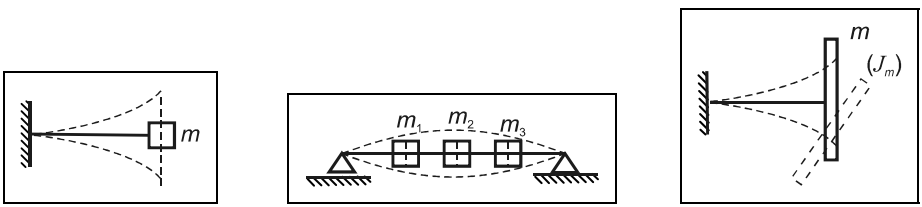


Рис. 14.3. Системы с различным числом степеней свободы

Если масса распределена по всему объему тела, то число степеней свободы такого тела бесконечно велико.

Далее в этой главе будем рассматривать лишь простейший случай колебательного движения системы с одной степенью свободы.

Если система имеет несколько степеней свободы, то сложность расчета многократно увеличивается и составлять сложные аналитические уравнения для решения задачи нерационально. Лучше воспользоваться методом конечных элементов, где число степеней свободы не имеет значения.

Примеры динамических расчетов методом конечных элементов на базе Mathcad приведены в моей книге "Инженерные расчеты в Mathcad" [6].

14.2.1. Уравнение движения системы с одной степенью свободы

Рассмотрим модель простейшей колебательной системы с одной степенью свободы. Каждое реальное тело можно представить как набор элементов, соединенных между собой последовательно или параллельно. Критерий правильности выбора модели поведения тела — совпадение или близость поведения реального тела и его модели.

В нашем случае модель (рис. 14.4) составлена из трех элементов: инерционного элемента (масса m), упругого элемента (пружина) с жесткостью k и демпфера с коэффициентом демпфирования d.

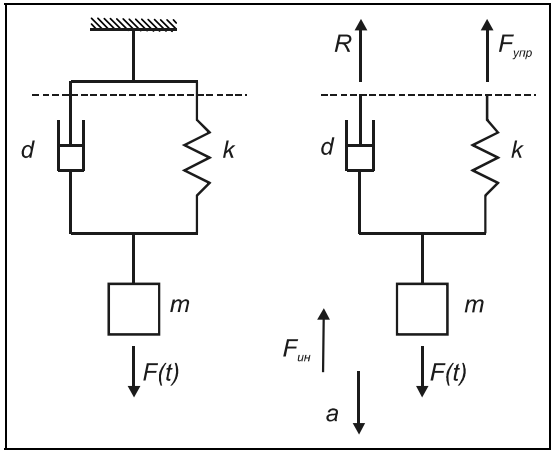


Рис. 14.4. Модель простейшей колебательной системы с одной степенью свободы

Рассечем модель произвольным сечением и рассмотрим равновесие отсеченной части под действием внешних и внутренних сил.

Внешними являются вынуждающая сила $F(t)$ и сила инерции $F_{\text{ин}} = m\dfrac{d^2u}{dt^2}$, направленная противоположно ускорению движения системы.

Внутренними являются упругая сила пружины $F_{\text{упр}} = ku$ и сила сопротивления, вызванная внутренним трением между частицами тела $R_{\text{сопр}} = d\dfrac{du}{dt} = 2hm\dfrac{du}{dt}$. Коэффициент демпфирования d в расчетах обычно заменяют величиной $2hm$, где h — коэффициент затухания колебаний. Такая форма записи более удобна при решении дифференциального уравнения движения тела.

Здесь и далее u — перемещение массы по направлению степени свободы тела.

Запишем уравнение равновесия отсеченной части модели

$$\sum F_y = F_{\text{ин}} + R_{\text{сопр}} + F_{\text{упр}} - F(t) = 0 .$$

Подставим аналитические выражения этих сил

$$m\frac{d^2u}{dt^2} + 2hm\frac{du}{dt} + ku = F(t) . \qquad (14.1)$$

Полученное выражение (14.1) называется уравнением движения системы с одной степенью свободы. Решение этого уравнения рассматривается в курсе физики и в теоретической механике, поэтому здесь приведем лишь результаты его решения.

Представим уравнение в стандартном виде, разделив все его члены на m

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2h\frac{du}{dt} + \omega^2 u = \frac{F(t)}{m}, \qquad (14.2)$$

где $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ — собственная частота колебаний тела.

Отметим частные случаи этого уравнения.

- Уравнение (14.1) описывает вынужденные затухающие колебания системы.
- Если $F(t) = 0$, то свободные затухающие колебания.
- Если $F(t) = 0$ и $h = 0$, то свободные незатухающие колебания.

Решение уравнения 14.1 складывается из общего решения дифференциального уравнения (без правой части) и частного решения $u = u_{\text{общ}} + u_{\text{част}}$.

14.2.2. Свободные затухающие колебания

Частное решение равно нулю. Полное решение равно общему $u = u_{\text{общ}}$. Решение ищем в виде

$$u = e^{-ht}\left(C_1\cos(\lambda t) + C_2\sin(\lambda t)\right) \tag{14.3}$$

или

$$u = Ae^{-ht}\sin(\lambda t + \varepsilon), \tag{14.4}$$

где $\lambda = \sqrt{\omega^2 - h^2}$, ω — собственная (круговая) частота колебаний системы, h — коэффициент затухания колебаний системы.

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определяем из начальных условий.

При $t = 0$:

1) перемещение $u = u_0$;

2) скорость $\dfrac{du}{dt} = V_0$.

Тогда из первого условия $C_1 = u_0$.

Из второго условия

$$\frac{du}{dt} = -he^{-ht}\left(C_1\cos(\lambda t) + C_2\sin(\lambda t)\right) + e^{-ht}\left(-C_1\lambda\sin(\lambda t) + C_2\lambda\cos(\lambda t)\right).$$

При $t = 0$ $V_0 = -hC_1 + C_2\lambda$.

$$C_2 = \frac{V_0 + hC_1}{\lambda} = \frac{V_0 + hu_0}{\lambda}.$$

В уравнении (14.4) $A = \sqrt{C_1^{\,2} + C_2^{\,2}}$ $\varepsilon = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{C_1}{C_2}\right)$, или с учетом значений C_1 и C_2

$$A = \sqrt{u_0^{\,2} + \left(\frac{V_0 + hu_0}{\lambda}\right)^2} \qquad \varepsilon = \operatorname{arctg}\left(\frac{u_0\lambda}{V_0 + hu_0}\right). \tag{14.5}$$

На рис. 14.5 показаны графики затухающих $h \neq 0$ и незатухающих $h = 0$ колебаний, построенных по уравнению (14.4).

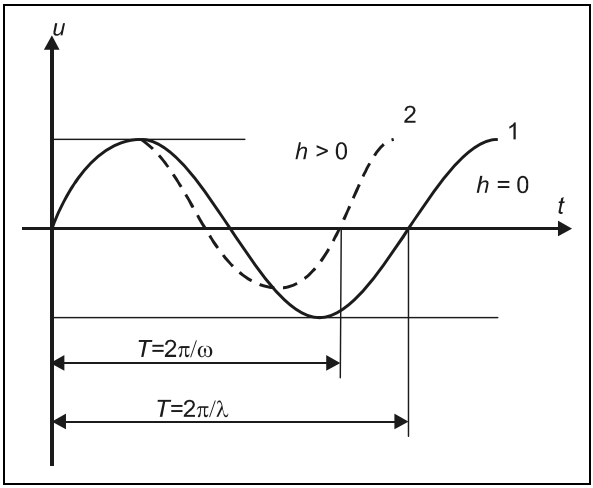


Рис. 14.5. Диаграммы затухающих (кривая 2) и незатухающих (кривая 1) колебаний

Период затухающих колебаний больше, чем период незатухающих колебаний. Из выражения $\lambda = \sqrt{\omega^2 - h^2}$ следует, что $\lambda \le \omega$.

Для оценки затухания колебаний введем $\frac{h}{\omega}$ — относительный коэффициент затухания.

По экспериментальным данным:

- для стальных балок, где колебания затухают довольно медленно $\frac{h}{\omega} \sim 0,02$;
- для автомобильного амортизатора, отличающегося быстрым затуханием колебаний $\frac{h}{\omega} \sim 0,2$.

В большинстве случаев $0,01 < \frac{h}{\omega} < 0,3$.

Сравним значения λ и ω при $\frac{h}{\omega} = 0,3$

$$\lambda = \sqrt{\omega^2 - h^2} = \omega\sqrt{1 - \left(\frac{h}{\omega}\right)^2} = \omega\sqrt{1 - 0,09} = 0,95\omega,$$ т. е. $\lambda \approx \omega$.

Для стальных конструкций $\frac{h}{\omega} \sim 0,02$ практически нет разницы между λ и ω.

Особым случаем являются гидравлические устройства. Для гидробуфера $\frac{h}{\omega} > 1$.

14.2.3. Опытное определение коэффициента затухания колебаний

Затухание колебаний оценивается логарифмическим декрементом

$$\delta = \ln \frac{u_i}{u_{i+1}}, \tag{14.6}$$

где u_i и u_{i+1} — амплитуды двух соседних пиков колебаний (рис. 14.5).

Запишем отношение амплитуд колебаний с использованием выражения (14.4)

$$\frac{u_i}{u_{i+1}} = e^{\delta} = \frac{Ae^{-ht}\sin(\lambda t + \varepsilon)}{Ae^{-h(t+T)}\sin\left(\lambda(\tau + T) + \varepsilon\right)} = e^{hT},$$

где T — период колебаний. Тогда $\delta = hT = h\frac{2\pi}{\lambda}$. Откуда $h = \frac{\delta\lambda}{2\pi}$.

С учетом $\lambda \approx \omega$

$$\frac{h}{\omega} = \frac{\delta}{2\pi}. \tag{14.7}$$

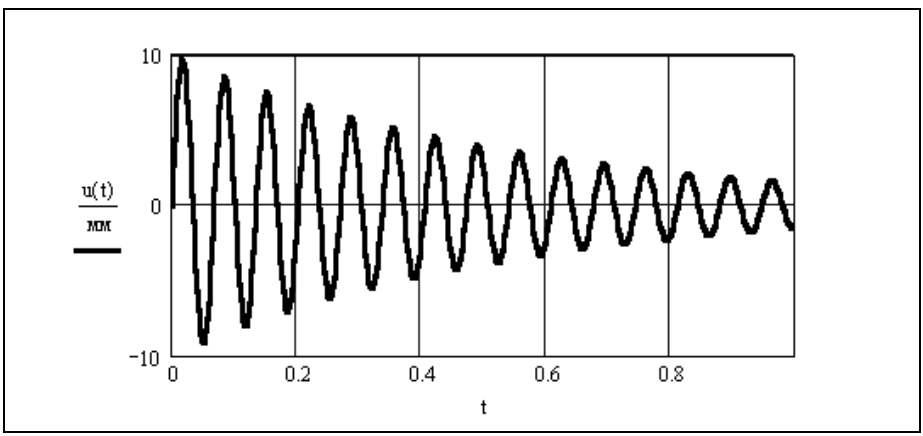


Рис. 14.6. Экспериментальная диаграмма затухающих колебаний

Для определения коэффициента затухания надо иметь график затухающих колебаний. Например, стукнуть кулаком по балке и записать изменение

амплитуды колебаний на диаграмму или осциллограмму (рис. 14.6). Определить логарифмический декремент по формуле (14.6) и коэффициент затухания по формуле (14.7).

14.3. Определение собственной частоты системы с одной степенью свободы

Рассмотрим два варианта определения собственной частоты: без учета собственной массы системы и с учетом этой массы.

14.3.1. Собственная частота системы без учета ее массы

Для системы с одной степенью свободы собственная частота ω определяется по уравнению (14.2) как

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{14.8}$$

где k — жесткость системы, m — сосредоточенная масса, собственной массой системы пренебрегаем (рис. 14.7).

Жесткость системы k — величина, обратная податливости δ, а податливость — это статическое перемещение от единичной силы $\bar{F} = 1$, определяемое чаще всего с помощью интеграла Мора $\delta_{11} = \sum \int_L \frac{\bar{M}^2 dS}{EJ}$.

Для определения жесткости системы изобразим систему, нагруженную сосредоточенной силой (любой), приложенной в точке, где находится сосредоточенная масса, в направлении перемещения точки в процессе колебаний (в направлении степени свободы).

По закону Гука $F = k\Delta_{\text{стат}}$, тогда $k = \frac{F}{\Delta_{\text{стат}}}$, где $\Delta_{\text{стат}}$ определяется с помощью интеграла Мора.

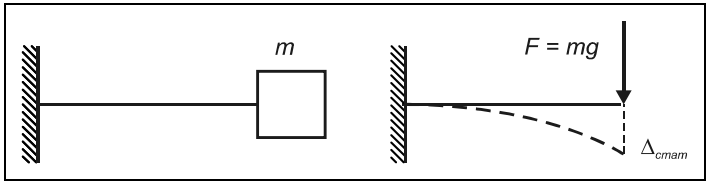


Рис. 14.7. К расчету собственной частоты без учета массы системы

Если степень свободы — вертикальное перемещение, формулу (14.8) можно упростить. Пусть $F = mg = k\Delta_{\text{стат}}$, тогда $k = \dfrac{mg}{\Delta_{\text{стат}}}$. Подставив k в формулу (14.8), получаем собственную (круговую) частоту системы

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{\text{стат}}}}, \tag{14.9}$$

где $\Delta_{\text{стат}}$ — вертикальное перемещение от веса сосредоточенной массы.

Зная круговую частоту ω, можно определить частоту колебаний f (герц) и период колебаний T

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{и} \quad T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \tag{14.10}$$

14.3.2. Собственная частота системы с учетом ее массы

Рассмотрим консольную балку массой m_0 с сосредоточенной массой m на конце балки (рис. 14.8). Если массу балки m_0 считать распределенной, система имеет бесконечное число степеней свободы.

Чтобы рассматривать ее как систему с одной степенью свободы, надо распределенную массу заменить сосредоточенной, приложенной в той же точке, что и масса m. Собственную частоту определим для системы с сосредоточенной массой $m + k_{\text{пр}}m_0$, где $k_{\text{пр}}$ — коэффициент приведения массы.

Условием приведения массы является равенство кинетических энергий систем с распределенной $T_{\text{расп}}$ и с сосредоточенной приведенной $T_{\text{соср}}$ массой.

$$T_{\text{расп}} = \int_m \frac{dmV^2}{2} = \int_L \frac{m_0 dx \cdot V^2}{2L},$$

$$T_{\text{соср}} = k_{\text{пр}} m_0 V_0^2 .$$

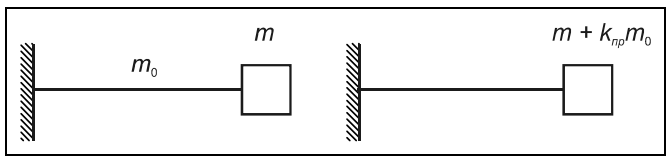


Рис. 14.8. К расчету собственной частоты с учетом массы системы

Приравнивая кинетические энергии $T_{\text{расп}} = T_{\text{соср}}$, находим коэффициент приведения массы

$$k_{\text{пр}} = \frac{1}{m_0} \int_{m_0} \left(\frac{V}{V_0} \right) dm .$$

Распределение скоростей по длине балки неизвестно. Примем гипотезу.

Гипотеза

Распределение скоростей пропорционально распределению перемещений по длине балки.

Эта гипотеза справедлива для достаточно жестких тел при сравнительно малых собственных частотах (до первой собственной частоты). Тогда

$$\frac{V}{V_0} \approx \frac{\Delta}{\Delta_0}$$

и коэффициент приведения массы примет вид

$$k_{\text{пр}} = \frac{1}{m_0} \int_{m_0} \left(\frac{\Delta}{\Delta_0} \right)^2 dm . \qquad (14.11)$$

В этих выражениях m_0 — масса балки, Δ и V — перемещение и скорость произвольной точки балки, Δ_0 и V_0 — перемещение и скорость точки приведения массы балки, $dm = \rho A(x) dx$.

Если сечение по длине балки постоянное $A = Const$, то $dm = \frac{m_0}{L} dx$ и коэффициент приведения массы примет вид

$$k_{\text{пр}} = \frac{1}{L} \int_{L} \left(\frac{\Delta}{\Delta_0} \right)^2 dx . \qquad (14.12)$$

После приведения всех масс в одну точку получили систему с одной степенью свободы. Ее собственная частота

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + k_{\text{пр}} m_0}} . \qquad (14.13)$$

Для случая колебания по вертикали $k = \dfrac{mg}{\Delta_{\text{стат}}}$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{\text{стат}}} \cdot \frac{m}{m + k_{\text{пр}} m_0}} \,. \tag{14.14}$$

14.3.3. Собственная частота при крутильных колебаниях

При крутильных колебаниях роль массы m исполняет момент инерции массы J_m. Уравнение колебательного движения имеет вид

$$J_m \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2hJ_m \frac{d\varphi}{dt} + k\varphi = M(t) \,.$$

Решение этого уравнения аналогично решению уравнения (14.1). Соответственно подобным получается и выражение для круговой частоты ω

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{J_m + k_{\text{пр}} J_{m_0}}} \,.$$

14.3.4. Замечания к расчету собственных частот колебаний

В этом разделе рассмотрено определение собственной частоты системы только с одной степенью свободы, как правило, для прямых стержней. Для рам и кривых брусьев движение точек в процессе колебаний происходит по сложным криволинейным траекториям и следует учитывать несколько степеней свободы. В этом случае расчет многократно усложняется.

Расчет колебаний систем с большим числом степеней свободы лучше всего производить с использованием метода конечных элементов. Примеры динамических расчетов методом конечных элементов можно посмотреть в моей книге "Инженерные расчеты в Mathcad" [6] и использовать в своих расчетах.

Для различных случаев колебания двух-трех массовых систем готовые формулы для определения собственных частот можно найти в справочниках.

Следует иметь в виду, что от того, что мы решили рассмотреть балку, как систему с одной степенью свободы, она не перестала быть системой с бесконечным числом степеней и с бесконечным количеством собственных частот. Число собственных частот равно числу степеней свободы системы.

На рис. 14.9 приведены формы колебания на первых трех собственных частотах консольной балки. Собственные частоты ω_i и максимальные амплитуды колебаний A_i приведены для линейки из оргстекла длиной 0,5 м. Заметим, что никакой кратности собственных частот не наблюдается. Амплитуда колебаний максимальна для первой (низшей) собственной частоты. Для второй уже в три раза меньше, для третьей в 10 раз меньше, чем для первой. Для четвертой собственной частоты амплитуда исчезающе мала. Если дотронутся рукой, можно ощутить дрожание линейки, но померить уже нельзя.

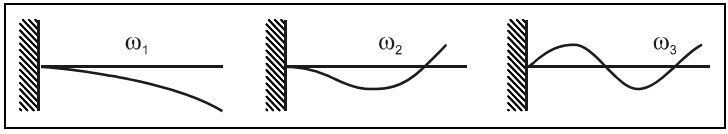


Рис. 14.9. Формы колебания консольной балки

Наибольшие деформации и напряжения в любой системе возникают при резонансе на первой собственной частоте, поэтому для расчета на прочность важно знать именно первую (низшую) собственную частоту.

Формулы (14.8) и (14.13) можно использовать и при расчете рам для определения первой собственной частоты. При этом ошибка может быть довольно большой.

Не следует забывать, что расчеты на прочность вообще не отличаются высокой точностью. Какими бы точными не были расчетные формулы, ошибка в определении механических свойств материала и в выборе коэффициента запаса, а также необходимость учета вероятности разрушения не позволяют достигнуть высокой точности расчета.

Ориентировочно можно определить и первую собственную частоту сложной конструкции. Допустим: перед вами "черный ящик" — сложная конструкция с исполнительным органом-рычагом. Для оценки его собственной частоты определим жесткость конструкции. Подвесим на рычаг любой груз весом F и измерим перемещение $\Delta_{\text{стат}}$ под действием этого груза. Тогда жесткость $k = \dfrac{F}{\Delta_{\text{стат}}}$. По формуле (14.8) определяем ориентировочную низшую собственную частоту конструкции.

Рабочая частота исполнительного органа не должна приближаться к собственной частоте колебаний конструкции. Если простейший расчет по формуле (14.8) показывает близость таких частот, надо изменить жесткость системы или ее массу.

Порой достаточно положить на раму мешок с песком, чтобы резко уменьшить собственную частоту конструкции, или приварить какую-нибудь перекладину, чтобы увеличить жесткость и собственную частоту.

14.4. Ударная нагрузка

Действие на систему с одной степенью свободы ударной нагрузки рассмотрим как частный случай колебаний.

Далее излагается приближенная теория удара, основанная на ряде упрощающих расчет допущений.

- Ударяющее тело абсолютно жесткое.
- Удар происходит без отскока, т. е. практически ударяющее тело прилипает к ударяемому.
- Справедлив закон Гука. Пластических деформаций нет.
- Не учитывается волновой характер удара.

Обычно целью расчета является определение динамических напряжений и перемещений при ударе. Нужно определить, во сколько раз напряжения и перемещения при ударе больше, чем при статической нагрузке. Для этого определяют коэффициент динамичности $k_д = \frac{\sigma_{дин}}{\sigma_{стат}} = \frac{\Delta_{дин}}{\Delta_{стат}}$.

Есть некоторые особенности в рассмотрении вертикального, горизонтального и крутящего удара.

14.4.1. Вертикальный удар

Пусть на горизонтальную балку падает с высоты H груз массой m (рис. 14.10). Максимальное перемещение точки соударения при ударе обозначим $\Delta_{дин}$.

После удара начинается совместное колебательное движение системы груз-балка. Перемещение точки соударения u во времени показано справа на рис. 14.9.

Колебания — затухающие. После остановки колебаний точка соударения займет положение $\Delta_{стат}$, соответствующее статической нагрузке $Q = mg$. Это положение примем за нуль отсчета перемещений u. Тогда при $t = 0$ $u_0 = \Delta_{стат}$.

При затухающих колебаниях максимальная амплитуда колебаний достигается в первом полупериоде. Соответственно в этот момент динамические на-

пряжения в балке будут наибольшими. Дальнейшие колебания можно не учитывать. Такой процесс называют квазистатическим.

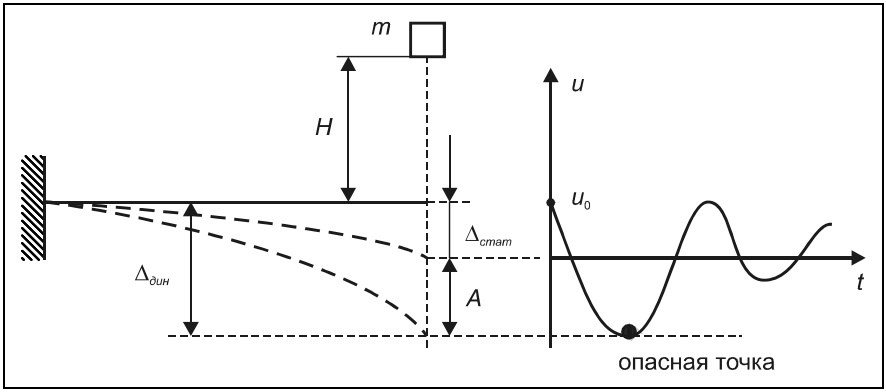


Рис. 14.10. Перемещения при вертикальном ударе

Затуханием колебаний в этом процессе можно пренебречь. Коэффициент затухания колебаний в дальнейших расчетах полагаем равным нулю $h = 0$.

Динамическое перемещение точки соударения представим как сумму статического перемещения $\Delta_{стат}$ и амплитуды колебаний A

$$\Delta_{дин} = \Delta_{стат} + A .$$

По формуле (14.5) $A = \sqrt{{u_0}^2 + \left(\frac{V_0 + hu_0}{\lambda}\right)^2}$. С учетом $u_0 = \Delta_{стат}$ и $\lambda \approx \omega$

$$\Delta_{дин} = \Delta_{стат} + \sqrt{\Delta_{стат}^2 + \frac{V_0^2}{\omega^2}} \qquad (14.15)$$

В этом выражении V_0 — скорость движения системы груз-балка в начальный момент колебаний. Для ее нахождения воспользуемся теоремой о количестве движения.

$$mV = (m + k_{пр} m_0) V_0 .$$

Здесь mV — количество движения падающего груза перед ударом, $(m + k_{пр} m_0) V_0$ — количество движения системы груз-балка в момент начала колебаний. Тогда

$$V_0 = \frac{mV}{m + k_{пр} m_0} . \qquad (14.16)$$

Подставим выражения V_0 (14.16) и ω (14.14) в выражение $\Delta_{дин}$ (14.15)

$$\Delta_{дин} = \Delta_{стат} + \sqrt{\Delta_{стат}^2 + \frac{m^2 V^2 \Delta_{стат}(m + k_{пр} m_{0)}}{\left(m + k_{пр} m_0\right)^2 gm}} .$$

После упрощения получаем

$$\Delta_{дин} = k_д \Delta_{стат} = \Delta_{стат}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{g\Delta_{стат}} \cdot \frac{m}{m + k_{пр} m_0}}\right).$$

В этом выражении $k_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{g\Delta_{стат}} \cdot \frac{m}{m + k_{пр} m_0}}$ — коэффициент динамичности, показывающий, во сколько раз динамические перемещения больше статических.

Выразим скорость движения груза V через высоту его падения H

$$V = \sqrt{2gH} .$$

Тогда формула для коэффициента динамичности $k_д$ примет вид

$$k_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{стат}} \cdot \frac{m}{m + k_{пр} m_0}} . \qquad (14.17)$$

Поскольку деформации при ударе считаем упругими, то напряжения пропорциональны перемещениям и возрастают при ударе во столько же раз, что и перемещения

$$\begin{aligned} \Delta_{дин} &= k_д \Delta_{стат} \\ \sigma_{дин} &= k_д \sigma_{стат} \end{aligned} . \qquad (14.18)$$

14.4.2. Горизонтальный удар

Рассмотрим вертикальную балку, в которую ударяется груз массой m, движущийся горизонтально (рис. 14.11).

После совместного колебания система груз-балка останавливается в положении $\Delta_{стат} = 0$. Поэтому динамическое перемещение точки соударения равно максимальной амплитуде колебаний $\Delta_{дин} = A$. Тогда выражение (14.15) примет вид

$$\Delta_{дин} = \sqrt{\frac{V^2}{\omega^2}} .$$

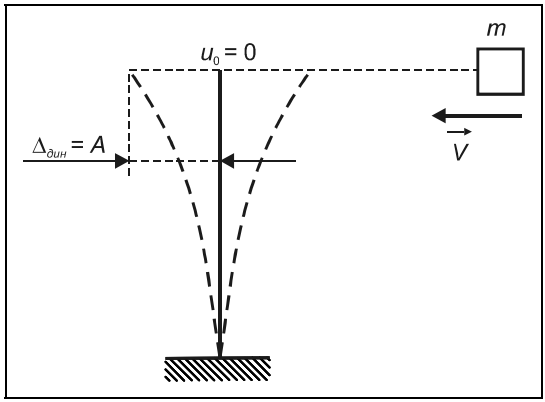


Рис. 14.11. Перемещения при горизонтальном ударе

Подставив выражения V_0 (14.16) и ω (14.13) в выражение $\Delta_{дин}$, получаем

$$\Delta_{дин} = \Delta_{стат}\sqrt{\frac{V^2}{g\Delta_{стат}} \cdot \frac{m}{m + k_{пр}m_0}}.$$

Окончательно для расчета при горизонтальном ударе получаем

$$\begin{aligned} \Delta_{дин} &= k_д \Delta_{стат} \\ \sigma_{дин} &= k_д \sigma_{стат} \end{aligned} \quad \text{и} \quad k_д = \sqrt{\frac{V^2}{g\Delta_{стат}} \cdot \frac{m}{m + k_{пр}m_0}}. \qquad (14.19)$$

14.4.3. Крутящий удар

При крутящем ударе нет понятия коэффициента динамичности, т. к. энергию вращающегося тела нельзя связать с какой-либо статической нагрузкой. В такой задаче надо использовать закон сохранения энергии $T = П$. Кинетическая энергия ударяющего тела T равна потенциальной энергии упругой деформации $П$ системы тел (ударяющего и ударяемого).

Общей формулы для решения задач на крутящий удар нет.

Рассмотрим резкое торможение вращающегося вала с маховиком.

Кинетическая энергия вращающегося вала

$$T = \frac{\left(J_m + k_{пр}J_{m_0}\right)\omega^2}{2},$$

где J_m и J_{m_0} — моменты инерции массы маховика и вала, ω — угловая скорость вращения вала.

Потенциальная энергия вала в момент остановки

$$П = \frac{M_{к.д}\varphi_д}{2} = \frac{M_{к.д}^2}{2k},$$

где $M_{к.д}$ и $\varphi_д$ — динамические крутящий момент и угол закручивания стержня, $k = \dfrac{GJ_p}{L}$ — жесткость вала при кручении.

Тогда из условия $T = П$ находим $M_{к.д} = \sqrt{2kT}$.

Максимальное динамическое напряжение при ударе $\tau_{max.д} = \dfrac{M_{к.д}}{W_p}$.

14.4.4. Замечания к расчетам на ударную нагрузку

В силу принятых допущений расчет получается неточным. В месте удара, как правило, остается вмятина, свидетельствующая о наличии пластических деформаций, увеличивающих величину $\Delta_{дин}$. Упругий удар всегда происходит с отскоком падающего груза. Распространение ударных волн и их интерференция может резко изменить картину удара.

Реально коэффициент динамичности меньше, найденного по формулам (14.17) и (14.19).

В силу приближенности расчета в формуле (14.17) можно пренебречь единицами под корнем квадратным и перед корнем при большом отношении $\dfrac{2H}{\Delta_{стат}} > 100$.

$$k_д = \sqrt{\frac{2H}{\Delta_{стат}} \cdot \frac{m}{m + k_{пр} m_0}}.$$

Зачастую можно в первом приближении пренебречь собственной массой системы по сравнению с массой падающего груза. Тогда

При вертикальном ударе

$$k_д = \sqrt{\frac{2H}{\Delta_{стат}}}. \qquad (14.20)$$

При горизонтальном ударе

$$k_д = \sqrt{\frac{V^2}{g\Delta_{стат}}}. \qquad (14.21)$$

Расчет по формулам (14.20) и (14.21) приводит к завышенным значениям динамических напряжений и перемещений.

14.5. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы

Рассмотрим общий случай решения дифференциального уравнения движения (14.1) под действием вынуждающей силы $F(t)$, изменяющейся во времени

$$m\frac{d^2u}{dt^2} + 2hm\frac{du}{dt} + ku = F(t).$$

Решение этого уравнения состоит из общего и частного

$$u = u_{\text{общ}} + u_{\text{част}}.$$

Общее решение было получено в *разд. 14.2.*

$$u = Ae^{-ht}\sin(\lambda t + \varepsilon).$$

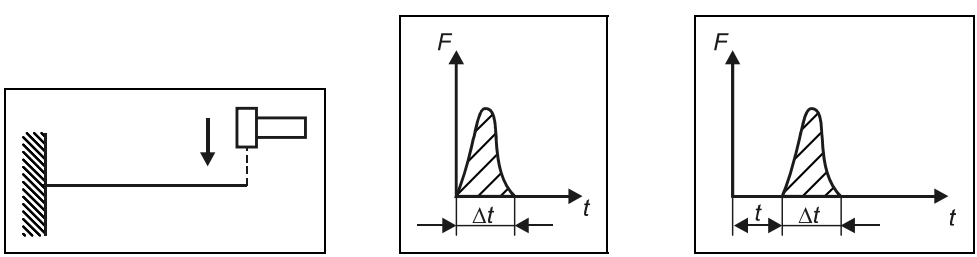
Частное решение зависит от вида правой части уравнения, т. е. от характера вынуждающей силы $F(t)$. Рассмотрим некоторые виды вынуждающей силы.

14.5.1. Импульс силы

Стукнем молотком по концу консольной балки (рис. 14.12, *а*).

Продолжительность действия силы Δt мала. Величина импульса силы равна площади диаграммы $P - \Delta t$ (рис. 14.12, *б*)

$$S = \int_0^{\Delta t} F dt.$$



а) *б)* *в)*

Рис. 14.12. Импульс силы, приложенный к балке

По окончании действия силы происходят свободные колебания балки.

Определим начальные условия свободных колебаний: перемещение $u_{\Delta t}$ и скорость $V_{\Delta t}$ в конце времени действия импульса силы Δt.

Представим силу как произведение массы на ускорение

$$F = m\frac{d^2u}{dt^2} = m\frac{dV}{dt}.$$

Тогда импульс силы

$$S = \int_0^{\Delta t} m\frac{dV}{dt}dt = m\left(V_{\Delta t} - V_0\right).$$

До приложения импульса силы скорость равна нулю $V_0 = 0$. Тогда $V_{\Delta t} = \frac{S}{m}$.

С учетом инерционности системы при малом времени действия силы $\Delta t < 0,2T$ можно принять $u_{\Delta t} \approx 0$.

По окончании действия импульса силы свободные колебания начинаются при начальных условиях $u_0 = u_{\Delta t} = 0 \quad V_0 = V_{\Delta t} = \frac{S}{m}$. Перемещения описываются общим решением уравнения (14.1)

$$u = Ae^{-ht}\sin(\lambda t + \varepsilon), \text{ где } \lambda = \omega,$$

$$A = \sqrt{u_0{}^2 + \left(\frac{V_0 + hu_0}{\omega}\right)^2} = \frac{V_0}{\omega} = \frac{S}{m\omega},$$

$$\varepsilon = \operatorname{arctg}\left(\frac{u_0\omega}{V_0 + hu_0}\right) = 0.$$

Тогда $u = \frac{S}{m\omega}e^{-ht}\sin(\omega t)$.

Рассмотрим сдвиг по времени. Пусть импульс силы прикладывается к системе при $t = \tau$ (рис. 14.12, *в*). Тогда

$$u = \frac{S}{m\omega}e^{-h(t-\tau)}\sin\left(\omega(t-\tau)\right). \qquad (14.22)$$

14.5.2. Произвольная нагрузка

Представим произвольную нагрузку (рис. 14.13) как сумму импульсов, а перемещение от произвольной нагрузки как сумму перемещений от всех импульсов.

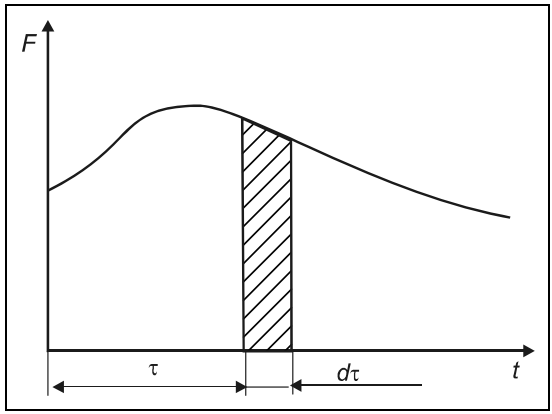


Рис. 14.13. Представление произвольной нагрузки как суммы импульсов

Вклад в перемещение отдельно взятого импульса, приложенного в момент времени τ и продолжительностью $d\tau$

$$du = \frac{dS}{m\omega} e^{-h(t-\tau)} \sin\left(\omega(t-\tau)\right), \text{ где } dS = F_\tau d\tau .$$

Тогда полное перемещение

$$u = \frac{1}{m\omega} \int_0^t F_\tau e^{-h(t-\tau)} \sin\left(\omega(t-\tau)\right). \qquad (14.23)$$

Последнее выражение называется *интеграл Дюамеля*.

Вернемся к полному решению уравнения движения (14.1).

$$u = u_{\text{общ}} + u_{\text{част}} .$$

Общее решение $u = Ae^{-ht}\sin(\omega t + \varepsilon)$ со временем быстро затухает и, если вынуждающая сила действует длительное время, полное решение равняется частному $u \approx u_{\text{част}}$. Частное решение — это есть интеграл Дюамеля.

Интеграл Дюамеля описывает отклик системы с одной степенью свободы на любую вынуждающую силу.

14.5.3. Критическая скорость вращения вала

Быстровращающиеся детали машин не могут быть идеально сбалансированы и, практически всегда, при их вращении возникает вынуждающая центробежная сила, вызывающая поперечные колебания конструкции.

Если на валу установлен маховик с небольшим эксцентриситетом e, то при вращении вала с угловой скоростью ω возникает центробежная сила

$F_{\text{ц}} = m\omega^2 e$. Тогда по любому направлению на вал действует переменная возмущающая сила $F(t) = m\omega^2 e \cdot \sin(\omega t)$.

В случае, когда частота возмущающей силы совпадет с частотой собственных поперечных колебаний вала, наступает состояние резонанса. Амплитуда колебаний вала резко возрастает.

Такая частота называется *критической угловой скоростью* вала.

Для уменьшения опасности резонанса критическую скорость вращения вала стараются сместить в сторону меньших частот, подальше от диапазона рабочих частот вала. Тогда будет меньше центробежная сила и, соответственно, амплитуда колебаний и напряжения.

Поскольку $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, для уменьшения критической скорости конструктивно уменьшают жесткость опор вала и тем самым уменьшают жесткость k, в формуле собственной частоты.

14.6. Примеры динамического расчета

Поскольку большая часть курса сопротивления материалов уже изложена в предыдущих главах, предлагаемые примеры становятся комплексными, включающими в себя знания большинства уже изученных разделов. Рассмотрим два таких примера.

14.6.1. Расчет балок на удар и колебания

Для консольной балки и балки на двух опорах массой m_0 определить:

- максимальные динамические напряжения при падении на балку груза массой m в точку с координатой x_m;
- собственную частоту колебаний с учетом массы балки и сосредоточенной массы в точке x_m;
- перемещение точки x_m балки под действием возмущающей силы $F(t)$, приложенной к этой точке.

Как более сложный, рассмотрим динамический расчет балки на двух опорах.

Программа расчета позволяет менять положение опор на балке (L_{RA} и L_{RB}) и координату точки падения груза x_m. В приведенном далее расчете использована балка длиной L на двух опорах с консолью длиной $L_{RA} = 40$ см

(рис. 14.14). Груз падает в точку $x_m = 0$ на свободном конце консоли. Балка стальная. Для нее заданы модуль Юнга E и плотность ρ. Балка ступенчатого поперечного сечения. Консоль — круглого поперечного сечения. Участок

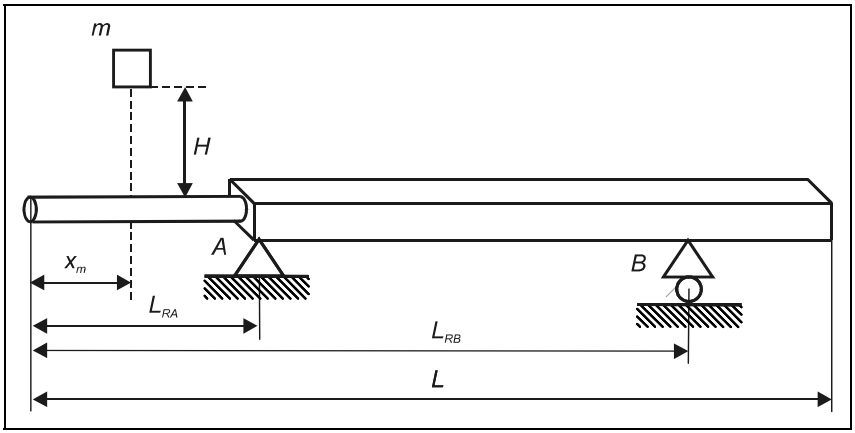


Рис. 14.14. Расчетная схема балки

Размерности, производные от стандартных

H := N кг := kg сек := s м := m мм := mm

см := cm $МПа := 10^6 \cdot \frac{H}{м^2}$ $гц := (сек)^{-1}$

b := 3·см hh := 2·см d := 2·см $E := 2 \cdot 10^5 \cdot МПа$ $\rho := 7800 \cdot \frac{кг}{м^3}$

положение опор на балке

$L_{RA} := 40 \cdot см$ $L_{RB} := 100 \cdot см$ поменяйте положение опор

$L := 100 \cdot см$ m := 5·кг $g := 9.81 \cdot \frac{м}{сек^2}$

$$A(x) := \begin{cases} \frac{\pi \cdot d^2}{4} & \text{if } x < L_{RA} \\ (b \cdot hh) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$m_0 := \int_0^L \rho \cdot A(x)\, dx$$

$m_0 = 3.788$ кг

$$J(x) := \begin{cases} \frac{\pi \cdot d^4}{64} & \text{if } x < L_{RA} \\ \frac{b \cdot hh^3}{12} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$x_F := 0 \cdot L$

поменяйте x_F

F := m·g F = 49.05 H $xx := 0 \cdot м, \frac{L}{10} .. L$ $x := 0 \cdot м, \frac{L}{10} .. L$

Рис. 14.15. Исходные данные для динамического расчета балки

между опорами — прямоугольного сечения. Форму сечения можно задать любую.

Расчет ведется с учетом размерностей.

Исходные данные для расчета показаны на рис. 14.15. На том же рисунке приведен расчет площадей поперечного сечения $A(x)$, моментов инерции $J(x)$ и массы балки m_0.

Определение коэффициента приведения массы

Для динамического расчета балки как системы с одной степенью свободы определяется коэффициент приведения массы $k_{\text{пр}}$ в точку соударения x_m. Расчет ведется по формуле (14.11)

$$k_{\text{пр}} = \frac{1}{m_0} \int_{m_0} \left(\frac{\Delta}{\Delta_0} \right)^2 dm .$$

Перемещения в этой формуле определяются с помощью интеграла Мора. Грузовое и единичное состояния балки для определения перемещения в произвольном сечении показаны на рис. 14.16. Координата xx точки, где определяется перемещение, изменяется по длине балки.

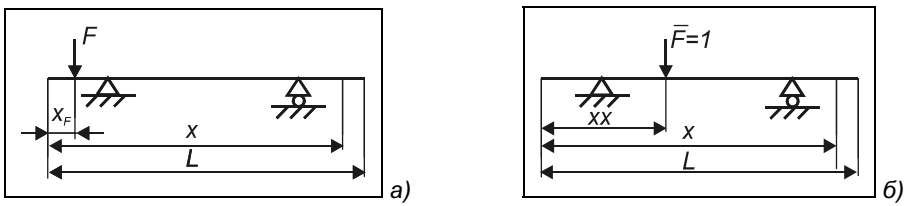


Рис. 14.16. Грузовое и единичное состояния балки при определении ее перемещений

Изгибающие моменты для грузового M и единичного $M1$ состояний балки (рис. 14.17) записаны с использованием булевых операторов условия.

Поскольку реакции опор на момент записи изгибающих моментов еще неизвестны, они внесены в список параметров функции. Для $M1$ в список параметров включена также координата точки приложения единичной силы xx, а для M — сила F, т. к. по ходу расчета надо определять M от действия различных сил. Соответственно и опорные реакции определяются как функция от силы F.

Из условий равновесия определяются опорные реакции балки в грузовом и единичном состоянии с помощью вычислительного блока `given-find`. Ис-

пользование этого блока позволяет найти обе опорные реакции, что необходимо при решении задачи для балки с двумя консолями, т. е. $L_{RB} < L$.

$M(F,R_A,R_B,x) := R_A\cdot(x - L_{RA})\cdot(x \ge L_{RA}) + R_B\cdot(x - L_{RB})\cdot(x \ge L_{RB}) - F\cdot(x - x_F)\cdot(x > x_F)$

$M1(R_A,R_B,xx,x) := R_A\cdot(x - L_{RA})\cdot(x \ge L_{RA}) + R_B\cdot(x - L_{RB})\cdot(x \ge L_{RB}) - 1\cdot(x - xx)\cdot(x > xx)$

определение опорных реакций для грузовой системы

$R_A := 10\cdot H$ $R_B := 10\cdot H$ начальные приближения

Given $M(F,R_A,R_B,L) = 0$ $R_A + R_B - F = 0$

$Z(F) := \text{Find}(R_A,R_B)$ $R_A(F) := Z(F)_0$ $R_B(F) := Z(F)_1$ $Z(F) = \begin{pmatrix} 81.75 \\ -32.7 \end{pmatrix} H$

$R := 10\cdot H$ $R_A(F) := \text{root}(M(F,R,R,L),R)$ $R_A(F) = 81.75\,H$

определение опорных реакций для единичной системы

$R1_A := 1$ $R1_B := 1$ начальные приближения

Given $M1(R1_A,R1_B,xx,L) = 0$ $R1_A + R1_B - 1 = 0$

$Z(xx) := \text{Find}(R1_A,R1_B)$ $R1_A(xx) := Z(xx)_0$ $R1_B(xx) := Z(xx)_1$

$R2_A := 1$ $R2_B := 1$ $R1_A(xx) := \text{root}(M1(R2_A,R2_B,xx,L),R2_A)$

выключите эти выражения для балки с консолью

Рис. 14.17. Определение изгибающих моментов с учетом опорных реакций балки

Если вторая реакция не используется в расчетах, то лучше определять только одну реакцию с помощью функции `root`. В этом случае вычисление интегралов идет несколько быстрее. Реакцию R_B, не участвующую в расчетах, можно при этом удалить из параметров всех функций и убрать вычислительный блок `given-find`. Вычисления от этого не меняются, но внешний вид программы улучшится.

На рис. 14.18 показано вычисление коэффициента приведения массы $k_{\text{пр}}$. Вверху записаны перемещения: Δ — точки соударения и $\Delta(xx)$ — перемещение произвольного сечения балки.

Внизу определяется коэффициент приведения массы $k_{\text{пр}}$. Этот интеграл вычисляется очень медленно. Если сечение балки по длине постоянное, вместо функции площади сечения $A(x)$ поставьте константу A. Это ускорит вычисление интеграла.

Расчет на удар

На рис. 14.19 приведен расчет максимальных динамических напряжений при ударе $\sigma_{\max.д} = \sigma_{\max.стат} k_д$.

перемещение в точке соударения

$$\Delta(F) := \int_0^L \frac{M(F, R_A(F), R_B(F), x) \cdot M1(R1_A(x_m), R1_B(x_m), x_m, x)}{E \cdot J(x)}\, dx$$

перемещение в произвольной точке $\Delta(F) = 1.076\,\text{мм}$

$$\Delta_x(xx) := \int_0^L \frac{M(F, R_A(F), R_B(F), x) \cdot M1(R1_A(xx), R1_B(xx), xx, x)}{E \cdot J(x)}\, dx$$

коэффициент приведения массы

$$k_{пр} := \frac{\rho}{m_0 \cdot \Delta(F)^2} \cdot \int_0^L A(x) \cdot \Delta_x(x)^2\, dx \qquad k_{пр} = 0.074$$

Рис. 14.18. Вычисление коэффициента приведения массы

коэффициент динамичности

$$H := 0.2 \cdot м \quad k_д := 1 + \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{H}{\Delta(F)} \cdot \frac{1}{1 + k_{пр} \cdot \frac{m_0}{m}}} \qquad k_д = 19.793$$

Определение максимальных динамических напряжений при ударе

$xa := 0.2 \cdot м$ Given $M(F, R_A(F), R_B(F), xa) = -100 \cdot Н \cdot м$ $xa := \text{Minerr}(xa)$

$xa = 0.4\,м$ $\text{maxM} := M(F, R_A(F), R_B(F), xa)$ $\text{maxM} = -19.62\,Н \cdot м$

$$W := b \cdot \frac{hh^2}{6} \quad \sigma_{max.стат} := \frac{\text{maxM}}{W} \qquad \sigma_{max.стат} = -9.81\,МПа$$

$$\sigma_{max.д} := k_д \cdot \sigma_{max.стат} \qquad \sigma_{max.д} = -194\,МПа$$

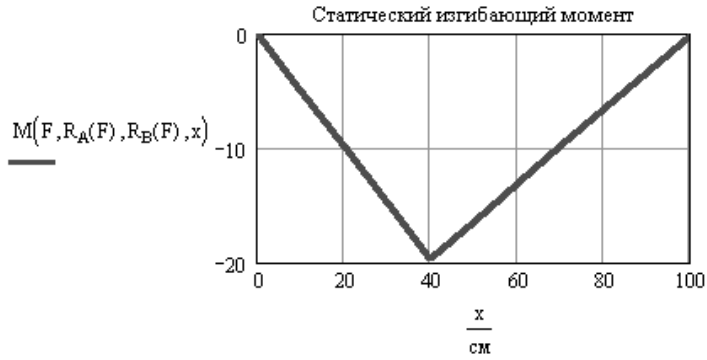


Рис. 14.19. Расчет максимальных динамических напряжений при ударе

Задавшись высотой падения груза H по формуле (14.17) определяется коэффициент динамичности $k_д$ при вертикальном ударе. Затем с помощью функции `minerr` определяется максимальный изгибающий момент, действующий на балку при статическом приложении веса груза $F = mg$. Естественно он действует на опоре A.

Далее определяются максимальные статические и динамические напряжения. Для наглядности приведена эпюра изгибающих моментов при статическом нагружении.

Определение собственной частоты колебаний балки

Вторая самостоятельная часть расчета — это определение собственной частоты колебаний балки с распределенной массой m_0 и с сосредоточенной массой m, приложенной в сечении x_m. По формуле (14.13)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + k_{пр} m_0}},$$

где жесткость k балки — величина, обратная перемещению точки приложения сосредоточенной массы от единичной силы $\delta_{11} = \sum \int_L \frac{\bar{M}^2 dS}{EJ}$.

Момент от единичной силы уже определен в начале программы (см. рис. 14.17). Определение собственной частоты ω показано на рис. 14.20.

Рис. 14.20. Определение собственной частоты колебаний балки

Там же по значению круговой частоты ω определены частота колебаний в секунду f и период колебаний T.

Вынужденные колебания балки

Следующая часть общей программы — расчет вынужденных колебаний балки под действием возмущающей силы. Для такого расчета надо определить опытное значение коэффициента затухания h. Его определяют, обрабатывая экспериментальную диаграмму затухающих колебаний. В нашем примере задаемся коэффициентом затухания h, вернее, отношением $h/\omega = 0,02$.

Обратите внимание, что отношение h/ω в программе записано как h_ω, т. к. объект присвоения в левой части выражения не может быть вычисляемым выражением, а дробь h/ω — это выражение вычисляемое.

Используя общее решение (14.4) уравнения колебательного движения (14.1) просто для иллюстрации процесса, строим диаграмму затухающих колебаний (рис. 14.21).

Как видно из этого рисунка, за первую секунду (при частоте колебаний 15 Гц) амплитуда колебаний уменьшилась в 5 раз. А через 2—3 секунды колебания практически прекратятся.

Для определения отклика балки на возмущающее действие силы использован интеграл Дюамеля $u(F,t)$ (14.23). Это перемещение точки приведения масс в вертикальном направлении от действия возмущающей силы $F(t)$.

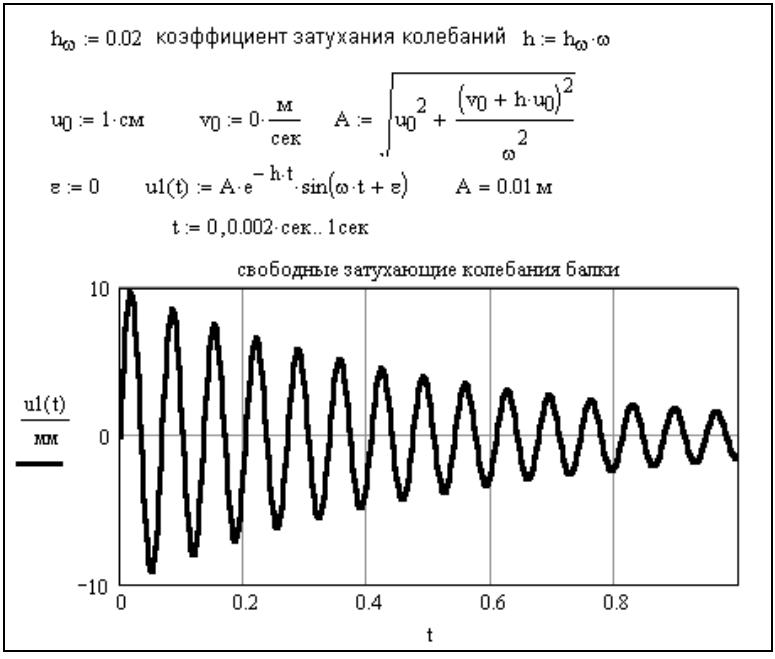


Рис. 14.21. Свободные затухающие колебания балки

Меняя в интеграле Дюамеля выражение для возмущающей силы, строим графики перемещений для различных видов возмущающей силы. На рис. 14.22 показано действие на балку гармонически действующей силы $F(t) = F_0 \sin(\nu t)$. Здесь ν — частота действия возмущающей силы $F(t)$.

В примере рассмотрен момент резонанса $\nu = \omega$. Поменяйте частоту ν и убедитесь, что амплитуда колебаний резко уменьшится.

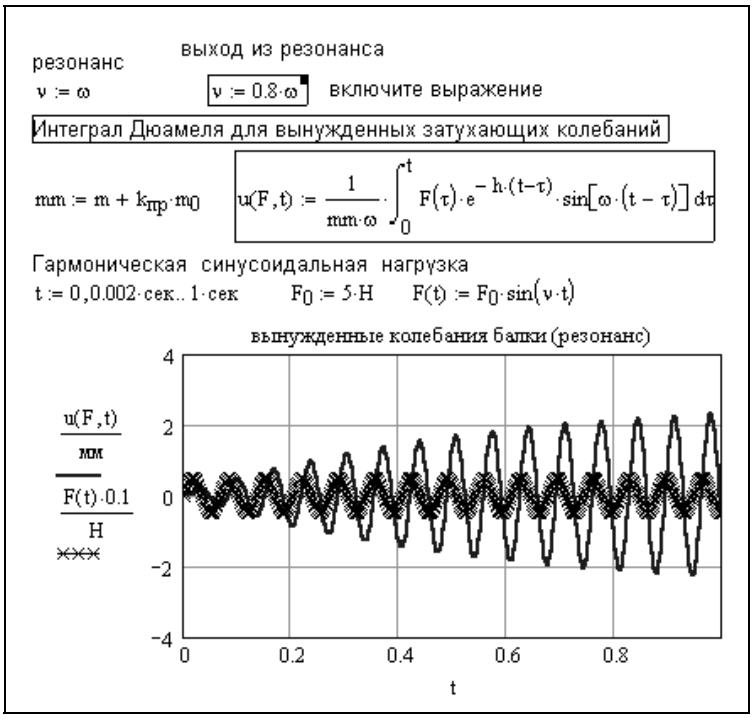


Рис. 14.22. Вынужденные колебания балки в момент резонанса при гармонической нагрузке

Визуально по графику колебаний или с помощью функции `minerr` определена динамическая амплитуда колебаний (рис. 14.23).

Коэффициент динамичности найден как отношение максимальной амплитуды колебаний при резонансе к статическому перемещению от амплитуды вынуждающей силы F_0.

Максимальные динамические напряжения найдены по тем же формулам, что и при ударе.

На рис. 14.24 и 14.25 показаны перемещения балки при действии других видов возмущающей силы: пилообразной и прямоугольной нагрузок. Поменяй-

те продолжительность действия силы и паузы между импульсами и посмотрите изменение отклика балки.

До сих пор был рассмотрен пример динамического расчета балки на двух опорах. Для консольной балки этот же расчет находится на прилагаемом к книге компакт-диске с программами.

Определение коэффициента динамичности

$t := 1 \cdot сек$ Given $u(F,t) = 20 \cdot см$ $t_{max} := Minerr(t)$ $t_{max} = 0.98\ сек$

$u(F,t_{max}) = 2.298\ мм$ $u(F,t_{max}) = 0.002\ м$ максимальная амплитуда колебаний

$\Delta(F_0) = 0.11\ мм$ статическое перемещение от веса груза

$k_д := \frac{u(F,t_{max})}{\Delta(F_0)}$ $k_д = 20.957$ коэффициент динамичности

Расчет максимальных динамических напряжений

$xa := 0.2 \cdot м$ Given $M(F_0, R_A(F_0), R_B(F_0), xa) = -100 \cdot Н \cdot м$ $xa := Minerr(xa)$

$xa = 0.4\ м$ $maxM := M(F_0, R_A(F_0), R_B(F_0), xa)$ $maxM = -2\ Н \cdot м$

$W := b \cdot \frac{h^2}{6}$ $\sigma_{max.стат} := \frac{maxM}{W}$ $\sigma_{max.стат} = -0\ м^2\ сек^2\ МПа$

$\sigma_{max.д} := k_д \cdot \sigma_{max.стат}$ $\sigma_{max.д} = -0\ м^2\ сек^2\ МПа$

Рис. 14.23. Расчет динамических напряжений в балке при резонансе

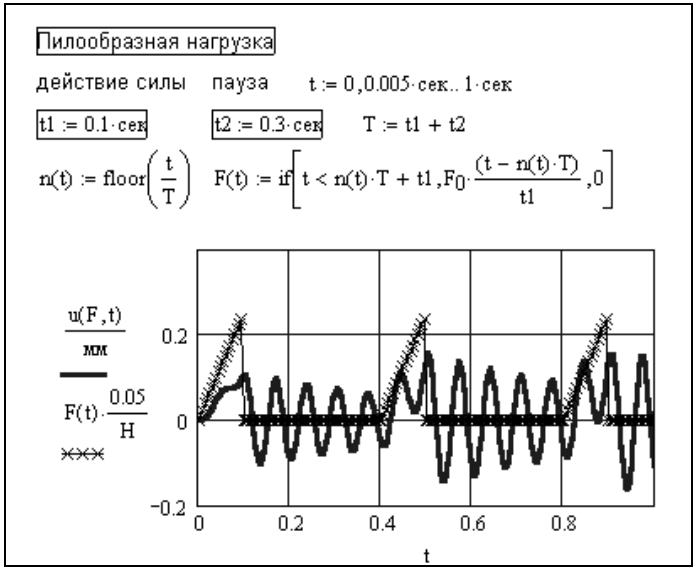


Рис. 14.24. Перемещения балки при действии пилообразной нагрузки

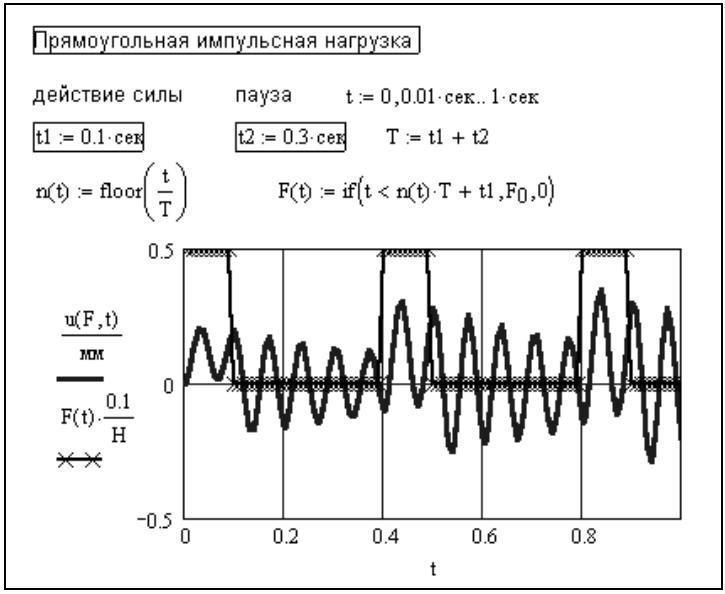


Рис. 14.25. Перемещения балки при действии прямоугольной нагрузки

Рис. 14.26. Фрагмент динамического расчета консольной балки

Этот расчет выполнен проще. Поперечное сечение взято постоянное, прямоугольное по всей длине балки. Поскольку реакции в консольной балке определять необязательно, они исключены из параметров функций. Также убран параметр F.

Нагрузка F задается в начале программы и остается постоянной по всему расчету. Упрощенная форма записи изгибающих моментов и интегралов, использованных при расчете консольной балки, показана на рис. 14.26.

Обратите внимание, насколько быстрее идет расчет интегралов при уменьшении числа параметров интегрируемых функций.

14.6.2. Расчет сложной системы на удар и устойчивость

Рассмотрим систему из двух балок, связанных между собой стержнем и пружиной. Определение перемещений этой системы при статическом приложении нагрузки рассмотрено в *разд. 11.4.3.*

В нашем примере на верхнюю балку падает груз весом Q с высоты H (рис. 14.27). Исходные данные для расчета приведены на рис. 14.28.

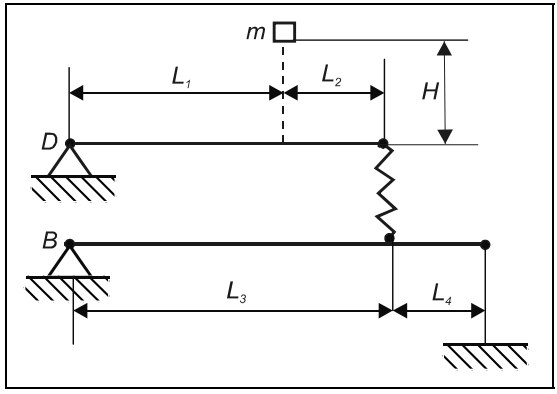


Рис. 14.27. Вертикальный удар сложной системы

Требуется определить допускаемый вес груза Q из условия прочности и динамический угол поворота сечения балки на опоре D.

$$\max \sigma_{\text{дин}} = k_{\text{д}} \max \sigma_{\text{стат}} \le [\sigma].$$

Коэффициент динамичности в этой задаче определим по приближенной формуле (14.9) без учета массы упругой системы $k_{\text{д}} = \sqrt{\dfrac{2H}{\Delta_{\text{стат}}}}$.

ORIGIN := 1

Н ≡ N кН ≡ 1000·Н м ≡ m мм ≡ 0.001·м см := 0.01·м

$МПа \equiv 10^6 \cdot \frac{N}{м^2}$ $E := 2 \cdot 10^5 \cdot МПа$ $\sigma_{доп} := 100 \cdot МПа$ град := deg

m := 10·kg Q := m·g Q = 98.066 Н вес груза

по умолчанию g - ускорение свободного падения

$L := \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot см$ H := 60·см высота падения груза

длины участков балок

$L_{ст} := 20 \cdot см$ длина стержня

$K_{пр} := 100 \cdot \frac{Н}{мм}$ жесткость пружины

h := 2·см b := 4·см высота и ширина сечения балок

a := 5·мм сторона квадратного сечения стержня

для стержня $A := a^2$ $A = 0.25\ см^2$

Для балок(сечения двух балок одинаковые)

$J := \frac{b \cdot h^3}{12}$ $W := \frac{b \cdot h^2}{6}$ $J = 2.667\ см^4$ $W = 2.667\ см^3$

Рис. 14.28. Исходные данные к расчету сложной системы на удар

Динамический угол поворота сечения балки на опоре D пропорционален статическому

$$\theta_{D.дин} = k_д \theta_{D.стат}.$$

Таким образом, в ходе расчета надо определить два статических перемещения: статическое перемещение точки соударения в направлении удара и статический угол поворота сечения D.

Сжатый стержень необходимо проверить на устойчивость, найдя критическое напряжение в нем и коэффициент запаса устойчивости $n = \frac{\sigma_{кр}}{\max \sigma_{дин}}$.

Поскольку вес груза в начале расчета не известен, все расчетные величины записаны как функция от веса Q.

В начале расчета определяются внутренние усилия, напряжения и перемещение точки соударения при статическом приложении веса груза Q (рис. 14.29 и 14.30). Они находятся так же как в *разд. 11.4.3* (см. рис. 11.38 и 11.39), но в параметры функций включен вес груза.

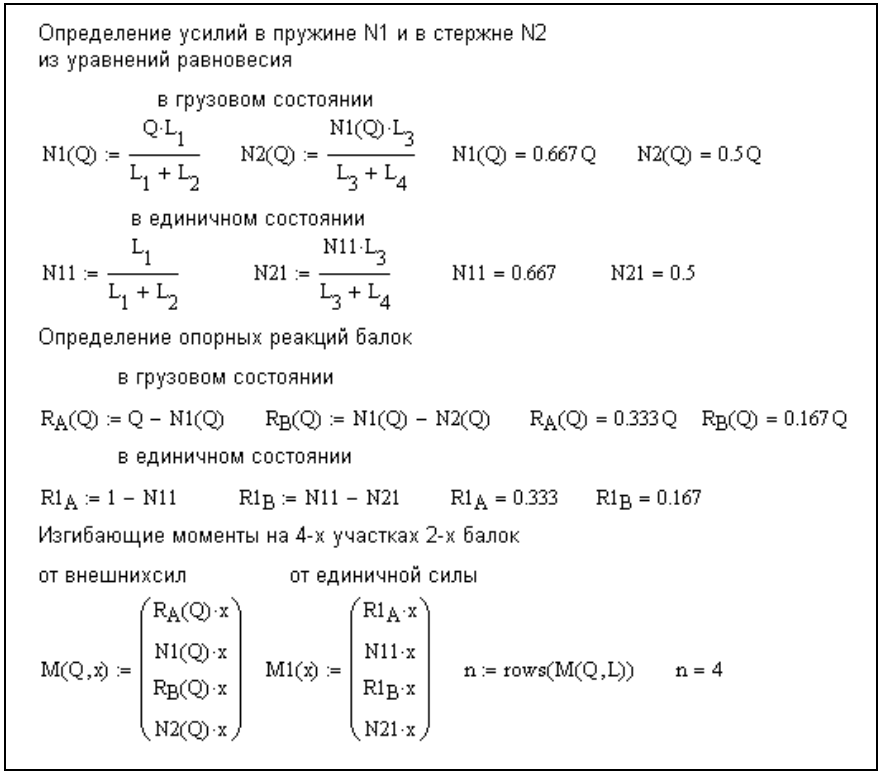


Рис. 14.29. Определение перемещений сложной системы при статическом нагружении (начало)

Статические перемещения точки соударения и угол поворота сечения D определены на рис. 14.30 и 14.31.

Для наглядности расчета и вывода промежуточных результатов в исходные данные включен вес груза $Q = 100$ Н, который затем определяется из условия прочности $QQ = 85$ Н.

Сжатый стержень проверяется на устойчивость. Для выбора формулы, по которой определяется критическое напряжение, сначала находится гибкость стержня λ. Если гибкость стержня $\lambda > 100$, расчет ведется по формуле Эйлера. Если $\lambda < 100$, расчет ведется по формуле Ясинского (рис. 14.32).

Рассчитанный коэффициент запаса устойчивости $n_y = 2{,}5$ удовлетворяет условию устойчивости.

На рис. 14.33 показана зависимость результатов расчета от веса падающего груза Q. С ростом величины Q падает коэффициент динамичности $k_д$ и ко-

эффициент запаса устойчивости n_y. Максимальные динамические напряжения и динамический угол поворота сечения D с ростом нагрузки естественно возрастают, хотя и не пропорционально ей.

статическое перемещение точки приложения силы

$$\Delta_{стат}(Q) := \frac{N1(Q)\cdot N11}{K_{пр}} + \frac{N2(Q)\cdot N21}{E\cdot A}\cdot L_{ст} + \sum_{k=1}^{n}\int_{0}^{L_k}\frac{M(Q,x)\cdot M1(x)}{E\cdot J}\,dx$$

$\Delta_{стат}(Q) = 0.626\,мм$ $\quad k_д(Q) := \sqrt{\frac{2\cdot H}{\Delta_{стат}(Q)}}$ коэффициент динамичности

$k_д(Q) = 43.789$

определение угла поворота заданной точки D

$$N11 := \frac{1}{L_1 + L_2} \qquad N21 := \frac{N11\cdot L_3}{L_3 + L_4}$$

$N11 = 3.333\,м^{-1}$ $\quad N21 = 2.5\,м^{-1}$

$R1_A := -N11$ $\qquad R1_B := N11 - N21$

$R1_A = -3.333\,м^{-1}$ $\quad R1_B = 0.833\,м^{-1}$

$$M1(x) := \begin{pmatrix} R1_A\cdot x \\ N11\cdot x \\ R1_B\cdot x \\ N21\cdot x \end{pmatrix}$$

Рис. 14.30. Определение перемещений сложной системы при статическом нагружении (продолжение)

$$\theta_{стат.D}(Q) := \frac{N1(Q)\cdot N11}{K_{пр}} + \frac{N2(Q)\cdot N21}{E\cdot A}\cdot L_{ст} + \sum_{k=1}^{n}\int_{0}^{L_k}\frac{M(Q,x)\cdot M1(x)}{E\cdot J}\,dx$$

$\theta_{дин.D}(Q) := k_д(Q)\cdot\theta_{стат.D}(Q)$ $\qquad \theta_{дин.D}(Q) = 6.9\,град$

$$maxM(Q) := max\left(\begin{pmatrix} R_A(Q)\cdot L_1 \\ R_B(Q)\cdot L_3 \end{pmatrix}\right) \qquad max\sigma_{дин}(Q) := \frac{maxM(Q)}{W}\cdot k_д(Q)$$

$maxM(Q) = 6.538\,Н\cdot м$ $\qquad max\sigma_{дин}(Q) = 107.357\,МПа$

Определение допустимого веса груза QQ из условия прочности

$QQ := root\left(\left|max\sigma_{дин}(Q) - \sigma_{доп}\right|, Q\right)$ $\boxed{QQ = 85.1\,Н}$ $\quad \boxed{k_д(QQ) = 47}$

Рис. 14.31. Определение перемещений сложной системы при статическом нагружении (окончание)

расчет сжатого стержня на устойчивость $\mu := 0.7$

$J := \frac{a^4}{12}$ $F := a^2$ $\lambda := \frac{\mu \cdot L_{ст}}{\sqrt{\frac{J}{F}}}$ $\lambda = 96.995$

$\sigma_{кр} := \begin{cases} \left(\pi^2 \frac{E}{\lambda^2}\right) & \text{if } \lambda > 100 \\ (310 - 1.14 \cdot \lambda) \cdot МПа & \text{otherwise} \end{cases}$ $\sigma_{кр} = 199\,МПа$ для стали ст3

динамические напряжения в сжатом стержне

$\sigma_{стат}(QQ) := \frac{N2(QQ)}{F}$ $\sigma_{дин}(QQ) := \sigma_{стат}(QQ) \cdot k_д(QQ)$ $\sigma_{дин}(QQ) = 80\,МПа$

коэффициент запаса устойчивости $n_у(QQ) := \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_{дин}(QQ)}$ $n_у(QQ) = 2.493$

Рис. 14.32. Расчет сжатого стержня на устойчивость

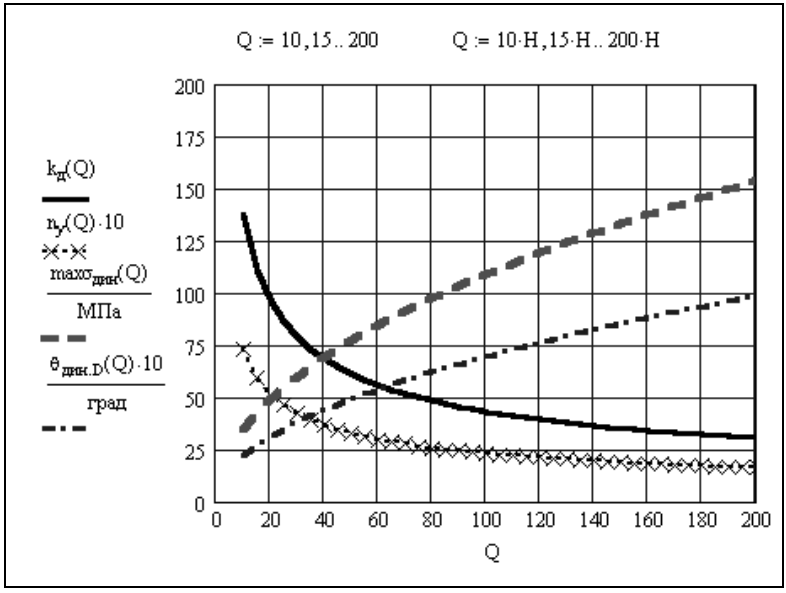


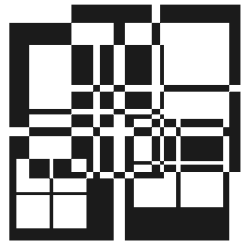
Рис. 14.33. Зависимость результатов расчета от веса падающего груза

Обратите внимание на размерности при выводе графиков. Расчет ведется с учетом размерностей. Mathcad строит графики без учета размерностей. Результаты расчета выводит в стандартных базовых размерностях, в которых и производится весь расчет во внутреннем алгоритме Mathcad.

Чтобы увидеть результаты в нужной нам размерности, требуется умножить результат в стандартной размерности на производную размерность, играющую роль числового коэффициента.

В нашем примере вес (сила) измеряется в ньютонах, являющихся базовой размерностью, поэтому умножать или делить выражения на ньютон оказывается необязательно. Дискретная переменная Q может быть записана как с учетом размерности, так и без него. Результат расчета и вид графиков при этом не меняется.

ГЛАВА 15



Усталость материалов

Под действием повторяющихся нагрузок в материале конструкции накапливаются повреждения, ведущие к преждевременному разрушению конструкции. Рассмотрим расчет конструкций на прочность и долговечность при действии переменных нагрузок. Введем некоторые основные понятия.

- Усталость — снижение прочности конструкции под действием переменных нагрузок.
- Выносливость — неразрушение конструкции под действием переменных нагрузок.
- Долговечность — число циклов нагружения до разрушения конструкции (иногда срок службы конструкции в часах).

Усталость и выносливость — две стороны одного и того же явления. Расчет конструкции на усталость и на выносливость — это одно и то же.

15.1. Механизм усталостного разрушения

В каждой детали есть зародышевые дефекты: вакансии, дислокации, микротрещины, неметаллические включения, усадочные раковины, закалочные трещины и др. Максимальные напряжения вблизи опасных дефектов превышают предел текучести.

Под влиянием переменных нагрузок происходит накопление пластических деформаций, постепенно ведущее к исчерпанию запаса пластичности, росту усталостной трещины и разрушению материала.

Рассмотрим распределение напряжений вблизи опасного дефекта (рис. 15.1). При упругой деформации вблизи дефекта наблюдается всплеск напряжений. У вершины микротрещины напряжения могут возрасти в 200 раз $\max \sigma_{упр} \sim 200\sigma_{ном}$.

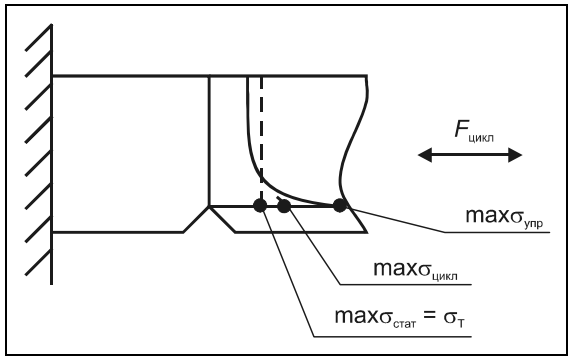


Рис. 15.1. Распределение напряжений вблизи опасного дефекта

При статическом однократном напряжении, достигнув предела текучести, напряжения дальше не растут $\max\sigma_{пласт} = \sigma_т$.

При переменной нагрузке по мере исчерпания запаса пластичности максимальные напряжения постепенно возрастают, становясь больше предела текучести, но меньше $\max\sigma_{упр}$.

Рост усталостной трещины начинается в самом опасном дефекте, там, где действуют максимальные напряжения. Чем опаснее дефект в детали, тем меньше ее долговечность.

Отметим особенности усталостного разрушения:

- ❒ усталостное разрушение носит статистический характер и сопровождается огромным разбросом по долговечности (до 10 раз) для одинаковых образцов или деталей;
- ❒ усталостное разрушение всегда начинается с поверхности, что трудно объяснить, но — факт;
- ❒ накопление микроповреждений (микросдвиги) вызывается касательными напряжениями τ, развитие трещин и разрушение в основном определяется нормальными напряжениями σ.

Процесс усталостного разрушения можно условно разбить на 3 стадии.

1. Накопление микроповреждений до образования видимых трещин.
2. Развитие усталостной трещины.
3. Мгновенный хрупкий долом.

Продолжительность первых двух стадий зависит от вида образца или детали. Если для гладких деталей 70—90% срока службы деталь работает без видимых трещин (первая стадия разрушения), то у деталей с концентраторами напряжений трещина появляется уже после 10—15% срока службы.

Третья стадия — хрупкий долом (разделение тела на части) протекает в течение одного-двух циклов нагружения.

Анализ внешнего вида излома детали позволяет проанализировать историю усталостного разрушения. В изломе отчетливо видны, как минимум, 2 зоны:

- ❒ зона развития трещины — блестящая, отшлифованная многократным захлопыванием трещины при переменной нагрузке;
- ❒ зона хрупкого долома — матовая, волокнистая, с рваными краями вследствие мгновенного разрушения отрывом.

При внимательном рассмотрении можно заметить в изломе ступеньки, вызванные изменением величины или направления нагрузки, перерывами в работе.

На рис. 15.2 показаны два излома образцов, испытанных при изгибе с вращением. В первом образце видна большая зона развития трещины и малая зона долома. Это свидетельствует о большом числе циклов до разрушения $N1$ и сравнительно малом максимальном напряжении $\sigma 1$.

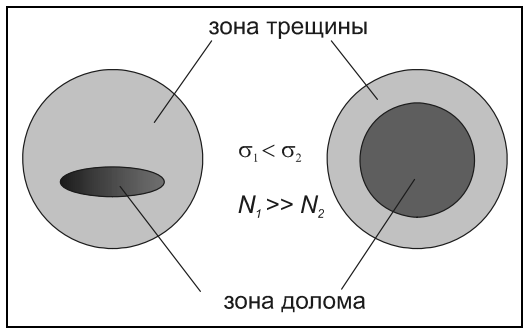


Рис. 15.2. Вид усталостного разрушения образца

Во втором образце, наоборот, малая зона развития трещины и большая зона долома. Это свидетельствует о значительно меньшем числе циклов до разрушения $N2$ и сравнительно большом максимальном напряжении $\sigma 2$. С ростом нагрузки гладкая зона развития трещины уменьшается.

15.2. Характеристики цикла нагружения

Рассмотрим вращение вала под нагрузкой (рис. 15.3). Выделим на поверхности вала точку A и найдем напряжения в этой точке при вращении вала.

В исходном положении точка A находится на нейтральной оси и напряжения в ней $\sigma = 0$. При повороте на 90 градусов точка перейдет в положение A_1, в область сжатых волокон. Напряжения в ней $\sigma = \max \sigma_{сжат}$.

Через четверть оборота точка A приходит в положение A_2 на нейтральной оси. Напряжения в ней вновь $\sigma = 0$. Еще четверть оборота и в положении A_3 растягивающие напряжения $\sigma = \max \sigma_{раст}$.

Завершая оборот, точка вновь оказывается в положении A, и вновь в ней напряжения $\sigma = 0$. Как видно из графика на рис. 15.3, за один оборот совершается один полный цикл нагружения по синусоидальному закону.

Число оборотов, совершенное валом за все время работы, есть число циклов нагружения вала.

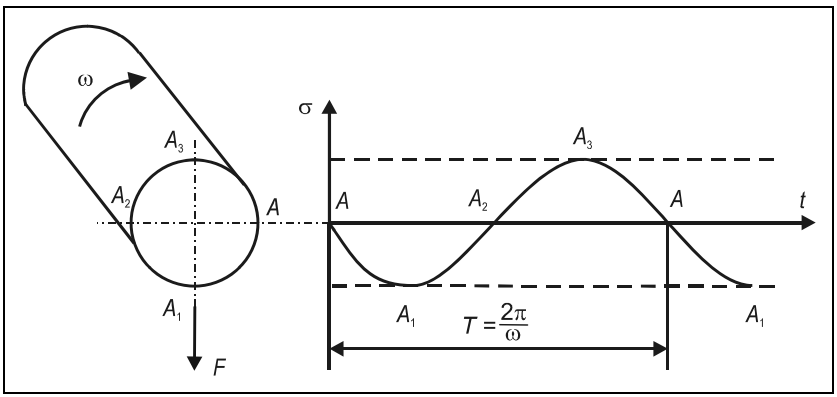


Рис. 15.3. Изменение напряжений при вращении вала

Примечание

Долговечность детали практически не зависит от формы цикла нагружения и скорости нагружения, а зависит только от числа циклов.

Введем характеристики цикла нагружения. На рис. 15.4 показан произвольный асимметричный цикл нагружения и отмечены размерными стрелками 4 характеристики цикла:

- σ_{max} — максимальное напряжение цикла;
- σ_{min} — минимальное напряжение цикла;
- σ_a — амплитуда цикла;
- σ_m — среднее напряжение цикла.

$$\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a \qquad \sigma_{min} = \sigma_m - \sigma_a .$$

Введем коэффициент асимметрии цикла $r = \dfrac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$.

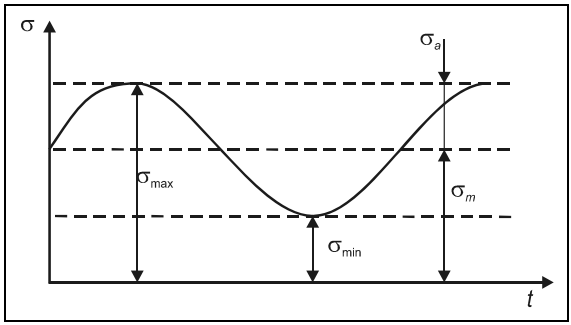


Рис. 15.4. Характеристики цикла нагружения

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся виды циклов нагружения, показанные на рис. 15.5.

- Симметричный цикл нагружения (рис. 15.5, *а*) $\sigma_a = \sigma_{\max} = \sigma_{\min}$, $\sigma_m = 0$, $r = -1$ испытывают все вращающиеся детали.
- Пульсирующий (отнулевой) цикл нагружения растяжением (рис. 15.5, *б*) $\sigma_m = \sigma_a = \frac{\sigma_{\max}}{2}$, $\sigma_{\min} = 0$, $r = 0$ — зубчатые колеса (точки на растянутой стороне зубьев).

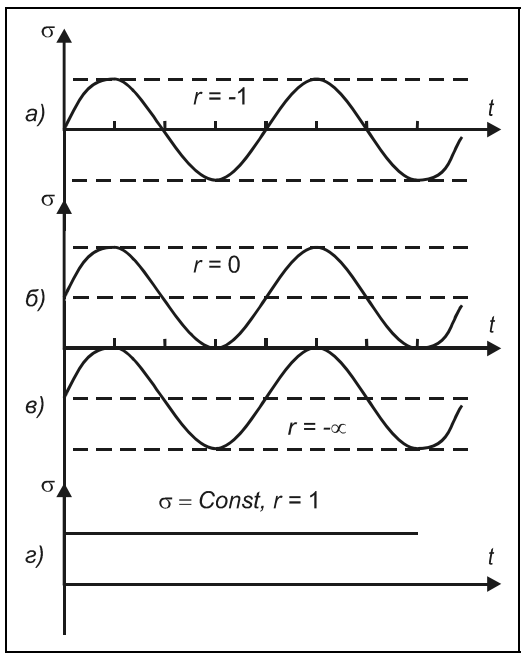


Рис. 15.5. Виды циклов нагружения

- Пульсирующий (отнулевой) цикл нагружения сжатием (рис. 15.5, *в*) $\sigma_m = \sigma_a = \frac{\sigma_{\min}}{2}$, $\sigma_{\max} = 0$, $r = -\infty$ — зубчатые колеса (точки на сжатой стороне зубьев).
- Постоянная нагрузка (рис. 15.5, *г*) $\sigma_m = \sigma_{\min} = \sigma_{\max}$, $\sigma_a = 0$, $r = 1$.

Коэффициент асимметрии r может принимать значения $-\infty < r \le 1$.

Примечание

Любой цикл нагружения можно представить как сумму симметричного цикла (σ_a) и постоянной нагрузки (σ_m).

15.3. Диаграммы усталостной прочности

Для расчетов деталей на прочность и долговечность рассмотрим две основные диаграммы усталостной прочности.

15.3.1. Усталостная кривая

Эта диаграмма показывает зависимость числа циклов до разрушения N от максимальных напряжений в детали σ. Впервые такая диаграмма была построена немецким инженером Велером и по его имени названа диаграммой Велера. Диаграмма строится по результатам лабораторных испытаний серии образцов.

Для построения одной кривой испытывается не менее 10 образцов. Каждая точка на диаграмме соответствует испытанию до разрушения одного образца.

Образец испытывается при циклической нагрузке с постоянной величиной максимального напряжения цикла σ, записывается число циклов до разрушения N. Точка с координатами σ, N наносится на график.

На графике по экспериментальным точкам проводится усредняющая их кривая (рис. 15.6). При некотором значении σ долговечность (число циклов до разрушения) N стремится в бесконечность.

Пределом выносливости (усталости) называется максимальное напряжение, при котором образец не разрушается при числе циклов, равном бесконечности.

Обозначение предела выносливости σ_r, где r — характеристика цикла нагружения, например: σ_{-1} — при симметричном цикле, σ_0 — при пульсирующем цикле.

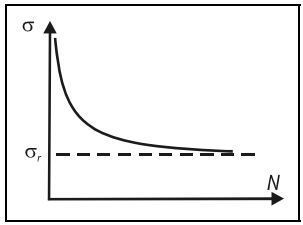


Рис. 15.6. Кривая Велера

На практике усталостную кривую строят в логарифмических координатах $\lg\sigma - \lg N$, в которых кривая аппроксимируется двумя отрезками прямой линии. Наклонной прямой, соответствующей так называемой ограниченной выносливости образцов, когда испытание заканчивается разрушением образца, и горизонтальной прямой, соответствующей пределу выносливости (рис. 15.7).

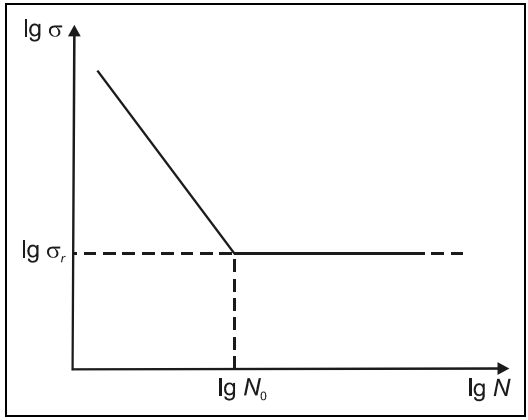


Рис. 15.7. Усталостная кривая в логарифмических координатах

Долговечность, соответствующая пересечению прямых, называется *базовым числом циклов* N_0. При приближенном построении усталостной кривой принимают $N_0 \approx (1-3)\cdot 10^6$ циклов для всех черных металлов (чугуна и сталей).

Для цветных металлов, а также при испытании черных металлов в коррозионных средах, предел выносливости не существует, и вторая прямая не горизонтальная, а наклонная (ее угол наклона в несколько раз меньше, чем для первой прямой).

Для определения предела выносливости и построения усталостной кривой необходимо испытать серию из 10—20 образцов. Чаще всего образец нагру-

жается изгибом при вращении образца или плоским изгибом. Нагрузка на образец — постоянная.

Для первого образца устанавливается нагрузка, создающая в образце напряжения $\max\sigma = 0,5(\sigma_в + \sigma_т)$. Образец испытывается до разрушения и записывается число циклов до разрушения образца.

Для второго образца нагрузка снижается, образец также испытывается до разрушения. Число циклов до разрушения при этом увеличивается.

Результаты испытаний наносятся на график в логарифмических координатах. Несмотря на существенный разброс экспериментальных точек, их аппроксимируют усредняющей прямой линией. Часто используется статистическая обработка результатов испытаний методом наименьших квадратов.

Если образец не сломался после 10 млн циклов, испытание прекращается. Считается, что достигнут предел выносливости, но для статистической обработки на этом же уровне нагрузки или близком к нему испытывается еще несколько образцов.

Для испытаний используются стандартные полированные образцы диаметром $d_0 = 5 - 7,5$ мм. Требования к изготовлению образцов и методика испытаний на выносливость (усталость) изложены в ГОСТ 25.502–79.

Для расчетов на ограниченную выносливость, т. е. для деталей, испытывающих за весь срок службы меньше 2 млн циклов, записывают уравнение для наклонного участка усталостной кривой. В логарифмических координатах $\lg N = \lg A - m \cdot \lg\sigma$, где A и m — эмпирические коэффициенты. Отсюда $N\sigma^m = Const = N_0\sigma_r^m$ — уравнение усталостной прочности.

Зная предел выносливости σ_r и базовое число циклов $N_0 = 5 \cdot 10^6$, можно найти долговечность при заданном напряжении

$$N = N_0\left(\frac{\sigma_r}{\sigma}\right)^m \tag{15.1}$$

или напряжение, соответствующее заданной долговечности

$$\sigma = \sigma_r \sqrt[m]{\frac{N_0}{N}}\ . \tag{15.2}$$

Коэффициент m часто берется из справочников. Обычно $m = 8 - 12$. При отсутствии экспериментальных данных предел выносливости при симметричном цикле часто оценивают по приближенным формулам:

$$\sigma_{-1\text{изгиба}} \approx (0,4-0,5)\sigma_{\text{в}}$$
$$\sigma_{-1\text{растяжения}} \approx (0,7-0,8)\sigma_{-1\text{изгиба}} \qquad (15.3)$$
$$\tau_{-1\text{кручения}} \approx 0,5\sigma_{-1\text{изгиба}}\,.$$

Поскольку усталостное разрушение сопровождается огромным разбросом по долговечности, при обработке результатов испытаний желательна статистическая обработка результатов (обычно методом наименьших квадратов).

На рис. 15.8 показана зона рассеивания результатов испытаний на усталость. Ее верхняя граница соответствует *вероятности неразрушения* $p = 0,1\%$, нижняя — $p = 99,9\%$. Обработка результатов испытаний серии образцов с построением доверительного интервала долговечности показана в примерах на рис. 15.23 и 15.24.

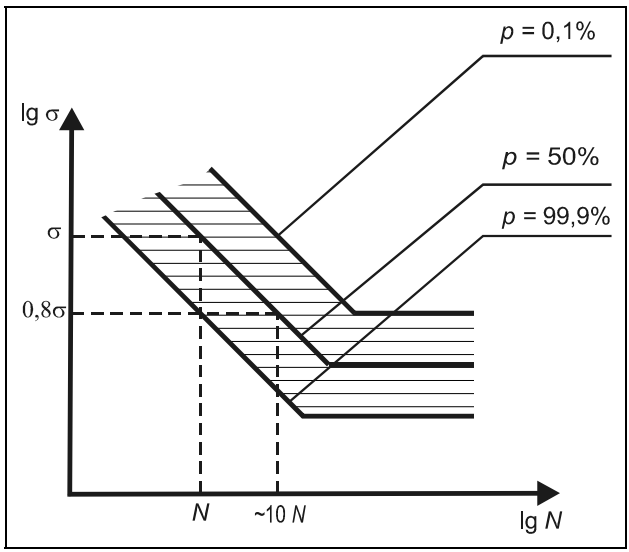


Рис. 15.8. Рассеивание результатов испытаний на усталость

Следует отметить, что разброс данных по долговечности во много раз больше, чем по напряжениям. Так, снижение напряжений на 20% ведет к увеличению средней долговечности примерно в 10 раз.

Если статистическая обработка не производится, вероятность неразрушения можно увеличить с помощью коэффициента запаса. При использовании в расчетах средневероятностной усталостной кривой коэффициент запаса $n = 1$ соответствует вероятности неразрушения 50%, $n = 1,5$ — 99%, $n = 2$ — 99,9%.

15.3.2. Диаграмма предельных амплитуд

Для определения предела выносливости при асимметричном цикле необходимо проведение испытаний при соответствующей характеристике цикла r.

Определив пределы выносливости при нескольких значениях коэффициента r, можно построить диаграмму для определения предела выносливости при любом асимметричном цикле, называемую диаграммой предельных амплитуд (рис. 15.9).

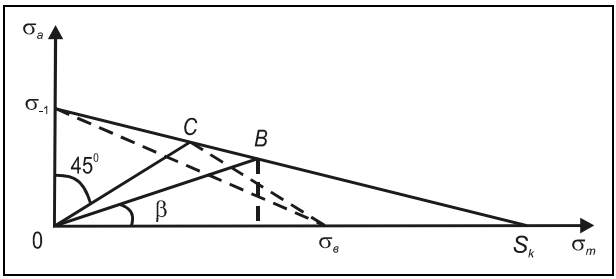


Рис. 15.9. Диаграмма предельных амплитуд

Диаграмма построена в координатах $\sigma_a - \sigma_m$. Отрезки, отсекаемые диаграммой на осях координат: σ_{-1} — на оси σ_a (при $\sigma_m = 0$) и $\sigma_в$ — на оси σ_m (при $\sigma_a = 0$). Для определения предела выносливости при заданном значении r надо из начала координат провести луч под углом β, для которого

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})}{(\sigma_{\max} + \sigma_{\min})} = \frac{1-r}{1+r}. \qquad (15.4)$$

Сумма координат точки B пересечения луча OB с диаграммой предельных амплитуд представляет собой предел выносливости при заданном коэффициенте r $\sigma_r = \sigma_m^B + \sigma_a^B$.

Построить диаграмму предельных амплитуд опытным путем — чрезвычайно сложное и трудоемкое дело, и на практике используют приближенную диаграмму, построенную по двум или трем точкам.

Для построения диаграммы по двум точкам используют предел прочности $\sigma_в$ и предел выносливости при симметричном цикле σ_{-1}. На осях координат откладывают $\sigma_в$ и σ_{-1} и соединяют две точки прямой линией. В этом случае уравнение диаграммы предельных амплитуд:

$$\sigma_a = \sigma_{-1} - \psi \cdot \sigma_m, \tag{15.5}$$

где $\psi = \dfrac{\sigma_{-1}}{\sigma_в}$ — угловой коэффициент.

В наших расчетах вместо предела прочности при построении диаграммы предельных амплитуд используется сопротивление разрыву $S_к$. Ведь предел прочности $\sigma_в$ характеризует сопротивление пластической деформации, а $S_к$ — сопротивление разрушению. Эксперименты показали, что использование сопротивления разрыву при построении усталостной кривой и диаграммы предельных амплитуд позволяет значительно повысить точность оценки усталостной прочности. В этом случае $\psi = \dfrac{\sigma_{-1}}{S_к}$.

В расчетах деталей машин на усталостную прочность часто используют аппроксимацию С. В. Серенсена, в которой в качестве третьей точки при построении диаграммы предельных амплитуд используется предел выносливости при пульсирующем цикле σ_0 ($r = 0$, точка C на рис. 15.9). Тогда аппроксимация диаграммы представляет собой два отрезка прямых линий. Расчетное уравнение диаграммы имеет тот же вид, что и в случае двух точек, но $\psi = \dfrac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0} \approx 0{,}1 - 0{,}3$. Чаще всего величина ψ берется из справочников. Аппроксимация С. В. Серенсена дает почти те же результаты, что и использование $S_к$ при построении диаграммы предельных амплитуд.

Совет

При отсутствии в справочнике сопротивления разрыву $S_к$ можно приближенно принять $S_к \approx 2 \cdot \sigma_в$ или $S_к / \sigma_в \approx 1 + 1{,}4 \cdot \psi_k$.

15.4. Суммирование повреждений при нестационарной нагрузке

В процессе эксплуатации элементы конструкции, как правило, испытывают разные по величине нагрузки. Встает задача определения долговечности при нестационарных нагрузках.

На каждом цикле нагружения деталь получает небольшое повреждение, сумма которых, в конце концов, приводит к разрушению детали. Введем пара-

метр ω, называемый *повреждаемостью материала*. Примем, что до начала нагружения $\omega = 0$: нет повреждения, в момент разрушения $\omega = 1$.

Особенности накопления повреждений изучались многими исследователями, предложившими различные гипотезы их суммирования. Каждая из них справедлива лишь для определенных видов нагружения. Обычно в расчетах используют *гипотезу линейного накопления повреждений*.

Объясним суть этой гипотезы. Пусть для данного образца или детали построена усталостная кривая, тогда при максимальном напряжении цикла σ_i разрушение произойдет после N_i циклов. Если реальное число циклов $N < N_i$, то принимают величину повреждения пропорционально отработанному числу циклов $\omega = \dfrac{N}{N_i}$. Накопленное повреждение после нескольких уровней нагружения различными нагрузками

$$\omega = \sum \omega_i = \sum \frac{N}{N_i}. \qquad (15.6)$$

В момент разрушения, согласно линейной гипотезе, $\omega = 1$. Однако на практике $\omega = a$, где a принимает значения от 0,25 до 4. Существуют эмпирические формулы для поправки a для отдельных режимов нагружения.

Линейная гипотеза очень неточная, но и другие гипотезы не лучше. Все они дают удовлетворительные результаты лишь для отдельных режимов нагружения.

При случайном нагружении, которое часто встречается на практике, линейная гипотеза дает хорошие результаты при $a = 1$, в других случаях используют эту гипотезу с учетом поправки a.

При случайном нагружении надо записать циклограмму нагружения (рис. 15.10), обработать ее и построить гистограмму нагружения (рис. 15.11), выбрав несколько характерных уровней нагружения, подсчитав число циклов отработанных деталью при каждом уровне нагружения.

Обычно весь срок службы детали делят на временные блоки (допустим, 1 час нагружения), и гистограмму нагружения строят для одного блока нагружения.

Далее по усталостной кривой определяется число циклов до разрушения при каждом уровне нагрузки (рис. 15.12).

Для гистограммы на рис. 15.11 повреждение детали за 1 блок нагружения

$$\omega_{\text{Б}} = \frac{N_1}{N_{01}} + \frac{N_2}{N_{02}} + \frac{N_3}{N_{03}}.$$

Если $\sigma_3 < \sigma_r$, то повреждение на этом уровне нагрузки равно нулю. Число блоков до разрушения n (фактически срок службы детали) определяют из условия $\omega = n \cdot \omega_Б = a$, где, чаще всего, $a = 1$.

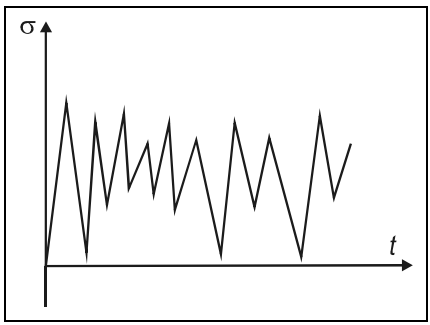


Рис. 15.10. Циклограмма нагружения

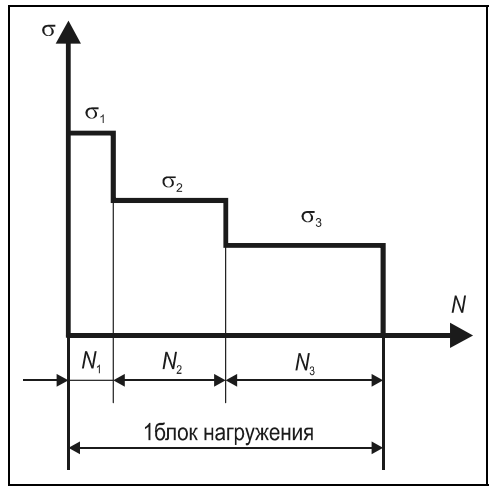


Рис. 15.11. Гистограмма нагружения

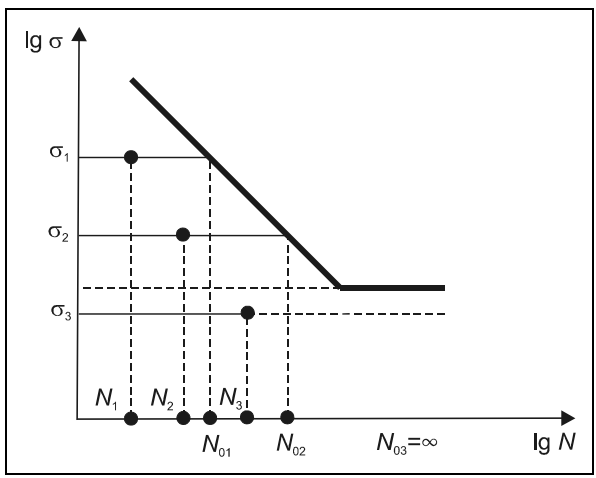


Рис. 15.12. Оценка повреждения по усталостной кривой

15.5. Факторы, влияющие на предел выносливости

Все значения пределов выносливости, которые можно найти в справочниках, определены по результатам испытаний стандартных образцов на усталость. Задача конструктора — определить предел выносливости конкретной детали.

С учетом различных факторов определяются поправочные коэффициенты, связывающие пределы выносливости стандартных образцов и деталей. Рассмотрим основные факторы, влияющие на предел выносливости деталей машин.

15.5.1. Концентрация напряжений

В местах резкого изменения формы тела происходит резкое увеличение напряжений, названное концентрацией напряжений. Типичные концентраторы напряжений — отверстия, проточки, галтели, трещины, следы механической обработки. Характер распределения напряжений при растяжении образца с острым надрезом показан на рис. 15.13.

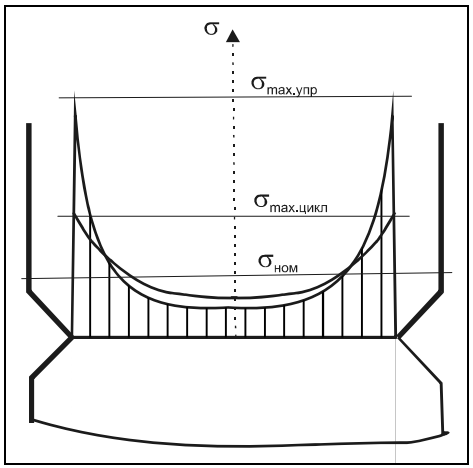


Рис. 15.13. Распределение напряжений вблизи концентратора напряжений

Для оценки концентрации напряжений используется теоретический коэффициент концентрации напряжений $\alpha_\sigma = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{ном}}$, где σ_{max} — максимальное упругое напряжение в детали, $\sigma_{ном}$ — номинальное напряжение в детали, рассчи-

танное по формулам сопротивления материалов без учета концентрации напряжений. $\sigma_{ном} = \frac{F}{A}$ — при растяжении, $\sigma_{ном} = \frac{M}{W}$ — при изгибе.

Считается, что при статической нагрузке пики напряжений в местах их концентрации резко снижаются. Достигнув предела текучести, напряжения дальше не растут.

При циклической нагрузке происходит постепенное исчерпание пластичности, и максимальное циклическое напряжение принимает значение где-то между σ_{max} и $\sigma_т$.

Влияние концентрации напряжений на предел выносливости при симметричном цикле оценивается эффективным коэффициентом концентрации напряжений $K_\sigma = \frac{\sigma_{-1,глад}}{\sigma_{-1,конц}} > 1$, где $\sigma_{-1,глад}$ — предел выносливости при симметричном цикле гладкого стандартного образца, $\sigma_{-1,конц}$ — предел выносливости образца с концентратором напряжений, с таким же коэффициентом α_σ, что и рассматриваемая деталь.

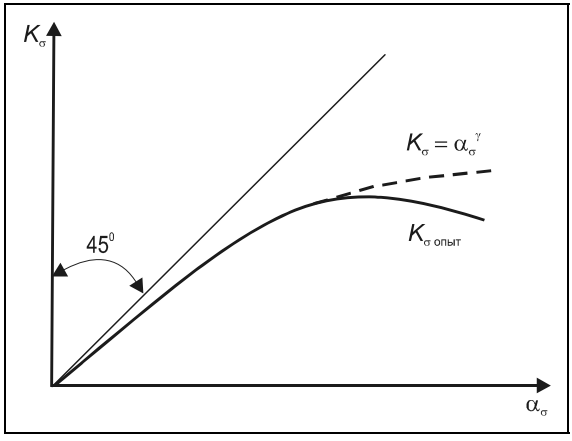


Рис. 15.14. Связь эффективного и теоретического коэффициентов концентрации напряжений

Значения теоретических и эффективных коэффициентов концентрации напряжений собраны в книге Петерсона "Концентрация напряжений", а также в ограниченном количестве приводятся во всех учебниках и справочниках по деталям машин. Экспериментальная зависимость K_σ от α_σ показана на рис. 15.14. Она имеет экстремум для деталей с острым надрезом и может

быть описана степенной зависимостью $K_\sigma = \alpha_\sigma^{\gamma}$, где γ — чувствительность материала к концентрации напряжений, величина постоянная для каждого материала [8].

15.5.2. Размеры детали

С увеличением размеров детали ее предел выносливости уменьшается. Как уже было сказано, усталостное разрушение детали определяется наличием в ней опасных дефектов структуры.

Чем опаснее дефект, тем меньше усталостная прочность. Вероятность наличия в детали опасного дефекта увеличивается с ростом размеров детали. По этой же причине разброс результатов испытаний уменьшается с ростом размеров детали (рис. 15.15). При вероятности неразрушения 99% можно считать, что размеры детали не влияют на предел выносливости.

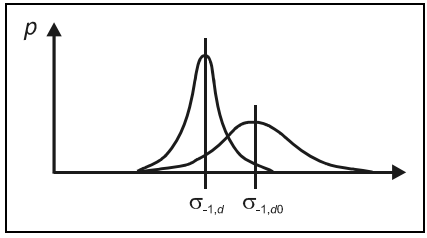


Рис. 15.15. Сравнение плотности вероятности разрушения образцов различных размеров

Влияние размеров детали на средневероятностный предел выносливости при симметричном цикле оценивается коэффициентом $K_d = \dfrac{\sigma_{-1,d}}{\sigma_{-1,d_0}} < 1$, где $\sigma_{-1,d}$ и $\sigma_{-1,d0}$ — пределы выносливости при симметричном цикле детали размером d и стандартного образца диаметром d_0.

Существует статистическая теория усталостного разрушения, согласно которой усталостная прочность во многом зависит от градиента напряжений в опасных точках детали.

Размеры детали и наличие концентрации напряжений влияют на величину градиента напряжений, поэтому часто их влияние на предел выносливости при симметричном цикле объединяют в единый коэффициент K_σ / K_d. Графики и таблицы для его определения приводятся в справочниках по деталям машин, эмпирические формулы — в ГОСТ 25.504-82.

Характер влияния размеров детали на усталостную прочность показан на рис. 15.16. При малых размерах детали ($d < 30$ мм) можно принять $K_d = 1$. Однако при увеличении размеров детали до 150 мм предел выносливости ее может уменьшиться в 2 раза.

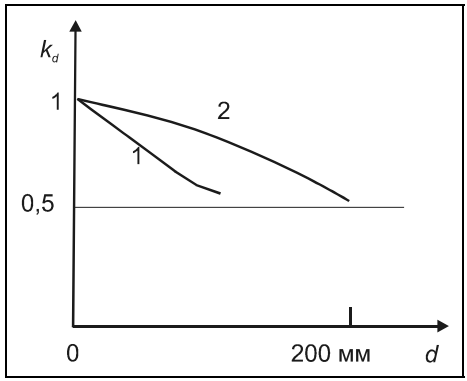


Рис. 15.16. Влияние размеров детали на усталостную прочность
(1 — углеродистая сталь, гладкие образцы;
2 — легированная сталь, образцы с надрезом)

15.5.3. Состояние поверхности

Усталостное разрушение всегда начинается с поверхности детали. Следы механической обработки на поверхности являются концентраторами напряжений и снижают усталостную прочность.

Наибольшей прочностью обладают полированные детали, наименьшей — детали после грубой черновой обточки.

Степень концентрации напряжений у поверхности детали определяется размером шероховатости поверхности. Влияние состояния поверхности на предел выносливости при симметричном цикле нагружения оценивается коэффициентом $K_F = \dfrac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1,\text{полир}}} < 1$, где σ_{-1} и $\sigma_{-1,\text{полир}}$ — пределы выносливости стандартных образцов с заданной поверхностной обработкой и полированных.

Эмпирические формулы для расчета коэффициента K_F приведены в ГОСТ 25.504-82. Характер зависимости предела выносливости детали от вида механической обработки показан на рис. 15.17.

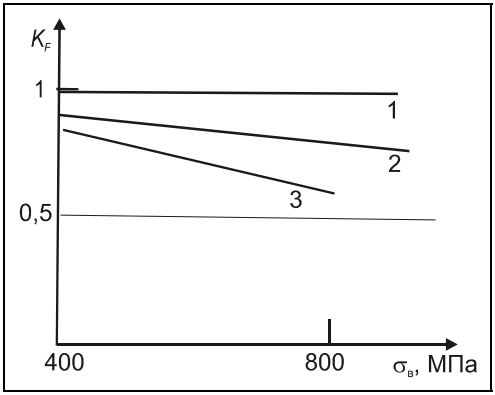


Рис. 15.17. Влияние состояния поверхности детали на усталостную прочность (1 — полированные детали; 2 — шлифованные; 3 — грубая обточка)

Полировка поверхности детали обеспечивает наивысшую усталостную прочность ($K_F = 1$), шлифовка незначительно снижает ее ($K_F > 0,9$), грубая токарная обработка может снизить предел выносливости почти в 2 раза.

Поверхностное упрочнение

Существенное влияние на усталостную прочность оказывают остаточные напряжения в поверхностном слое детали. На рис. 15.18 показано распределение напряжений при растяжении упрочненной детали с концентратором напряжений.

Остаточные напряжения сжатия, накладываясь на рабочие напряжения в детали, вызывают снижение пиков напряжений и, как следствие, повышают усталостную прочность детали.

Остаточные напряжения растяжения, наоборот, увеличивают пики напряжений и снижают усталостную прочность.

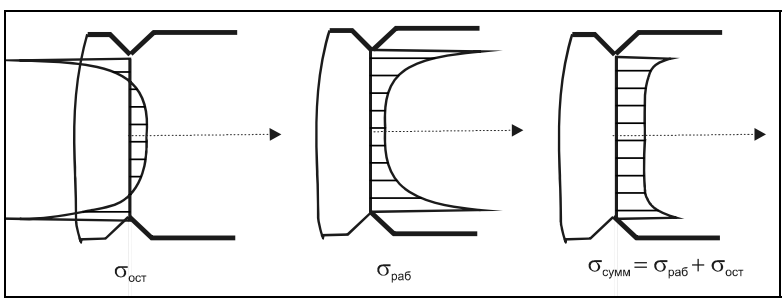


Рис. 15.18. Распределение напряжений при растяжении упрочненной детали с концентратором напряжений

Для создания в поверхностном слое остаточных напряжений сжатия, а также для увеличения прочности поверхностного слоя используют различные способы поверхностного упрочнения:

- механические (дробеструйный наклеп, обкатка роликами);
- термические (поверхностная закалка токами высокой частоты (ТВЧ));
- химико-термические (азотирование, цементирование, цианирование).

Некоторые виды поверхностной обработки вызывают появление в поверхностных слоях остаточных напряжений растяжения, снижающих прочность. Это шлифование, хромирование, никелирование, воронение. Для снятия остаточных напряжений в этих случаях необходим отжиг детали после обработки.

При токарной обработке острым резцом возможно появление остаточных напряжений растяжения. При грубой обточке тупым резцом с уменьшенным углом наклона задней грани резца, вследствие пластической деформации, могут возникнуть остаточные напряжения сжатия, повышающие прочность.

Влияние поверхностного упрочнения оценивается коэффициентом $K_V = \dfrac{\sigma_{-1\text{упроч}}}{\sigma_{-1\text{неупроч}}} > 1$, где $\sigma_{-1\text{упроч}}$ и $\sigma_{-1\text{неупроч}}$ — пределы выносливости при симметричном цикле нагружения соответственно упрочненного и неупрочненного образцов.

Эффект упрочнения особенно велик для деталей с концентраторами напряжений $K_V \approx 2-3$, тогда как для гладких деталей $K_V < 1,4$.

15.5.4. Влияние коррозии

Воздействие коррозионной среды существенно снижает усталостную прочность. В условиях коррозии исчезает само понятие предела выносливости, т. е. разрушение происходит и при числе циклов $N \sim 10^8 - 10^{12}$, значительно превосходящем базовое число $N_0 = 5 \cdot 10^6$. В этих случаях усталостную кривую изображают в виде двух наклонных прямых (рис. 15.19).

15.5.5. Влияние температуры

С понижением температуры прочность материалов сильно возрастает, если материал находится в пластичном состоянии, и очень медленно растет, если материал находится в хрупком состоянии. Это относится ко всем характеристикам прочности: и к пределу текучести, и к пределу прочности, и к пределу выносливости (см. рис. 17.2).

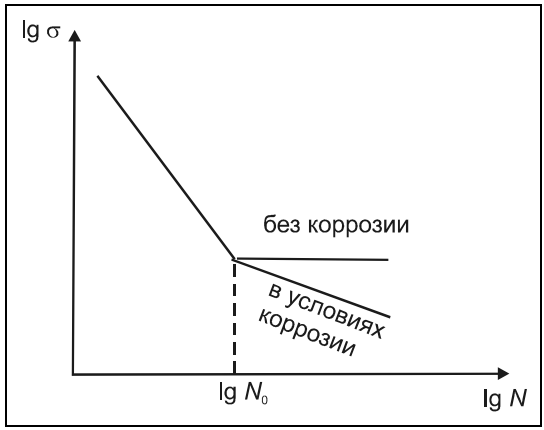


Рис. 15.19. Влияние коррозии на усталостную кривую

С повышением температуры предел выносливости материалов убывает, с понижением температуры — растет.

В интервале температур от –200 до 200 °С (см. рис. 17.2) зависимость предела выносливости от температуры можно приближенно описать выражением

$$\sigma_{-1T} = \sigma_{-1T_0}\left(\frac{T_0}{T}\right)^{\beta},$$

где $\beta = 0,7 - 0,003 \cdot \sigma_в$, σ_{-1T} и σ_{-1T_0} — пределы выносливости при симметричном цикле при температурах T и $T_0 = 293K$ (20 °С)

15.6. Предел выносливости детали

Перечисленные факторы могут в несколько раз уменьшить предел выносливости детали по сравнению с пределом выносливости стандартного образца. Для учета влияния всех факторов при расчете на усталостную прочность используется поправочный коэффициент K по ГОСТ 25.504-82.

$$K = \left(\frac{K_\sigma}{K_d} + \frac{1}{K_F} - 1\right)\frac{1}{K_V \cdot K_A}.$$

Коэффициент K_A предназначен для учета прочих факторов, неучтенных остальными коэффициентами.

Предел выносливости детали при симметричном цикле нагружения $\sigma_{-1}^{дет} = \dfrac{\sigma_{-1}}{K}$, где σ_{-1} — предел выносливости стандартного образца $d_0 = 5$ мм.

При проведении расчетов на усталостную прочность полагают, что перечисленные факторы не влияют на прочность при постоянной статической нагрузке. Так как любой цикл нагружения можно представить как наложение симметричного цикла (σ_a) на постоянную нагрузку (σ_m), то предел выносливости детали при асимметричном цикле нагружения

$$\sigma_r^{\text{дет}} = \sigma_a^{\text{дет}} + \sigma_m^{\text{дет}} = \frac{\sigma_a}{K} + \sigma_m ,$$

где σ_a и σ_m — амплитуда и среднее напряжение цикла, соответствующие пределу выносливости стандартного образца при том же коэффициенте асимметрии цикла r, что и у рассматриваемой детали.

15.7. Расчет на усталостную прочность

Построим диаграмму предельных амплитуд детали по двум точкам (рис. 15.20), отложив на осях $\sigma_{-1}^{\text{дет}} = \frac{\sigma_{-1}}{K}$ и $S_{\text{к}}$. На оси σ_m отметим точку $\sigma_m = \sigma_{\text{т}}$ и проведем через нее прямую под углом 45°. Для любой точки на этой прямой $\sigma_{\max} = \sigma_a + \sigma_m = \sigma_{\text{т}}$.

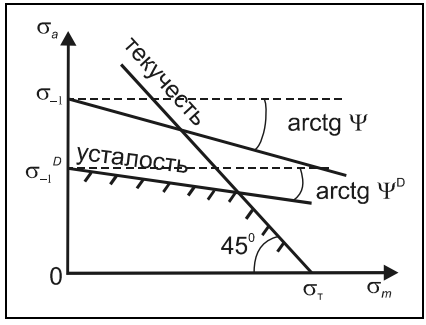


Рис. 15.20. Области расчета на усталость и текучесть на диаграмме предельных амплитуд детали

Если предел выносливости детали $\sigma_r^{\text{дет}} = \sigma_a^{\text{дет}} + \sigma_m^{\text{дет}} < \sigma_{\text{т}}$, расчет ведется на усталостную прочность.

Если $\sigma_r^{\text{дет}} = \sigma_a^{\text{дет}} + \sigma_m^{\text{дет}} > \sigma_{\text{т}}$, расчет ведется на статическую прочность по пределу текучести.

Расчет на усталостную прочность обычно проводят в два этапа.

- Подбор размеров детали из условия статической прочности при заниженных допускаемых напряжениях $\sigma_{max} \le [\sigma] = \frac{\sigma_т}{n}$, где $n = 6—8$ — коэффициент запаса.
- Проверка на усталостную прочность по коэффициенту запаса $n_у = \frac{\sigma_r^{дет}}{\max \sigma_{раб}} \ge [n_у]$, где $[n_у]$ — допускаемый коэффициент запаса, выбираемый по справочникам.

Рассмотрим проверку по усталостной прочности.

При симметричном цикле нагружения $n_у = \frac{\sigma_r^{дет}}{\max \sigma_{раб}} = \frac{\sigma_{-1}}{K \cdot \max \sigma_{раб}} \ge [n_у]$.

При асимметричном цикле предел выносливости детали определяем с помощью диаграммы предельных амплитуд детали (рис. 15.21). Для заданного коэффициента асимметрии r проведем луч AB, для которого $\operatorname{tg}\beta = \frac{1-r}{1+r}$.

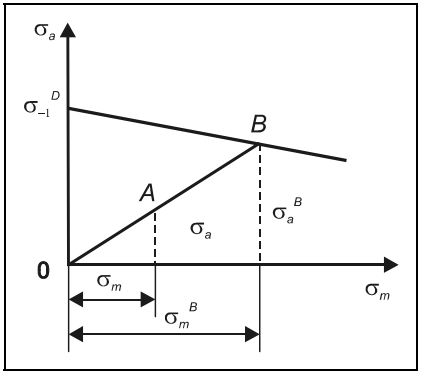


Рис. 15.21. К определению коэффициента запаса усталостной прочности

Если максимальные напряжения в детали $\max \sigma = \sigma_a + \sigma_m$, а предел выносливости детали $\sigma_r^{дет} = \sigma_a^{дет} + \sigma_m^{дет}$, то из подобия треугольников коэффициент запаса усталостной прочности по нормальным напряжениям

$$n_{у\sigma} = \frac{\sigma_r^{дет}}{\max \sigma} = \frac{\sigma_a^{дет} + \sigma_m^{дет}}{\sigma_a + \sigma_m} = \frac{\sigma_a^{дет}}{\sigma_a} = \frac{\sigma_m^{дет}}{\sigma_m} = \frac{OB}{OA}.$$

Откуда

$$\sigma_a^{\text{дет}} = n_{y\sigma} \cdot \sigma_a, \quad \sigma_m^{\text{дет}} = n_{y\sigma} \cdot \sigma_m,$$

$$\sigma_{-1}^{\text{дет}} = \frac{\sigma_{-1}}{K}, \qquad \psi^{\text{дет}} = \frac{\sigma_{-1}^{\text{дет}}}{S_k} = \frac{\sigma_{-1}}{S_k \cdot K} = \frac{\psi}{K},$$

где $\psi^{\text{дет}}$ и ψ — тангенс угла наклона диаграммы предельных амплитуд соответственно для детали и для стандартного образца.

Уравнение диаграммы предельных амплитуд

$$\sigma_a^{\text{дет}} = n_{y\sigma} \cdot \sigma_a = \sigma_{-1}^{\text{дет}} - \psi^{\text{дет}} \cdot \sigma_m^{\text{дет}} = \frac{\sigma_{-1}}{K} - \frac{\psi}{K} \cdot n_{y\sigma} \cdot \sigma_m.$$

Откуда коэффициент запаса усталостной прочности

$$n_{y\sigma} = \frac{\sigma_r^{\text{дет}}}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_{-1}}{K \cdot \sigma_a + \psi_\sigma \cdot \sigma_m} \geq \left[n_y \right],$$

где $\sigma_{\max} = \sigma_a + \sigma_m$ — рабочие напряжения в детали.

При сложном напряженном состоянии коэффициент запаса определяется по эмпирической формуле Гафа и Полларда

$$\frac{1}{n_y^2} = \frac{1}{n_{y\sigma}^2} + \frac{1}{n_{y\sigma}^2},$$

где $n_{y\sigma}$ — коэффициент запаса по нормальным напряжениям (при изгибе и при растяжении), $n_{y\tau}$ — коэффициент запаса по касательным напряжениям (при кручении и при сдвиге), определяемый аналогично $n_{y\sigma}$

$$n_{y\tau} = \frac{\tau_r^{\text{дет}}}{\tau_{\max}} = \frac{\tau_{-1}}{K \cdot \tau_a + \psi_\tau \cdot \tau_m}.$$

15.8. Примеры расчетов на усталостную прочность

15.8.1. Статистическая обработка результатов эксперимента

На рис. 15.22 приведены результаты испытаний серии из 10-ти стальных образцов. Требуется построить усталостную кривую и определить доверительный интервал для вероятности неразрушения образцов $P = 99\%$.

$\sigma := (63.09 \quad 56.23 \quad 50.11 \quad 44.66 \quad 39.81 \quad 35.48 \quad 31.18 \quad 27.91 \quad 25.11 \quad 22.38)$ МПа

$N := (13 \quad 25 \quad 63 \quad 936 \quad 7.81 \cdot 10^3 \quad 1.13 \cdot 10^4 \quad 1.98 \cdot 10^5 \quad 8.16 \cdot 10^5 \quad 5.15 \cdot 10^5 \quad 3.16 \cdot 10^6)$ циклов

$\sigma := \sigma^T \qquad N := N^T \qquad Y := \log(\sigma) \qquad X := \log(N) \qquad n := \text{rows}(N) \qquad i := 1..n$

подбор аппроксимирующего уравнения в логарифмических координатах

$aa := \text{line}(X, Y) \qquad aa = \begin{pmatrix} 1.867 \\ -0.076 \end{pmatrix} \qquad y := aa_1 + aa_2 \cdot X$

почти то же самое $aa := \text{medfit}(X, Y) \qquad aa = \begin{pmatrix} 1.846 \\ -0.072 \end{pmatrix}$

коэффициент корреляции $\text{corr}(X, Y) = -0.986$

ковариация $\text{cvar}(X, Y) = -0.268$

среднее квадратичное $\text{stdev}(X) = 1.88$

по Стьюденту квантиль $t := \text{qt}(0.99, n) \qquad t = 2.764$

$s := \text{stdev}(X) \cdot \sqrt{1 - \text{corr}(X, Y)^2} \qquad s = 0.309$

Рис. 15.22. Обработка результатов усталостных испытаний

Находим логарифмы напряжений $\log(\sigma)$ и чисел циклов $\log(N)$. С помощью функции `line` находим коэффициенты аппроксимирующей прямой и строим усталостную кривую, соответствующую вероятности неразрушения 50% (рис. 15.23).

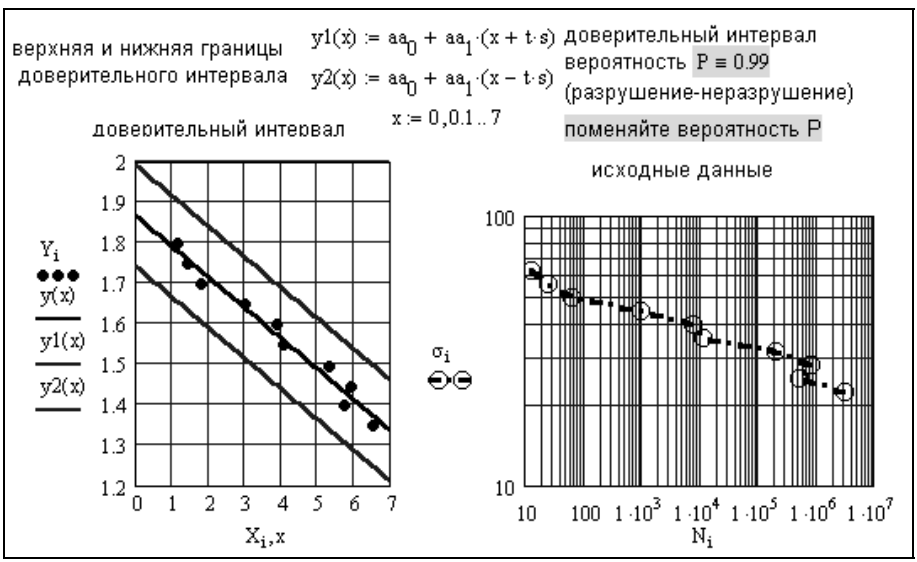


Рис. 15.23. Построение усталостной кривой

Определяем среднеквадратическое отклонение и квантиль вероятности $qt(P)$, соответствующий заданной вероятности P. При малом числе испытаний вместо нормального распределения используем распределение Стьюдента. Записываем уравнения верхней и нижней границ доверительного интервала и строим их графики (рис. 18.23). На том же рисунке справа для представления результатов испытаний использован график, где по осям введены σ и N, но выбрана логарифмическая шкала. В таком случае предварительное логарифмирование исходных данных не нужно.

15.8.2. Приближенное построение диаграмм усталостной прочности

Для улучшенной стали 40Х (термообработка — закалка с высоким отпуском) $\sigma_в = 1000$ МПа, определить предел ограниченной выносливости при $N = 10^5$ циклов при изгибе симметричным циклом нагружения $r = -1$ и асимметричным циклом $r = 0,5$.

В этом примере нет смысла использовать Mathcad, т. к. проще построить необходимые кривые графически и найти на них координаты нужных точек.

Построим усталостную кривую приближенно по двум точкам, соответствующим статическому разрыву и пределу выносливости при симметричном цикле (рис. 15.24).

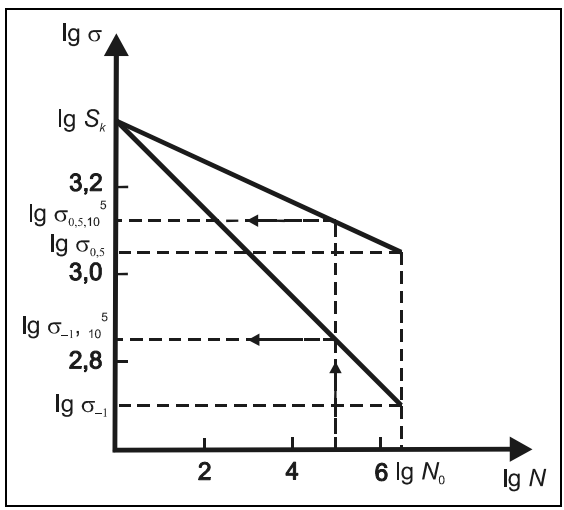


Рис. 15.24. Усталостная кривая при симметричном и асимметричном циклах нагружения

Статическому разрыву соответствуют $1/4$ или $1/2$ цикла нагружения. Поскольку расчет очень приближенный, принимаем для статического разрыва $N=1$. Пределу выносливости на усталостной кривой соответствует точка с координатами σ_{-1} и $N_0 = 3\cdot 10^6$ циклов для сталей.

- $N=1 \quad \sigma = S_к \approx 2\sigma_в = 2\cdot 1000 = 2000$ МПа.
- $N = N_0 \approx 3\cdot 10^6$ циклов $\sigma = \sigma_{-1изгиб} = 0{,}5\sigma_в = 500$ МПа.

Через две точки проводим прямую линию (наклонный участок усталостной кривой). На ней находим графически напряжения $\sigma = \sigma_{-1,10^5} = 686$ МПа, соответствующие долговечности $N = 10^5$ циклов.

Далее строится диаграмма предельных амплитуд по двум точкам (рис. 15.25):

- при $\sigma_a = 0 \quad \sigma_m = S_к = 2000$ МПа;
- при $\sigma_m = 0 \quad \sigma_a = \sigma_{-1} = 500$ МПа.

Из начала координат проводим луч OB под углом β, для которого $\operatorname{tg}(\beta) = \dfrac{1-r}{1+r} = \dfrac{1}{3}$. Сумма координат точки B пересечения луча с диаграммой предельных амплитуд есть предел выносливости при асимметричном цикле

$\sigma_r = \sigma_a^B + \sigma_m^B = 286 + 857 = 1143$ МПа.

Затем по двум точкам строится усталостная кривая при заданном $r = 0{,}5$ (см. рис. 15.24):

- $N=1 \quad \sigma = S_к \approx 2\sigma_в = 2\cdot 1000 = 2000$ МПа;
- $N = N_0 \approx 3\cdot 10^6$ циклов $\sigma = \sigma_r = 1143$ МПа.

Через две точки проводим прямую линию (наклонный участок усталостной кривой). На этой прямой при $N = 10^5$ определяем графически предел ограниченной выносливости $\sigma = \sigma_{r,10^5} = 1298$ МПа.

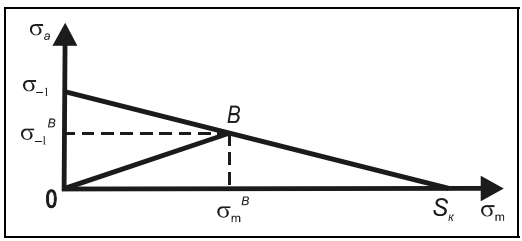


Рис. 15.25. Диаграмма предельных амплитуд

15.8.3. Определение размеров детали

Определить диаметр болта, испытывающего нагружение асимметричным циклом растяжения из расчета:

- ❒ на статическую прочность;
- ❒ по пределу выносливости;
- ❒ на долговечность $N = 10^5$ циклов.

Схема установки болта и характер нагрузки показаны на рис. 15.26. Материал болта — сталь 40Х улучшенная, $\sigma_в = 1000$ МПа, $\sigma_т = 800$ МПа. Эффективный коэффициент концентрации напряжений в резьбе $K_\sigma = 2$. Размеры болта малы, поэтому масштабный коэффициент $K_d = 1$. Про остальные коэффициенты (состояния поверхности и упрочнения) ничего неизвестно. Принимаем их равными 1. Тогда коэффициент перехода к пределу выносливости детали

$$K = \left(\frac{K_\sigma}{K_d} + \frac{1}{K_F} - 1 \right) \frac{1}{K_V \cdot K_A} = 2 .$$

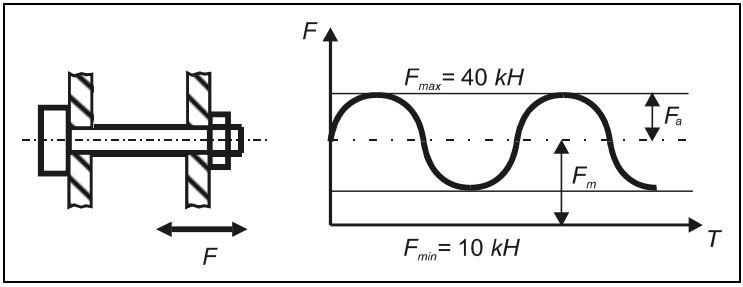


Рис. 15.26. Схема нагружения болта

Максимальная и минимальная нагрузки на болт, а также допускаемый коэффициент запаса n введены глобально и помещены около графика (см. рис. 15.30), чтобы, меняя их и соответственно асимметрию цикла нагружения, наблюдать на графике изменение результатов расчета.

Данный расчет проведен для $n = 2,5$, $P_{\max} = 40$ кН, $P_{\min} = 10$ кН. В этом случае коэффициент асимметрии цикла $r = P_{\min} / P_{\max} = 0,25$.

Расчет ведем с учетом размерностей, поэтому в начале расчета (рис. 15.27) введены производные размерности, далее исходные данные для расчета уже в производных размерностях (МПа). Затем введены выражения для ампли-

тудных и средних значений нагрузки и напряжений как функции от неизвестного пока диаметра болта d .

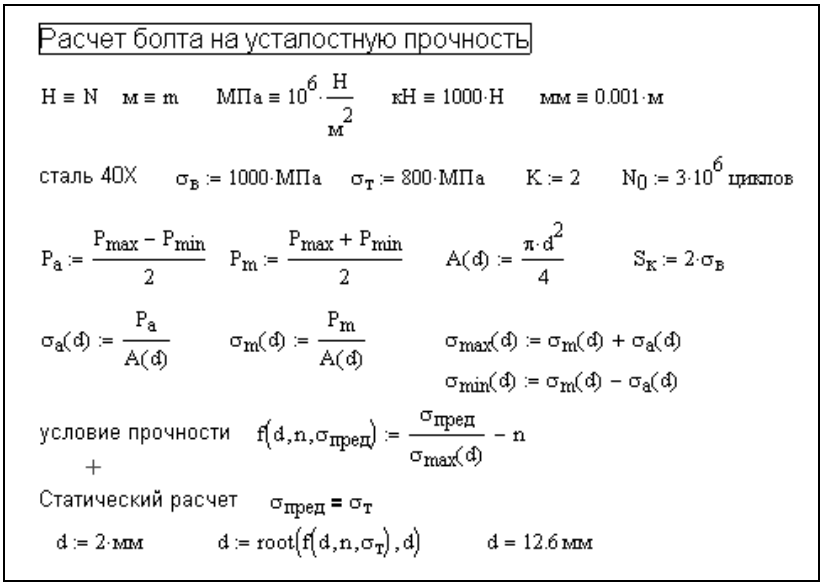


Рис. 15.27. Исходные данные для расчета болта

Условие прочности болта

$$n = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\sigma_{\max}} \geq [n] \qquad (15.7)$$

записано в виде функции $f(d, n, \sigma_{\text{пред}})$, равной нулю, чтобы использовать ее при решении уравнения функцией `root`, которая не может работать с неравенствами.

Для заданной стали известны лишь пределы прочности и текучести, поэтому расчет ведем по приближенным зависимостям и, естественно, результат получаем тоже приближенный.

Предел выносливости при изгибе при симметричном цикле

$$\sigma_{-1\text{изгиба}} \approx 0,5\sigma_{\text{в}} = 0,5 \cdot 1000 = 500 \text{ МПа.}$$

Предел выносливости при растяжении при симметричном цикле

$$\sigma_{-1\text{раст}} \approx 0,7\sigma_{-1\text{изгиба}} = 0,7 \cdot 500 = 350 \text{ МПа.}$$

Сопротивление разрыву $S_{\text{к}} \approx 2 \cdot \sigma_{\text{в}} = 2000$ МПа.

Статический расчет

При статическом расчете $\sigma_{\text{пред}} = \sigma_{\text{т}}$. Из условия прочности (15.7) найден диаметр болта $d = 13$ мм. Это внутренний диаметр резьбы, по которому определяем размеры болта с резьбой М16, внутренний диаметр которой $d_{\text{вн}} = 13{,}26$ мм.

Расчет по пределу выносливости

В этом расчете $\sigma_{\text{пред}} = \sigma_r$. Найдем величину σ_r (рис. 15.28). На этом рисунке предел выносливости детали при симметричном цикле обозначен $\sigma_{\text{сим}}$, т. к в Mathcad нельзя записать σ_{-1} (индекс-комментарий не может быть математическим выражением). Везде в выражениях опущен верхний индекс. Система уравнений

$$\sigma_a^{\text{дет}} = \sigma_{-1}^{\text{дет}} - \psi^{\text{дет}} \cdot \sigma_m^{\text{дет}} \text{ и } \sigma_a^{\text{дет}} = \text{tg}\beta \cdot \sigma_m^{\text{дет}}$$

обозначены как

$$\sigma_{ar} = \sigma_{\text{сим}} - \psi \cdot \sigma_{am} \text{ и } \sigma_{ar} = \text{tg}\psi \cdot \sigma_{mr}.$$

Решая систему этих двух уравнений с помощью функции `find`, определяем предел выносливости детали при асимметричном цикле $\sigma_r^{\text{дет}} = \sigma_a^{\text{дет}} + \sigma_m^{\text{дет}}$, обозначенный в Mathcad $\sigma_r = \sigma_{ar} + \sigma_{mr}$.

Расчет по пределу выносливости

при симметричном цикле $\sigma_{\text{пред}} = \sigma_{\text{сим}}$

$\sigma_{\text{сим}} := \dfrac{0.5 \cdot 0.7 \cdot \sigma_{\text{в}}}{K}$ d1 := root(f(d, n, σсим), d) d1 = 27 мм

при асимметричном цикле r

$r := \dfrac{\sigma_{\min}(d)}{\sigma_{\max}(d)}$ r = 0.25 $\text{tg}\beta := \dfrac{1 - r}{1 + r}$ $\psi := \dfrac{\sigma_{\text{сим}}}{S_{\text{к}}}$ ψ = 0.088

tgβ = 0.6

σar := 10·МПа σmr := 10·МПа начальное приближение

Given σar = σсим − ψ·σmr σar = tgβ·σmr

$\begin{pmatrix} \sigma_{ar} \\ \sigma_{mr} \end{pmatrix} := \text{Find}(\sigma_{ar}, \sigma_{mr})$ $\begin{pmatrix} \sigma_{ar} \\ \sigma_{mr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 153 \\ 255 \end{pmatrix}$ МПа

σr := σar + σmr σr = 407 МПа

d2 := root(f(d, n, σr), d) d2 = 17.7 мм

Рис. 15.28. Расчет болта по пределу выносливости

В условии прочности (в функции $f(d, n, \sigma_{пред})$) заменяем $\sigma_{пред}$ на σ_r. Из условия прочности определяем диаметр тяги.

При симметричном цикле $r = -1$ $d1 = 27$ мм, берем резьбу М32 ($d_{внутр} = 28{,}3$).

При асимметричном цикле $r = -0{,}5$ $d_2 = 17{,}7$ мм — резьбу М22 ($d_{внутр} = 18{,}3$).

Расчет на долговечность

Построим усталостную кривую для заданной степени асимметрии цикла $r = -1$ и $r = 0{,}25$ по двум точкам: $N = 1$, $\sigma = S_к$ и $N = N_0$, $\sigma = \sigma_r$. Используя функцию `line`, находим коэффициенты аппроксимирующего уравнения и по уравнению усталостной кривой находим предел ограниченной выносливости $\sigma(NN)$, где NN — заданная долговечность тяги (рис. 15.29).

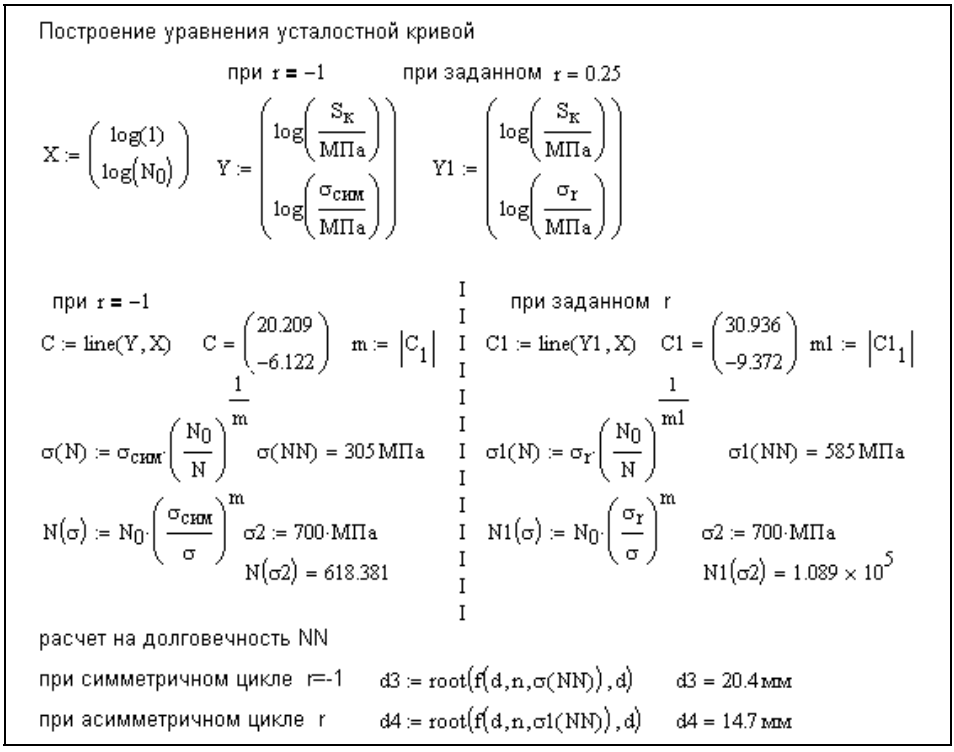


Рис. 15.29. Расчет болта на долговечность

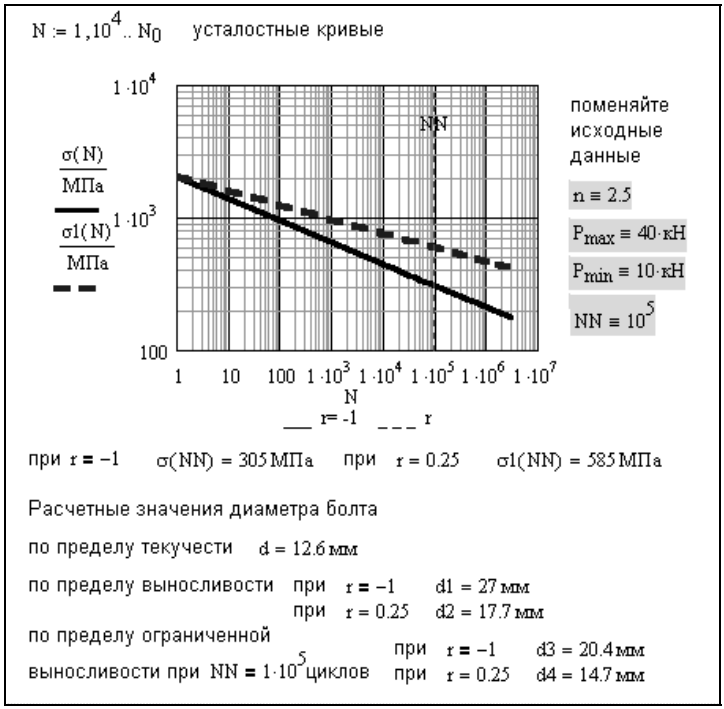


Рис. 15.30. Результаты расчета болта

Из условия прочности, в котором $\sigma_{\text{пред}} = \sigma(NN)$, определяем внутренний диаметр резьбы $d = 19,7$ мм и подбираем резьбу М22, имеющую $d_{\text{внутр}} = 20,2$ мм.

При симметричном цикле $r = -1$, $d3 = 20,4$ мм берем резьбу М24 ($d_{\text{внутр}} = 21,3$).

При асимметричном цикле $r = -0,5$, $d_2 = 14,7$ мм — резьбу М18 ($d_{\text{внутр}} = 15,5$).

Усталостная кривая и результаты расчетов показаны на рис. 15.30. Работая с программой, поменяйте исходные данные, заданные глобально около графиков, и посмотрите на изменение результатов расчета.

15.8.4. Расчет долговечности детали при нестационарном нагружении

Определить срок службы автомобильной оси из стали 18ХНМА, предел прочности которой $\sigma_в = 1200$ МПа. Схема нагружения оси показана на

рис. 15.31. Влияние концентрации напряжений и размеров детали задано отношением $K_\sigma / K_d = 1,6$.

Обработка циклограммы нагружения позволила свести процесс нагружения оси к повторению блока нагружения, изображенного на рис. 15.32. Определить, сколько блоков нагружения выдержит ось до разрушения.

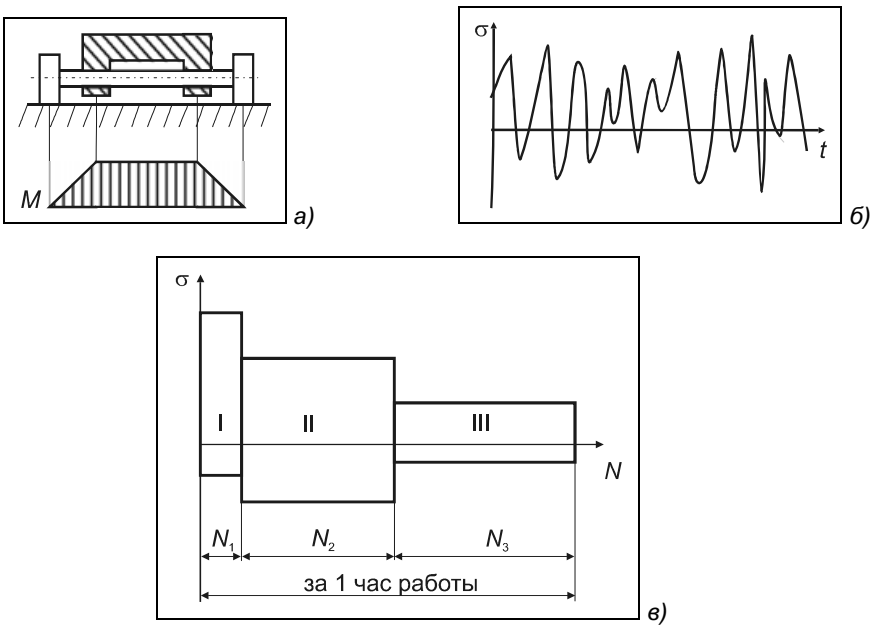


Рис. 15.31. Схема нагружения автомобильной оси (*а*), циклограмма (*б*) и гистограмма (*в*) ее нагружения

Максимальное и минимальное напряжения цикла и число циклов в каждой ступени блока нагружения введены в расчет на рис. 15.32. Там же подсчитаны амплитудные и средние значения напряжений.

Предел выносливости при симметричном цикле нагружения изгибом определен по приближенной формуле $\sigma_{-1}^{\text{дет}} \approx \dfrac{0,5\sigma_{-1}}{K}$, где

$$K = \left(\frac{K_\sigma}{K_d} + \frac{1}{K_F} - 1 \right) \frac{1}{K_V \cdot K_A} = 1,6 .$$

Поскольку ступени блока нагружения представляют собой асимметричный цикл с различными значениями коэффициента асимметрии r, для каждой

ступени надо подобрать соответствующий ей по степени повреждения симметричный цикл.

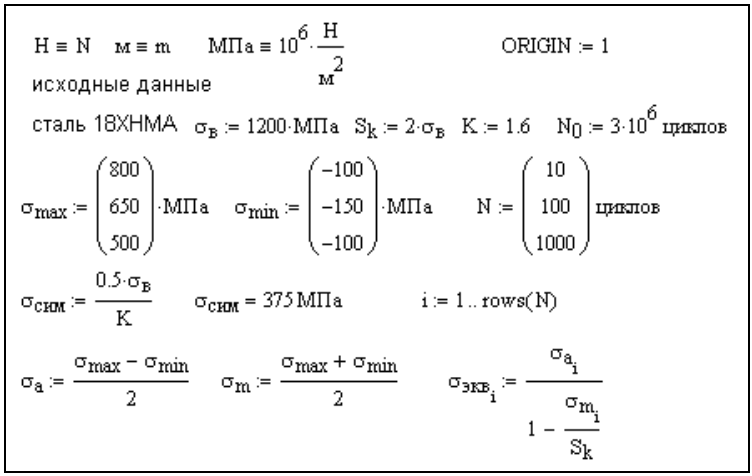


Рис. 15.32. Расчет долговечности детали при нестационарном нагружении

Диаграмма предельных амплитуд может быть построена не только для пределов выносливости σ_r, но и для пределов ограниченной выносливости $\sigma_{r,N}$, соответствующих заданной долговечности N. Уравнение диаграммы в общем виде

$$\sigma_a = \sigma_{-1,N} - \psi_N \cdot \sigma_m,$$

где $\sigma_{экв} = \sigma_{-1N}$, $\psi_N = \dfrac{\sigma_{-1,N}}{S_к}$, тогда

$$\sigma_{экв} = \sigma_a \Big/ \left(1 - \frac{\sigma_m}{S_к}\right).$$

Напряжением, эквивалентным заданному, считаем напряжение при симметричном цикле, при котором число циклов до разрушения такое же, как при заданных значениях σ_a и σ_m. То есть степень повреждения при эквивалентном цикле нагружения такая же, как при заданном цикле.

Для трех ступеней блока нагружения известны σ_a и σ_m, по ним найдены эквивалентные напряжения симметричного цикла и построены диаграммы предельных амплитуд (рис. 15.33), поясняющие смысл $\sigma_{экв}$.

Построена усталостная кривая при симметричном цикле, по которой определена долговечность, соответствующая значениям $\sigma_{экв}$. Аналитическое опре-

деление долговечности по уравнению этой усталостной кривой показано на рис. 15.34.

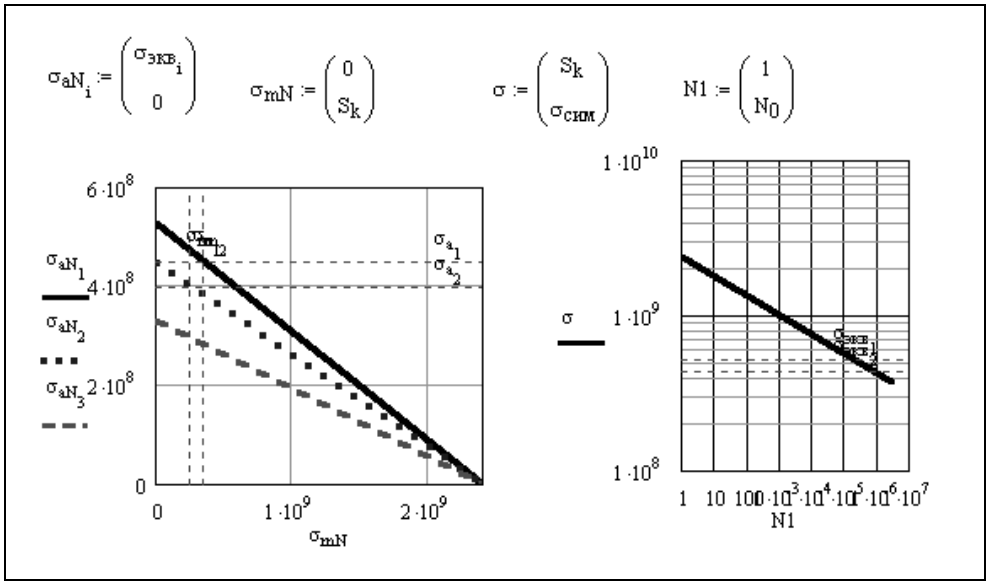


Рис. 15.33. Построение усталостной кривой для эквивалентного симметричного цикла нагружения

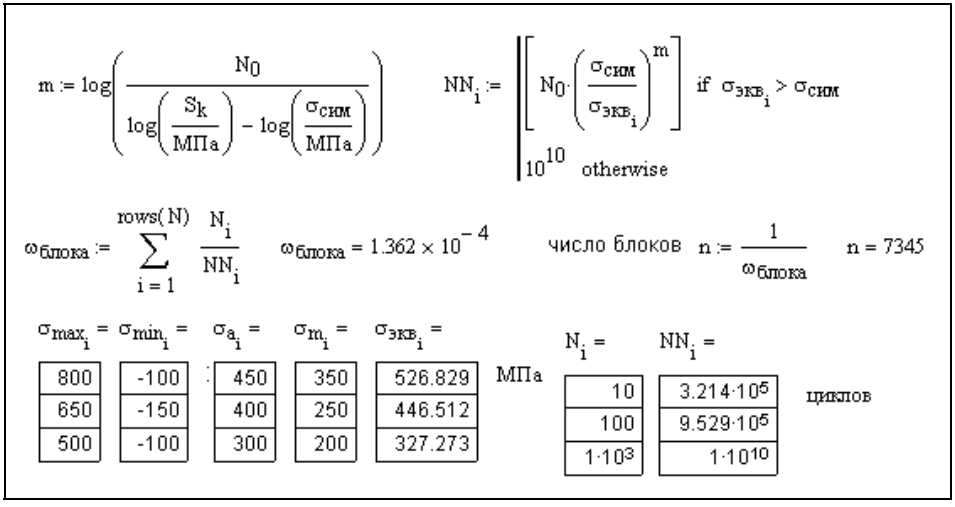


Рис. 15.34. Результаты расчета детали при нестационарном нагружении

Зная число циклов действия каждой ступени нагружения N и число циклов NN, вызывающих разрушение при данном напряжении $\sigma_{экв}$, по гипотезе линейного суммирования повреждений определяем повреждение $\omega_{блока}$, накопленное за 1 блок нагружения и число блоков до разрушения $n = 1/\omega_{блока}$. Результаты расчета приведены на рис. 15.34.

Обратите внимание, что Mathcad не может вычислить логарифм от размерного числа, поэтому при вычислении показателя степени m напряжения разделены на размерность. Как и в предыдущих примерах, предел выносливости при симметричном цикле вместо σ_{-1} обозначен $\sigma_{сим}$.

15.9. Понятие о малоцикловой усталости

Малоцикловой усталостью называют циклическое нагружение материала, при котором максимальное напряжение цикла превышает предел текучести $\sigma_{max} > \sigma_т$. Долговечность при малоцикловой усталости $N < 10^5$ циклов.

При обычной многоцикловой усталости напряжения в конструкции определяют по формулам сопротивления материалов. В качестве предельного напряжения берут предел выносливости или предел ограниченной выносливости — при расчетах на долговечность.

При малоцикловой усталости необходим учет пластических деформаций. Расчет напряжений и деформаций производится методами теории пластичности. Особенность, резко усложняющая расчет, состоит в нестабильности диаграммы деформирования. Она изменяется от цикла к циклу.

Графически зависимость напряжений от деформаций при малоцикловой усталости представляет собой петлю гистерезиса (рис. 15.35), изменяющуюся от цикла к циклу. Она характеризуется шириной петли ε_p и максимальным напряжением σ_{max}.

По результатам экспериментальных замеров петель гистерезиса строится обобщенная кривая циклического деформирования. Она представляет собой половинки петель гистерезиса.

При совмещении петель, записанных при различных действующих нагрузках, но одинаковом номере полуцикла деформации, кривые петель гистерезиса совпадают, образуя единую *обобщенную диаграмму циклического деформирования* (ОДЦД) для данного номера полуцикла нагружения (рис. 15.36).

Для экспериментальных ОДЦД выбирается аппроксимация, линейная или степенная, как описано в *главе 4*.

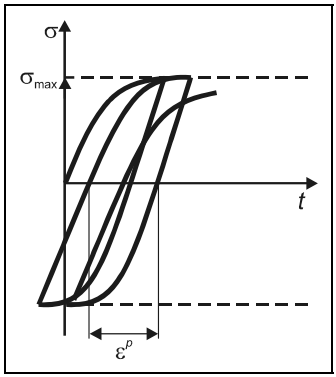


Рис. 15.35. Петля гистерезиса при малоцикловой усталости

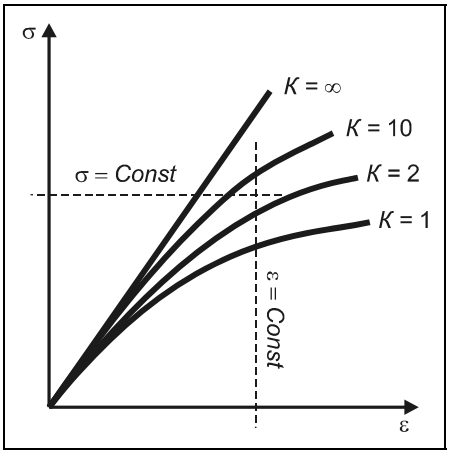


Рис. 15.36. Обобщенная диаграмма циклического деформирования

С использованием ОДЦД методами теории пластичности определяются максимальные упругопластические напряжения и деформации в конструкции $\sigma_{\max}$ и $\varepsilon_{\max}$.

По результатам испытаний на малоцикловую усталость строится усталостная кривая в координатах $\varepsilon_a - N$ или $\sigma_a - N$, где ε_a, σ_a — амплитудные значения разрушающих деформаций или напряжений, N — число циклов до разрушения.

Далее определяются коэффициенты запаса по деформациям или напряжениям $n_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_a}{\varepsilon_\alpha^э} = n_\sigma = \dfrac{\sigma_a}{\sigma_a^э} \ge [n_\varepsilon, n_\sigma]$ и коэффициенты запаса по долговечности $n_N = \dfrac{N}{N^э} \ge [n_N]$, где $\varepsilon_a^э, \sigma_a^э, N^э$ — эксплуатационные значения амплитуды деформаций, напряжений и числа циклов нагружения.

Допускаемые значения коэффициентов запаса

$$[n_\varepsilon] = [n_\sigma] \sim 1{,}5 - 2\,,\ [n_N] \sim 3 - 10\,.$$

При заданных значениях коэффициентов запаса по расчетно-экспериментальным формулам строится кривая, связывающая допускаемые значения деформаций $[\varepsilon_a]$, напряжений $[\sigma_a]$ и долговечности $[N]$ (рис. 15.37).

Расчет на малоцикловую усталость очень сложный [5]. Он требует глубоких знаний теории пластичности, метода конечных элементов, большого количе-

ства экспериментальных данных и выходит далеко за рамки курса сопротивления материалов.

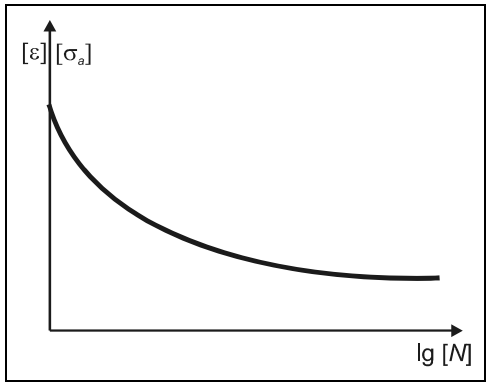
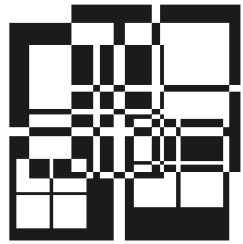


Рис. 15.37. Связь допускаемых величин при заданном коэффициенте запаса

Для чего нужен такой расчет? В особо ответственных конструкциях (в космической технике, ядерной энергетике, при создании современного вооружения) ставится задача увеличения нагрузок при снижении веса конструкции, повышения надежности работы изделия. Для этого приходится уменьшать коэффициенты запаса, вторгаться в область пластических деформаций.

Если нет таких суровых требований к конструкции, то можно или уменьшить рабочие нагрузки, или увеличить толщину стенок конструкции, прибавив ее вес, выйти из области малоцикловой в область многоцикловой усталости и провести сравнительно простой расчет по формулам сопротивления материалов.

ГЛАВА 16



Природа разрушения твердых тел

16.1. Природа упругой деформации

По своей структуре твердые тела бывают кристаллические и аморфные. Все металлы и сплавы имеют кристаллическое строение. Атомы в кристаллической решетке находятся в строгом порядке.

Между атомами действуют силы взаимодействия. Чтобы переместить атом из одного узла решетки в другой, надо приложить значительное усилие, преодолеть энергетический барьер.

Прочность твердого тела обеспечивается силами притяжения между частицами. Электронная структура атомов определяет связь между ними. Межатомные связи в твердых телах бывают двух типов: первичные и вторичные.

Энергия первичных связей (ионных, ковалентных или металлических) составляет от 2 до 8 эВ. Вторичные связи, например вандерваальсовы, имеют энергию от 0,02 до 0,2 эВ. Водородная связь, относящаяся к промежуточному типу, имеет энергию от 0,2 до 0,5 эВ.

Полному сближению атомов мешают возрастающая по мере уменьшения межатомного расстояния сила отталкивания, возникающая вследствие деформации электронных оболочек, а также сила отталкивания между положительно заряженными ионами.

Зависимости силы отталкивания F_1, силы притяжения F_2 и суммарной силы взаимодействия между атомами $F = F_1 + F_2$ от расстояния между атомами r показаны на рис. 16.1. Когда $F_1 = F_2$ атомы находятся в равновесии. Равновесное расстояние между атомами $r \sim 10^{-8}$ см. Чтобы оторвать атомы друг от друга, надо приложить силу $F > F_{\max}$.

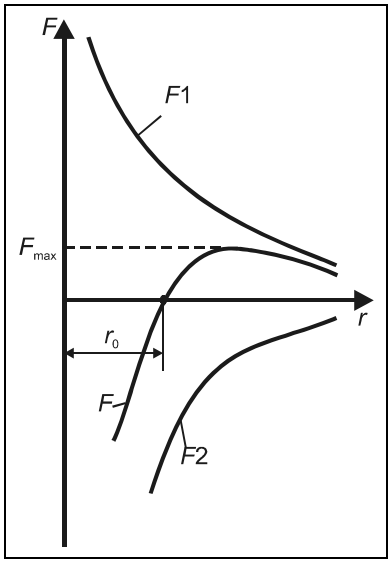


Рис. 16.1. Силы взаимодействия двух атомов

16.2. Теоретическая прочность твердых тел

Определим прочность твердого тела, предполагая отсутствие пластических деформаций. При хрупком разрушении в кристалле образуются две новые поверхности (рис. 16.2). На этих поверхностях разрыва межатомные связи оказываются свободными и идут на создание поверхностного натяжения. Энергия этих связей является поверхностной энергией.

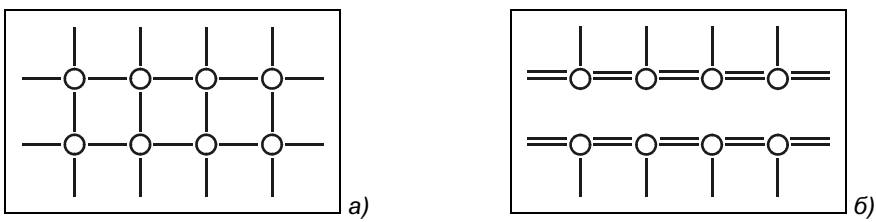


Рис. 16.2. Разделение двух слоев атомов при разрушении

Согласно предположению Гриффитса, хрупкое разрушение происходит тогда, когда величина потенциальной энергии упругой деформации, накопленной в теле, достигнет уровня энергии, необходимой для образования двух новых поверхностей, т. е. разделения тела на две части.

Найдем напряжение, необходимое для разделения двух прилегающих друг к другу атомных слоев. Потенциальная энергия упругой деформации, накопленная в теле,

$$П = П_0 \cdot V,$$

где $П_0 = \sigma^2 / 2 \cdot E$ — удельная потенциальная энергия упругой деформации, $V = A \cdot r_0$ — объем, заключенный между двумя слоями атомов, r_0 — расстояние между атомами, A — площадь поверхности разделения слоев.

По условию Гриффитса

$$П = \frac{\sigma_{теор}}{2 \cdot E} \cdot A \cdot r_0 = 2 \cdot \gamma \cdot A,$$

где γ — удельная энергия образования новых поверхностей; $\sigma_{теор}$ — разрушающее напряжение (теоретическая прочность). Число два означает наличие двух берегов раскрытия трещины. Откуда

$$\sigma_{теор} = 2 \cdot \sqrt{E \cdot \gamma / r_0}.$$

Найденное значение теоретической прочности, как показывают более точные расчеты, завышено примерно вдвое, т. к. при расчетах предполагалось соблюдение закона Гука до момента разрушения. Поэтому часто используют значение $\sigma_{теор} = \sqrt{E \cdot \gamma / r_0}$.

см := 0.01·m МПа := $10^6 \cdot \frac{N}{m^2}$ производные размерности

Для стали $r_0 := 2 \cdot 10^{-8} \cdot$ см $E := 2 \cdot 10^5 \cdot$ МПа $\gamma := 1 \cdot \frac{N \cdot m}{m^2}$

$\gamma := 1 \cdot \frac{J}{m^2}$ джоуль на $м^2$

$\sigma_{теор} := \sqrt{\frac{E \cdot \gamma}{r_0}}$ $\sigma_{теор} = 31.623 \times 10^3$ МПа

Рис. 16.3. Расчет теоретической прочности стали

Реальная прочность углеродистой стали в 50—100 раз меньше теоретической прочности. Считается, что $\sigma_{теор} \sim (0{,}1 - 0{,}2)E$. При достижении теоретической прочности тело должно разделяться на отдельные слои атомов. Действительно, при разрыве сверхтонких стеклянных усов, где достигалась прочность, близкая к теоретической, образец разлетался в пыль.

16.3. Реальная прочность. Роль дефектов структуры

Причина расхождения между реальной и теоретической прочностью в том, что при расчете теоретической прочности принимаем, будто все атомы в сечении одновременно разрывают свои связи. В действительности же атомные связи разрываются постепенно, одна за другой.

Разрушение реальных кристаллов происходит в 2 стадии:

- возникновение трещин в дефектных местах;
- распространение трещин по всему сечению с разделением тела на части.

В каждом теле содержатся технологические дефекты. На поверхности — следы механической обработки. Внутри — раковины, усадочные, закалочные и другие трещины, неметаллические включения и т. д. Но эти дефекты могут и отсутствовать в теле, что не приводит, однако, к теоретической прочности.

Основную роль играют дефекты атомного строения, без которых реальных материалов не существует.

Одними из простейших дефектов кристаллической решетки являются: вакансия, образующаяся при уходе атома из узла кристаллической решетки, и междоузельный атом, т. е. лишний атом, для которого не нашлось свободного узла. Эти и подобные им дефекты называются точечными.

К линейным дефектам относятся дислокации, которые неизбежно образуются в процессе кристаллизации металла. Если слои атомов в кристалле представить себе страницами книги, то дислокация — это край незавершенного листа, вставленного между страницами книги.

На границе "лишнего" слоя, называемого экстраплоскостью, атомы сдвинуты на угол, примерно соответствующий теоретической прочности на сдвиг, т. е. в этих зонах кристалл почти разрушен.

Дислокации являются подвижными. Достаточно небольшой сдвиговой нагрузки, чтобы разорвать всю линию сильно натянутых связей и передвинуть дислокацию.

16.4. Виды дислокаций

Существуют два вида дислокаций: краевая и винтовая, которые только вместе и могут вызвать пластическую деформацию кристаллов. В реальных условиях дислокации бывают, как правило, криволинейными, т. е. смешанными.

Краевая дислокация — дефект, образованный лишней атомной полуплоскостью, вставленной в кристалл. Это край лишней полуплоскости (отсюда название краевая), который вместе с прилегающими атомами имеет вид шнура. Поперечное сечение шнура близко к четырем межатомным расстояниям, ($\approx 10^{-7}$ см). Длина края атомной полуплоскости, называемой экстраплоскостью, составляет от 10^{-3} до 10^{-4} см в поликристаллах с примерно таким же размером зерна. Такая дислокация — это линейный дефект.

Дислокация вызывает внутренние напряжения в кристаллической решетке $\tau \sim 1/r$, где r — расстояние от оси дислокации.

Рассмотрим движение дислокации. На рис 16.4, *а* цифрами 1, 2, 3, 4, 5 отмечены атомы пяти атомных плоскостей, цифрой 3 — экстраплоскость с краевой дислокацией.

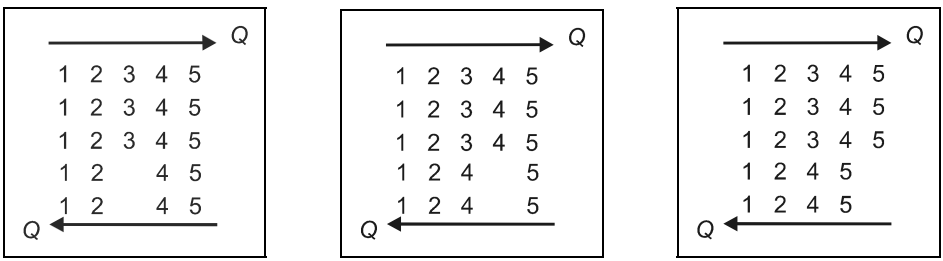


Рис. 16.4. Движение краевой дислокации

Под действием сдвигающей нагрузки Q разрываются связи в слое атомов 4, т. к. они уже испытывали высокие напряжения от искажения кристаллической решетки.

Атомы слоя 4 переходят в слой 3, образуя новую бездефектную плоскость. Экстраплоскостью с краевой дислокацией становится оставшаяся часть слоя атомов 4. В результате дислокация сместилась на одно межатомное расстояние (рис. 16.4, *б*).

При дальнейшем приложении нагрузки Q дислокация перемещается на край кристалла, образуя на его поверхности ступеньку (рис. 16.4, *в*).

При движении дислокации ни один атом не смещается от своего исходного положения более чем на одно межатомное расстояние ($\sim 10^{-10}$ м).

Линейная (краевая) дислокация движется в направлении, перпендикулярном к экстраплоскости.

Винтовая дислокация — это закручивание одной атомной плоскости относительно другой (рис. 16.5).

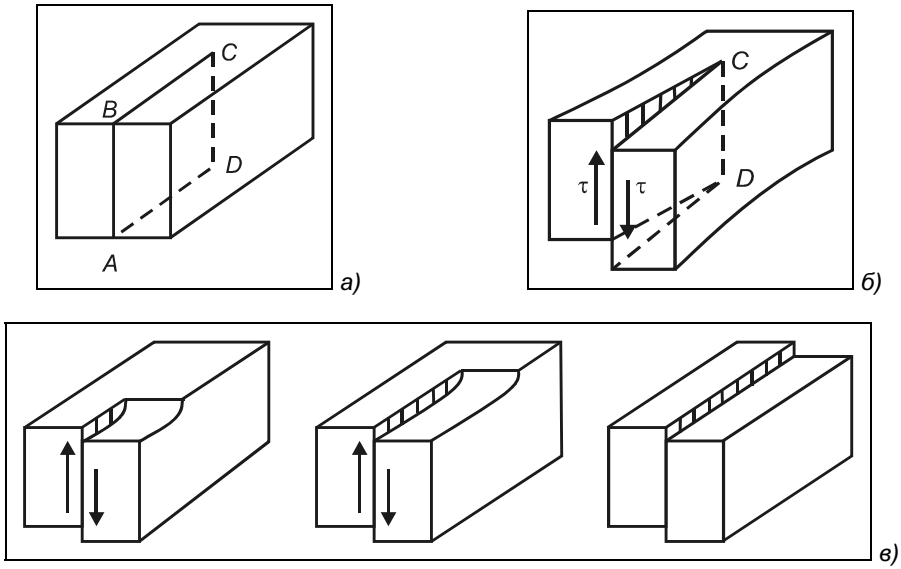


Рис. 16.5. Схема образования винтовой дислокации

В кристалле сделан надрез по плоскости *ABCD* и в ней произведен сдвиг в направлении действия сдвигающей силы τ. В новом положении стороны скреплены по надрезу (рис. 16.5, *а*). Таким образом, в кристалл введена винтовая дислокация. Атомные плоскости, пересекающие линию дислокации *CD* вблизи нее, винтообразно искривляются. Искаженная зона имеет цилиндрическую симметрию и локализуется в узкой области вокруг линии дислокации *CD* и вдоль нее. Винтовая дислокация движется в плоскости сдвига, образуя ступеньку при выходе на поверхность (рис. 16.5, *б*).

Реальные дислокации можно рассматривать как сумму краевой и винтовой дислокаций. Под действием касательного напряжения участок дислокации с чисто краевой ориентацией скользит в направлении приложенного напряжения, с чисто винтовой ориентацией — перпендикулярно напряжению, а участок смешанной дислокации скользит в промежуточном направлении.

Дислокации порождают сильные поля напряжений $\tau \sim 1/r$. Например, для железа в ядре винтовой дислокации $\tau \simeq 2300$ МПа.

В силу сдвигового характера напряжений присутствие дислокаций не вызывает изменения объема кристалла, так же как пластическая деформация в целом не изменяет объем металлических тел.

Энергия кристаллов при введении в них дислокаций возрастает за счет искажений кристаллической решетки.

16.5. Размножение дислокаций

В результате пластической деформации плотность дислокаций увеличивается с 10^4 см$^{-2}$ в исходном состоянии до 10^{12} см$^{-2}$. Источником возникновения новых дислокаций являются сами дислокации.

Дислокацию удобно рассматривать как упругую деформируемую нить (рис. 16.6). Отрезок дислокации AB длиной L, закрепленный по концам (рис. 16.6, *а*) под действием касательного напряжения τ, будет изгибаться и одновременно вытягиваться.

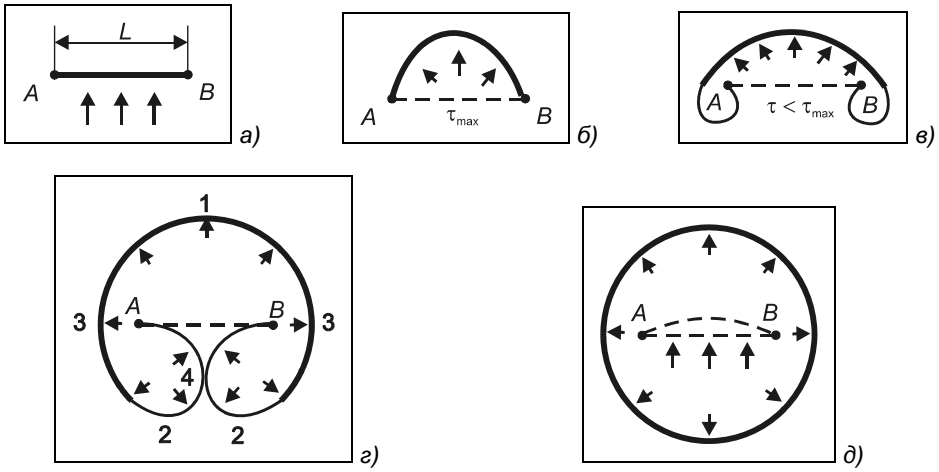


Рис. 16.6. Размножение дислокаций (источник Франка-Рида)

При возрастании τ от 0 до τ_{max} дислокация вытянется в полуокружность. (рис. 16.6, *б*). Радиус кривизны ее будет минимальным, а напряжения максимальными.

Дальнейшее расширение петли требует меньшего напряжения, т. к. радиус кривизны петли будет увеличиваться (рис. 16.6, *в*). Дислокация раздувается, как мыльный пузырь, и закручивается вокруг точек закрепления A и B в виде двух симметричных спиралей, которые в конце концов соприкасаются.

Отдельные участки петли поворачиваются и меняют структуру и знак. Так, в точках 1, 2 дислокация краевая, в точках 3, 4 — винтовая, в промежутках между этими точками — смешанная. При соприкосновении в точке 4 участки винтовой дислокации с разными знаками взаимно уничтожаются, петля замыкается и продолжает расширяться (рис. 16.6, *г*, *д*).

Оставшаяся дислокация $A4B$ сначала выпрямляется под действием линейного натяжения, а затем, при удалении первой петли, под действием касательного напряжения τ снова начнет изгибаться, и пройдя все показанные стадии образует новую петлю и породит новую дислокацию. Этот источник дислокаций, называемый *источником Франка-Рида*, может генерировать большое число дислокаций в исходной плоскости скольжения.

Независимо от интенсивности работы источников Франка-Рида плотность дислокаций в пластически деформируемых металлах не выше 10^{12}—10^{13} см$^{-2}$. На этом предельном уровне плотности дислокаций устанавливается подвижное равновесие числа появляющихся новых дислокаций и числа исчезающих в результате выхода на поверхность и аннигиляции.

16.6. Механизмы упрочнения

Упрочнение оценивается по величине напряжения, необходимого для движения дислокаций и роста деформации.

Вокруг дислокаций возникают поля напряжений. При сближении дислокаций взаимодействие их полей напряжений ведет к росту силы отталкивания между ними, торможению их движения и образованию скоплений дислокаций, которые подавляют источники Франка-Рида. Тем самым растет сила сопротивления деформации, т. е. происходит деформационное упрочнение.

Деформационное упрочнение затухает в процессе деформации. Это объясняется тем, что плотность дислокаций не поднимается выше 10^{12} см$^{-2}$.

16.6.1. Упрочнение за счет уменьшения размеров зерен

Границы зерен, имеющих различную кристаллографическую ориентацию, являются непреодолимым препятствием для дислокаций.

Дислокации, испускаемые источником, тормозятся у границы зерна, образуя плоские скопления, которые давят на границу с силой, пропорциональной числу дислокаций. Это давление передается через границу и заставляет работать новый источник Франка-Рида.

Такой механизм резко повышает напряжение, необходимое для пластической деформации. Чем меньше размеры зерен, тем больше непреодолимых препятствий для движения дислокаций, тем больше сопротивление пластической деформации.

16.6.2. Упрочнение легированием твердых растворов

Легирующие элементы и случайные примеси упрочняют сплавы благодаря неоднородным упругим деформациям (искажениям) кристаллической решетки, возникающим вследствие внедрения лишних атомов в решетку или разности размеров атомов основной решетки и атомов примесей в растворах замещения. Напряжения, вызванные этими деформациями, тормозят движение дислокаций.

16.6.3. Упрочнение за счет выделения дисперсных частиц при старении

Пересыщенные твердые растворы при определенных температурных условиях старения распадаются с образованием дисперсных частиц. Этот распад может стимулироваться пластической деформацией.

Если дислокация встречает на своем пути дисперсные выделения (рис. 16.7), действующая на нее сила τ протаскивает дислокацию между включениями. Линия дислокации выгибается в петли и уходит дальше, оставляя на каждом включении дислокационное кольцо.

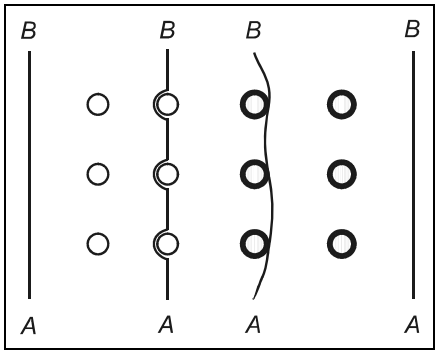


Рис. 16.7. Протаскивание дислокации через строй дисперсных частиц

Если через строй дисперсных включений проходит не одна, а много дислокаций, то каждая из них оставляет у каждой частицы кольца, которые, накапливаясь, создают сильное поле напряжений, тормозящее движение дислокаций.

Следует заметить, что все описанные механизмы упрочнения повышают сопротивление металлов пластическим деформациям, а не сопротивление разрушению.

16.7. Механизм больших пластических деформаций

Появление больших пластических деформаций невозможно объяснить только за счет движения единичных дислокаций.

На этой стадии деформации в материале появляются клиновые дислокации, получившие название *дисклинации.* Образование их связано с поворотным смещением, в то время как образование краевых и винтовых дислокаций связано с трансляционным смещением.

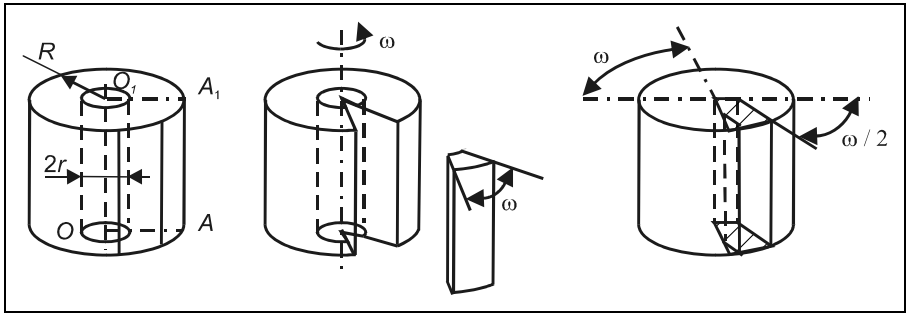
Что такое дисклинация, рассмотрим на примере цилиндра радиусом R с отверстием вдоль оси O_1O радиусом r (рис. 16.8, *а*).

Вырежем из цилиндра клин с углом при вершине ω. Берега надреза стянем вместе и сварим по плоскости OO_1A_1A. В результате в цилиндре возникают кольцевые растягивающие напряжения. В цилиндр введена положительная дисклинация.

Разрежем цилиндр вдоль оси и вставим в разрез клин (рис. 16.8, *б*). В цилиндре возникают кольцевые сжимающие напряжения. В цилиндр введена отрицательная дисклинация.

Существуют полные, частичные дисклинации и дисклинационный диполь. В полной дисклинации поворот берегов должен соответствовать симметрии кристалла и составляет 60^o или 90^o. Энергия полной дисклинации очень велика и долго существовать в кристалле не может. В частичной дисклинации берега развернуты на угол $8—10^o$.

В дисклинационном диполе берега разреза вначале развернуты на угол ω, а затем части плоских берегов развернуты на угол $\omega/2$ так, что они становятся параллельны друг другу (рис. 16.8, *в*).



а) *б)* *в)*

Рис. 16.8. Схема образования дисклинаций

Источники дисклинаций подобны источникам Франка-Рида. При своем движении дисклинация в зависимости от знака поглощает или испускает дислокации. Сдвигового смещения при движении дисклинаций не происходит, а осуществляется пластический разворот прилегающих областей кристалла.

16.7.1. Механизмы образования трещин

В результате взаимодействия дислокаций с жесткими препятствиями, например, включениями, внутренними неоднородностями, а также между собой возникают большие локальные напряжения, которые могут вызвать образование трещин размером в несколько межатомных расстояний. Известно более 10 механизмов образования дислокационных трещин.

Механизм А. Н. Стро

Основная идея заключается в возникновении больших локальных деформаций в конце заторможенного сдвига.

При торможении плоского скопления дислокаций в голове скопления $\tau_{max} = n \cdot \tau$, где n — количество дислокаций в скоплении, τ — напряжение в плоскости скольжения от внешних сил. По линии действия σ_{max} разрыв межатомных связей произойдет, когда $\sigma_{max} = \sigma_{Teop}$. Для образования трещины, например, в железе необходимо в скоплении 230 дислокаций.

Механизм А. Х. Коттрела

Два скопления краевых дислокаций в пересекающихся плоскостях встречаясь тормозят друг друга. Головные дислокации скоплений сливаются, образуя сидячую дислокацию, т. к. направление ее возможного движения уже не совпадает с направлением движения скоплений. Присоединение к сидячей дислокации других дислокаций образует микротрещину.

Безбарьерные механизмы

Например, вакансионный — цепочки вакансий, образующиеся при движении дислокации со ступеньками, объединяются в плоскую трещину с затупленными краями.

16.8. Механизмы роста трещин

Двигаясь под действием напряжений в скоплениях дислокации выходят на берег трещины, образуя ступеньку (сваливаясь в трещину) и постепенно увеличивая ширину трещины.

Другой механизм — поглощение трещиной вакансий. Объединение вакансий создает по́ры. Диффузия вакансий инициируется различием их химических потенциалов.

16.9. Механизмы пластического разрушения

Механизмы пластического разрушения многообразны, т. к. разрушение зависит от различных комбинаций напряжений и деформаций, а также от их предыстории, от отношения размеров детали к расстоянию между включениями, от анизотропии включений и др.

Пластическое разрушение может происходить путем раскрытия и слияния пор, возникающих у включений или иных неоднородностей путем роста тонких трещин, путем деформационного разупрочнения и образования интенсивных полос скольжения, или роста пор, возникающих от дислокаций или их пересечения.

Различные механизмы приводят к разным формам макроскопического разрушения: чашечка и конус, срез, отрыв, розетка и шиферный излом.

Для примера рассмотрим чашечный излом. Он характеризуется разрастанием микропустот. Впереди растущей в зоне концентрации напряжений вязкой трещины наблюдается интенсивное образование пор. Разрушение сопровождается макропластической деформацией, пока идет разрастание и слияние смежных пустот, а с определенного времени локальной деформацией перемычек между пустотами вплоть до их разрыва.

В изломе обнаруживается рельеф, состоящий из больших и малых ямок. Ямочный излом очень распространен и наблюдается как при кратковременном, так и при длительном статическом нагружении, а также на определенных стадиях усталостного разрушения.

16.10. Механизм хрупкого разрушения

Если сопротивление движению дислокаций велико, разрушение может произойти в условиях неподвижности или малоподвижности дислокаций без видимых пластических деформаций. Такое разрушение называется хрупким.

Для прохождения пластической деформации необходимо время, зависящее от вязкости материала. Скорость распространения хрупкой трещины в материале постоянна и близка к скорости распространения звука.

При изменении условий нагружения, например, при снижении температуры, может произойти переход от пластического разрушения к хрупкому, т. к. возрастает сопротивление пластической деформации (движению дислокаций). При малой вязкости хрупкое разрушение имеет следы пластической деформации.

Рассмотрим предложенные Гриффитсом и Орованом механизмы хрупкого разрушения.

По Оровану при хрупком разрушении тела напряжения должны достигать теоретической прочности не по всему объему, а только лишь в вершине узкой и острой трещины. Такая трещина может начать увеличиваться в длину и приводить к разрушению при сравнительно низких номинальных напряжениях.

Максимальное растягивающее напряжение при вершине трещины определяется по формуле Инглиса $\sigma = \sigma_0(1 + 2\sqrt{l/\rho})$, где σ_0 — номинальное напряжение, l — длина трещины, ρ — радиус при вершине трещины. Тогда критерием хрупкого разрушения будет являться достижение местным напряжением величины теоретической прочности $\sim 0{,}1E$. Отсюда хрупкая прочность $\sigma_0 = 0{,}05E\sqrt{\rho/l}$. Этот вывод был сделан Орованом.

По Гриффитсу хрупкое разрушение происходит тогда, когда при движении трещины скорость высвобождения потенциальной энергии больше скорости поглощения энергии на образование новых поверхностей.

Поверхностная энергия G_c для хрупкого состояния тел мала и имеет порядок ~1 Дж/м^2.

Формула Гриффитса $\sigma_0 = \sqrt{2G_cE/\pi l}$, о которой пойдет речь в *главе 18*, дает то же значение, что и формула Орована. Эти формулы выведены для одноосного растяжения.

Хрупкое разрушение имеет статистический характер, т. е. сопровождается значительно большим разбросом разрушающих напряжений, чем пластическое.

Заметно влияние размеров на разрушающее напряжение (масштабный эффект). С увеличением размеров тела возрастает вероятность нахождения в нем наиболее опасных дефектов. Средневероятная прочность хрупкого тела снижается с ростом размеров, а разброс результатов испытаний уменьшается.

ГЛАВА 17

Факторы, влияющие на прочность и разрушение материалов

В зависимости от условий эксплуатации конструкции, механические характеристики материала могут изменяться очень сильно. Может измениться и характер разрушения (с пластического на хрупкий). Рассмотрим основные факторы, влияющие на прочность и разрушение материалов.

17.1. Скорость деформации

С повышением скорости деформации сопротивление пластической деформации растет, при этом предел текучести растет быстрее, чем предел прочности.

В интервале скоростей деформирования 10^{-4}–10^{4} $с^{-1}$ предел текучести $\sigma_т$ сравнительно медленно растет с ростом скорости деформации V и может быть оценен по выражению $\sigma_{т.v} = \sigma_{т.v_0} + k \cdot \ln(V/V_0)$, где $\sigma_{т.v_0}$ — предел текучести при некоторой малой скорости V_0, k — константа материала.

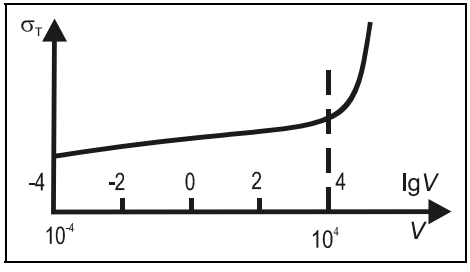


Рис. 17.1. Зависимость предела текучести от скорости деформации

При больших скоростях нагружения (при ударном нагружении) сопротивление пластической деформации резко возрастает за счет инерционного сопро-

тивления материала (рис. 17.1), т. к. для протекания пластической деформации требуется определенное, хотя и малое время.

17.2. Температура эксплуатации

С повышением температуры сопротивление пластической деформации падает. У конструкционных сталей изменение предела текучести значительно больше, чем у аустенитных сталей.

На рис. 17.2 показан характер температурной зависимости сопротивления пластической деформации, т. е. предела текучести и предела прочности. При переходе в хрупкое состояние $T_{хр}$ происходит небольшое скачкообразное снижение указанных характеристик. При температурах 300—500 °С у конструкционных сталей возможно небольшое повышение прочности вследствие температурного старения. Пунктиром показано изменение свойств металлов, не подверженных температурному старению. По мере приближения к температуре плавления прочность стремится к нулю.

Причина снижения прочности в том, что с повышением температуры усиливаются тепловые колебания атомов. Для перемещения атома из одного положения в другое необходимо преодолеть потенциальный барьер, т. е. совершить работу за счет суммарного действия напряжений и тепловых колебаний атомов.

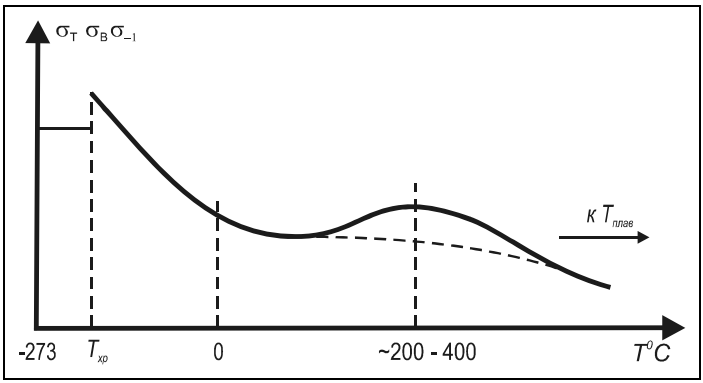


Рис. 17.2. Зависимость сопротивления пластической деформации от температуры

Понятно, что чем больше энергия тепловых колебаний, тем меньше напряжение, необходимое для пластической деформации. Кроме того, за счет термического расширения кристаллической решетки увеличивается расстояние между атомами и уменьшаются силы межатомных связей.

Характер влияния на прочность материалов скорости деформации и температуры, в принципе, одинаков. Провести испытания материала на прочность при изменении температуры значительно проще, чем при изменении скорости деформации.

Для сравнения влияния скорости деформации и температуры на прочность материалов часто используют приближенную связь между ними.

Сравнительная оценка

Снижение температуры на 15 градусов примерно эквивалентно увеличению скорости деформации в 10 раз.

17.3. Переход от пластического разрушения к хрупкому

В природе нет хрупких и пластичных материалов, а есть хрупкое и пластическое разрушение. В зависимости от условий эксплуатации большинство материалов может разрушаться и пластично и хрупко.

Хрупкое разрушение опасно тем, что оно происходит внезапно и мгновенно, зачастую сопровождаясь катастрофическими последствиями.

Задача конструктора — изучить условия хрупковязкого перехода и ни в коем случае не допустить перехода материала конструкции из пластического состояния в хрупкое, в процессе эксплуатации конструкции.

Пластическая деформация и хрупкое разрушение не связаны между собой, они совершаются разными механизмами и зависят от различных внешних и внутренних факторов.

Пластическое течение начинается в металле деформацией сдвига и вызывается действием касательных напряжений, в то время как отрыв одной части тела от другой совершается под действием только нормальных напряжений.

Под действием пластической деформации рост нормальных напряжений в теле резко замедляется, что затрудняет хрупкое разрушение отрывом. Характер разрушения тела определяется соотношением нормальных и касательных напряжений в теле и соотношением двух механических характеристик материала: сопротивлением сдвигу, при котором начинается пластическая деформация $\tau_т$, и сопротивлением отрыву $S_{от}$, при котором происходит хрупкое разрушение.

Сопротивление сдвигу $\tau_т$ связано с напряжением трения, необходимым для движения дислокаций. При растяжении образцов можно принять предел текучести $\sigma_т \approx 2\tau_т$. Как уже отмечено, предел текучести растет с понижением температуры.

Сопротивление отрыву $S_{от}$ — это номинальное напряжение в растягиваемом образце, при котором происходит хрупкое разрушение, т. е. напряжение при вершине микротрещины достигает теоретической прочности (при отсутствии пластических деформаций).

Сопротивление отрыву практически не зависит от температуры, лишь предшествующая пластическая деформация, упрочняя материал, незначительно повышает сопротивление отрыву.

Переход материала из пластичного состояния в хрупкое при снижении температуры носит название хладноломкости. Объяснение хладноломкости предложено академиком А. Ф. Иоффе и развито академиком Н. Н. Давиденковым.

При понижении температуры предел текучести растет сравнительно быстро, а сопротивление отрыву практически не изменяется (растет очень медленно) и при некоторой температуре $T_{кр}$, называемой критической температурой хрупкости $\sigma_т = S_{от}$.

При $T > T_{кр}$ с увеличением действующей на растягиваемый образец нагрузки напряжения достигают предела текучести, и последующее разрушение будет пластическим (см. рис. 16.3). При $T < T_{кр}$, напряжения вначале достигают сопротивления отрыва, и происходит хрупкое разрушение.

К хладноломким металлам относятся металлы с кристаллической решеткой объемно-центрированного куба (ОЦК), например конструкционные стали.

Металлы с решеткой гранецентрированного куба (ГЦК), например аустенитные стали, медь, не проявляют признаков хладноломкости, что объясняется высокими значениями $S_{от}$ и слабым изменением $\sigma_т$ в зависимости от температуры. В результате кривые $\sigma_т$ и $S_{от}$ не пересекаются. Схема Иоффе для металлов с решеткой ОЦК изображена на рис. 17.3, *а*, а для металлов с решеткой ГЦК — на рис. 17.3, *б*.

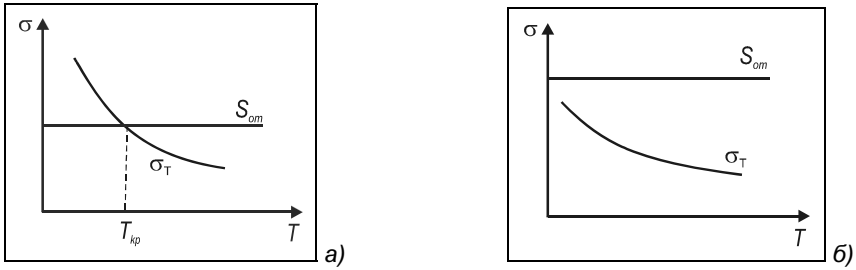


Рис. 17.3. Диаграмма хладноломкости Иоффе

При повышении предела текучести критическая температура хрупкости возрастает, что свидетельствует о склонности металла к хрупкому разрушению.

Повышение скорости деформации приводит к тому же эффекту, что и снижение температуры.

17.3.1. Критическая температура хрупкости как критерий общего запаса вязкости

Академик Н. Н. Давиденков предложил оценивать температурный запас вязкости по формуле $\eta = (T - T_{кр})/T$, где T — температура эксплуатации, $T_{кр}$ — критическая температура хрупковязкого перехода (рис. 17.3).

Если при использовании этой формулы учитывать количественную оценку смещения $T_{кр}$ под влиянием конструктивных и технологических факторов, то η становится качественным критерием общего запаса вязкости в элементах конструкции.

Рост скорости деформирования, увеличение размеров тела, концентрация напряжений повышают $T_{кр}$. С ростом размеров зерна хладноломких металлов резко снижается сопротивление отрыву, что повышает $T_{кр}$ и увеличивает опасность хрупкого разрушения. Для различных случаев имеются эмпирические формулы для оценки $T_{кр}$.

Важной характеристикой является чувствительность материалов к надрезу, т. е. снижение прочности надрезанных образцов по сравнению с гладкими. С повышением прочности материалов их чувствительность к надрезу увеличивается, а $T_{кр}$ повышается. Это объясняется ростом $\tau_т$ и $\tau_{ср}$, в то время как $S_{от}$ почти не меняется. Появляется опасность хрупкого разрушения. Эффект повышения прочности может стать отрицательным. Если с повышением прочности начинает падать пластичность, то $T_{кр}$ растет, а запас вязкости η уменьшается.

Следует иметь в виду, что параметр η применим лишь для хладноломких материалов и неприменим при действии коррозионной среды.

17.4. Напряженное состояние

Хрупкое разрушение вызывается нормальными напряжениями, пластическая деформация — касательными. Соотношение нормальных и касательных напряжений при нагружении тела зависит от вида напряженного состояния.

Влияние напряженного состояния на характер разрушения материала удобно оценивать с помощью диаграммы Я. Б. Фридмана. Эта диаграмма не позволяет рассчитать момент хрупковязкого перехода, но позволяет качественно оценить возможность такого перехода. Поэтому, не вдаваясь в детали, рассмотрим приближенное построение диаграммы и ее использование.

Характеристикой хрупкого разрушения считаем сопротивление отрыву $S_{от}$, характеристикой пластического разрушения — сопротивление срезу $\tau_{ср}$. Пластические деформации в металле появляются при достижении предела текучести $\tau_т$. Все эти характеристики не зависят от вида напряженного состояния.

В системе координат $\sigma - \tau$ отложим на осях значения $\sigma = S_{от}$, $\tau = \tau_т$, $\tau = \tau_{ср}$ и проведем через них прямые, параллельные осям. Это и есть *диаграмма Фридмана* для данного материала (рис. 17.4).

Введем *коэффициент жесткости напряженного состояния* $\alpha = \tau_{max} / \sigma_{max}$. *Жестким* будем считать напряженное состояние, затрудняющее возникновение пластической деформации и облегчающее хрупкое разрушение отрывом. Чем меньше α, тем жестче напряженное состояние, тем больше опасность хрупкого разрушения.

На рис. 17.4 каждый луч, проведенный из начала координат, соответствует определенному значению коэффициента α, т. е. определенному виду напряженного состояния.

При осевом растяжении $\alpha = 0,5$, при кручении $\alpha = 0,8$ (при коэффициенте Пуассона $\mu = 0,25$), при сжатии $\alpha = 0,8$ (при $\mu = 0,25$), при растяжении образцов с острым надрезом $\alpha \sim 0,1$, при вдавливании $\alpha \sim 20$.

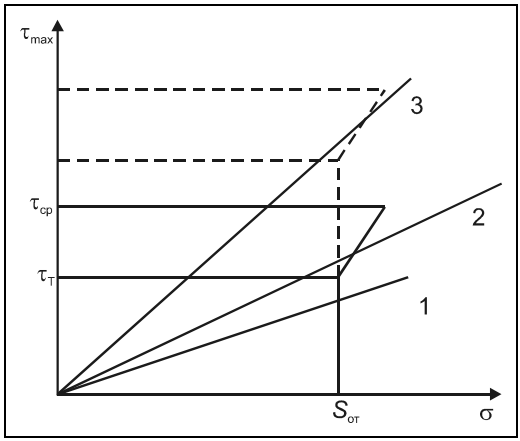


Рис. 17.4. Диаграмма Фридмана механического состояния материала

Луч 1 на диаграмме пересекает линию сопротивления отрыву. Следовательно, материал разрушается хрупко, путем отрыва, без предшествующей пластической деформации.

Луч 2 пересекает вначале линию текучести, а затем линию сопротивления отрыву. Следовательно, произойдет хрупкое разрушение путем отрыва, но с предшествующей пластической деформацией (квазихрупкое разрушение).

Луч 3 пересекает линию сопротивления срезу, поэтому после пластической деформации произойдет разрушение путем среза.

При снижении температуры существенно повышаются $\tau_т$ и $\tau_{ср}$, а $S_{от}$ растет очень медленно. Пунктиром на рис. 17.4 показана диаграмма механического состояния того же материала при снижении температуры. В этом случае для напряженных состояний 1 и 2 — разрушение хрупкое, для состояния 3 — квазихрупкое.

Запишем условия хрупкого и пластического разрушения.

Пластическое разрушение:

$$\tau_{max} > \tau_{ср}$$

$$\sigma_{max} < S_{от}$$

или

$$\alpha = \frac{\tau_{max}}{\sigma_{max}} > \frac{\tau_{ср}}{S_{от}}$$

Хрупкое разрушение:

$$\tau_{max} < \tau_{ср}$$

$$\sigma_{max} > S_{от}$$

или

$$\alpha = \frac{\tau_{max}}{\sigma_{max}} < \frac{\tau_{ср}}{S_{от}}$$

17.5. Остаточные напряжения

В зависимости от объема, в котором уравновешиваются остаточные напряжения, они могут быть первого, второго или третьего рода.

Первого рода — уравновешиваемые в объеме всего тела; второго — уравновешиваемые в объеме порядка размеров зерен металла; третьего — уравновешиваемые в областях порядка размера межатомных расстояний. Далее рассматриваем только напряжения первого рода.

Так как напряжения уравновешиваются внутри тела, то в нем одновременно присутствуют и растягивающие и сжимающие напряжения.

Действие остаточных напряжений — результат их сложения с напряжениями от внешних сил. Если напряжения растяжения от внешних сил складываются с остаточными напряжениями растяжения — прочность падает, если с остаточными напряжениями сжатия — прочность растет.

Остаточные напряжения растяжения могут служить причиной образования трещин в сварных соединениях, отливках, закаленных деталях. Кроме того, они могут привести к короблению конструкций при сварке, а после механической обработки — к изменению размеров детали.

Причиной остаточных напряжений является остаточная деформация. Пластическая — при механической обработке и сварке, упругая — при слесарной сборке, горячих и прессовых посадках.

Остаточные напряжения не могут быть выше предела текучести.

При сложном напряженном состоянии предельные значения остаточных напряжений удовлетворяют четвертой гипотезе прочности

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_{1ост}-\sigma_{2ост})^2+(\sigma_{2ост}-\sigma_{3ост})^2+(\sigma_{3ост}-\sigma_{1ост})^2}\le\sigma_т.$$

Механизм появления остаточных напряжений при пластической деформации рассмотрен на примере пластического кручения и пластического изгиба в *главе 8*.

Для повышения прочности и долговечности конструкции необходимо уменьшать растягивающие напряжения в опасных местах. Для этого желательно создать на поверхности детали сжимающие остаточные напряжения. Существует много способов поверхностного упрочнения деталей, приводящих к повышению поверхностной твердости и наведению остаточных напряжений сжатия. Это:

- механическое упрочнение — обдувка дробью, обкатка роликами, чеканка;
- термическое упрочнение — поверхностная закалка токами высокой частоты (ТВЧ);
- термохимическое упрочнение — цементирование, азотирование, цианирование.

В основе механического упрочнения лежит пластическая деформация сжатия поверхностного слоя материала.

При закалке ТВЧ превращение аустенита в мартенсит в поверхностном слое сопровождается увеличением объема и возникновением остаточных напряжений сжатия.

При термохимическом упрочнении внедрение атомов углерода или азота в поверхностные слои металла также приводит к увеличению объема. Ввиду малой толщины упрочненного слоя остаточные напряжения в нем бывают очень велики.

Поверхностное упрочнение обычно производят в местах концентрации напряжений деталей из малопластичных материалов или работающих при циклических нагрузках, т. к. в этом случае эффект упрочнения наибольший.

На рис. 17.5 приведены эпюры нормальных напряжений в сечении круглого стержня с кольцевым надрезом при растяжении. Поверхностное упрочнение надреза позволяет создать остаточные напряжения $\sigma_{ост}$, практически компенсирующие пик упругих напряжений $\sigma_{упр}$.

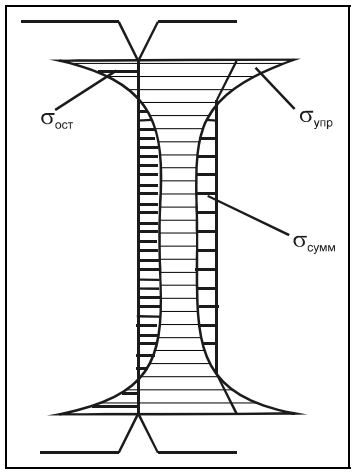


Рис. 17.5. Влияние остаточных напряжений на прочность стержня с надрезом

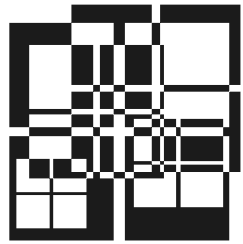
Суммарные напряжения $\sigma_{сум}$ оказались почти выровненными по сечению, что ведет к большому повышению усталостной прочности и долговечности детали.

Следует иметь в виду, что ряд видов поверхностной обработки приводит к появлению в поверхностном слое остаточных напряжений растяжения, что снижает прочность и может вызвать появление поверхностных трещин. Это некоторые процессы гальванопластики, например: хромирование, никелерование, воронение, обезуглероживание поверхностного слоя, быстрая сушка древесины, ведущая к растрескиванию дерева, потеря пластификатора из полимеров.

При токарной обработке детали в зависимости от заточки резца и режима резания возникают остаточные напряжения того или иного знака, а при шлифовании — растягивающие напряжения.

Для снятия остаточных напряжений используют отжиг детали при температуре выше температуры рекристаллизации. Для любых сталей отжиг при температуре 600 °С обеспечивает полное снятие остаточных напряжений.

ГЛАВА 18



Линейная механика разрушения тел с трещинами

Изучение причин многочисленных случаев хрупкого разрушения конструкций из пластичных материалов (обрушение мостов, разломы кораблей на две части, разрушение резервуаров с жидкостью или газом) показало, что причиной таких разрушений являются трещины.

Как правило, видимая трещина долгое время ведет себя спокойно, медленно увеличиваясь, но в какой-то момент времени происходит мгновенное хрупкое разрушение.

В 50-е годы прошлого столетия появилась новая наука — механика разрушения тел с трещинами. В результате ее бурного развития к настоящему времени выработаны критерии трещиностойкости и разработаны методы расчета на живучесть тел с трещинами.

18.1. Основные гипотезы

Исходное положение механики разрушения — в природе не существует тел без трещин. В любой конструкции в момент ее создания уже существуют трещины, чаще всего микроскопические. В процессе эксплуатации конструкции трещина медленно растет.

Требуется определить критические напряжения и критическую длину трещины, при которых происходит мгновенное распространение трещины по всему сечению элемента конструкции, что приводит к хрупкому разрушению тела на части.

В механике разрушения хрупким считается мгновенное разрушение без видимых пластических деформаций. Если материал конструкции находится в пластичном состоянии, то хрупкому разрушению предшествуют пластические деформации.

В основу механики разрушения легли гипотезы Гриффитса и Орована. Эти ученые предложили энергетический подход к решению поставленной задачи. Представим основные идеи этого подхода в виде трех частей [7].

1) *Потенциальная энергия, высвобождаемая при росте трещины, идет на образование новых поверхностей.*

Рассмотрим растяжение пластины с трещиной (рис. 18.1). При образовании трещины длиной l высвобождается потенциальная энергия.

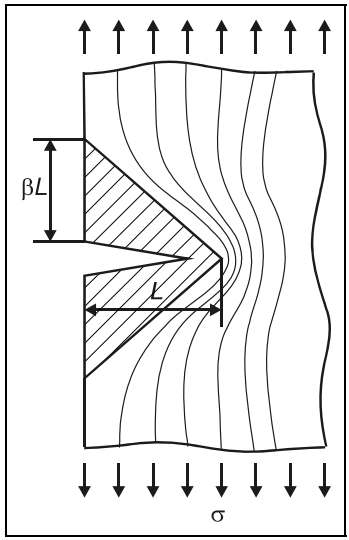


Рис. 18.1. Нагружение пластины с трещиной

Представьте себе, что это не пластина, а лента из обычной ткани. Ножницами сделаем надрез с края ленты. Прежде туго натянутые края ленты — обвиснут. Следовательно, исчезла запасенная в них потенциальная энергия. Обвисшие края ленты имеют вид треугольников, площадь которых, по расчетам Гриффитса, $F = \pi L^2$, где L — длина трещины.

Высвобожденная потенциальная энергия

$$П = П_0 \cdot V = \frac{\sigma^2}{2E} \cdot \pi L^2 b ,$$

где b — толщина пластины, E — модуль Юнга, σ — номинальное (среднее) напряжение в поперечном сечении пластины.

Эта энергия переходит в работу образования новых поверхностей

$$A = 2G_c \cdot L \cdot b ,$$

где G_c — удельная работа образования новых поверхностей (на единицу площади поверхности).

2) *Самопроизвольное распространение трещины происходит, когда скорость высвобождения потенциальной энергии больше скорости поглощения энергии, идущей на образование новых поверхностей.*

В этом утверждении — основное содержание гипотезы Гриффитса. Под скоростью здесь понимается изменение энергии на единицу длины трещины. На рис. 18.2 приведен график изменения $П$ и A с ростом трещины. График потенциальной энергии $П$ — парабола (зависит от L^2), график работы A — прямая линия (зависит от L). Суммарный баланс энергии $П + A$ имеет экстремум.

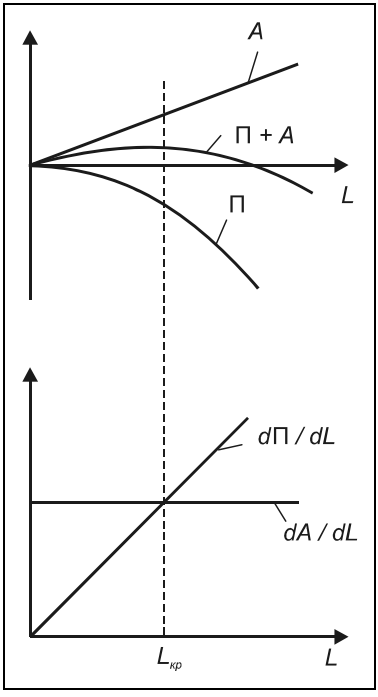


Рис. 18.2. Энергетический подход к определению критической длины трещины

Самопроизвольное распространение трещины начинается тогда, когда процесс становится энергетически выгоден для тела, т. е. суммарный запас энергии тела начинает уменьшаться.

Если $\frac{dП}{dL} < \frac{dA}{dL}$ — разрушения нет.

Если $\frac{d\Pi}{dL} \geq \frac{dA}{dL}$ — самопроизвольное распространение трещины (мгновенное разрушение). В критическом состоянии (при равенстве работ)

$$\frac{d\Pi}{dL} = \frac{\sigma^2 \cdot \pi L_{кр} b}{E} = \frac{dA}{dL} = 2G_c b,$$

откуда

$$L_{кр} = \frac{2G_c E}{\pi\sigma^2}. \qquad (18.1)$$

или, если известна длина трещины, можно найти критическое напряжение, которое вызовет самопроизвольное развитие трещины

$$\sigma_{кр} = \sqrt{\frac{2G_c E}{\pi L}}. \qquad (18.2)$$

На рис. 18.2 внизу показаны графики производных $\frac{d\Pi}{dL}$ и $\frac{dA}{dL}$. Их точка пересечения соответствует критической длине трещины.

3) *Величина G_c включает в себя работу образования новых поверхностей плюс работу пластической деформации.*

Такое предположение было введено Орованом. Если две первые гипотезы Гриффитса позволяют определять критическую длину трещины только для хрупких материалов, то гипотеза Орована дает возможность вести расчеты и для пластичных материалов. Именно эта гипотеза и дала толчок к быстрому развитию механики разрушения тел с трещинами.

Если на образование единицы площади поверхности затрачивается работа $G_c \approx 1 \frac{\text{НМ}}{\text{М}^2}$, то работа пластической деформации в тысячи раз больше $G_c \approx 10^5 \frac{\text{НМ}}{\text{М}^2}$.

В дальнейшем под величиной G_c понимается *интенсивность высвобождения энергии* при движении трещины.

Пример

Пусть для малоуглеродистой стали 10 с пределом прочности 400 МПа и $G_c \approx 10^5 \frac{\text{НМ}}{\text{М}^2}$ требуется найти напряжение, при котором критическая длина

трещины равна 1 м. По формуле (18.2) $\sigma = 113$ МПа. Если захотим увеличить критическую длину трещины до двух метров, то действующие напряжения придется уменьшить до 80 МПа.

Использование высокопрочных сталей, как правило, не приводит к повышению вязкости. Трещиностойкость большинства металлов уменьшается с ростом прочности. Прочность мягкой стали можно повысить, увеличив содержание углерода. Для стали 40 предел прочности 650 МПа, но у этой стали меньше запас пластичности и $G_c \approx 10^4 \frac{\text{нм}}{\text{м}^2}$. При том же напряжении $\sigma = 113$ МПа критическая длина трещины уменьшится до $L_{\text{кр}} = 100$ мм. А если повысить напряжение до 200 МПа (ведь цель поставлена повысить прочность), то $L_{\text{кр}}$ уменьшится до 32 мм, что весьма опасно для большой конструкции. Результаты расчета показаны на рис. 18.3.

$H := N \quad м := m \quad мм := 0.001 \cdot m \quad МПа := 10^6 \cdot \frac{H}{м^2}$

$кН := 1000 \cdot H \qquad E := 2 \cdot 10^5 \cdot МПа$

$\sigma_{кр}(L, G_c) := \sqrt{\frac{2 \cdot G_c \cdot E}{\pi \cdot L}} \qquad L_{кр}(\sigma, G_c) := \frac{2 \cdot G_c \cdot E}{\pi \cdot \sigma^2}$

сталь 10	$G_c := 10^5 \cdot \frac{Н \cdot м}{м^2}$	$L := 1 \cdot м$	$\sigma_{кр}(L, G_c) = 113\,МПа$
		$L := 2 \cdot м$	$\sigma_{кр}(L, G_c) = 80\,МПа$
сталь 40	$G_c := 10^4 \cdot \frac{Н \cdot м}{м^2}$	$\sigma := 113 \cdot МПа$	$L_{кр}(\sigma, G_c) = 100\,мм$
		$\sigma := 200 \cdot МПа$	$L_{кр}(\sigma, G_c) = 32\,мм$

Рис. 18.3. Расчеты критических напряжений и критической длины трещины

Для элементов конструкций малых размеров, таких как болт, вал, зубчатое колесо, нет смысла ориентироваться на трещины метровой длины. Для $L_{\text{кр}} \sim 1$ см рабочее напряжение может достигать 300 МПа и в этом случае целесообразно применять высокопрочные материалы. Чем больше конструкция, тем больше должна быть критическая длина трещины, но тем меньше становится рабочее напряжение. По этой причине во всем мире мягкой стали с пределом прочности до 500 МПа выплавляется в десятки раз больше, чем высокопрочных сталей.

18.2. Критерии трещиностойкости

Формулы (18.1) и (18.2) не используются в практических расчетах, т. к. в справочниках нет значений G_c для большинства материалов, а главное, они не учитывают геометрию детали и вид нагрузки. Были разработаны другие критерии трещиностойкости: силовой, энергетический, деформационный. В практике расчетов используется, в основном, силовой критерий трещиностойкости, поэтому ограничимся лишь его рассмотрением.

18.2.1. Силовой критерий трещиностойкости

Можно определить три основных типа смещения у вершины трещины, соответствующих различным схемам деформирования (рис. 18.4).

Тип I соответствует раскрытию трещины (отрыву). При этом поверхности трещины удаляются друг от друга.

Тип II соответствует сдвигу, при котором поверхности трещины скользят друг по другу в направлении, перпендикулярном краю трещины.

Тип III соответствует сдвигу, при котором поверхности трещины скользят друг по другу в направлении, параллельном краю трещины.

С помощью наложения этих трех типов смещения можно описать любое самое общее трехмерное напряженно-деформированное состояние у вершины трещины.

Существует теоретическое решение задачи о распределении перемещений и напряжений в окрестностях вершины трещины. Оно приводится в литературе по механике разрушения, например [10]. В общем виде его можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} [\sigma] &= \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cdot [f_\sigma(\theta)] \\ [u] &= \frac{K}{G} \cdot \sqrt{\frac{r}{\pi}} \cdot [f_u(\theta)] \end{aligned}, \qquad (18.3)$$

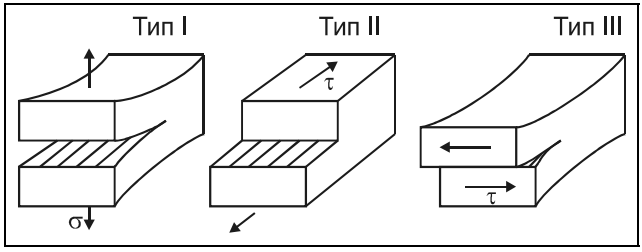


Рис. 18.4. Типы смещения у вершины трещины

где G — модуль сдвига, $[\sigma]=\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}$ — вектор напряжений, $[u]=\begin{bmatrix}u\\ u_y\end{bmatrix}$ — вектор перемещений, $[f_\sigma(\theta)]$ и $[f_u(\theta)]$ — некоторые функции угла θ для всех трех видов напряженного состояния у вершины трещины.

Коэффициент пропорциональности K в формуле (18.3) называется *коэффициентом интенсивности напряжений*. Коэффициент K зависит от нагрузки и геометрии тела, включая размер трещины. Для трех типов перемещения в окрестности трещины этот коэффициент различен и обозначается K_1, K_2 и K_3. Его определение является одной из главных задач механики разрушения.

Далее рассмотрим первый тип перемещения — отрыв, как основную причину разрушения тел с трещинами.

При $\theta=0$ (на продолжении трещины) $\sigma_y=\dfrac{K_1}{\sqrt{2\pi r}}$.

При $r\to 0$ величина $\sigma_y\to\infty$, а значение $K_1=\sigma_y\sqrt{2\pi r}$ становится неопределенным.

Воспользовавшись решением теории упругости для бесконечной плоскости, нагруженной на бесконечности напряжением σ, раскрываем неопределенность

$$K_1=\lim_{r\to 0}\sigma_y\sqrt{2\pi r}=\sigma\sqrt{\pi L}\,.$$

По аналогии $K_2=\tau\sqrt{\pi L}$, $K_3=\tau\sqrt{\pi L}$.

Для других тел при других заданных нагрузках коэффициент интенсивности напряжений в общем случае имеет вид

$$K=f\sigma\sqrt{\pi L}\,, \tag{18.4}$$

где коэффициент f зависит от вида нагружения и геометрии тела, σ — номинальное напряжение, найденное без учета трещины.

Определению коэффициента f для различных частных случаев посвящено множество работ. В общем случае этот коэффициент находится численными методами. Большое количество найденных коэффициентов f содержится во втором томе справочного пособия [10].

Величина K возрастает пропорционально номинальному напряжению σ, зависит от мгновенного значения длины трещины l и является мерой напряжений около вершины трещины.

Для оценки трещиностойкости конструкции желательно знать все три коэффициента интенсивности напряжений K_1, K_2, K_3. Однако ввиду значительных сложностей расчетов чаще всего ограничиваются определением одного, самого большого и самого важного коэффициента K_1, соответствующего отрыву берегов трещины.

Значение K, соответствующее началу быстрого роста трещины, называется *критическим коэффициентом интенсивности напряжений* и обозначается K_c.

Исследования показали, что для одного и того же материала в зависимости от вида напряженного состояния K_c может быть различным.

При переходе от плоского напряженного к плоскому деформированному состоянию значение K_c может уменьшиться в несколько раз. Наименьшее значение K_{1c} (для первого типа смещения поверхностей трещины) представляет собой характеристику материала, называемую *вязкостью материала* в условиях плоского деформированного состояния. Величина K_{1c} определяется опытным путем на стандартных образцах в соответствии с ГОСТ 25.506-85 следующим образом:

- образец с острым надрезом нагружают циклической нагрузкой $\sigma_{max} \sim 0,5\sigma_т$ в течение 50 000 циклов, при этом в образце образуется трещина ~ 5 мм;
- образец с трещиной испытывают на разрыв;
- обрабатывают диаграмму деформирования, и по формулам ГОСТ определяют K_{1c} и другие характеристики трещиностойкости.

Условие трещиностойкости $K_1 < K_{1c}$.

Левая часть неравенства вычисляется в порядке решения конкретной задачи теории упругости с учетом формы и размеров тела, способа нагружения и геометрии трещины. Правая часть неравенства (критическое значение коэффициента интенсивности напряжений K_{1c}) определяется опытным путем как механическая характеристика материала.

В окрестностях трещины в металлах возникают пластические деформации. Под их влиянием трещина становится менее острой и максимальные напряжения уменьшаются. Для учета этого эффекта предложено увеличить длину

трещины на величину пластической зоны, т. е. принять длину трещины $L = L + r_т$, где $r_т$ — размер пластической зоны на продолжении трещины. Величину $r_т$ можно приближенно определить из условия, что на границе пластической зоны $\sigma_y = \sigma_т$.

$$\sigma_т = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r_т}}, \text{ откуда } r_т = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{K_1}{\sigma_т} \right).$$

С учетом $K_1 = \sigma\sqrt{\pi L}$, получаем при плоском напряженном состоянии $r_т = \left(\frac{\sigma}{\sigma_т} \right)^2 \cdot \frac{L}{2}$.

С ростом толщины детали происходит стеснение деформаций и переход от плоского напряженного к плоскому деформированному состоянию. При этом уменьшается величина τ_{max}, и размер пластической зоны находят по формуле $r_т = \frac{(1-2\mu)^2}{2\pi} \cdot \frac{K_1^2}{\sigma_т^2}$. При $\mu = 0,3$ величина $r_т$ уменьшается в 6 раз при переходе от плоского напряженного к плоскому деформированному состоянию.

Следует отметить, что для определения K_1 требуется использовать метод итераций, поскольку K_1 зависит от величины $r_т$, а $r_т$, в свою очередь, зависит от K_1.

18.3. Живучесть конструкций

Под *живучестью* будем понимать долговечность конструкций с трещинами.

Мы рассмотрели условия, при которых начинается самопроизвольное мгновенное распространение трещины (разрушение тела), но ничего не сказали о механизме роста трещины до критических размеров.

Перечислим три основных механизма роста трещин:

- коррозия;
- ползучесть;
- усталость.

Если коррозия наиболее заметна в агрессивных средах, ползучесть — при высоких температурах, то усталость материалов проявляется при воздействии переменных нагрузок и, в той или иной степени, присутствует во всех конструкциях, являясь главным механизмом роста трещин.

Для оценки скорости распространения трещины используют данные экспериментов.

На рис. 18.5, *а* показана зависимость длины трещины L от числа циклов нагружения N. Для удобства последующих расчетов эта кривая построена (рис. 18.5, *б*) в координатах $\frac{dL}{dN} - \lg(\Delta K)$. Здесь $\frac{dL}{dN}$ — скорость распространения трещины и $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$ — размах изменения коэффициента интенсивности напряжений, $K_{\max}$ и $K_{\min}$ — коэффициенты интенсивности напряжений при максимальной и минимальной нагрузках цикла.

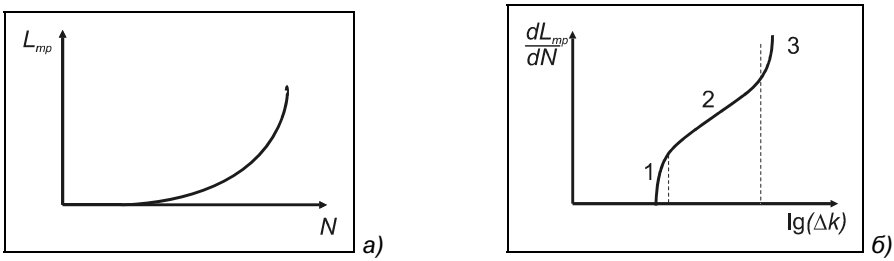


Рис. 18.5. Рост трещины при испытаниях материала на усталость

Кривую на рис. 18.5, *б* можно представить в виде трех участков. Небольшой участок 1 определяет порог, до которого макротрещина не растет (идет накопление микроповреждений). Участок 2 в логарифмических координатах — равномерный рост трещины. Участок 3 — ускоренный рост трещины до разрушения.

Равномерный рост трещины можно описать уравнением прямой линии

$$\frac{dL}{dN} = C + n\lg(\Delta K)$$

или после потенцирования

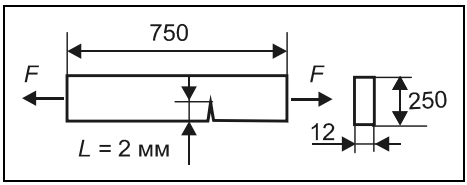
$$\frac{dL}{dN} = C(\Delta K)^n \text{ — формула Пэриса.} \qquad (18.5)$$

По формуле Пэриса можно определить время (число циклов нагружения) роста трещины до критических размеров.

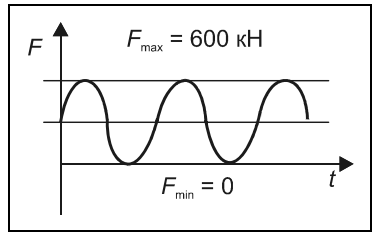
Пример

В полосе стали 20Х (рис. 18.6, *а*) обнаружена боковая трещина длиной $L_0 = 2$ мм. Полоса испытывает пульсирующий цикл нагружения, показанный на рис. 18.6. *б*. Для стали 20Х: $\sigma_т = 600$ МПа, $K_{Ic} = 40$ МПа$\sqrt{\text{м}}$. Как харак-

теристика материала, приводится экспериментально найденная зависимость $\frac{dL}{dN} = 1{,}5 \cdot 10^{-13} \left(\Delta K\right)^3$.



а)



б)

Рис. 18.6. Полоса с трещиной под действием пульсирующей нагрузки

Определить число циклов нагружения трещины до критической длины $L_{\text{кр}}$.

Вначале найдем критическую длину трещины $L_{\text{кр}}$ из условия разрушения $K_{\text{I}} = K_{\text{Ic}}$.

$$K_{\text{I}} = \sigma_{\text{ном}} \sqrt{\pi L_{\text{кр}}} \cdot f = K_{\text{Ic}}.$$

Поправочный коэффициент $f = 1{,}12$ для полосы с боковой трещиной определен по справочнику [10].

Номинальное напряжение при растяжении полосы $\sigma_{\text{ном}} = \frac{F}{A}$.

Критическая длина трещины $L_{\text{кр}} = \left(\frac{K_{\text{Ic}}}{\sigma_{\text{ном}}}\right)^2 \frac{1}{\pi}$ для плоского напряженного состояния.

$$\Delta K = K_{\text{I(от F}_{\max})} - K_{\text{I(от F}_{\min})} = \left(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}\right) \sqrt{\pi L} \cdot f.$$

Интегрируя выражение $\frac{dL}{dN} = C(\Delta K)^n$, получаем число циклов до разрушения

$$N = \int_{L_0}^{L_{\text{кр}}} \frac{dL}{C\left(\Delta K\right)^n}.$$

Результаты расчета по приведенным формулам показаны на рис. 18.7 и 18.8.

Как видно из расчетов, для роста трещины с 2 мм до критической длины 12,5 мм потребуется 4,5 млн циклов. На графике (рис. 18.8) приведена зависимость числа циклов до разрушения от размера исходной трещины LL.

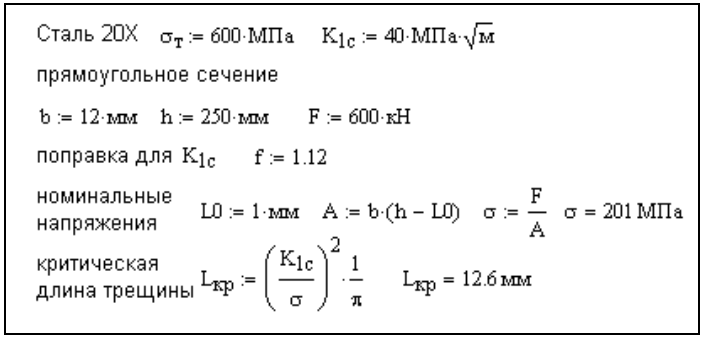


Рис. 18.7. Расчет долговечности полосы с трещиной (начало)

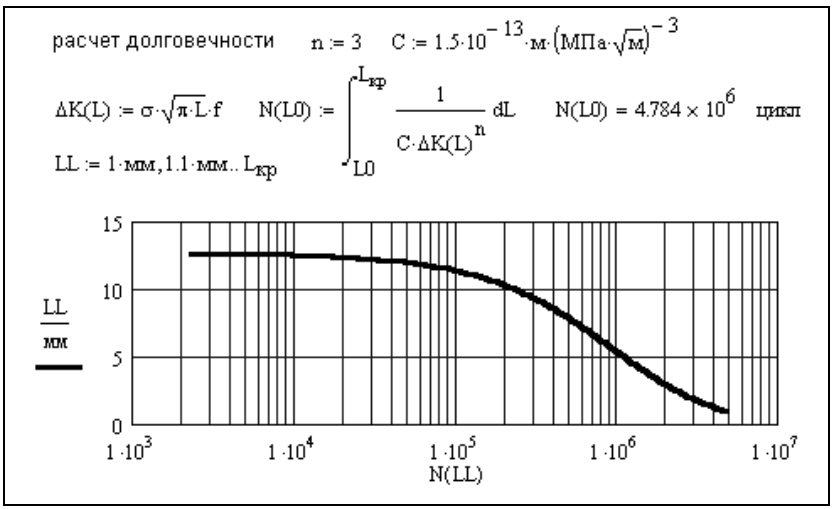


Рис. 18.8. Расчет долговечности полосы с трещиной (окончание)

Рассмотрим меры по повышению живучести конструкций [5].

Периодически необходим осмотр конструкции с целью своевременного обнаружения видимых трещин.

Если трещина обнаружена, рассчитывается ориентировочная долговечность конструкции по формуле Пэриса.

По результатам расчета необходимо снизить нагрузку для увеличения долговечности и (или) принять меры по ремонту конструкции.

Для "залечивания" трещины можно:

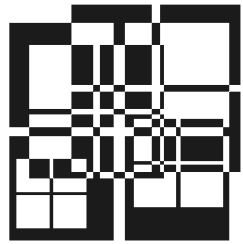
- ❒ приварить накладку в месте обнаружения трещины;
- ❒ заварить область вершины трещины;

- засверлить вершину трещины. При увеличении радиуса при вершине трещины уменьшается концентрация напряжений и соответственно прекращается рост трещины.

Существуют и разрабатываются и другие методы повышения живучести конструкций.

Задача повышения живучести конструкций чрезвычайно актуальна, т. к. внезапное разрушение конструкций часто приводит к катастрофическим последствиям.

ГЛАВА 19



Рациональное и оптимальное проектирование

Задачей конструктора является проектирование и расчет рациональной и, по возможности, оптимальной конструкций.

Рациональная конструкция должна удовлетворять техническим и эксплуатационным требованиям. При проектировании надо стремиться обеспечить наименьший вес и размеры конструкции путем выбора рациональных форм поперечных сечений и геометрии ее элементов. Выбор рациональной конструкции обеспечивается, как правило, опытом и знаниями инженера.

Оптимальная конструкция должна быть наилучшей из всех рациональных. Она должна удовлетворять математически обоснованным критериям оптимальности. Выбор оптимальной конструкции достигается путем математических расчетов, часто путем перебора большого количества вариантов, до достижения экстремального значения выбранного критерия эффективности работы конструкции.

Выбор рациональной конструкции — это движение в сторону наибольшей эффективности конструкции.

Выбор оптимальной конструкции — это достижение математически обоснованной максимальной эффективности конструкции.

19.1. Выбор рациональной конструкции

Вопросы рационального проектирования не имеет смысла выделять в отдельную главу. Это культура проектирования, которая формируется по мере накопления знаний о конструировании и расчете конструкций, в том числе по мере изучения этой книги.

В последней главе книги, как бы подводя итоги, отметим некоторые общие положения рационального проектирования конструкций.

- Вблизи мест приложения сосредоточенных нагрузок напряжения значительно больше, чем вдали от них (о чем говорилось во введении — принцип Сен-Венана). Создавая конструкцию, надо предусмотреть усиление конструкции в местах воздействия сосредоточенных нагрузок, увеличить поверхность, на которой прикладывается нагрузка.
- Использование в конструкции ступенчатых стержней вызывает концентрацию напряжений в местах резкого изменения формы. Концентрация напряжений — главный фактор снижения прочности. Необходимо предусматривать плавный переход от одной формы к другой. В местах концентрации напряжений желательно поверхностное упрочнение с созданием остаточных напряжений сжатия в поверхностном слое, что позволяет практически полностью устранить снижение прочности, вызванное концентрацией напряжений.
- Для уменьшения веса конструкции и увеличения ее жесткости при изгибе целесообразно использовать сечения коробчатой формы вместо сплошных, применять ребра жесткости и подпорки.

  Конструкции больших размеров желательно делать не работающими на изгиб. Заменять балки — фермой, стержни которой работают на растяжение или сжатие. Правда, в этих случаях необходима проверка сжатых стержней на устойчивость.
- Внешние нагрузки, если есть возможность, лучше прикладывать ближе к опорным точкам конструкции, что ведет к уменьшению изгибающих моментов и, соответственно, к уменьшению веса конструкции при той же прочности.
- Статически неопределимые системы всегда жестче, чем статически определимые того же веса.

  С точки зрения только прочности, система из одного стержня всегда будет весить меньше, чем система из многих стержней.

  Увеличение жесткости статически неопределимых систем влечет за собой увеличение собственной частоты, коэффициента динамичности, рост динамических напряжений при ударных нагрузках.

  Расчет статически неопределимой системы значительно сложнее, чем статически определимой, но приведенные в книге программы позволяют решить задачи практически любой сложности.

  В статически неопределимых системах возникают температурные и монтажные напряжения, что надо учитывать при проектировании, и, по возможности, предусматривать допустимость регулировки зазоров и мест сборки элементов конструкции.

- Нерационально использование высокопрочных сталей для стержней, работающих на сжатие, т. к. устойчивость зависит от модуля Юнга, который примерно одинаков для всех сталей.
- С точки зрения механики разрушения, применение малоуглеродистых пластичных сталей снижает опасность хрупкого разрушения, т. к. для них критическая длина трещины измеряется в метрах.

  Для деталей сравнительно малых размеров нет необходимости иметь большую критическую длину трещины. Для них целесообразно применение высокопрочных сталей.
- Собственная частота конструкций, нагруженных периодически действующей силой, не должна быть близка к резонансной. Отодвинуться от резонансной частоты (в ту или иную сторону) можно, изменив массу или жесткость конструкции. Увеличение массы или уменьшение жесткости ведет к уменьшению низшей собственной частоты конструкции.
- Нельзя забывать и об условиях хрупкого и вязкого разрушения. Ведь переход от пластичного разрушения к хрупкому может вызвать внезапное разрушение при нагрузках, вроде бы гарантирующих надежную работу конструкции. Используемый материал должен при заданных условиях эксплуатации сохранять вязкий характер разрушения.

Использование Mathcad при расчете любой конструкции позволяет путем замены численных значений параметров и построения графиков пронаблюдать тенденции изменения эффективности работы конструкции и выбрать наиболее рациональную конструкцию.

Все без исключения задачи в этом пособии дают возможность проанализировать результаты расчета.

Далее поговорим, в основном, о выборе оптимальных конструкций. Вычислительные возможности Mathcad позволяют решить и задачи оптимизации.

19.2. Выбор критериев оптимизации

В большинстве случаев главным показателем совершенства конструкции является ее масса. При проектировании необходимо выбрать такие геометрические характеристики конструкции, которые обеспечивают ее минимальную массу.

В ряде случаев основным критерием эффективности служит производительность работы механизма или его цена.

С математической точки зрения, цель оптимизации состоит в поиске максимального или минимального значения функции нескольких переменных, удовлетворяющей нескольким дополнительным требованиям. Эта функция

называется *целевой*, а дополнительным требованиям соответствуют конструктивные или технологические ограничения задачи.

Целевая функция Z и функции ограничений $f_1, f_2, ...f_n$ должны быть выражены через структурные переменные $X_1, X_2, ...X_n$

$$\begin{aligned} Z &= Z(X_1, X_2, ...X_n) \\ f_1 &= f_1(X_1, X_2, ...X_n) \\ f_2 &= f_2(X_1, X_2, ...X_n) \\ &..... \\ f_n &= f_n(X_1, X_2, ...X_n) \end{aligned} \quad . \qquad (19.1)$$

В стержневых системах, работающих на растяжение-сжатие, структурные переменные — это площади поперечных сечений $X_1 = A_1$, $X_2 = A_2$, … $X_n = A_n$ или их размеры, а целевая функция — масса стержневой системы $Z = \sum_{i=1}^{n} \rho_i L_i A_i$, где ρ_i — плотность материала, L_i — длина стержня. Через площади сечений или их размеры должны быть выражены и функции ограничений.

Единственными независимыми изменяемыми структурными переменными при решении задачи оптимизации будут площади сечений или их размеры.

Для стержней, работающих на изгиб, структурными переменными будут размеры сечений, через которые выражаются моменты инерции, моменты сопротивления, напряжения и перемещения, а также целевая функция и ограничения к ней.

В качестве ограничений часто используются:

- ❒ допускаемые значения напряжений;
- ❒ перемещения в определенных точках конструкции;
- ❒ критические усилия или напряжения потери устойчивости;
- ❒ толщина стенки или размеры сечений.

При решении задачи оптимизации ограничения записываются как в виде равенств, так и неравенств.

Ограничения определяют область нахождения структурных переменных. Чем меньше эта область, тем проще решить задачу оптимизации.

Среди конкретных часто используемых приемов оптимизации отметим:

- ❒ оценки, базирующиеся на условиях равнопрочности;
- ❒ решение обратных задач;

- математическое определение экстремума целевой функции;
- математическое программирование.

Под равнопрочностью понимается равенство максимальных напряжений во всех элементах конструкций, иногда во всех сечениях элемента конструкции.

Условие равнопрочности почти всегда соответствует минимальному весу конструкции.

Бывают прямые и обратные задачи оптимизации.

В прямых задачах задаются формой и размерами конструкции, определяют напряжения и перемещения, и проверяют, удовлетворяют ли они выбранным условиям оптимизации.

В обратных задачах задаются конечным состоянием конструкции, т. е. напряжениями и перемещениями в рабочем состоянии, и определяют форму и размеры конструкции, а также нагрузки, приводящие систему в заданное состояние.

Поиск экстремума целевой функции весьма сложная задача, требующая наличия компьютерной программы пошагового поиска экстремума сложной функции. В Mathcad имеются встроенные функции `maximize` и `minimize`, выполняющие подобную процедуру поиска, что очень упрощает нахождение экстремума функции.

Наиболее сложные случаи поиска глобального экстремума при наличии локальных экстремумов требуют специального компьютерного программирования и здесь не описываются.

Рассмотрим конкретные примеры поиска экстремальных решений с использованием Mathcad.

19.3. Примеры поиска оптимальных решений

19.3.1. Расчет кронштейна

На рис. 19.1 показан кронштейн из двух шарнирно соединенных стержней. Углы наклона стержней $\alpha 1$ и $\alpha 2$. Угол $\alpha 1$ — фиксированный. Угол $\alpha 2$ — переменный. Через блок перекинут трос. Углы наклона троса: $\beta 1 = 180°$ (груз подвешен вертикально) и $\beta 2$ — переменный. Требуется определить углы $\alpha 2$ и $\beta 2$ из условий равнопрочности стержней $\sigma 1 = \sigma 2 = [\sigma]$ и минимального веса кронштейна.

Расчет кронштейна показан на рис. 19.3. В начале расчета введены производные размерности и исходные данные. Далее с помощью вычислительного

блока `given-find` определяются продольные усилия $N1$ и $N2$ в стержнях, площади сечений стержней $A1$ и $A2$ (из условия прочности) и масса кронштейна $m = \sum \rho AL$. Переменные углы $\alpha 2$ и $\beta 2$ записываются в параметры всех функций, которые должны изменяться в процессе поиска экстремума.

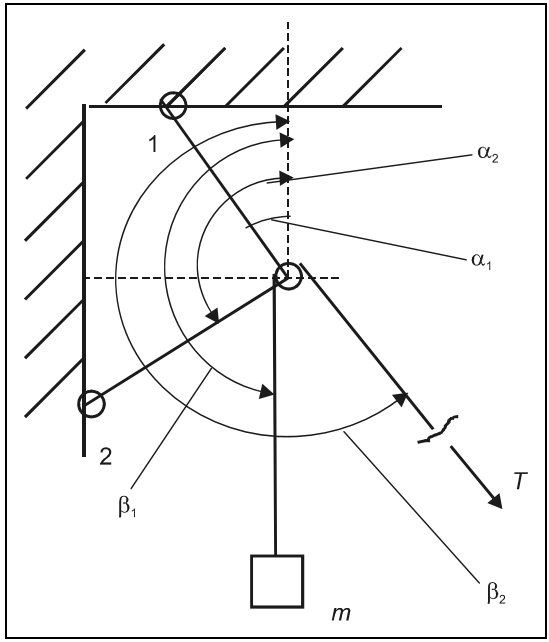


Рис. 19.1. Расчетная схема кронштейна

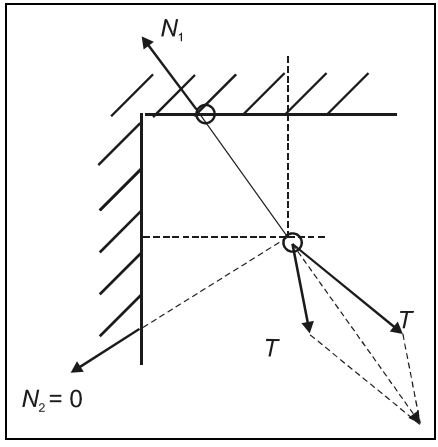


Рис. 19.2. Схема подвески блока, рекомендуемая компьютером

$м := m \quad см := 0.01 \cdot m \quad мм := 0.001 \cdot m \quad МПа := 10^6 \cdot \frac{N}{m^2}$

$кН := 1000 \cdot N \quad кг := kg \quad град := deg$

$L1 := 2 \cdot м \quad L2 := 3 \cdot м \quad T := 10 \cdot кН \quad \sigma_{доп} := 100 \cdot МПа \quad \rho := 8000 \cdot \frac{кг}{м^3}$

$\alpha 1 := 30 \cdot град \quad \alpha 2 := 120 \cdot град \quad \beta 1 := 180 \cdot град \quad \beta 2 := 210 \cdot град$

$N1 := 10 \cdot кН \quad N2 := 10 \cdot кН \quad Given$

$N1 \cdot \cos(\alpha 1) + N2 \cdot \cos(\alpha 2) + T \cdot (\cos(\beta 1) + \cos(\beta 2)) = 0$

$N1 \cdot \sin(\alpha 1) + N2 \cdot \sin(\alpha 2) + T \cdot (\sin(\beta 1) + \sin(\beta 2)) = 0$

$Z(\alpha 2, \beta 2) := Minerr(N1, N2)$

$N1(\alpha 2, \beta 2) := Z(\alpha 2, \beta 2)_0 \quad A1(\alpha 2, \beta 2) := \frac{|N1(\alpha 2, \beta 2)|}{\sigma_{доп}}$

$N2(\alpha 2, \beta 2) := Z(\alpha 2, \beta 2)_1 \quad A2(\alpha 2, \beta 2) := \frac{|N2(\alpha 2, \beta 2)|}{\sigma_{доп}}$

$m(\alpha 2, \beta 2) := \rho \cdot (A1(\alpha 2, \beta 2) \cdot L1 + A2(\alpha 2, \beta 2) \cdot L2)$

$Given \quad 90 \cdot град < \alpha 2 < 180 \cdot град \quad 180 \cdot град < \beta 2 < 270 \cdot град$

$ZZ := Minimize(m, \alpha 2, \beta 2) \quad ZZ = \begin{pmatrix} 123 \\ 240 \end{pmatrix} град \quad \alpha 22 := ZZ_0 \quad \beta 22 := ZZ_1$

$m(\alpha 22, \beta 22) = 2.771 кг \quad A1(\alpha 22, \beta 22) = 1.732 см^2 \quad A2(\alpha 22, \beta 22) = 0 см^2$

Рис. 19.3. Расчет оптимальной массы кронштейна

Для нахождения экстремума функции используется вычислительный блок `given` с функцией `minimize` для поиска минимума или с функцией `maximize` для поиска максимума. В качестве параметров этих функций используются имя целевой функции (без параметров) и переменные поиска.

При наличии ограничений на поиск ключевое слово `given` обязательно. При отсутствии ограничений — слово `given` можно опустить.

Как и всегда при использовании вычислительного блока со словом `given`, перед ним задаются начальные приближения всех переменных.

Количество переменных поиска может быть любым. Но учтите, что время поиска экстремума возрастает многократно при введении каждой новой переменной. На практике можно использовать 1—3 переменные. Если вы не спешите и в состоянии подождать окончания поиска, можно включить и больше переменных. Особенно велико время поиска, если при вычислении целевой функции используются интегралы, например интеграл Мора.

Проанализируем результаты поиска для рассмотренной стержневой системы. В результате поиска получили, что площадь второго стержня равна нулю.

Как бы мы не меняли переменные поиска, все равно оптимальная площадь второго стержня остается равной нулю.

Спасибо компьютеру за разумную подсказку. Оптимальное решение (наименьший вес кронштейна) соответствует случаю, когда вектор геометрической суммы двух усилий T направлен вдоль стержня 1. Тогда второй стержень остается ненагруженным (ненужным). Действительно, самая разумная подвеска блока на одном шарнирно закрепленном стержне (см. рис. 19.2).

Для оживления задачи на рис. 19.4 показан график зависимости массы стержней m от углов $\alpha 2$ и $\beta 2$ в двух вариантах: график поверхности и график линий уровня на одном рисунке. Рядом с графиком показано изменение допускаемых площадей сечений при различных значениях угла наклона второго стержня при $\beta 2 = 210°$.

м := m см := 0.01·m мм := 0.001·m МПа := $10^6 \cdot \frac{N}{m^2}$

кН := 1000·N кг := kg град := deg

L1 := 2·м L2 := 3·м T := 10·кН $\sigma_{доп}$:= 100·МПа ρ := 8000·$\frac{кг}{м^3}$

α1 := 30·град α2 := 120·град β1 := 180·град β2 := 210·град

N1 := 10·кН N2 := 10·кН Given

N1·cos(α1) + N2·cos(α2) + T·(cos(β1) + cos(β2)) = 0

N1·sin(α1) + N2·sin(α2) + T·(sin(β1) + sin(β2)) = 0

Z(α2, β2) := Minerr(N1, N2)

N1(α2, β2) := Z(α2, β2)$_0$ A1(α2, β2) := $\frac{|N1(\alpha 2, \beta 2)|}{\sigma_{доп}}$

N2(α2, β2) := Z(α2, β2)$_1$ A2(α2, β2) := $\frac{|N2(\alpha 2, \beta 2)|}{\sigma_{доп}}$

m(α2, β2) := ρ·(A1(α2, β2)·L1 + A2(α2, β2)·L2) масса кронштейна

Given 90·град < α2 < 180·град 180·град < β2 < 270·град

ZZ := Minimize(m, α2, β2) ZZ = $\begin{pmatrix} 123 \\ 240 \end{pmatrix}$ град α22 := ZZ$_0$ β22 := ZZ$_1$

m(α22, β22) = 2.771 кг A1(α22, β22) = 1.732 $см^2$ A2(α22, β22) = 0 $см^2$

Рис. 19.4. Зависимость массы кронштейна m от выбора углов

19.3.2. Расчет сферической крышки

Сосуд высокого давления герметично закрыт сферической крышкой (рис. 19.5). Давление в сосуде p, диаметр сосуда $2r_0$, толщина крышки δ —

неизвестна, но должна удовлетворять условию прочности. Требуется определить радиус кривизны крышки R, при котором масса крышки $m(R)$ будет минимальной.

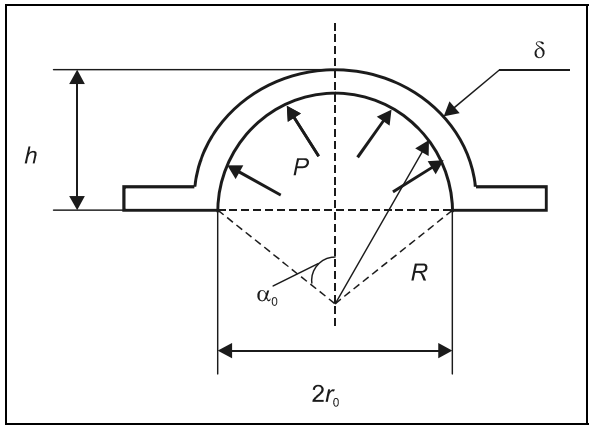


Рис. 19.5. Расчетная схема сферической крышки

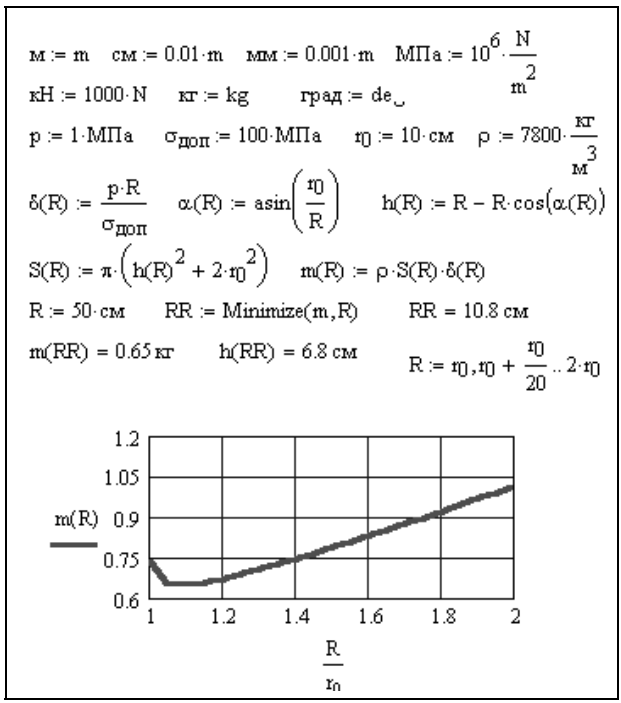


Рис. 19.6. Расчет сферической крышки

Расчет крышки приведен на рис. 19.6. Масса крышки $m(R) = \rho S(R)\delta(R)$. В задаче, задаваясь радиусом кривизны крышки R, найдем последовательно: толщину крышки $\delta(R)$ из условия прочности тонкостенной оболочки, высоту крышки $H(R)$, площадь поверхности крышки $S(R)$ и массу крышки $m(R)$.

Минимальную массу крышки находим с помощью функции `minimize`. Поскольку никаких ограничений на массу крышки не накладывается, ключевое слово `given` писать необязательно. Требуется записать только начальное приближение R и функцию `minimize`. Следует отметить, что оптимальное значение радиуса кривизны крышки RR не зависит от давления p.

На рис. 19.6 показана зависимость массы крышки от относительного радиуса кривизны крышки R/r_0. На графике хорошо виден минимум функции.

19.3.3. Подбор нагрузок по перемещениям балки

Рассмотрим пример обратной задачи оптимального проектирования.

Для консольной балки прямоугольного сечения (рис. 19.7) заданы перемещения в трех точках после деформации: $\Delta_{M_0} = 2$ мм, $\Delta_{F_1} = -1$ мм, $\Delta_{F_2} = 1$ мм.

Требуется подобрать нагрузки, действие которых на балку вызовет появление заданных перемещений.

Характером нагрузок задаемся: приложим пару сил на свободном конце и две силы в точках, где заданы перемещения. При тех же граничных условиях можно задать любые нагрузки в любой точке, но с учетом здравого смысла. Ведь можно выбрать такие нагрузки, которые не могут создать заданный профиль упругой оси.

На рис. 19.8 приведено решение этой задачи. Вверху введены исходные данные для расчета. Далее в общем виде записан изгибающий момент в сечениях балки. Поскольку нагрузки на балку не известны, они включены в параметры функции изгибающего момента. В общем виде записан также интеграл Мора для определения перемещений в произвольной точке балки.

Нагрузки, удовлетворяющие заданным граничным условиям, определяются путем решения системы уравнений граничных условий с помощью вычислительного блока `given-find`. Правда, на этот раз вместо функции `find` взята функция `minerr`.

Если решение существует, результаты решения задачи с использованием функций `find` и `minerr` совпадают. Если решения нет, функция `find` выдает ошибку, а функция `minerr` выводит невязку решения.

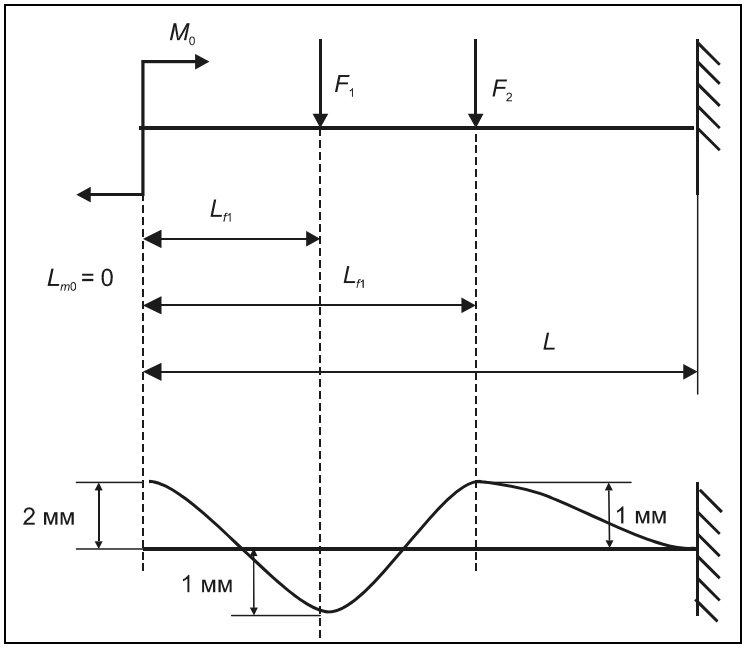


Рис. 19.7. Расчетная схема балки и заданные перемещения в ней

Размерности, производные от стандартных ORIGIN := 1

кН := 1000·N мм := mm см := cm Нм := N·m $МПа := 10^6 \cdot \frac{N}{m^2}$

$E := 2 \cdot 10^5 \cdot МПа$ b := 1·см h := 2·см $J(x) := \frac{b \cdot h^3}{12}$

$L_{M0} := 0 \cdot см$ $L_{F1} := 20 \cdot см$ $L_{F2} := 60 \cdot см$ L := 100·см

$M(F1, F2, M0, x) := M0 \cdot (x > L_{M0}) + F1 \cdot (x - L_{F1}) \cdot (x > L_{F1}) + F2 \cdot (x - L_{F2}) \cdot (x > L_{F2})$

$M1(xx, x) := 1 \cdot (x - xx) \cdot (x > xx)$

$\Delta(F1, F2, M0, xx) := \int_0^L \frac{M(F1, F2, M0, x) \cdot M1(xx, x)}{E \cdot J(x)} dx$ $x := 0 \cdot см, \frac{L}{100} .. L$

M0 := 100·Нм F1 := 1·кН F2 := −3·кН $\theta(F1, F2, M0, x) := \frac{d}{dx} \Delta(F1, F2, M0, x)$

Given $\Delta(F1, F2, M0, L_{M0}) = 2 \cdot мм$ $\Delta(F1, F2, M0, L_{F1}) = -1 \cdot мм$

$\Delta(F1, F2, M0, L_{F2}) = 1 \cdot мм$ $\Delta(F1, F2, M0, L) = 0 \cdot мм$ $\theta(F1, F2, M0, L) = 0$

$\begin{pmatrix} F1 \\ F2 \\ M0 \end{pmatrix} := Minerr(F1, F2, M0)$ F1 = −1 кН F2 = 1 кН M0 = 140 Нм

Рис. 19.8. Расчет нагрузок, вызывающих заданные перемещения в балке

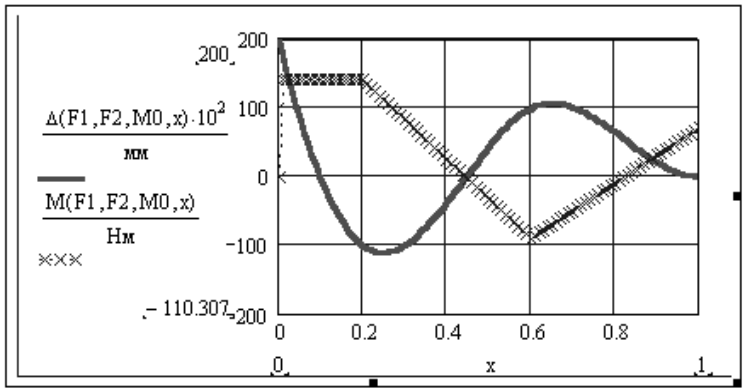


Рис. 19.9. Эпюра изгибающих моментов и перемещения в балке

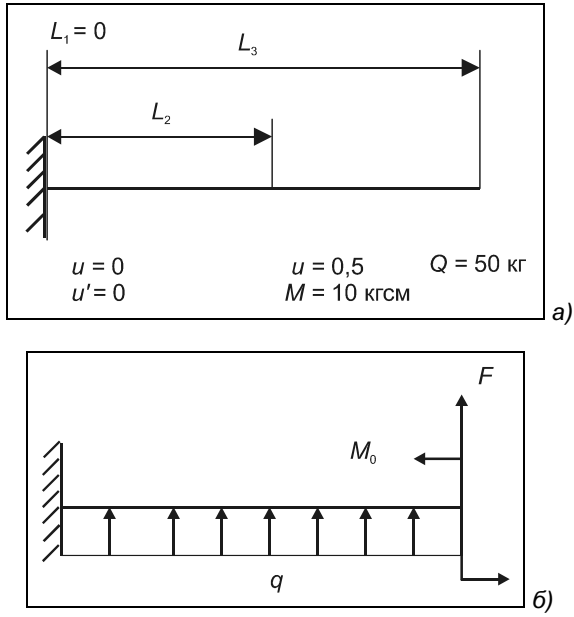


Рис. 19.10. Схема балки с указанием граничных условий (*а*) и найденные нагрузки (*б*)

Равенство нулю угла поворота сечения в заделке нельзя ввести в вычислительный блок в виде производной от прогиба, поэтому выше вычислительного блока производной присвоено имя функции θ с теми же параметрами.

Вычислительному блоку предшествуют начальные приближения всех параметров (нагрузок). После вычислительного блока выведены значения нагру-

зок, удовлетворяющих решению системы уравнений (граничным условиям задачи).

На рис. 19.9 показаны изогнутая ось балки и эпюра изгибающих моментов от найденных нагрузок.

Другой вариант решения подобных обратных задач показан на рис. 19.10 и 19.11.

Аппроксимация упругой линии балки степенным полиномом
и определение нагрузок, обеспечивающих такую упругую линию

$E := 2 \cdot 10^6$ $b := 1$ $h := 2$ $J := \frac{b \cdot h^3}{12}$ ORIGIN := 1

Имеем 4 граничных условия. Берем полином 4-й степени

$i := 1 .. m + 1$ $u(x,C) := \sum_{i=1}^{m+1} C_i \cdot x^{i-1}$

подготовка производных к подстановке в вычислительный блок

$u1(x,C) := \frac{d}{dx} u(x,C)$ $M(x,C) := \frac{d^2}{dx^2} u(x,C) \cdot E \cdot J$

$Q(x,C) := \frac{d^3}{dx^3} u(x,C) \cdot E \cdot J$ $q(x,C) := \frac{d^4}{dx^4} u(x,C) \cdot E \cdot J$

$C_i := 10$ начальные приближения коэффициентов

Given $u(L_1, C) = 0$ $M(L_2, C) = 10$ $Q(L_3, C) = -50$

$u1(L_1, C) = 0$ $u(L_2, C) = 0.5$

$CC := Find(C)$ использован нелинейный метод

аналитический вид упругой линии $f(x) := \sum_{i=1}^{m+1} CC_i \cdot x^{i-1}$ $CC = \begin{pmatrix} 0 \\ -0 \\ 0.00024 \\ -0 \\ -0 \end{pmatrix}$

Рис. 19.11. Подбор степенного полинома при решении обратных задач

Для консольной балки прямоугольного сечения (рис. 19.10) заданы граничные условия. Надо подобрать нагрузки, удовлетворяющие этим условиям. В этой задаче расчет ведется без учета размерностей. Числовые исходные данные введены в килограммах и сантиметрах.

В этой задаче пойдем другим путем. Подберем степенной полином, удовлетворяющий заданным граничным условиям. На рис. 19.11 для заданной балки подбирается полином четвертой степени. Для решения системы уравнений

граничных условий производные от перемещения u готовятся заранее в виде функций от коэффициентов полинома.

В этой задаче заданы: равенство нулю прогиба и угла поворота в заделке $L_1 = 0$; прогиб $\Delta = 0{,}5$ см; изгибающий момент $M = 10$ кг/см в сечении $L_2 = 50$ см и поперечная сила $Q = 50$ кг на свободном конце балки $L_3 = 100$ см. В принципе, можно задать любые граничные условия.

Далее с помощью вычислительного блока `given-find` определяются коэффициенты полинома. Зная коэффициенты полинома, его можно записать в явном виде.

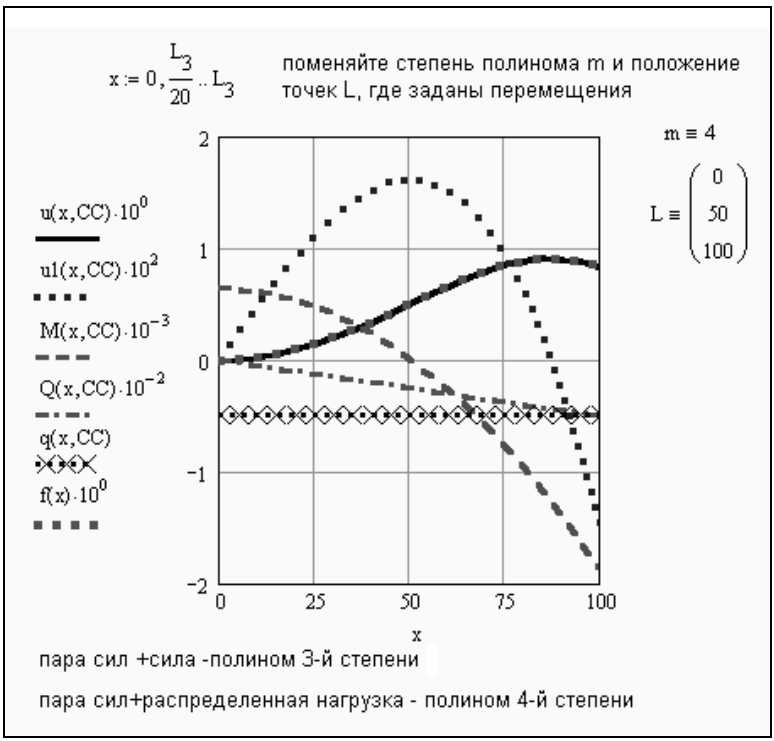


Рис. 19.12. Графики, построенные с использованием найденного полинома

По уравнению полинома строятся графики перемещения и его производных (рис. 19.12), т. е. углов поворота, поперечной силы и изгибающего момента. Анализируя эти графики, можно определить величины нагрузок на балку, вызывающих подобный вид упругой линии балки. Но это будут нагрузки, приложенные к свободному концу балки (см. рис. 19.10, *б*). В нашем примере $q = 0{,}5$ кг/см, $F = 50$ кг, $M_0 = 180$ кг/см. Способ, описанный в предыдущей

задаче, предпочтительней. Он позволяет определять произвольно приложенные нагрузки.

19.3.4. Поиск оптимальных размеров сечения балки

Рассмотрим совсем простой случай нагружения балки — консольная балка прямоугольного сечения нагружена одной силой на свободном конце. Требуется подобрать размеры сечения балки из условий: $\sigma_{max} = [\sigma]$ и перемещение конца балки $\Delta \le [\Delta] = 2$ мм. На размеры сечения тоже наложены ограничения. Расчет оптимальных размеров сечения показан на рис. 19.13. Формулы для напряжения и перемещения конца балки записаны готовыми ввиду простоты расчета. Масса стержня пропорциональна площади поперечного сечения. Размеры сечения определяются с использованием вычислительного блока `given-minimize`. Внутри блока записаны сразу 4 ограничения: на размеры b и h, на напряжение σ и на перемещение Δ. Оптимальные размеры выведены после функции `minimize`. На рис. 19.14 для наглядности выведены поверхности напряжений и перемещения Δ в зависимости от размеров поперечного сечения.

Этот пример прост (для Mathcad) и нагляден. Поиск идет сразу по нескольким переменным с учетом большого количества ограничений. Экстремума в данной задаче нет, поэтому в области наложенных ограничений Mathcad выбирает наилучшее решение.

Размерности, производные от стандартных

$H := N \quad кН := 1000 \cdot N \quad м := m \quad мм := mm \quad см := cm$

$МПа := 10^6 \cdot \frac{H}{м^2} \quad E := 2 \cdot 10^5 \cdot МПа \quad L := 1 \cdot м \quad F := 200 \cdot H$

$b := 3 \cdot см \quad h := 2 \cdot см \quad \sigma_{доп} := 100 \cdot МПа \quad \Delta_{доп} := 20 \cdot мм$

$A(b,h) := b \cdot h \quad \sigma(b,h) := \frac{6 \cdot F \cdot L}{b \cdot h^2} \quad \Delta(b,h) := \frac{4 \cdot F \cdot L^3}{E \cdot b \cdot h^3}$

Given $\quad 2 \cdot см < b < 6 \cdot см \quad 1 \cdot см < h < 10 \cdot см$

$\sigma(b,h) < \sigma_{доп} \quad \Delta(b,h) < \Delta_{доп}$

$Z := Minimize(A,b,h) \quad Z = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.449 \end{pmatrix} см \quad b_{опт} := Z_0 \quad h_{опт} := Z_1$

$\Delta(b_{опт}, h_{опт}) = 13.608\,мм \quad \sigma(b_{опт}, h_{опт}) = 100\,МПа$

$A(b_{опт}, h_{опт}) = 4.9\,см^2$

Рис. 19.13. Поиск оптимальных размеров сечения балки

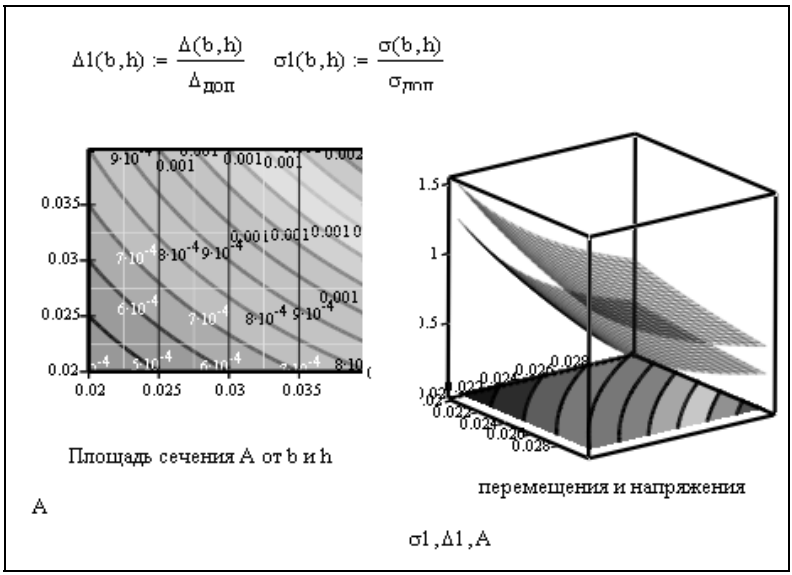


Рис. 19.14. Зависимость максимального напряжения и перемещения конца балки от размеров сечения

В заключение этой главы сделаем два вывода: один грустный, один радостный. Mathcad не может помочь в создании рациональной конструкции, зато поможет найти оптимальный вариант рационально выбранной вами конструкции.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Самостоятельная работа с программами

Данное приложение предназначено не для студентов, а для преподавателей. Студенты — люди практичные, и маловероятно, что они захотят работать с программой без особой нужды.

Приведенные в книге программы могут использоваться инженерами при проведении расчетов конструкций. В этом случае программа должна быть модернизирована для решения конкретной задачи путем вырезания ненужных частей и вставки нужных (возможно из других программ). Сборка программы из готовых кусков гарантирует быструю отладку ее и получение результатов расчета.

Поскольку данная книга является учебным пособием, то и основное предназначение программ — самостоятельная работа студентов с программами.

В зависимости от объема курса сопротивления материалов (в часах) приведенные программы могут использоваться для ознакомления с ними в компьютерном классе под руководством преподавателя или для выполнения домашних расчетных заданий и курсовой работы.

При ознакомлении сразу с несколькими программами за одно занятие, все, что может успеть сделать студент, — это подставить свои числовые данные и посмотреть результаты расчета.

При выполнении расчетных заданий, и особенно курсовой работы, студент должен не просто подставить свои исходные данные, но и понять алгоритм расчета. Для этого необходимо, чтобы он вставил в программу какие-то свои объекты, затем отладил программу и оценил результаты расчета.

Далее предлагаются некоторые варианты корректировки программ студентами, которые могут быть использованы при разработке заданий.

Исходные числовые данные для студенческих заданий не приводятся, т. к. они должны учитывать специфику вуза и специализации подготовки студентов.

Глава 2. Геометрические характеристики поперечных сечений

Определение геометрических характеристик фигуры, заданной несколькими математическими выражениями (программа "Geom-кривые")

1. Поменять уравнения кривых, образующих фигуру.
2. Определить радиусы инерции фигуры и постройте график их зависимости от угла наклона осей.
3. Определить момент инерции относительно заданной преподавателем оси.

Определение геометрических характеристик фигуры, заданной массивом точек на ее контуре (программа "Geom-массив точек")

1. Ввести свои массивы координат точек. Число точек на верхней и нижней линиях контура может быть различным и произвольным.
2. Определить момент инерции относительно заданной преподавателем (любой) оси.

Определение геометрических характеристик составного сечения (программа "Geom-составное")

1. Ввести исходные данные для заданного (любого) составного сечения.
2. Видоизменить для своего сечения программы-функции определения моментов инерции J_z, J_y, J_{zy}.
3. Определить главные радиусы инерции сечения.

Глава 3. Определение внутренних усилий

Определение внутренних усилий в стержне при растяжении, кручении, изгибе (программы "внутр-раст", "внутр-круч", "внутр-изгиб" — всего 7 программ)

1. Для заданного преподавателем стержня ввести свои исходные данные в виде чисел (скаляров) или векторов чисел. При отсутствии каких-либо нагрузок в программе их надо обнулить в исходных векторах.
2. Записать математическое выражение заданной преподавателем распределенной нагрузки и ввести его в расчет.

3. Для тренировки в использовании булевых операторов условия записать внутренние усилия (хотя бы в одном примере) самостоятельно без помощи оператора суммы.
4. Определить максимальные значения внутренних усилий.

Глава 4. Растяжение-сжатие

Определение напряжений и перемещений в статически определимом и статически неопределимом стержнях при растяжении-сжатии (программы "раст-1 стерж-стат-опред" и "раст-1 стерж-стат-неопр)

1. Для заданных нагрузок записать продольные усилия без использования оператора суммы.
2. Ввести в расчет заданный закон изменения размеров сечения.
3. Внести необходимые изменения в оператор площади сечения $A(x)$.
4. Ввести заданные изменения температуры и монтажный зазор.
5. Путем перебора подобрать значение $\Delta_{\text{монт}}$, обеспечивающее наименьший уровень напряжений в стержне.

Определение напряжений и перемещений в шарнирно-стержневой статически неопределимой системе (программа "раст шарн-стерж")

1. Для заданной стержневой системы внести необходимые изменения в исходные данные. При отсутствии стержня положить его площадь, равной нулю. При большем количестве стержней ввести дополнительные строки в векторы исходных данных.
2. Из условия прочности определить допускаемую нагрузку и соответствующие ей перемещения точек подвеса стержней.

Глава 5. Механические характеристики материалов

Построение диаграммы истинных напряжений при растяжении (программа "мех-хар")

Эта программа предназначена для обработки результатов лабораторных испытаний образцов на растяжение.

В расчет необходимо ввести координаты точек диаграммы деформирования материала при растяжении и размеры образца до и после испытания.

Глава 6. Сдвиг и кручение

Определение напряжений и перемещений при кручении статически определимых и статически неопределимых стержней (программы "круч-стат-опред" и "круч-стат-неопред")

1. Для заданного стержня записать выражение для крутящего момента с помощью булевых операторов, но без использования оператора суммы.
2. В соответствии с заданием ввести размеры сечений стержня.
3. Внести необходимые поправки в выражения для моментов инерции и моментов сопротивления.
4. Для одного из участков стержня записать закон изменения размеров сечения так же, как при растяжении (в программе "раст-1стерж стат-опред").
5. Варьируя монтажный зазор ϕA, подобрать его значение, обеспечивающее наименьший уровень напряжений в стержне.

Расчет простейших соединений (программа "соед")

Нет смысла применять столь простую программу в качестве учебного задания. Быстрее и проще использовать для расчета микрокалькулятор.

Рекомендуется обратить внимание на однотипность записи условия прочности во всех расчетах. При желании можно проверить результаты выполненных расчетов.

Глава 7. Плоский поперечный изгиб

Определение напряжений и перемещений при плоском поперечном изгибе (программы "изгиб-консоль" и "изгиб на двух опорах")

1. Для заданной статически определимой балки записать выражения для поперечной силы и изгибающего момента с помощью булевых операторов условия, но без оператора суммы.
2. Ввести в расчет заданную распределенную нагрузку переменной интенсивности по аналогии с растяжением (программа "раст-1 стерж стат-опред").

3. Рассчитать геометрические характеристики заданного поперечного сечения балки.
4. При определении перемещений методом начальных параметров ввести в уравнение Крылова слагаемые, учитывающие переменную распределенную нагрузку.

Определение перемещений, внутренних усилий и напряжений в балке на упругом основании (программа "упр-осн")

1. Для заданной балки на упругом основании ввести нагрузки, заменив сосредоточенные силы распределенными.
2. Записать коэффициент постели по длине балки.
3. Определить максимальные напряжения в опасном сечении балки, вставив в расчет фрагмент программы расчета балки на прочность при плоском поперечном изгибе.

Глава 8. Учет пластических деформаций

Определение нагрузки, соответствующей заданному перемещению шарнирно-стержневой системы (программа "раст-пласт")

Данная программа может использоваться в совокупности с программой "раст-шарн-стерж" *главы 5*, в которой рассматривается упругое решение той же задачи. Вводя одни и те же исходные данные, используя одни и те же уравнения равновесия и совместности деформаций, определяем предельную нагрузку. В *главе 5* — в упругой постановке, в *главе 9* — в упруго-пластической. Самостоятельную работу, кроме использования другой схемы, в этой программе предусмотреть трудно.

Распределение напряжений при упругопластическом изгибе и при кручении (программы "крут-пласт и изгиб-пласт")

В этих программах рассчитываются напряжения при упругопластической деформации. Самостоятельная работа с ними не предусматривается.

Можно ввести другие аппроксимации диаграммы деформирования, другую форму поперечного сечения.

Глава 10. Сложное сопротивление

Расчет напряжений и перемещений при сложном сопротивлении стержня (программа "слож-сопр")

1. Протестировать программу, оставив одну-две нагрузки и сечение постоянной формы. Для этого в векторах нагрузок обнулить все нагрузки, кроме одной-двух. После определения моментов инерции ввести постоянные значения моментов инерции $J_x(x) := Const$ и т. д.
2. В соответствии с заданием ввести свои нагрузки и формы сечений. Найдя максимальные напряжения на каждом участке, определить допускаемые размеры сечений. Ввести их в начало программы и повторить расчет.
3. Записать выражения для внутренних усилий с использованием булевых операторов, но без оператора суммы.
4. Проверить правильность определения внутренних усилий, используя дифференциальные зависимости между ними.

Глава 11. Энергетический метод расчета упругих систем

Определение перемещений при изгибе (программы "изгиб-консоль" и "изгиб на 2 опорах" из главы 7)

Самостоятельная работа с программой не предусматривается, т. к. программы осуществляют определение всех возможных перемещений. Достаточно познакомиться с программой и сравнить три способа определения перемещений при изгибе.

Расчет плоской статически неопределимой рамы методом сил (программа "плоская рама")

1. Для заданной рамы записать изгибающие моменты для грузовой и всех единичных систем в виде матриц и ввести их в программу.
2. Меняя исходные данные, заданные глобально в конце программы, проанализировать результаты расчета.

Расчет пространственной статически неопределимой рамы методом сил (программа "рама-простран")

1. Для заданной рамы записать изгибающие и крутящие моменты для грузовой и всех единичных систем в виде матриц и ввести их в программу. Продумать и изменить вектор температурных перемещений.

2. Сделать проверку правильности решения при другом раскреплении.
3. Ввести моменты инерции, различные для разных участков.
4. Выбрать опасное сечение, если форма сечения прямоугольная.
5. Меняя исходные данные, заданные глобально в конце программы, проанализировать результаты расчета.

Глава 12. Устойчивость сжатых стержней

Подбор размеров поперечного сечения сжатого стержня (программа "устойч-подбор")

Для заданного сжатого стержня подобрать размеры сечения из условия устойчивости итерационным способом.

Определение критической силы энергетическим методом (программа "энергет-метод")

Для заданного стержня (ступенчатого с несколькими нагрузками) подобрать форму аппроксимирующего полинома и определить критическую силу.

Расчет стержня на продольно-поперечный изгиб (программа "прод-попер изгиб")

Самостоятельная работа с программой не предусматривается.

Рекомендуется для заданного стержня проделать несколько последовательных вычислений при различных значениях продольной и поперечной сил и построить график зависимости максимальных напряжений от нагрузок.

Глава 13. Расчет тонкостенных оболочек (программа "оболочки")

Для заданной оболочки определить допустимую толщину стенки или допускаемое давление.

Глава 14. Динамика упругих систем

Расчет сложной системы из нескольких элементов на удар и устойчивость (программа "слож-сист-удар")

Для заданной сложной системы требуется скорректировать большинство выражений в программе расчета. Далее в соответствии с программой опреде-

лить из условия прочности на удар либо допускаемый вес падающего груза, либо допускаемую высоту падения груза. Проверить сжатый стержень на устойчивость. Найти динамическое перемещение заданной точки системы.

Динамический расчет балки (программы "колеб-консоль" и "колеб 2 опоры")

Для заданной консольной балки или балки на двух опорах скорректировать расчетную программу.

1. Определить максимальные динамические напряжения при ударе.
2. Определить низшую собственную частоту колебаний.
3. Для заданной вынуждающей силы найти перемещение балки.

Глава 15. Усталость материалов (программа "усталость")

Для заданной детали ввести в расчет характеристики цикла нагружения, свойства материала и особенности детали. Определить предел ограниченной выносливости при заданном числе циклов и степени асимметрии цикла.

Глава 18. Линейная механика разрушения тел с трещинами

Оценка долговечности тела с трещиной (программа "мех-разруш")

Для заданной детали определяется зависимость долговечности детали от длины исходной трещины.

Глава 19. Рациональное и оптимальное проектирование

Определение нагрузок на балку, вызывающих заданные перемещения (обратная задача) (программа "балка обратная")

Подобрать нагрузки, действие которых на балку вызывает заданные перемещения. Заданные перемещения должны быть возможными. Число их — любое. Видом подбираемых нагрузок и их положением на балке надо задаться.

Программа "балка-полином"

Подобрать вид полинома, аппроксимирующего заданную упругую линию балки. Определить нагрузки, приложенные на конце балки и вызывающие заданные перемещения балки.

Определение размеров крышки сосуда под давлением (программа "крышка")

Для заданного сосуда под давлением подобрать размеры крышки, обеспечивающие минимальный вес при выполнении условия прочности.

Подбор оптимальных размеров балки (программа "поиск")

Подобрать размеры поперечного сечения балки, обеспечивающие ее минимальный вес, если задано одно перемещение балки и границы допустимых размеров сечения. Поменять граничные условия.

Определение оптимальных углов наклона стержней (программа "стерж-сист")

Для кронштейна из двух стержней, на котором подвешен груз, подобрать оптимальные углы наклона стержней, обеспечивающие минимальный вес конструкции. Задаться границами изменения углов наклона стержней.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Описание компакт-диска

На диске находятся программы, иллюстрирующие материал, изложенный в книге. Все примеры собраны по главам.

Содержимое компакт-диска скопировать на жесткий диск своего компьютера. Открыть файл Пуск.doc из каталога Программы. Щелкнуть мышью на имени нужной программы и она откроется. Можно в каталоге необходимой главы выбрать требуемый файл и открыть его, щелкнув на нем мышью.

Все программы запускаются и непосредственно с диска.

Глава 2. Геометрические характеристики поперечных сечений

- Определение геометрических характеристик фигуры, заданной несколькими математическими выражениями (программа **Geom-кривые**).
- Определение геометрических характеристик фигуры, заданной массивом точек на ее контуре (программа **Geom-массив точек**).
- Определение геометрических характеристик составного сечения (программа **Geom-составное**).

Глава 3. Определение внутренних усилий

Определение внутренних усилий в стержне при растяжении, кручении, изгибе.

- Растяжение стержня при $q = Const$ (программа **внутр-раст q=Const**).
- Растяжение стержня при q-переменной (программа **внутр-раст q переменная**)
- Кручение стержня (программа **внутр-круч**).
- Изгиб консольной балки при $q = Const$ (программа **внутр изгиб консольная q=Const**).

- Изгиб консольной балки при q переменной (программа **внутр изгиб консольная q-перем**).
- Изгиб балки на двух опорах при $q = Const$ (программа **внутр изгиб q=Const на 2 опорах**).
- Изгиб балки на двух опорах при q переменной (программа **внутр изгиб q переменная на 2 опорах**).

Глава 4. Растяжение-сжатие

- Определение напряжений и перемещений в одном стержне (статически определимом) (программа **раст-1стерж стат-опред**).
- Определение напряжений и перемещений в одном стержне (статически неопределимом) (программа **раст-1стерж стат-неопред**).
- Определение напряжений и перемещений в статически неопределимой щарнирно-стержневой системе (программа **раст-шарн-стерж**).

Глава 5. Механические характеристики материалов

- Обработка результатов испытаний образцов на растяжение с построением диаграммы истинных напряжений и ее аппроксимацией (программа **мех-хар**).

Глава 6. Сдвиг и кручение

- Определение коэффициентов α, β, γ для расчета стержней прямоугольного сечения на кручение (программа **коэфф**).
- Определение напряжений и перемещений при кручении статически определимого стержня произвольного сечения (программа **круч-стат-опред**).
- Определение напряжений и перемещений при кручении статически неопределимого стержня произвольного сечения (программа **круч-стат-неопред**). Расчет простейших соединений на растяжение, срез, смятие (программа **соед**).

Глава 7. Плоский поперечный изгиб

- Определение внутренних усилий, напряжений и перемещений для консольных балок произвольного сечения с произвольными нагрузками (программа **изгиб-консоль**).

- Определение внутренних усилий, напряжений и перемещений для балок на двух опорах произвольного сечения с произвольными нагрузками (программа **изгиб-на 2 опорах**).
- Определение внутренних усилий и перемещений для балок на упругом основании (программа **упр-осн**).

Глава 8. Учет пластических деформаций

- Определение нагрузки, вызывающей заданное перемещение точки, статически неопределимой шарнирно-стержневой системы при различных аппроксимациях диаграммы деформирования (программа **раст-пласт**).
- Распределение напряжений при упругопластическом кручении стержня круглого сечения (программа **круч-пласт**).
- Распределение напряжений при упругопластическом изгибе стержня и различных аппроксимациях диаграммы деформирования (программа **изгиб-пласт**).
- Определение предельной нагрузки при изгибе балки методом нижней оценки (программа **балка-пласт**).

Глава 10. Сложное сопротивление

- Определение внутренних усилий, напряжений и перемещений в стержне произвольного сечения, нагруженном произвольными нагрузками (программа **слож-сопр**).

Глава 11. Энергетический метод расчета упругих систем

- Определение перемещений при изгибе консольных балок (программа **изгиб-консоль**).
- Определение перемещений при изгибе балок на двух опорах (программа **изгиб на 2 опорах**).
- Определение перемещений стержня при сложном сопротивлении (программа **слож-сопр**).
- Определение перемещений сложной системы из нескольких элементов (программа **перемещ-слож-сист**).
- Расчет статически неопределимой плоской рамы методом сил (программа **плоская рама**).

- Расчет статически неопределимой пространственной рамы методом сил (программа **Рама простран**).

Глава 12. Устойчивость сжатых стержней

- Подбор размеров поперечного сечения сжатого стержня итерационным методом (программа **устойч-подбор**).
- Определение критической силы энергетическим методом (программа **энергет метод**).
- Определение внутренних усилий, напряжений и перемещений при продольно-поперечном изгибе стержня (программа **прод-попер изгиб**).

Глава 13. Расчет тонкостенных оболочек

- Оценка краевого эффекта в тонкостенных оболочках (программа **краевой эффект**).
- Определение толщины стенки или допускаемого давления для составной тонкостенной оболочки (программа **оболочки**).

Глава 14. Динамика упругих систем

- Расчет консольной балки на удар и колебания (свободные и вынужденные) (программа **колеб-консоль**).
- Расчет балки на двух опорах на удар и колебания (свободные и вынужденные) (программа **колеб-2 опоры**).
- Расчет сложной системы на удар и устойчивость (программа **слож-сист-удар**).

Глава 15. Усталость материалов

- Расчет болта на усталостную прочность (программа **усталость**).
- Обработка результатов испытаний на усталость (программа **испытания**).

Глава 19. Рациональное и оптимальное проектирование

- Выбор оптимальных углов наклона стержней в кронштейне (программа **стерж-сист**).
- Определение оптимального радиуса кривизны сферической крышки (программа **крышка**).

- Определение нагрузок на балку, вызывающих заданные перемещения (программа **балка обратная**).
- Аппроксимация упругой линии балки полиномом для определения нагрузок на балку, вызывающих заданные перемещения (программа **балка полином**).
- Поиск оптимальных размеров сечения балки при задании нескольких ограничений (программа **поиск**).

Список литературы

1. Александров А. В., Потапов В. Д., Державин Б. П. Сопротивление материалов. — М.: Высшая школа, 2000. — 559 с.
2. Алмаметов Ф. З., Арсеньев С. И., Курицын Н. А., Мишин А. М. Расчетные и курсовые работы по сопротивлению материалов. — М.: Высшая школа, 2003. — 367 с.
3. Биргер И. А., Мавлютов Р. Р. Сопротивление материалов. — М.: Наука, 1986. — 560 с.
4. Джонсон У., Меллор П. Теория пластичности для инженеров. — М.: Машиностроение, 1979. — 567 с.
5. Когаев В. П., Махутов Н. А., Гусенков А. П. Расчеты деталей машин и конструкций на прочность и долговечность. — М.: Машиностроение, 1985. — 223 с.
6. Макаров Е. Г. Инженерные расчеты в Mathcad. — СПб.: Питер, 2003. — 448 с.
7. Макаров Е. Г. Элементы механики разрушения. — Ленинград.: ЛМИ, 1989. — 66 с.
8. Макаров Е. Г. Оценка чувствительности материалов к концентрации напряжений при переменных нагрузках. // Проблемы прочности. — 1973. — № 8. — С. 102—106.
9. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. — М.: Машиностроение, 1979. — 400 с.
10. Механика разрушения и прочность материалов. Справочное пособие в 4-х томах. — Киев.: Наукова думка, 1988. — 2000 с.
11. Миролюбов И. Н. и др. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов. — М.: Высшая школа, 1985. — 400 с.

12. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов. — Киев.: Наука, 1975. — 400 с.

13. Сопротивление материалов / Под ред. А. Ф. Смирнова. — М.: Высшая школа, 1975. — 480 с.

14. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. — М.: Наука, 1986. — 560 с.

15. Шалашилин В. И., Горшков А. Г., Трошин В. Н. Сопротивление материалов. — М.: МАИ, 2000. — 615 с.

Предметный указатель

А

Аппроксимация Серенсена 415

Б

Базовое число циклов 411
Балка 16, 153
◊ упругая линия 153
Брус 16
◊ большой кривизны 190
◊ малой кривизны 190

В

Вязкость 111
Вязкость материала 471

Г

Гибкость стержня 329
Гипотеза:
◊ Ишлинского 251
◊ линейного накопления напряжений 416
◊ максимальных линейных деформаций 248
◊ максимальных нормальных напряжений 247, 248
◊ малых деформаций 28
◊ Мизеса 251
◊ Мора 252
◊ отсутствия боковых давлений 29
◊ плоских сечений 28
◊ Треска 251
◊ энергетическая 250
Гипотеза прочности:
◊ вторая 248
◊ первая 247
◊ пятая 252
◊ третья 248
◊ четвертая 250
Гипотезы Гриффитса и Орована 465
Главная площадка 90

Д

Депланация сечений 145
Деформация 23
◊ абсолютная 84
◊ истинная 117
◊ линейная 24
◊ относительная 84
◊ пластическая 105
◊ полная 24
◊ угловая 24
◊ упругая 24
◊ условная 117
Диаграмма:
◊ Велера 410
◊ идеального упругопластического тела 124
◊ круговая, Мора 239
◊ Прандтля 124
◊ предельных амплитуд 414
◊ упругопластического тела с линейным упрочением 124
◊ упругопластического тела со степенным упрочнением 124

Продолжение рубрики см. на с. 510

Диаграмма *(прод.)*:
◊ Фридмана 460
◊ циклического деформирования, обобщенная 439
Диклинация 451
Длина приведенная 328

Ж

Жестокость системы 376
Живучесть конструкций 472

З

Заделка 31
Закон:
◊ Гука 85
◊ Гука при сдвиге 128
◊ парности касательных напряжений 90
◊ подобия образцов 105

И

Изгиб 25, 153
◊ косой 267
◊ плоский 153
◊ поперечный 153
◊ с кручением 267
◊ с растяжением 267
◊ чистый 154
Изотропность 28
Интеграл:
◊ Дюамеля 388
◊ Мора 281
Источник Франка-Рида 449

К

Коэффициент:
◊ асимметрии цикла 408
◊ динамичности 369
◊ жесткости напряженного состояния 460
◊ жесткости упругого основания 193
◊ запаса 116
◊ запаса условия прочности 38
◊ интенсивности напряжений 470
◊ концентрации напряжений 36, 418
▫ эффективный 37
◊ податливости 279
◊ постели упругого основания 193
◊ Пуассона 85
Критическая угловая скорость вала 389
Кручение 25, 66
◊ стержней 136

М

Метод:
◊ верхней оценки 223
◊ засечек 98
◊ начальных параметров 175
◊ нижней оценки 222
◊ сечений 17
◊ сил 295
◊ сил, система канонических уравнений 297
◊ Якоби 235
Модель Винклера 193
Модуль:
◊ сдвига 128
◊ упрочнения 124
◊ Юнга 86
Момент:
◊ изгибающий 19
◊ крутящий 19, 136
◊ сопротивления при кручении 146
Момент инерции:
◊ главный 51
◊ при кручении 145
◊ сечений 44
◊ сечений, осевой 44
◊ сечений, полярный 44
◊ экстремальные значения 51

Н

Нагрузка:
◊ динамическая 17
◊ критическая 324
◊ статическая 17
Наклеп 109
Напряжение 21
◊ главное 90
◊ допускаемое 116
◊ истинное 117
◊ касательное 21
◊ концентрация 36
◊ нормальное 21

◊ условное 117
◊ эквивалентное 246
Напряженно деформированное состояние 90
Напряженное состояние:
◊ линейное 236
◊ плоское 237
Начало возможных перемещений 87

О

Оболочка 17
◊ тонкостенная 349
Однородность 28
Опора:
◊ неподвижная шарнирная 31
◊ подвижная шарнирная 32
Ось:
◊ главная 51
◊ инерции, главная 44
◊ нейтральная 154
◊ центральная 41
Относительное сужение при разрыве 110
Относительное удлинение при разрыве 110
Отрыв 105

П

Перемещение 23
◊ обобщенное 278
Пластина 17
Поверхность пластичности 250
Повреждаемость материала 416
Полюс круга 242
Полярный момент сопротивления 142
Порядок вывода формул 138
Потенциальная энергия 87
◊ упругой деформации 88
Правило знаков:
◊ изгибающий момент 69, 256
◊ крутящий момент 66
◊ поперечная сила 69
◊ продольное усилие 83
Предел:
◊ выносливости 410
◊ пропорциональности 107
◊ прочности 108
◊ текучести, условный 109
◊ текучести, физический 108
◊ упругости 107
◊ усталости 410
Принцип:
◊ Д'Аламбера 368
◊ независимости действия сил 28
◊ Сен-Венана 38

Р

Равнопрочность 481
Радиус инерции 52
Разрушение:
◊ пластическое 105
◊ хрупкое 105
Растяжение 25
Расчет:
◊ по допускаемым нагрузкам 221
◊ по допускаемым напряжениям 221

С

Сдвиг 25, 105
◊ абсолютный 128
◊ относительный 128
◊ чистый 130
Сжатие 25
Сила:
◊ внешняя 17
◊ внутренняя 17
◊ обобщенная 278
◊ объемная 17
◊ поверхностная 17
◊ поперечная 19
◊ распределенная 17
◊ сосредоточенная 17
Система:
◊ грузовая 282
◊ единичная 282
◊ кососимметричная 299
◊ прямосимметричная 299
◊ статически неопределимая 33
◊ статически определимая 32
Собственная частота колебаний тела 372
Сопротивление отрыву 458
Сопротивление разрыву 108
Состояние:
◊ кинематически возможное 222
◊ статически возможное 222
Сплошность 28
Срез 105

Статический момент площади сечений 40
Степень статической неопределимости 33
Стержень 16

Т

Тензор напряжений 234
Теорема:
◊ кинематическая 222
◊ статическая 222
Теория оболочек, безмоментная 351

У

Угол сдвига 24
Уравнение:
◊ Крылова 177
◊ совместности перемещений 94
Усилие продольное 19, 62
Условие:
◊ выхода конструкции из строя 116
◊ жесткости 30
◊ прочности 30
◊ прочности и устойчивости, объединенное 331
◊ работоспособности конструкции 116
Условие прочности:
◊ на растяжение 130
◊ на смятие 130
◊ при растяжении-сжатии 84
Устойчивость механическая 323

Ф

Формула:
◊ Гафа и Полларда 427
◊ Годолина 190
◊ Журавского 166
◊ Инглиса 454
◊ Лапласа для тонкостенных оболочек 352
◊ Пэриса 473
◊ Рэлея 337
◊ Эйлера 326
◊ Ясинского 329
Функция:
◊ регрессии 125
◊ целевая 480

Х

Хладноломкость 458
◊ хрупкость
◊ критическая температура 458

Ц

Центр изгиба 169
◊ центр тяжести
◊ сечения 41
Цикл нагружения 409

Ш

Шарнир пластический 210

Э

Элемент абсолютно жесткий 98
Эпюра изгибающих моментов 80
Эффект краевой 359