В. И. Погорелов

Строительная механика тонкостенных конструкций

- Сочетание фундаментальности и практической направленности
- Единая методология решения задач
- Вопросы и упражнения
- Справочный материал по всем разделам книги

R

bhv®

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

В. И. Погорелов

Строительная механика тонкостенных конструкций

Допущено Учебно-методическим объединением вузов по университетскому политехническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 160800 "Ракетостроение и космонавтика"

Санкт-Петербург

«БХВ-Петербург»

2007

УДК 539.3/.6(075.8)
ББК 32.121я73
П43

Погорелов В. И.

П43 Строительная механика тонкостенных конструкций. — СПб.: БХВ-Петербург, 2007. — 528 с.: ил.

ISBN 5-94157-688-9

Излагается классическая теория тонкостенных элементов конструкций в виде балок, стержней, пластин и оболочек, основанная на гипотезах Эйлера—Бернулли, Кирхгоффа, Лава—Кирхгоффа и уравнениях теории упругости. Вопросы общей теории иллюстрируются на примерах решения типовых расчетных схем, нашедших наибольшее распространение в практике инженерного проектирования. Приводится классификация численных методов, среди которых наибольшее внимание уделяется методу конечных разностей, методам взвешенных невязок и методу конечных элементов.

Приводятся упражнения и вопросы для проверки и закрепления знаний. Даны приложения справочного характера.

Для студентов, обучающихся по специальностям механического профиля, и инженеров соответствующих специальностей

УДК 539.3/.6(075.8)
ББК 32.121я73

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. главного редактора	*Людмила Еремеевская*
Зав. редакцией	*Григорий Добин*
Редактор	*Нина Седых*
Компьютерная верстка	*Натальи Караваевой*
Корректор	*Наталия Першакова*
Дизайн серии	*Игоря Цырульникова*
Оформление обложки	*Елены Беляевой*
Зав. производством	*Николай Тверских*

Рецензенты:
Усюкин В. И., д.т.н., профессор МГТУ им. Н. Э. Баумана,
Печников В. П., к.т.н., доцент МГТУ им. Н. Э. Баумана

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 29.09.06.
Формат 70×100[1]/16. Печать офсетная. Усл. печ. л. 42,57.
Тираж 2000 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 194354, Санкт-Петербург, ул. Есенина, 5Б.

Санитарно-эпидемиологическое заключение на продукцию
№ 77.99.02.953.Д.006421.11.04 от 11.11.2004 г. выдано Федеральной службой
по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 5-94157-688-9

Оглавление

Славному юбилею — 60-летию кафедры "Ракетостроение" Балтийского государственного технического университета, посвящаю эту книгу.

Введение

Это учебное пособие по строительной механике тонкостенных конструкций написано на основе рабочих материалов лекций, которые автор в течение многих лет читает студентам машиностроительных специальностей университетов.

Если говорить о названии книги, то автор стремился не только отразить суть излагаемых в ней вопросов, но и привлечь внимание студентов и преподавателей университетов, в которых название дисциплины несколько отличается от названия книги и учитывает специфику учебного плана конкретного университета.

Кому адресована эта книга

Книга является учебным пособием по строительной механике в первую очередь для факультетов машиностроительного профиля подготовки специалистов, но может также использоваться и как учебное пособие по соответствующим разделам курсов строительной механики, читаемых на механических, строительных и кораблестроительных факультетах университетов.

Она может пригодиться не только студентам при изучении соответствующей дисциплины, но и инженерам, занимающимся проектированием и расчетом конструкций из тонкостенных стержней, пластинок и оболочек. Книга будет полезна и тем читателям, кому необходимо быстро отыскать и воспользоваться нужными для расчета соотношениями или составить их самому, основываясь на приведенных методических принципах.

В чем особенность книги

Отличие данной книги от аналогичных в своей категории заключается в ее четкой направленности на практическое использование. Автор не ограничивается констатацией фундаментальных положений и фактов, излагаемых обычно в курсах строительной механики, а указывает на область применения полученных результатов и доводит изложение и математические преобразования до конкретных расчетных соотношений. В этом смысле книга ориентирована не только на анализ конструкции, который выполняется на стадии ее проектирования с целью получения работоспособного варианта, но и на ее синтез, когда выполняются проверочные расчеты уже созданной конструкции.

Второй особенностью книги является то, что в ней выдерживается единая методология решения однотипных задач, которая может быть применена и для решения задач, не рассмотренных в книге.

К сожалению, многие учебники, и не только по строительной механике, не содержат в конце глав упражнения и вопросы, которые закрепляют полученные знания. В большинстве случаев они отсутствуют или разбросаны по тексту, что затрудняет повторное чтение и использование учебника. В книге эта недопустимая, с точки зрения автора, оплошность отсутствует, и каждая глава снабжена упражнениями и вопросами для закрепления знаний по изученному материалу.

И, наконец, последняя особенность книги состоит в том, что в ее приложениях, приводится сводка всех уравнений и расчетных соотношений, полученных в книге, которая может использоваться не только для систематизации полученных знаний, но и в качестве справочного материала.

Автор надеется, что читатели по достоинству оценят эти особенности учебного пособия, которые отличают его от других учебников и учебных пособий подобного рода.

Что читатель найдет в этой книге

Материал книги изложен в 15 главах, 14 приложениях и охватывает широкий круг вопросов, относящихся к статике тонкостенных брусьев, пластин и оболочек. В конце каждой главы приводятся перечень изученных тем, упражнения для закрепления пройденного материала и список учебных материалов, в которых читатель может найти дополнительные сведения по теме главы.

Приложения содержат расчетные соотношения и уравнения, полученные в процессе изучения сведений, излагаемых в книге. Это своеобразные готовые "шпаргалки", которые помогут читателю привести в систему полученные знания, а те, кто этими знаниями уже обладает, могут пользоваться ими как справочным материалом.

В *главе 1* книги определяется место строительной механики среди других прочностных дисциплин, объединяемых общим названием "механика твердого деформируемого тела". Основное внимание также уделяется особенностям составления расчетных схем в строительной механике — важному вопросу, который вызывает наибольшие трудности у студентов и начинающих расчетчиков.

Совсем не случайно *глава 2* посвящена уравнениям линейной теории упругости, хотя и кажется, что она выпадает из общей канвы содержания книги. Дело в том, что весь теоретический материал книги, за исключением материала *главы 4*, опирается на гипотезы этой теории, и, более того, последующие уравнения теории тонких пластин и брусьев получаются как частный случай этих уравнений. Такой подход к изложению материала, с одной стороны, позволил сократить объем книги, а с другой — способствовать лучшему пониманию излагаемых вопросов. К сожалению, получение уравнений теории тонких оболочек из уравнений теории упругости требует некоторых повышенных требований к знаниям студентов по тензорному анализу, и поэтому автор остановился на традиционном векторном изложении этих уравнений, так как векторное исчисление изучается студентами всех технических университетов.

Глава 3 посвящена расчету брусьев, которые представляют собой тела, два измерения которых значительно меньше их третьего измерения — длины. Уравнения, описывающие напряженно деформированное состояние брусьев, получаются последовательным упрощением уравнений теории упругости, приведенным в *главе 2*, путем применения к ним гипотез Эйлера—Бернулли. Рассматривается осевое растяжение/сжатие стержней и поперечный изгиб брусьев. Практическое применение полученных соотношений иллюстрируется на примере расчета осесимметричной фермы и подкрепленной цилиндрической оболочки.

В *главе 4* изучается напряженно-деформированное состояние толстой трубы из материала, обладающего свойством ползучести. Труба находится внутри тонкой оболочки, а в качестве физических уравнений используется закон Гука и линейная вязко-упругая механическая модель ползучести. Выражения для напряжений и перемещений получаются из уравнений теории упругости в цилиндрической системе координат и формул безмоментной теории оболочек. *Глава 4* появилась в книге для того, чтобы проиллюстрировать применение уравнений теории упругости хотя бы на одном примере, продемонстрировать, как подходить к решению задач вязко-упругости, а заодно и рассмотреть пример, важный для практических приложений.

Глава 5 посвящена изгибу тонких пластин с эллиптической или круглой конфигурацией контура. Расчету прямоугольных пластин большое внимание уделено в *главе 14*, посвященной численным методам строительной механики. Исходное уравнение, описывающее изгиб пластин, получено последовательным упрощением уравнений теории упругости путем применения к ним гипотез Кирхгоффа. Практическое использование этого уравнения иллюстрируется на примере пластин, имеющих геометрические формы контура, наиболее часто используемые на практике.

В *главе 6* выводятся уравнения линейной теории тонких оболочек в криволинейной системе координат. Здесь же получены выражения для коэффициентов Ламе, которые позволяют записывать эти уравнения в произвольной ортогональной системе координат.

Последующие пять глав посвящены различным методам расчета тонких оболочек: *глава 7* — безмоментной теории и примерам ее применения, *главы 8, 9* — изгибу цилиндрических и сферических оболочек соответственно, *глава 10* — пологим оболочкам, а в *главе 11* приводятся вводные сведения по многослойным безмоментным оболочкам и однослойным оболочкам, эквивалентным по энергии деформации многослойным.

В *главе 12* речь идет о местной потере устойчивости типовых элементов конструкций, из которых состоят инженерные сооружения в виде стержней, колец и пластинок.

Глава 13 расширяет круг задач, рассмотренных в *главе 12*, и посвящена устойчивости однослойных, многослойных и подкрепленных цилиндрических оболочек.

Следующие две главы — *14* и *15* — полностью посвящены численным методам расчета, которые нашли наибольшее распространение в механике сплошных сред и, в частности, в строительной механике тонкостенных конструкций.

В *главе 14* приводится классификация численных методов по типу исходных математических соотношений и способам их дискретизации. Излагаются вариационные принципы механики деформируемого тела. Рассматривается расчет изгиба прямоугольной пластинки методом конечных разностей, методом Бубнова—Галеркина и методом Ритца. Обсуждаются особенности решения задач вариационно-разностными методами и методами взвешенных невязок.

В последней *главе 15* излагаются два способа получения расчетных соотношений для определения напряженно-деформированного состояния в тонких оболочках по методу конечных элементов. Первый способ, в котором функционал отыскивается с помощью преобразованного уравнения равновесия тонкой оболочки, иллюстрируется на примере цилиндра с жестко закрепленными краями. Во втором способе в качестве функционала используется потенциальная энергия оболочки, края которой могут быть закреплены произвольно, а конечный элемент имеет форму усеченного конуса.

Как уже отмечалось, книга может использоваться в качестве основы для чтения лекций студентам машиностроительных специальностей, а отдельные ее разделы — для студентов строительных, кораблестроительных и механических специальностей университетов. Приложения можно использовать для подготовки к экзаменам и в качестве справочного материала.

Благодарности

Я благодарен моим коллегам, преподавателям университетов, которые просмотрели рукопись книги на стадии подготовки ее к изданию и высказали полезные критические замечания по ее содержанию и изложению материала.

Хочется выразить искреннюю признательность профессору, заведующему кафедрой механики Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения А. И. Скалону, профессору В. Н. Блинову и профессору, заведующему кафедрой "Авиаракетостроение" Г. С. Аверьянову из Омского государственного технического университета, а также профессору В. И. Усюкину и доценту В. П. Печникову из Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана, которые познакомились с рукописью и сделали ряд полезных замечаний по улучшению ее содержания.

Хочу также поблагодарить своих учеников, студентов БГТУ, А. Зобова, Р. Селезнева, Д. Федорова, А. Лагойко, О. Чирикова и Д. Толяренко, которые помогли мне подготовить рукопись и иллюстрации к ней.

От издательства

Уважаемые читатели, ваши замечания, предложения и вопросы отправляйте по электронной почте: **kat@bhv.ru**. Мы будем рады узнать ваше мнение, как по содержанию, так и по оформлению книги. При необходимости мы сразу же свяжем вас с автором этой книги, профессором Виктором Ивановичем Погореловым.

Подробную информацию о книгах издательства и других книгах автора, в частности, вы найдете на сайте издательства: **http://www.bhv.ru**.

Глава 1

Модель конструкции и ее расчетная схема

В этой главе определяется место строительной механики среди других прочностных дисциплин, объединяемых общим названием "Механика твердого деформируемого тела". Далее основное внимание уделяется составлению расчетной схемы, выполняющей в строительной механике функции модели, которая заменяет исходную конструкцию, сохраняя основные ее особенности и черты. Рассматривается рекомендуемый порядок составления расчетной схемы в виде последовательности шагов и обсуждаются особенности реализации каждого из этих шагов.

В этой главе будут рассмотрены следующие темы:

- место строительной механики среди наук о прочности;
- расчетная схема, ее построение и использование.

1.1. Место строительной механики среди наук о прочности

Современная наука о прочности в значительной степени основывается на работах отечественных ученых: А. Н. Крылова, Д. И. Журавского, И. Г. Бубнова, Б. Г. Галеркина, В. З. Власова, и наших современников: М. В. Келдыша, А. И. Макаревского, А. М. Черемухина, С. П. Тимошенко, А. В. Кармишина, В. В. Новожилова, И. Ф. Образцова, В. И. Феодосьева, К. Ф. Черныха и др. А если начать с имен Леонардо да Винчи и Галилео Галилея, то даже простое перечисление фамилий ученых, внесших весомый вклад в создание стройного здания механики твердого деформируемого тела, займет не одну страницу текста. И это не удивительно, т. к. практическая деятельность человека всегда требовала от него создания неразрушимых, надежных, а там, где это необходимо, и долговечных конструкций.

> ***Конструкцией*** принято называть механическую систему геометрически неизменных элементов, относительное перемещение точек которой возможно лишь в результате ее деформации.
>
> ***Деформация*** (от латинского слова *deformatio* — искажение) — это изменение относительного положения частиц тела, связанное с их перемещением.
>
> Само ***конструирование***, как род человеческой деятельности, — это процесс создания конструкции или какого-либо устройства. Перед началом конструирования известны характеристики и проектные переменные конструкции, а на этапе конструирования необходимо разработать конкретный экземпляр спроектированного изделия.
>
> ***Проектирование*** — это разработка плана изготовления или модернизации конструкции в пределах заданных ресурсов.
>
> Под ***прочностью*** конструкций понимают их способность сопротивляться разрушению — разделению на части, а также необратимому изменению формы под действием внешних нагрузок.

На рис. 1.1 в качестве примера изображена конструкция пассажирского самолета, состоящая из пластин, оболочек, стержней, колец и балок, которая иллюстрирует высочайший уровень развития современных технологий и, в частности, наук о прочности.

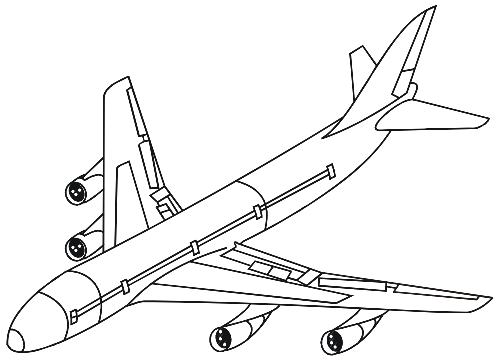


Рис. 1.1. Пассажирский самолет как пример тонкостенной конструкции

Расчеты конструкции и ее элементов на прочность и устойчивость сопровождают как этап проектирования, так и этап конструирования. На этапе проектирования их называют проектировочными расчетами, а на этапе конструирования — проверочными. Впрочем, это разделение на проектировочные и проверочные расчеты довольно условное, т. к. сам процесс создания конструкции является итерационным.

Ввиду огромного разнообразия современных инженерных конструкций и сооружений, требующих специфичных методов и способов проведения прочностных расчетов, произошла специализация ученых и инженеров по отраслевому принципу, которая в конечном итоге привела к делению единой науки о создании конструкций на несколько самостоятельных дисциплин. Правда, деление это чисто условное, и специалисты из одной области постоянно "вторгаются" в смежные дисциплины там, где это необходимо в интересах создания проектируемой конструкции.

В укрупненном виде на сегодняшний день сложилось такое деление фундаментальных прочностных дисциплин, которые в совокупности называют "Механика твердого деформируемого тела":

- ❒ Сопротивление материалов
- ❒ Теория упругости
- ❒ Теория пластичности
- ❒ Теория ползучести
- ❒ Строительная механика

Любой студент технического университета знает крылатую фразу: *"Сдал СОПРОМАТ — можно жениться"*, т. к. курс "Сопротивление материалов" является первым прикладным инженерным курсом. И эта фраза появилась не потому, что курс сопротивления материалов действительно сложный по сравнению с другими предметами, а потому, что в нем впервые вводится неизвестная до этого терминология, новые формулы и понятия, и изучение его большинству студентов дается с трудом. Вначале изучение этого курса сродни изучению иностранного языка, а выучить иностранный язык может каждый, но для этого требуются некоторые усилия и навыки.

> ***Сопротивление материалов*** — это наука о прочности, жесткости и устойчивости элементов инженерных конструкций.

Методы сопротивления материалов базируются на упрощенных гипотезах, которые позволяют решать широкий круг инженерных задач с приемлемой для практики точностью. Различие между сопротивлением материалов и другими разделами механики твердого деформируемого тела состоит в подходах к решению одних и тех же задач. Теория упругости, теория пластичности и теория ползучести основываются на более точных формулировках задач, для решения которых используется более сложный математический аппарат, требующий выполнения громоздких вычислений.

> ***Теория упругости*** — раздел механики твердого деформируемого тела, изучающий перемещения, деформации и напряжения в покоящихся и движущихся телах под действием внешних нагрузок.

> ***Упругость*** — это свойство материала полностью восстанавливать геометрическую форму и размеры тела после снятия внешней нагрузки.

На основе общих законов механики в теории упругости получается замкнутая система уравнений, состоящая из уравнений равновесия, геометрических уравнений и обобщенного закона Гука, устанавливающего линейную зависимость между напряжениями и деформациями. Вопрос о том, разрушится ли тело под действием приложенных к нему нагрузок, хотя и тесно связан с теорией упругости, выходит за рамки этой дисциплины и в ней обычно не рассматривается. Основными направлениями теории упругости являются:

- ❒ оценка точности и применимости решений задач, полученных методами сопротивления материалов;
- ❒ решение задач, которые не могут быть решены методами сопротивления материалов. К ним относится, например, расчет массивных тел, балок-стенок, пластин, оболочек и др.

Таким образом, теория упругости дает дифференциальные уравнения и граничные условия, которые позволяют сформулировать краевые задачи, решения которых дают полную информацию о распределении напряжений, деформаций и перемещений в нагруженных телах.

> ***Теория пластичности*** изучает общие законы образования напряжений и деформаций, возникающих на всех стадиях пластического деформирования тела.

> ***Пластичность*** — это свойство твердых тел изменять свою форму и размеры под действием внешних нагрузок и сохранять ее после снятия этих нагрузок. Причем изменение формы тела (деформирование) зависит только от приложенной внешней нагрузки и не происходит само по себе с течением времени.

Являясь разделом механики твердого деформируемого тела, теория пластичности ставит своей целью математическое изучение напряжений и перемещений в пластически деформируемых телах. Бóльшая часть представлений теории упругости используется и в теории пластичности. Однако вместо закона Гука в ней используются законы пластической деформации, с помощью которых и составляется система уравнений теории пластичности.

> ***Теория ползучести*** — раздел механики твердого деформируемого тела, в котором изучаются законы связи между силами и перемещениями, существенно зависящими от времени.

> ***Ползучесть*** — свойство твердых тел деформироваться под воздействием постоянной нагрузки.

Так, например, при постоянной нагрузке деформации не остаются постоянными, а растут со временем. Или наоборот, если образцу сообщена начальная деформация и наложены связи, сохраняющие эту деформацию неизменной, то реакции связей убывают со временем — релаксируют. Возникающие в результате ползучести деформации, как и пластические, являются необратимыми. Ввиду огромного разнообразия практических задач существует условная классификация областей применения теории ползучести:

- длительная ползучесть (месяцы и годы), свойственная различным строительным конструкциям, эксплуатируемым в обычных погодных условиях;
- ползучесть средней длительности (часы и дни);
- кратковременная ползучесть (секунды и минуты), характерная для деталей механизмов, работающих в условиях высоких температур.

> ***Строительной механикой*** называют науку о методах расчета сооружений на прочность, жесткость и устойчивость.
>
> ***Жесткость*** — это способность тела или конструкции сопротивляться возникновению деформации.
>
> ***Устойчивостью упругой системы*** называют ее свойство возвращаться в состояние равновесия после малых отклонений от этого состояния.

Строительная механика, как наука, восходит своими истоками к первой половине XIX века в связи с начавшимся в то время активным строительством мостов, железных дорог, плотин, судов и крупных промышленных сооружений. Поэтому в классической строительной механике рассматривались только конструкции, состоящие из стержней и балок (рис. 1.2).

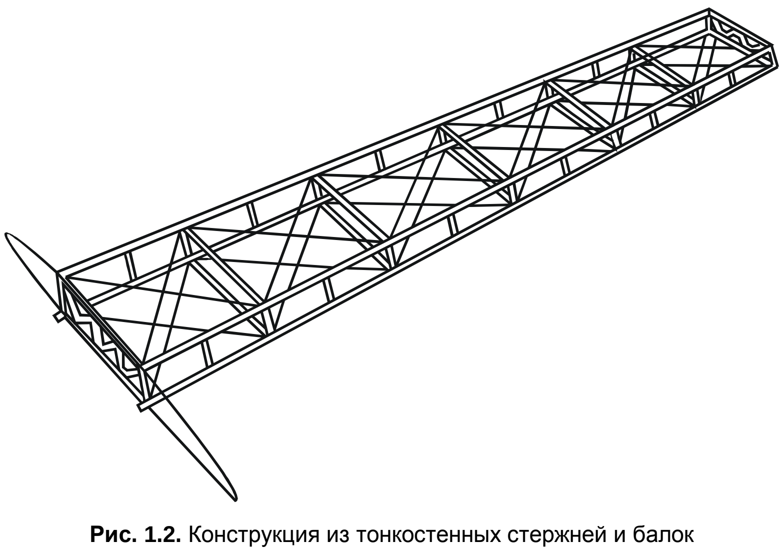


Рис. 1.2. Конструкция из тонкостенных стержней и балок

В дальнейшем потребности практики заставили расширить диапазон геометрических форм, рассматриваемых этой дисциплиной. Так появились курсы "Строительная механика корабля", "Строительная механика самолета", "Строительная механика ракет", в которых основное внимание уделяется расчету пластин и оболочек. В этих курсах широко используются методы теории упругости, которые более сложны, чем методы классической строительной механики. На сегодняшний день основными направлениями исследований в области строительной механике являются:

- решение задач о расчете сооружений из стержней, балок, пластин, оболочек и других тонкостенных конструкций;
- получение расчетных соотношений для построения конечных элементов в методах конечных элементов;
- исследование элементов конструкций, обладающих геометрической или физической нелинейностью;
- расчет конструкций с учетом вязких свойств материалов, ползучести и длительной прочности;
- расчет конструкций на динамическое и, в том числе, сейсмическое воздействие.

В связи с обширным диапазоном вопросов, подлежащих рассмотрению при проектировании конструкций, основная задача строительной механики сводится фактически к рассмотрению методов расчета типовых элементов конструкций, которые создают облик определенного класса сооружений. Кроме того, строительная механика делится также на направления, относящиеся к расчету конструкций определенного вида: стержневых конструкций (ферм, рам, балочных систем и арок), пластин и пластинчатых систем, оболочек, гибких нитей и вантовых систем, упругих и неупругих оснований, мембран и т. д.

Решения задач, полученные в строительной механике, являются основой для построения специальных прочностных инженерных курсов, в которых рассматривается расчет на прочность конкретных конструкций. Такие курсы могут называться, например, "Расчет самолета на прочность", "Прочность корабля" и т. п. В этих же курсах излагаются способы оценки несущей способности конструкции и определения коэффициентов запаса прочности и устойчивости.

Расчет любого реального сооружения всегда сводится к построению его расчетной схемы, обладающей свойствами, в наибольшей степени совпадающими со свойствами исходного объекта. Это относится не только к изолированным элементам конструкций, но и к моделям конструкций, построенным методами конечных элементов (рис. 1.3).

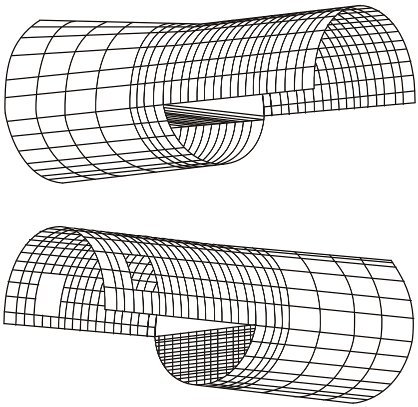


Рис. 1.3. Модель конструкции, разбитая на конечные элементы

В методах конечных элементов конструкция представляется в виде совокупности простейших форм, а поля перемещений или напряжений внутри этих форм аппроксимируются полиномами, коэффициенты которых выражаются через переменные на границах элементов. Здесь также приходится применять разумные упрощения при построении расчетных схем, т. к. возникают проблемы использования и стыковки разнородных конечных элементов, адекватного разбиения конструкции на конечные элементы разного размера, выбора числа элементов с точки зрения сходимости решения и т. п.

1.2. Расчетные схемы

Сначала остановимся на определении модели, а затем на том, какие особенности имеет прочностная модель конструкции, которая называется *расчетной схемой*.

> ***Моделью конструкции*** принято называть вспомогательный объект, заменяющий реальную конструкцию, представленную в наиболее общем виде.

Для того чтобы указать, какое место занимает расчетная схема в ряду других моделей, перечислим некоторые из них:

- физическая (сама конструкция подвергается исследованию);
- масштабная (исследованию подвергается уменьшенная копия конструкции);
- компьютерная модель (программа для ЭВМ);
- информационная модель (совокупность данных о конструкции и ее свойствах);
- расчетная схема.

Теперь остановимся на особенностях создания модели конструкции, которая используется в прочностных расчетах и называется расчетной схемой.

> ***Примечание***
>
> Опыт проектирования конструкций показывает, что составление расчетной схемы конструкции до ее математического описания является одним из важнейших этапов прочностного расчета. Как это не парадоксально, но именно этот этап вызывает у студентов, да и у опытных расчетчиков, наибольшие трудности.

И если с выбором материала есть хоть какая-то ясность (например, требуется материал с высокой удельной прочностью), то с выбором геометрии модели, способа приложения внешних сил и условиями закрепления моделируемой конструкции имеется полный произвол и неразбериха. По этой причине вопросу о создании расчетной схемы уделим особое внимание.

1.2.1. Этапы составления расчетной схемы

Для изучения прочности и жесткости инженерных конструкций обычно рассматриваются их упрощенные схемы, с определенной степенью точности и достоверности отражающие их реальные свойства. Причем в зависимости от требований к точности расчета для одной и той же конструкции могут быть составлены разные расчетные схемы.

> ***Расчетная схема*** — это упрощенное изображение реальной конструкции, которое освобождено от ее несущественных, второстепенных особенностей и которое принимается для математического описания и расчета.

Составление расчетной схемы целесообразно проводить по определенному алгоритму, который можно представить в виде следующей последовательности шагов:

1. Упрощение геометрической формы конструкции.
2. Использование типовых способов закрепления.
3. Упрощение нагрузки.
4. Идеализация свойств материала.

Этой последовательности шагов особенно важно следовать студентам и начинающим расчетчикам.

1.2.2. Выбор геометрической формы

Выбор геометрической формы модели, которая заменит реальную конфигурацию конструкции в расчетной схеме, во многом зависит от точности, с которой требуется получить результат, и от исходной формы самой конструкции.

Типовые тонкостенные конструкции обычно состоят из стержней, балок, пластин и оболочек. Так, например, на рис. 1.2 была изображена конструкция крыла большого удлинения, модель которой может состоять из большого количества стержней и балок. С расчетной точки зрения такая модель статически неопределима. Напряженно-деформированное состояние в ней можно определить методами строительной механики стержневых систем, что требует значительных вычислительных ресурсов, и это вполне оправданно, если нужно знать прочностное поведение каждого из элементов конструкции или нужно решать задачу о перераспределении материала по конструкции.

В то же время, если нужно ответить на вопрос о том, имеет ли крыло достаточную несущую способность в наиболее нагруженном корневом сечении, то достаточно воспользоваться расчетной схемой крыла в виде балки с жесткой заделкой на одном конце и свободным вторым концом (рис. 1.4).

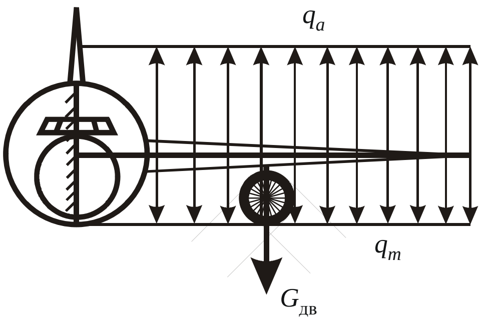


Рис. 1.4. Расчетная схема крыла в виде балки

Представить в виде балки можно не только стержневые конструкции. Упрощенную расчетную схему в виде балки можно применять и в конструкциях, состоящих из комбинаций оболочек, пластин, колец, балок и стержней. Пример такой расчетной схемы приведен на рис. 1.5 для хвостовой части фюзеляжа самолета.

Еще один пример применения балочной расчетной схемы для определения напряжений в подкрепленной оболочке, состоящей из обшивки и продольных элементов силового набора в виде лонжеронов, будет рассмотрен в *разд. 3.7*.

Конечно же, если сама конструкция или ее часть может быть просчитана без упрощения, то выбор геометрической конфигурации модели для расчетной схемы ясен без дополнительных упрощений и схематизации. О какой дополнительной схематизации может идти речь, если, например, рассматривается плоское днище осесимметричного сосуда, нагруженного внутренним давлением.

Ясно, что это круглая пластинка, которая изгибается постоянным внутренним давлением.

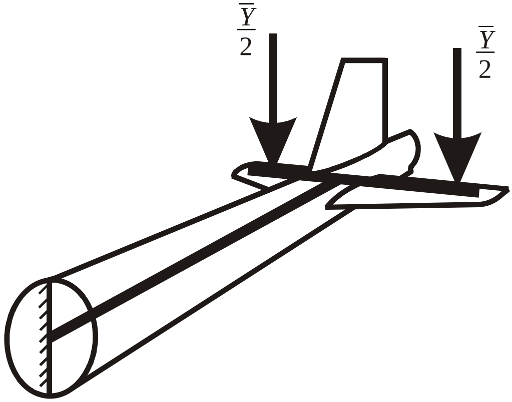


Рис. 1.5. Балочная расчетная схема хвостовой части фюзеляжа самолета

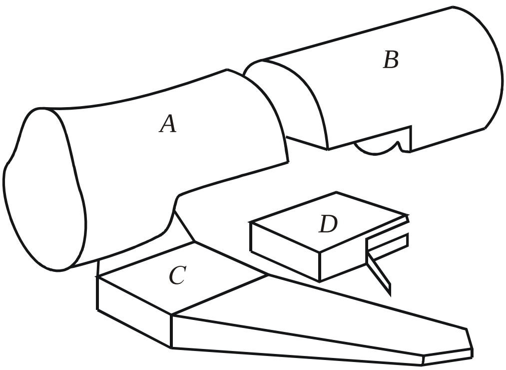


Рис. 1.6. Пример конструкции, состоящей из массивов

Вообще говоря, при упрощении геометрии тонкостенной конструкции приходится иметь дело с брусьями, стержнями, балками, пластинками или оболочками. В отличие от твердого тела — массива (рис. 1.6) — тонкостенные конструкции всегда имеют хотя бы один геометрический размер, который значительно меньше других размеров. Это позволяет упростить исходную систему уравнений теории упругости и свести реальное трехмерное напряженно-деформированное состояние к двумерному, как в случае пластин и оболочек, или даже к одномерному, как в случае балок и стержней. Здесь уместно привести определение этих геометрических форм, т. к. о них и пойдет речь в следующих главах.

Брус — это твердое тело, полученное перемещением плоской фигуры вдоль направляющей линии так, что его длина значительно больше двух других размеров.

Стержнем называется прямолинейный брус, который работает на растяжение/сжатие (рис. 1.7).

Балкой называется брус, который испытывает изгиб в качестве основного способа нагружения.

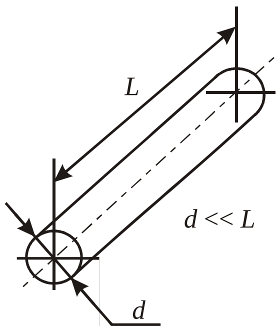


Рис. 1.7. Круглый прямолинейный стержень

Из брусьев составляются расчетные схемы многих инженерных конструкций, таких как фермы, рамы и другие пространственные конструкции.

Фермой называется совокупность стержней, соединенных шарнирами.

Рама — это совокупность балок, жестко соединенных между собой.

Пластинкой называется тело, ограниченное двумя плоскостями, расстояние между которыми мало по сравнению с двумя другими размерами тела (рис. 1.8).

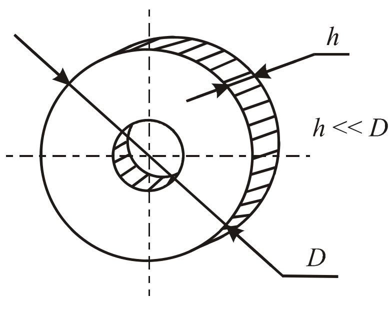


Рис. 1.8. Круглая пластинка с отверстием

Пластины воспринимают усилия в двух направлениях, что в ряде случаев бывает выгодно с точки зрения экономии материалов. Расчет пластин и систем, составленных из них, значительно сложнее расчета стержневых систем.

> ***Оболочкой*** называется тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с другими размерами тела (рис. 1.9).

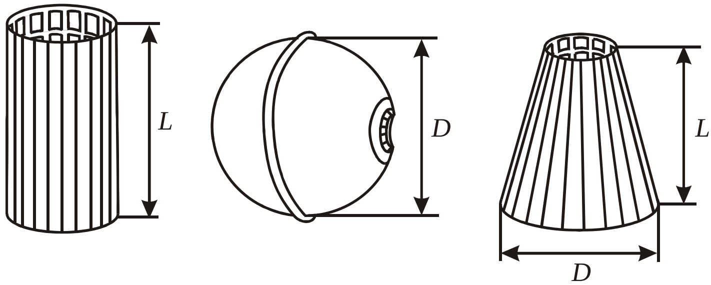


Рис. 1.9. Примеры осесимметричных оболочек

После выбора геометрической формы модели следует определить места и способы ее закрепления.

1.2.3. Моделирование закреплений

В физическом пространстве любая точка имеет три степени свободы — по числу координат в этом пространстве. Твердое тело имеет 6 степеней свободы, т. к. к трем поступательным добавляются еще и три вращательных степени свободы. Моделирование закреплений сводится к ограничению степеней свободы части тела, к заданию перемещений и углов поворота или условий для их определения.

> ***Закрепление*** — это ограничение одной или нескольких степеней свободы (из шести в общем случае) в заданной точке или сечении.

Особенности моделирования закреплений рассмотрим на примере плоской конструкции, когда в каждой точке можно ограничить две поступательные степени свободы в ее плоскости и одну вращательную относительно оси, перпендикулярной этой плоскости. В зависимости от количества определяемых степеней свободы различают следующие способы закрепления:

- жесткая заделка, которая ограничивает перемещение и угол поворота;
- шарнирное закрепление, ограничивающее одно или несколько перемещений;

- свободный край, на котором перемещения и угол поворота не имеют ограничений.

Если перемещение принимается равным нулю, то в закреплении возникает сила в направлении перемещения, а если ограничивается угол поворота, то в рассматриваемой точке возникает момент. Две силы и момент (в плоском случае), возникающие из-за ограничения перемещений и угла поворота, называются реакциями и определяются из условий равновесия.

Так, жесткое закрепление (рис. 1.10) приводит к возникновению двух реакций и одного момента.

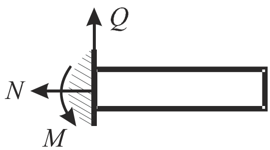


Рис. 1.10. Жесткое закрепление создает две реакции и один момент

В шарнирном закреплении (рис. 1.11, *а*, *б*) отсутствует реактивный момент и может еще освобождаться одно из перемещений (рис. 1.11, *в*, *г*).

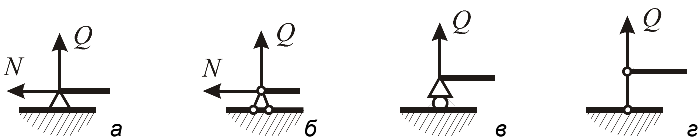


Рис. 1.11. В шарнирном закреплении возникает одна (*в*, *г*) или две реакции (*а*, *б*)

На свободном крае ограничения на перемещения и углы поворота отсутствуют, поэтому задаются ограничения на силы и момент, которые в этих примерах равны нулю.

1.2.4. Модели нагрузок

Расчет нагрузок является одним из важнейших этапов проектирования любой конструкции.

> ***Нагрузками*** принято называть внешние силы, действующие на конструкцию или на ее части. К нагрузкам также относятся реактивные силы и моменты, возникающие в узлах крепления.

В большинстве случаев определение нагрузок является самостоятельной и не менее сложной задачей, чем задача о расчете поля напряжений и деформаций по объему конструкции. Сложность расчета нагрузок связана с тем, что из-за разнообразия режимов и условий эксплуатации конструкций и сооружений нагрузки имеют различную физическую природу, а, следовательно, и собственные методы расчета, которые во многих случаях не имеют ничего общего с методами расчета, используемыми в строительной механике, и должны быть объединены в единую расчетную схему.

Для определения нагрузок приходится пользоваться методами расчета из разнородных дисциплин, таких, например, как аэродинамика, газовая динамика, динамика полета, аэрогидроупругость, термодинамика, теплопередача и т. д. Все проблемы, встречающиеся в этих дисциплинах, переходят в область расчета нагрузок, поэтому появляются новые трудности, связанные со стыковкой различных методов расчета. Этим методам можно было бы посвятить отдельную книгу, а здесь в дальнейшем будем считать, что задача определения нагрузок решена, они известны, и их нужно только приложить к конструкции в нужных местах.

Таким образом, для всякого расчета на прочность исходными данными являются:

- чертеж или эскиз конструкции;
- расчетные данные о нагрузках;
- температурные поля внутри конструкции, если ее температура отличается от стандартной температуры.

По характеру воздействия на конструкцию нагрузки можно разделить на следующие три группы:

1. *Объемные* или *массовые нагрузки* непрерывно распределены по всему объему тела и пропорциональны плотности его материала. К ним относятся силы тяжести, силы инерционного происхождения, силы магнитного притяжения и т. п.
2. *Поверхностные нагрузки* являются результатом взаимодействия тел между собой в зонах контакта или результатом воздействия на тело окружающей среды. Эти нагрузки распределены по поверхности конструкции. Примером поверхностной нагрузки может служить ветровое воздействие на наземное сооружение, давление и трение потока воздуха, который обтекает корпус самолета, давление газов внутри замкнутых объемов и др.
3. *Сосредоточенные силы* — это точечно приложенные нагрузки. В качестве примера сосредоточенной нагрузки приведем тягу двигателя самолета, веса

грузов, подвешенных к его корпусу или находящихся внутри него, силы, передающиеся на корпус самолета в узлах крепления крыльев и т. д.

По характеру изменения во времени нагрузки делят на две группы:

- статические;
- динамические.

К *статическим* нагрузкам относят те нагрузки, время воздействия которых значительно больше, чем период собственных колебаний конструкции. Как правило, время воздействия *динамической* нагрузки значительно меньше, чем период собственных колебаний конструкции.

Следует заметить, что одна и та же нагрузка может относиться к различным группам из приведенного списка в зависимости от условий эксплуатации сооружения.

Подробнее остановимся на силах и моментах — реакциях, возникающих в местах крепления конструкции, и на внутренних усилиях, которые возникают в сечениях тела.

Сначала о реакциях. При решении задач методами механики твердого деформируемого тела всегда приходится задавать граничные условия в местах крепления конструкции. Эти условия могут быть двух видов:

- кинематические;
- статические.

Кинематические условия — это условия на перемещения и углы поворота. Они логично следуют из выбранного для расчетной схемы способа закрепления *(см. разд. 1.2.3)* и обычно используются в тех случаях, когда в решаемой задаче определяются перемещения. Исходные уравнения записываются относительно перемещений, а методы решения этих уравнений называются методами перемещений или задачами в перемещениях.

Статические условия — это условия на силы и моменты в местах крепления. Эти силы проявляют себя как реакции опоры на внешнее воздействие, создаваемое телом на опоре (см. рис. 1.10 и 1.11). Точно такие же силы и моменты, но действующие в противоположном направлении (по третьему закону Ньютона), приложены и к опоре. При статических граничных условиях приходится затрачивать дополнительные усилия для определения реакций. Они определяются из условий равновесия тела, которых в общем случае всего шесть: три условия равновесия в проекциях на оси координат и три условия на равенство нулю моментов относительно осей координат.

Если шести уравнений статики недостаточно для определения реакций в местах крепления тела, то тогда задачу называют *статически неопределимой* и приходится обращаться к условиям деформации тела.

ПРИМЕЧАНИЕ

Все задачи теории упругости, теории пластичности и теории ползучести являются *статически неопределимыми*.

По этой причине полная система уравнений теории упругости *(см. гл. 2)*, например, состоит из трех групп уравнений. Кроме уравнений равновесия в точке твердого тела записываются также геометрические уравнения, следующие из рассмотрения условий деформации тела. Замыкают эти две группы уравнений физические уравнения, построенные на основе эмпирических данных о связи напряжений с деформациями.

Ранее уже отмечалось, что этими физическими уравнениями и различаются между собой уравнения теории упругости, уравнения пластичности и ползучести. Впрочем, говорить о чисто эмпирической природе происхождения этих уравнений приходится с большой натяжкой. Так, например, закон Гука для трехмерного напряженного состояния никто эмпирически не подтвердил. Имеются данные, полученные на экспериментах с образцами для одномерного напряженного состояния. Поэтому он и называется, строго говоря, не законом Гука, а "обобщенным законом Гука", т. к. о его справедливости говорят только косвенные факты и многолетний опыт человечества по созданию разнообразных сооружений и конструкций.

Теперь остановимся на тех случаях, когда внутренние силы относят к внешним нагрузкам и обращаются с ними, как с внешними нагрузками. Внутренние силы и моменты появляются тогда, когда тело мысленно делят на две части (рис. 1.12, *а*) и для обеспечения условий его равновесия действие отброшенной части тела на рассматриваемую часть заменяют внутренними усилиями и моментами (рис. 1.12, *б*).

Эта процедура называется методом сечений и широко используется при определении напряжений в сечениях тела.

Сделаем еще некоторые краткие замечания по поводу используемых в дальнейшем способов расчета нагрузок, рассмотрев более подробно характер поведения нагрузок. Сразу же следует отметить, что в большинстве случаев нагрузки не являются детерминированными, т. е. принимающими определенные значения для фиксированных физических координат системы и времени. В большинстве случаев нагрузки являются случайными функциями координат и времени.

На практике встречаются следующие типы задач, которые требуют привлечения аппарата теории случайных функций:

1. По заданным свойствам случайных функций необходимо определить вероятностные характеристики процесса, например, дисперсию ординаты случайной функции.

2. Ко второй группе относят задачи, в которых вероятностные характеристики определяются по экспериментальным данным. Здесь используются обычные способы обработки опытных данных, применяемые в теории случайных величин, с той лишь разницей, что учитывают зависимости между ординатами реализаций (опытов) случайных функций.
3. Искомые случайные функции описываются дифференциальными зависимостями, и задачи обычно сводятся к определению вероятностных характеристик случайных функций, получаемых на "выходе" системы, по вероятностным характеристикам случайных функций, поступающих на "вход" системы.

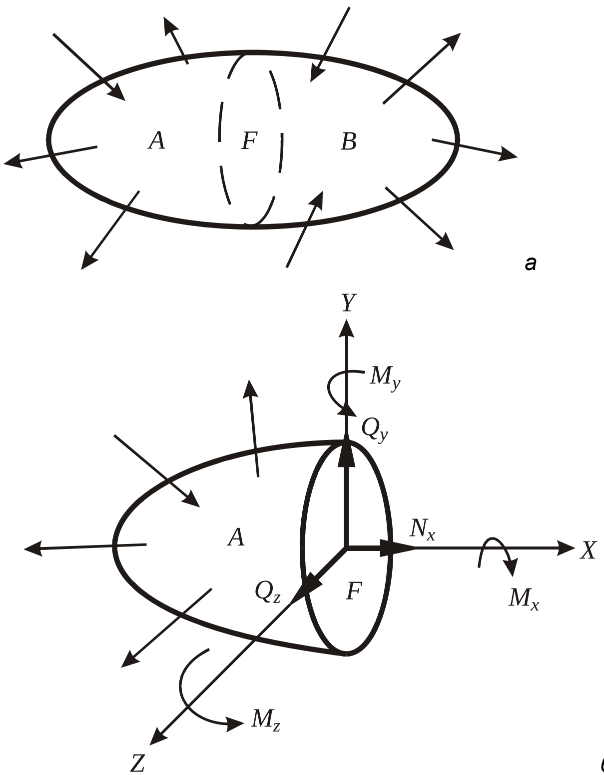


Рис. 1.12. Силы и моменты, учитывающие действие отброшенной части тела на выделенную его часть

В любой из указанных задач поведение исследуемой величины достаточно полно может быть охарактеризовано ее математическим ожиданием, дисперсией и корреляционной функцией.

При дальнейшем изложении будет использован детерминированный подход к расчету нагрузок, в котором фактически определяется лишь среднее значение нагрузки и не рассматриваются ее вероятностные характеристики.

Следует также заметить, что вероятностный подход на основе случайных функций может быть применен и к расчету напряженного состояния конструкции, когда соответствующие напряжения и деформации считаются случайными функциями.

Теперь остановимся на основных принципах выбора материала для конструкции, которыми руководствуются при составлении расчетной схемы.

1.2.5. Модели материалов

При составлении расчетной схемы конструкция обычно представляется в виде сплошной среды, обладающей заданными физико-механическими свойствами. Эти свойства могут быть постоянными или переменными по объему тела. С этой точки зрения в практике инженерного проектирования принято различать три типа материалов.

> ***Изотропным*** называется материал, свойства которого постоянны по любому направлению внутри него.
>
> ***Ортотропным*** называется материал, свойства которого переменны по взаимно перпендикулярным направлениям.
>
> ***Анизотропным*** называется материал, свойства которого зависят от направления, в котором они определяются.
>
> ***Структурно анизотропным*** называется материал, у которого упругие и пластические свойства выделенного элемента зависят от его угловой ориентации.
>
> ***Конструктивно анизотропным*** называется идеализированный материал, получивший новые свойства в результате размазывания однородных конструктивных элементов (объединяет в себе схематизацию свойств материала и геометрических особенностей конструкции).

При выборе материала для расчетной схемы, а потом и для конструкции, многое зависит от нагрузки. И здесь приходится учитывать два фактора:

- уровень нагрузки и длительность ее воздействия;
- характер воздействия нагрузки с точки зрения исчерпания несущей способности конструкции.

В зависимости от уровня нагрузки различают три типа поведения материала конструкции: упругое, пластическое и с эффектами ползучести.

Принципиальным здесь является то, что после снятия внешней нагрузки исходная конфигурация тела восстанавливается. И совсем не обязательно, чтобы существовала линейная зависимость между напряжениями и деформациями, постулируемая законом Гука, который лежит в основе линейной теории упругости. В следующей главе будут подробно очерчены границы, в которых можно следовать решениям задач методами теории упругости. А нашел закон Гука такое широкое распространение потому, что он хорошо описывает поведение большинства конструкционных материалов.

Если связь между напряжениями и деформациями нелинейная, то в этом случае речь идет о нелинейной теории упругости. В связи с появлением полимерных материалов, получивших широкое распространение в последние десятилетия и обладающих свойствами нелинейной упругости, сейчас весьма актуальным является вопрос о создании простых и эффективных методов решения физически нелинейных задач теории упругости.

У материалов, обладающих свойством упругости, наблюдается одна интересная тенденция, которую следует иметь в виду при выборе материала для конструкции.

Если материал линейно-упругий, то коэффициент пропорциональности между напряжениями и относительными деформациями, называемый модулем упругости, изменяется в довольно широком диапазоне. С увеличением этого коэффициента материалы имеют тенденцию подчиняться закону Гука вплоть до разрушения конструкции. Хорошим примером такого поведения являются керамические материалы (рис. 1.13), которые разрушаются в пределах линейной зависимости между напряжениями и деформациями.

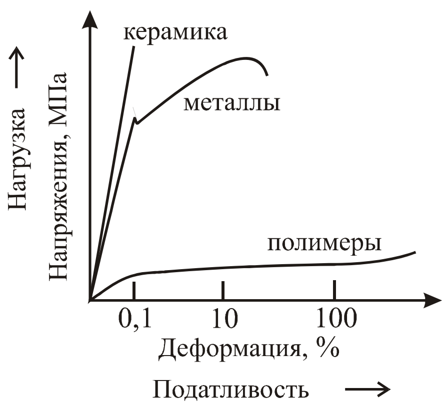


Рис. 1.13. Зависимость напряжений от деформации для материалов с различными модулями упругости

При малых начальных модулях упругости, типичных для полимеров, имеется тенденция к возникновению упругой нелинейной зависимости между напряжениями и деформациями. Промежуточное положение занимают металлы, особенно это типично для сталей, у которых вначале наблюдается линейная зависимость между напряжениями и деформациями, а затем возникает довольно значительная область пластических деформаций (рис. 1.13).

Свойство пластичности присуще очень многим конструкционным материалам, в первую очередь, это металлы и сплавы: сталь, железо, медь, алюминий и др.

За пределом пропорциональности на диаграмме зависимости напряжений от деформаций следует предел текучести (рис. 1.14), после которого в материале начинают возникать пластические деформации.

Если после появления пластических деформаций начать разгрузку, то тело вернется в ненагруженное состояние по линии, параллельной линии нагрузки, но смещенной на величину пластической деформации (рис. 1.15).

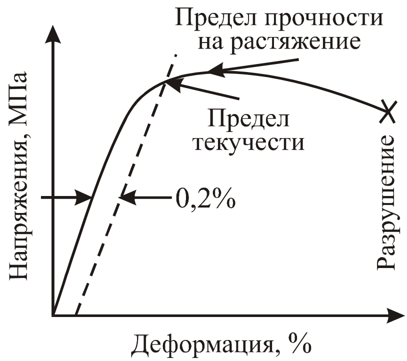


Рис. 1.14. Предел текучести на кривой зависимости напряжений от деформаций

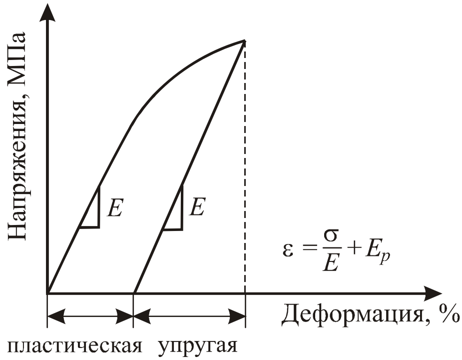


Рис. 1.15. Кривая пластичности при нагрузке и разгрузке

Кроме упругости и пластичности, у многих материалов при длительном нагружении постоянной нагрузкой, например, у сталей при высоких температурах, возникает явление ползучести. На рис. 1.16, *а* приведены кривые ползучести, иллюстрирующие появление деформации при длительном нагружении конструкции постоянной силой.

Другое особое свойство ползучести состоит в том, что если зафиксировать относительную деформацию, то с течением времени напряжения в материале конструкции уменьшаются. Это явление называется *релаксацией*, а соответствующая ей кривая построена на рис. 1.16, *б*.

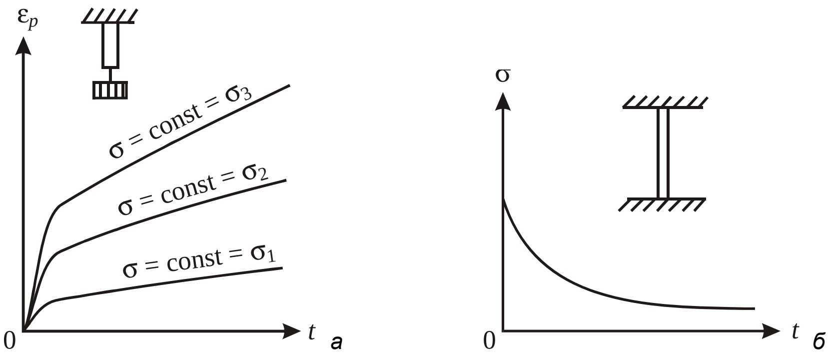


Рис. 1.16. Кривые ползучести (*а*) и релаксации (*б*)

В завершение раздела, посвященного выбору материала для конструкции, ответим на вопрос о том, как характер нагружения влияет на выбор материала.

Если нужно создать конструкцию минимальной массы, то здесь вступают в противоречие плотность материала и его прочностные свойства. Дело в том, что материалы с большей плотностью обладают и большими значениями предела прочности. Компромисс находят в том, что наилучшим в этом случае считается тот материал, который имеет более высокие удельные характеристики.

Для конструкций, работающих на устойчивость, вместо удельной прочности используется удельная жесткость, определяемая плотностью и модулем упругости, а не пределом прочности. В табл. 1.1 приводятся некоторые удельные характеристики, которыми рекомендуется пользоваться при выборе материала конструкции в зависимости от того, какой фактор разрушения определяет ее работоспособность.

Таблица 1.1. *Удельные характеристики для выбора материала конструкции*

№	Тип конструкции	Способ нагружения	Удельный критерий
1	Любая	Растяжение	σ_b/ρ
2	Любая	Изгиб	$\sigma_b^{2/3}/\rho$
3	Стержень	Продольное сжатие	E/ρ
4	Пластинка	Сжатие	$\sqrt[3]{E}/\rho$
5	Оболочка	Осевое сжатие	$\sqrt{E}/\rho$
6	Оболочка	Внешнее давление	$E^{2/5}/\rho$

Примечание

В табл. 1.1 используются такие обозначения: σ_b — предел прочности; E — модуль упругости; ρ — плотность материала.

Выводы

В этой главе были рассмотрены следующие вопросы:

1. Предмет и задачи курсов теории упругости, теории пластичности и теории ползучести.
2. Место строительной механики, как науки о методах расчета типовых элементов конструкций, среди других наук о прочности.
3. Расчетная схема как модель конструкции.
4. Этапы составления расчетной схемы конструкции.
5. Особенности построения модели геометрии конструкции при создании расчетной схемы.
6. Выбор способа учета граничных условий.
7. Выбор материала конструкции в зависимости от величины нагрузки и способа нагружения конструкции.
8. Критерии выбора материала конструкции с целью получения минимальной массы.

Упражнения и вопросы

1. Перечислите предмет и задачи курса строительной механики.
2. Каковы особенности расчетной схемы как модели конструкции?
3. Составьте несколько расчетных схем для сжатой цилиндрической оболочки, подкрепленной изнутри стержнями уголкового профиля.
4. Предложите две расчетных схемы для вафельной цилиндрической оболочки.
5. Приведите 5 примеров элементов конструкции самолета, которые могут рассматриваться как пластины.
6. Предложите две расчетных схемы закрепления цилиндра, нагруженного внутренним давлением, которые учитывают его взаимодействие с крышкой-днищем.
7. Чем шарнирные закрепления отличаются от жесткой заделки?
8. Приведите примеры материалов, обладающих свойством ползучести.
9. Дайте определения линейных, физически и геометрически нелинейных задач.
10. Дайте определения стержня, оболочки и пластины как геометрической формы.
11. Перечислите основные способы внешних и внутренних закреплений.
12. Перечислите все три группы уравнений механики деформируемого твердого тела.
13. Сформулируйте принцип независимости действия сил.
14. Сравните алюминиево-магниевый сплав АМГ-6 ($\sigma_b = 0{,}32 \cdot 10^3$ МПа; $E = 0{,}68 \cdot 10^{11}$ Па; $\rho = 2{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3), сталь 30ХГСА ($\sigma_b = 1{,}1 \cdot 10^3$ МПа; $E = 2{,}1 \cdot 10^{11}$ Па; $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3) и титановый сплав ВТ-14 ($\sigma_b = 1{,}1 \cdot 10^3$ МПа; $E = 1{,}1 \cdot 10^{11}$ Па; $\rho = 4{,}4 \cdot 10^3$ кг/м^3) по удельным критериям, приведенным в табл. 1.1.

Литература к главе 1

1. Александров А. В., Потапов В. Д. Основы теории упругости и пластичности. — М.: Высшая школа, 1990.
2. Балабух Л. И., Алфутов Н. А., Усюкин В. И. Строительная механика ракет: Учебник для машиностроительных спец. вузов. — М.: Высшая школа, 1984, 391 с.

3. Дарков А. В., Шапошников Н. Н. Строительная механика. Учебник. — СПб.: Лань, 2004, 656 с.
4. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. — М.: Наука, 1980.
5. Образцов И. Ф., Булычев Л. А. и др. Строительная механика летательных аппаратов: Учебник для авиационных специальностей вузов. — М.: Машиностроение, 1986, 536 с.
6. Постнов В. А., Суслов В. П. Теория упругости и численные методы решения задач строительной механики корабля. — Л.: Судостроение, 1987, 288 с.
7. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. — М.: Наука, 1988.
8. Саргсян А. Е. Строительная механика. Механика инженерных конструкций: Учебник для вузов. — М.: Высшая школа, 2004, 462 с.
9. Феодосьев В. И. Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов. — М.: Наука, 1969, 174 с.

Глава 2

Уравнения теории упругости

Эта глава посвящена уравнениям линейной теории упругости, которые позволяют получать напряжения и деформации при любых нагрузках на границе и внутри тела любой формы. Теория упругости, в отличие от сопротивления материалов, базирующегося на гипотезе плоских сечений и других упрощенных предположениях, ставит своей целью получение точного решения задач при минимальном количестве исходных гипотез. Эта глава имеет принципиально важный методический характер с точки зрения изложения дальнейшего материала книги, поэтому в ней подробно обсуждается получение уравнений равновесия, уравнений, связывающих перемещения с деформациями, и физических уравнений, основанных на обобщенном законе Гука. Получению различных вариантов уравнений теории упругости и решению конкретных задач, в основе которых лежат преобразованные уравнения теории упругости, посвящены следующие главы книги.

В этой главе будут рассмотрены следующие темы:

- гипотезы линейной теории упругости и принцип Сен-Венана;
- теория напряжений и граничные условия;
- уравнения равновесия Навье;
- геометрические уравнения Коши и условия сплошности;
- физические уравнения теории упругости.

2.1. Основные гипотезы линейной теории упругости

При решении задач методами теории упругости исходят из следующих гипотез:

Считается, что среда заполняет тело сплошным образом и не меняет свою непрерывность в процессе приложения нагрузок. Таким образом, деформации и перемещения точек тела считаются непрерывными функциями координат.

До приложения нагрузок тело находится в естественном ненапряженном состоянии, т. е. начальные напряжения в теле равны нулю.

Напряжения в теле, возникающие после приложения нагрузок, связаны линейной зависимостью с деформациями. Эта гипотеза позволяет воспользоваться принципом независимости действия сил при рассмотрении поведения тела в точке. Для всего тела линейная зависимость между внешними нагрузками и перемещениями не всегда соблюдается (например, смятие шара внешней нагрузкой). Напомним, что в соответствии с принципом независимости действия сил эффект воздействия на тело главного вектора всех внешних сил равен сумме эффектов отдельных сил, из которых складывается главный вектор сил.

Перемещения тела малы по сравнению с линейными размерами тела.

Относительные деформации и углы сдвига в материале малы по сравнению с единицей.

2.2. Принцип Сен-Венана

Многие задачи теории упругости удается решить, используя принцип локальности эффекта внешних нагрузок (или *принцип Сен-Венана*), который может быть сформулирован следующим образом:

> **Если к малой части тела приложена система взаимно уравновешенных нагрузок, то она вызывает лишь местные напряжения, быстро убывающие от места приложения нагрузок.**

В качестве примера можно рассмотреть цилиндрический сосуд со сферическим днищем (рис. 2.1), который нагружен внутренним давлением. В области стыка днища с цилиндром возникают краевые напряжения, которые быстро затухают по мере удаления от него.

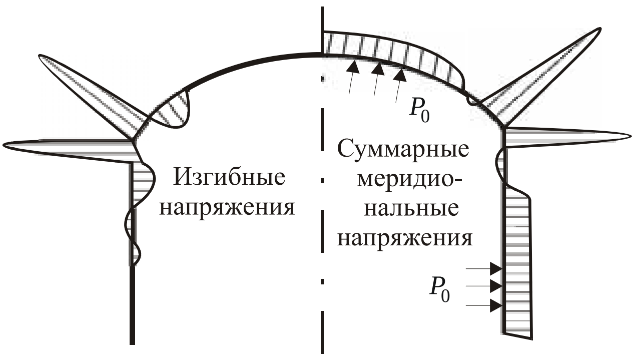


Рис. 2.1. Локальные напряжения в области соединения цилиндра с днищем

Принцип Сен-Венана может быть сформулирован и так:

В точках твердого тела, достаточно удаленных от места приложения внешних нагрузок, напряжения весьма мало зависят от характера распределения этих нагрузок по поверхности тела.

Приведем еще один пример. Пусть на конце балки, жестко заделанной в стену, приложена сила P одной и той же величины, но отличная по способу приложения (рис. 2.2, *а*—*в*). В соответствии с принципом Сен-Венана напряжения в сечениях балки, удаленных от места приложения нагрузки, не зависят от характера нагружения и будут одинаковыми. В то же время в малой области A около точки приложения силы возникают местные напряжения, характер распределения которых зависит от того, как приложена нагрузка — сверху балки, снизу и т. п.

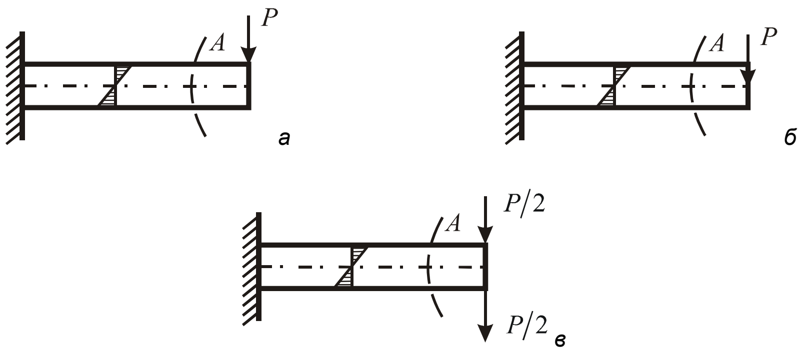


Рис. 2.2. Эффект локального воздействия силы, приложенной на конце балки

2.3. Напряжения и нагрузки

В дальнейшем все внешние нагрузки разделим на следующие группы:

- поверхностные нагрузки;
- сосредоточенные силы;
- объемные нагрузки.

Поверхностные нагрузки действуют на внешней поверхности тела и характеризуются интенсивностью — величиной силы, действующей на единицу площади.

Сосредоточенные силы приложены в точке на поверхности тела. В этом случае их также можно считать поверхностными нагрузками, если принять, что размеры площадки, на которую они действуют, бесконечно малы.

К ***объемным нагрузкам*** обычно относят вес и силы инерции. В каждой точке твердого тела такую нагрузку можно охарактеризовать интенсивностью объемной нагрузки, представляющей собой силу, действующую на единичный объем.

2.3.1. Тензор напряжений и формулы Коши

Теперь рассмотрим, какие внутренние усилия возникают в теле под действием внешней нагрузки. Важно отметить, что на основании второй гипотезы теории упругости в ненагруженном теле внутренние усилия не возникают.

Пусть на тело произвольной формы, изображенное на рис. 2.3, *а*, действуют внешние нагрузки.

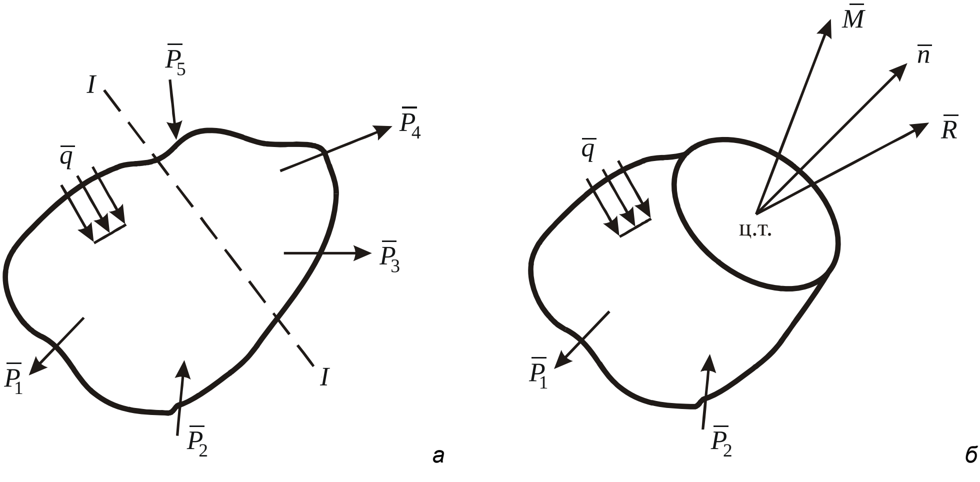


Рис. 2.3. Внутренние усилия в сечении тела

Проведем сечение *I—I*, мысленно разделим тело на две части и отбросим одну из частей, например, верхнюю (рис. 2.3, *б*). Действие отброшенной части на оставшуюся часть тела заменим силой $\overline{R}$ и моментом $\overline{M}$, которые представляют собой равнодействующие элементарных усилий $\Delta\overline{t}$, возникающих на малых площадках Δf, на которые можно разбить сечение тела. Сила $\overline{R}$ и момент $\overline{M}$ приложены в центре тяжести сечения.

Теперь выделенная часть тела находится в равновесии под действием внешних сосредоточенных сил $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$, поверхностной нагрузки с интенсивностью $\overline{q}$, внутренней силы $\overline{R}$ и момента $\overline{M}$.

Интенсивность $\bar{R}$ и $\bar{M}$ называют *напряжением*, которое представляет собой предел отношения элементарного усилия, действующего на бесконечно малую площадку, когда величина ее площади стремится к нулю, т. е.:

$$\bar{P}_n = \lim_{\Delta f \to 0} \frac{\Delta \bar{t}}{\Delta f}.$$

Таким образом, на каждой элементарной площадке возникают напряжения $\bar{P}_n$, направление которых не обязательно совпадает с направлением внешней нормали $\bar{n}$ к сечению *I—I*. Если зафиксировать тело относительно какой-либо системы координат и составить шесть уравнений равновесия статики, то можно определить равнодействующую силу $\bar{R}$ и момент $\bar{M}$. На движущееся с ускорением тело кроме внешних сил действуют еще силы инерции. Для составления уравнений равновесия в этом случае необходимо воспользоваться *принципом Даламбера*:

Тело, движущееся с ускорением, находится в равновесии под действием внешних сил, изменяющих траекторию его движения, и сил инерции.

Для определения напряженного состояния в точках твердого тела знания только $\bar{R}$ и $\bar{M}$ недостаточно, а требуется более детальное рассмотрение поведения тела под действием внешних нагрузок.

Полный вектор напряжения $\bar{P}_n$ принято раскладывать на две составляющие: в проекции на нормаль $\bar{\sigma}_n$ к площадке, которую называют *нормальным* напряжением, и в проекции на саму площадку $\bar{\tau}_n$, которую называют *касательным* напряжением (рис. 2.4). При решении задач теории упругости удобно выбирать площадки, параллельные координатным плоскостям, и проектировать полный вектор напряжений, действующий по ним, на направления осей координат.

На рис. 2.5 изображен элементарный параллелепипед с гранями, параллельными координатным плоскостям, на которые действуют касательные и нормальные напряжения. Рассматривая приведенную на рис. 2.5 схему, можно установить, что напряженное состояние в каждой точке твердого тела можно охарактеризовать девятью компонентами напряжений. Таблица, составленная из этих компонент, называется *тензором* T_σ *напряжений* в данной точке:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \qquad (2.1)$$

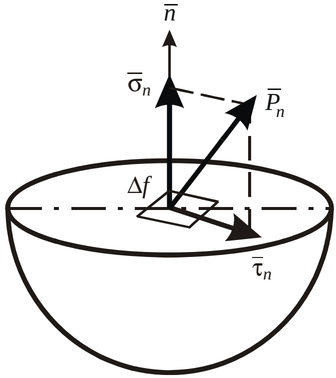


Рис. 2.4. Проекции вектора напряжений на касательную и нормаль к площадке

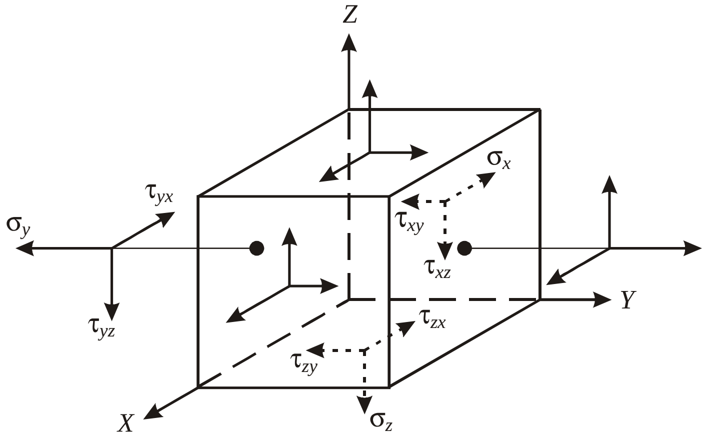


Рис. 2.5. Напряжения на гранях элементарного параллелепипеда

Далее мы увидим, что эта таблица симметрична относительно главной диагонали и напряженное состояние в точке твердого тела характеризуется 6 компонентами напряжений. Первый индекс в обозначении касательных напряжений указывает на нормаль к площадке, а второй — на направление напряжений. Знаки напряжений принято определять по следующему правилу:

Нормальное напряжение считается положительным, если оно вызывает растяжение, и в этом случае его направление совпадает с направлением внешней нормали к площадке.

Касательные напряжения положительны, если внешняя нормаль к площадке совпадает с направлением координатной оси (положительным или отрицательным соответственно), а направлены они в сторону со-

ответствующей этому направлению координатной оси (положительной или отрицательной соответственно).

Теперь предположим, что в рассматриваемой точке тела уже известны напряжения по площадкам, параллельным координатным плоскостям, т. е. известен тензор напряжений. Определим напряжения на площадке df, наклоненной под произвольным углом к осям координат. Для этого рассмотрим элементарный тетраэдр, содержащий наклонную площадку *ABC* (рис. 2.6, *а*), на которой необходимо определить полное напряжение $\overline{P}_n$ (рис. 2.6, *б*).

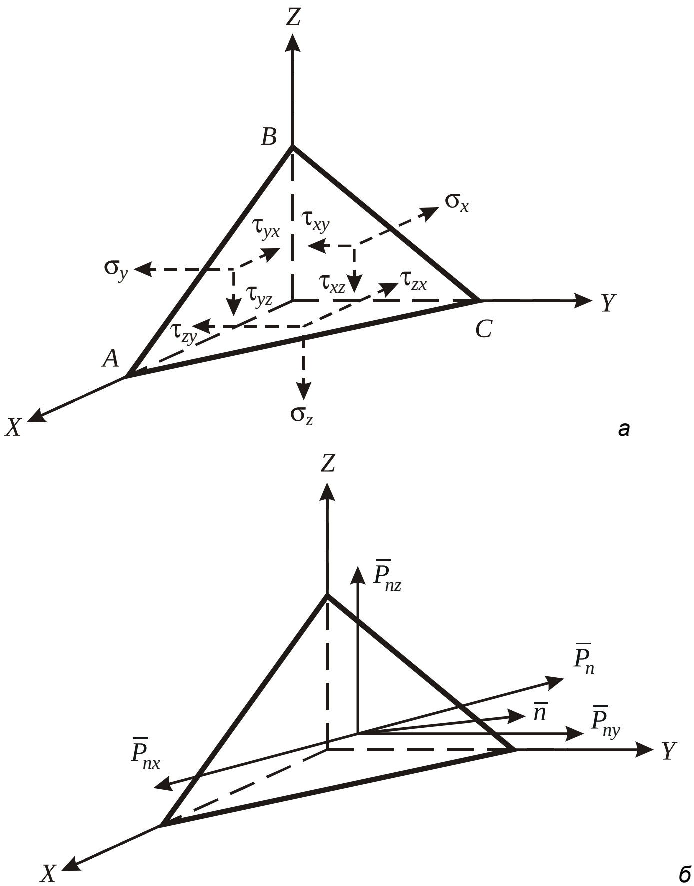


Рис. 2.6. К определению напряжений на наклонной площадке

Вместо $\overline{P}_n$ мы будем определять его проекции на оси координат: P_{nx}, P_{ny}, P_{nz}. Длины ребер тетраэдра, совпадающих с осями координат, обозначим через

dx, dy и dz соответственно. Составим уравнения равновесия тетраэдра в проекции на оси координат.

В проекции на ось X получаем:

$$-\frac{1}{2}dydz\sigma_x - \frac{1}{2}dxdz\tau_{yx} - \frac{1}{2}dxdy\tau_{zx} + df\ P_{nx} = 0\ . \tag{2.2}$$

Но так как:

$$\frac{1}{2}dydz = df\ \cdot \cos(n, x)\ ;$$

$$\frac{1}{2}dxdz = df\ \cdot \cos(n, y)\ ;$$

$$\frac{1}{2}dxdy = df\ \cdot \cos(n, z)\ ,$$

то:

$$P_{nx} = \sigma_x \cdot \cos(n, x) + \tau_{yx} \cdot \cos(n, y) + \tau_{zx} \cdot \cos(n, z)\ .$$

Вводя сокращенные обозначения для косинусов:

$$n_x = \cos(n, x)\ ; \quad n_y = \cos(n, y)\ ; \quad n_z = \cos(n, z)$$

и составляя уравнения равновесия в проекциях на оси Y и Z, получаем искомые соотношения, которые называют *формулами Коши*:

$$\left.\begin{aligned} P_{nx} &= \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z ; \\ P_{ny} &= \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z ; \\ P_{nz} &= \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z . \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

Эти соотношения позволяют определить напряжения на любой наклонной площадке, если известны напряжения на площадках, параллельных координатным плоскостям. С помощью формул Коши легко задаются граничные условия для поверхностных нагрузок на поверхности тела.

2.3.2. Граничные условия

Предположим теперь, что наклонная площадка совпадает с поверхностью тела, где известны внешние нагрузки. Здесь возникает обратная задача — по интенсивности внешней нагрузки $\bar{F}$ необходимо определить напряжения внутри тела, а формулы Коши используются в качестве условий на поверхности тела, т. е.:

$$\left.\begin{aligned} F_{nx} &= \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z; \\ F_{ny} &= \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z; \\ F_{nx} &= \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z, \end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

где F_{nx}, F_{ny}, F_{nz} известны, а компоненты тензора напряжений σ_x, τ_{yx}, ..., σ_z неизвестны.

Систему внешних сил, действующих на тело, можно рассматривать как естественное продолжение напряженного состояния, возникающего внутри его.

2.3.3. Главные напряжения

На наклонную площадку, проведенную через данную точку, действует напряжение $\overline{P}_n$, наклоненное к внешней нормали под произвольным углом. Как уже отмечалось, вектор $\overline{P}_n$ можно разложить по направлениям осей X, Y, Z и соответствующие проекции определить по формулам Коши. С другой стороны, вектор $\overline{P}_n$ можно разложить на нормальные $\overline{\sigma}_n$ и касательные к площадке $\overline{\tau}_n$ напряжения (см. рис. 2.4). Однако в любой точке тела можно провести бесчисленное множество наклонных площадок. Найдем среди них такие площадки, на которых касательные напряжения равны нулю.

> ***Главными*** называются такие площадки, на которых действуют только нормальные напряжения $\overline{\sigma}_n$, а касательные равны нулю.

При определении главных площадок обратите внимание на то, что направления внешней нормали $\overline{n}$ и вектора $\overline{P}_n$ на главных площадках совпадают, поэтому:

$$\left.\begin{aligned} P_{nx} &= \sigma_n n_x; \\ P_{ny} &= \sigma_n n_y; \\ P_{nz} &= \sigma_n n_z. \end{aligned}\right\} \qquad (2.5)$$

Приравнивая выражения (2.3) и (2.5), получаем после преобразований:

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_n) n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z &= 0; \\ \tau_{xy} n_x + (\sigma_y - \sigma_n) n_y + \tau_{zy} n_z &= 0; \\ \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + (\sigma_z - \sigma_n) n_z &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2.6)$$

Система линейных однородных уравнений (2.6) позволяет определить косинусы углов n_x, n_y, n_z, которые имеют ненулевые значения, если определитель системы равен нулю, т. е.:

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma_n) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_n) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_n) \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.7)$$

Раскрывая определитель, получим:

$$\sigma_n^3 - I_1\sigma_n^2 + I_2\sigma_n - I_3 = 0, \qquad (2.8)$$

где инварианты тензора напряжений равны:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z;$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2;$$

$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2.$$

Решив кубическое уравнение (2.8), получим три, в общем случае различных, корня σ_1, σ_2, σ_3, которые и будут главными напряжениями. Таким образом, значение главного напряжения σ_n в уравнении (2.6) известно, однако эта система линейно зависима, и поэтому для каждого из трех значений напряжений можно получить бесконечное множество решений для проекций нормали n_x, n_y, n_z. Однако среди этих решений необходимо взять лишь те, которые удовлетворяют очевидному геометрическому условию:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1. \qquad (2.9)$$

Каждому из главных напряжений σ_1, σ_2, σ_3 соответствует одна главная площадка, положение которой определяется известными значениями косинусов угла наклона нормали к осям координат. Можно показать, что эти площадки взаимно перпендикулярны [2.1]. Приведем без доказательства основные свойства главных напряжений, полагая в общем случае, что $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Свойства главных напряжений

Главные напряжения σ_1, σ_2, σ_3 обладают следующими свойствами.

- Из всех нормальных напряжений $\overline{P}_n$, действующих на наклонных площадках, проходящих через данную точку, наибольшим и наименьшим являются соответствующие главные напряжения.

- ❒ Из всех полных напряжений, действующих на наклонных площадках, наибольшими и наименьшими по абсолютному значению являются также соответствующие главные напряжения, т. е. $|\sigma_1| > P_n > |\sigma_3|$.
- ❒ Наибольшие касательные напряжения равны $\tau_{max} = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ и действуют на площадках, наклоненных под углом $45°$ к главным площадкам с напряжениями σ_1 и σ_3 (рис. 2.7, *а*).

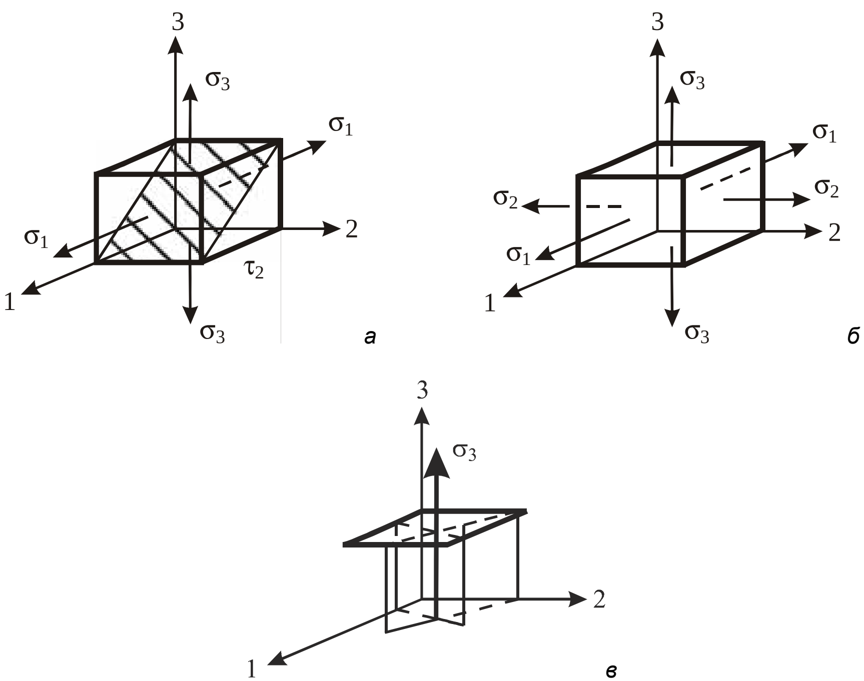


Рис. 2.7. К свойствам главных напряжений

Свойства главных площадок

Свойства главных площадок определяются соотношением главных напряжений σ_1, σ_2, σ_3.

- ❒ Если $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$, то площадки взаимно перпендикулярны и различны (рис. 2.7, *б*).
- ❒ При $\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$ имеются одна площадка, соответствующая σ_3, и бесчисленное множество перпендикулярных ей площадок, на которых действуют напряжения $\sigma_1 = \sigma_2$ (рис 2.7, *в*).

- Если $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, то на всех площадках, проходящих через рассматриваемую точку, действуют лишь нормальные напряжения, и тело находится в условиях всестороннего растяжения (сжатия).

Среднее напряжение $\sigma_{\text{ср}} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ действует на площадках, равнонаклоненных к главным площадкам. Эти площадки, называемые *октаэдрическими*, показаны на рис. 2.8. Касательные напряжения на этих площадках определяются по формуле:

$$\tau_o = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}\ ,$$

а интенсивность напряжения (приведенное расчетное напряжение) равно:

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}}\tau_o\ .$$

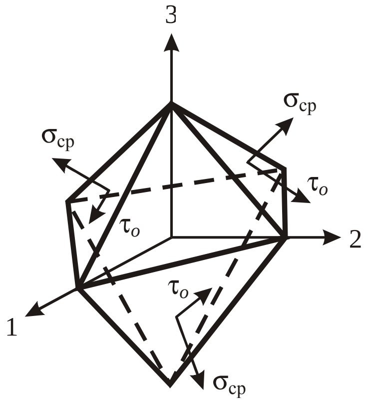


Рис. 2.8. Октаэдрические площадки

2.4. Уравнения равновесия Навье

Ранее нами было рассмотрено напряженное состояние в точке твердого тела, на которое действуют внешние нагрузки, при этом на соответствующих схемах напряжения на близко расположенных площадках считались одинаковыми, что соответствует, конечно, однородному напряженному состоянию.

В общем случае напряженное состояние в теле будет неоднородным, и как бы ни были близки грани элементарного параллелепипеда, имеют место приращения напряжений при перемещении от одной грани к другой.

Составим уравнения равновесия элементарного параллелепипеда, изображенного на рис. 2.9, считая, что по его поверхности действуют внутренние усилия, характеризующие действие отброшенной части тела, а в каждой его точке действуют объемные нагрузки, которые представляют собой вес и силы инерции.

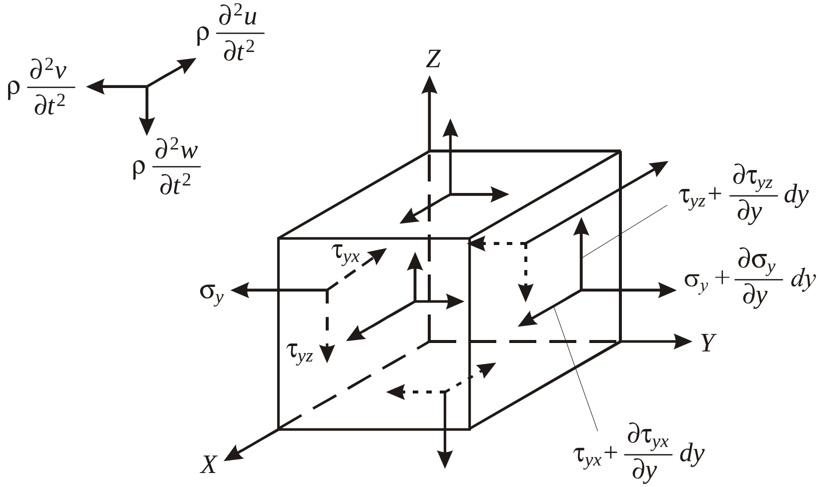


Рис. 2.9. К составлению уравнений равновесия элементарного параллелепипеда

Поверхностные нагрузки характеризуются напряжениями, а объемные — интенсивностью объемной нагрузки X , Y , Z .

Обозначая через u , v , w перемещения точки тела в направлении соответствующих осей x, y, z, представим интенсивность сил инерции как произведение плотности материала на ускорения в направлении соответствующей оси.

Заметим, что вектор силы инерции всегда направлен в сторону, противоположную ускорению. Составим уравнение равновесия в проекции на ось x:

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right) dydx - \tau_{zx} dydx +$$
$$+ \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dzdx - \tau_{yx} dzdx + \left(X - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) dxdydz = 0. \tag{2.10}$$

Приводя подобные члены и деля на объем $dV = dxdydz$, получаем:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{2.11}$$

Составляя аналогичным образом уравнения равновесия в проекциях на оси y и z, имеем:

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+Y=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\,; \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+Z=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,. \tag{2.13}$$

Если пренебречь составляющими объемных сил, то уравнения равновесия запишутся в виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}=0;\\
&\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}=0;\\
&\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

Объемные силы учитывают обычно при решении задач, в которых рассматривается динамическое нагружение тела, например, при решении задачи об упругих колебаниях тела.

Теперь составим уравнение моментов относительно оси X, полагая, что равнодействующая внутреннего усилия, соответствующего рассматриваемому напряжению, находится в центре грани параллелепипеда:

$$-\tau_{xz}dydz\frac{dy}{2}+\tau_{xy}dydz\frac{dz}{2}+\left(\tau_{xz}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}dx\right)dydz\frac{dy}{2}-\left(\tau_{xy}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}dx\right)dydz\frac{dz}{2}-$$

$$-\sigma_z dydx\frac{dy}{2}+\left(\sigma_z+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}dz\right)dydx\frac{dy}{2}-\left(\tau_{zy}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}dz\right)dydxdz+$$

$$+\left(\sigma_y+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}dy\right)dzdx\frac{dz}{2}+\left(\tau_{yz}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}dy\right)dzdxdy-\sigma_y dzdx\frac{dz}{2}+zdxdydz\cdot\frac{dy}{2}-$$

$$-Ydxdydz\frac{dz}{2}+\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}dxdydz\frac{dz}{2}-\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}dxdydz\frac{dy}{2}=0.$$

В записанном уравнении есть слагаемые третьего и четвертого порядков малости. Приводя подобные члены, отбрасывая члены четвертого порядка малости и деля на объем dV, получаем:

$$\tau_{zy}=\tau_{yz}\,. \tag{2.15}$$

Аналогично из уравнений моментов относительно осей Y и Z имеем:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}\,; \tag{2.16}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}\,. \tag{2.17}$$

Равенства (2.15)—(2.17) называют *законом парности касательных напряжений*:

Компоненты касательных напряжений, расположенные на двух взаимно перпендикулярных площадках, равны по величине и направлены перпендикулярно линии пересечения этих площадок. При этом оба компонента направлены либо к линии пересечения, либо от нее.

В заключение укажем на кажущееся противоречие выводов формул Коши и уравнений равновесия. Действительно, при получении формул Коши тоже составлялись уравнения равновесия, однако объемные силы во внимание как будто не принимались. На самом деле слагаемые с этими силами имеют третий порядок малости и поэтому отбрасываются по сравнению с другими слагаемыми, которые имеют второй порядок малости.

В полученных уравнениях количество неизвестных превышает число уравнений, поэтому задачи теории упругости являются статически неопределимыми, а дополнительные уравнения необходимо получать из рассмотрения деформации тела.

2.5. Геометрические уравнения

Геометрические уравнения деформации сплошной среды, которые связывают перемещения с деформациями и сдвигами, называют *уравнениями Коши*. Будем рассматривать изменения расстояния между двумя бесконечно близкими точками и угла между двумя первоначально ортогональными направлениями.

Линейной деформацией назовем относительное изменение расстояния между двумя бесконечно близкими точками.

Деформацией сдвига будем называть величину угла, на которую изменится первоначально прямой угол между двумя прямыми, проходящими через рассматриваемую точку.

Сдвиг считается ***положительным***, если прямой угол между положительными направлениями отрезков, проведенных через одну точку, уменьшается.

Рассмотрим элементарный отрезок ds, проекции которого на оси X, Y, Z равны соответственно dx, dy, dz. При деформации тела начало отрезка — точка M — перемещается в точку M', а проекции смещения на оси координат X, Y, Z обозначим через u, v, w (рис. 2.10).

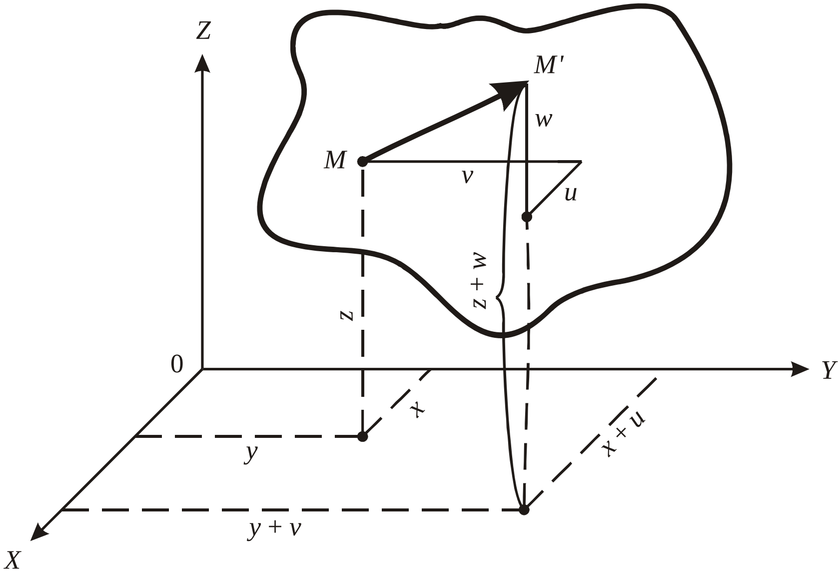


Рис. 2.10. Проекции перемещения точки тела на оси координат при его деформировании

В то же время проекции перемещения второго конца отрезка — точки N в N' — будут равны:

$$u + du = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \; ; \qquad (2.18)$$

$$v + dv = v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \; ; \qquad (2.19)$$

$$w + dw = w + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \; . \qquad (2.20)$$

Длина отрезка $M'N'$ станет равной ds', а ее проекции на оси координат — dx', dy', dz'. Тогда относительная деформация отрезка ds равна:

$$\varepsilon_s = \frac{ds' - ds}{ds} \; . \qquad (2.21)$$

Вычислим длину ds', представив ее в виде:

$$(ds')^2 = (dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2 \; . \qquad (2.22)$$

Заметим, что:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 . \tag{2.23}$$

Имеем:

$$dx' = (x + dx + u + du) - (x + u) = dx + du = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\ ; \tag{2.24}$$

$$dy' = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz\ ; \tag{2.25}$$

$$dz' = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)dz\ . \tag{2.26}$$

Тогда относительная деформация ε_s отрезка MN, имеющего до приложения нагрузки длину ds, а после — ds', равна:

$$\varepsilon_s = \frac{(ds')^2 - ds^2}{ds} \cdot \frac{1}{ds' + ds},$$

но:

$$ds' + ds = ds' - ds + 2ds = 2ds\left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon_s\right) \approx 2ds,$$

т. к. на основании гипотез теории упругости $\varepsilon_s << 1$ *(см. разд. 2.1)*. Поэтому:

$$\varepsilon_s = \frac{1}{2} \cdot \frac{(ds')^2 - ds^2}{ds^2}. \tag{2.27}$$

Вычислим числитель полученного выражения:

$$(ds') - ds^2 = \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - 1\right]dx^2 + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 +\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - 1\right]dy^2 + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 - 1\right]dz^2 + 2\left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial y} +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial v}{\partial x}\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}\right]dxdy + 2\left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]dxdz +$$

$$+2\left[\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]dydz.$$

Введем для краткости записи следующие обозначения:

$$\gamma_{xx} = 2\left\{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]\right\};$$

$$\gamma_{yy} = 2\left\{\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]\right\};$$

$$\gamma_{xx} = 2\left\{\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]\right\};$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left[\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\right];$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \left[\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}\right];$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \left[\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\right].$$

Тогда:

$$(ds')^2 - ds^2 = \gamma_{xx}dx^2 + \gamma_{yy}dy^2 + \gamma_{zz}dz^2 + \gamma_{xy}dxdy + \gamma_{yz}dydz + \gamma_{zx}dzdx. \quad (2.28)$$

Применим формулу (2.27) для отрезка, совпадающего с осью X:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2}\cdot\frac{(ds')^2 - dx^2}{dx^2},$$

но $(ds')^2 - dx^2 = \gamma_{xx}dx^2$, поэтому:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2}\gamma_{xx}.$$

Аналогично можно получить, что:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2}\gamma_{yy};$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2}\gamma_{zz}.$$

Поэтому для относительных деформаций в направлении осей X, Y, Z получаем:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]; \tag{2.29}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]; \tag{2.30}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]. \tag{2.31}$$

Покажем теперь, что γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx} представляют собой деформации сдвига в соответствующих плоскостях. Проведем через точку $M(x, y, z)$ отрезки MN_1, MN_2 и MN_3, параллельные осям координат (рис. 2.11), и рассмотрим их новое положение, которое они займут после приложения нагрузки $M'N_1'$, $M'N_2'$, $M'N_3'$. В общем случае углы между этими прямыми будут острыми.

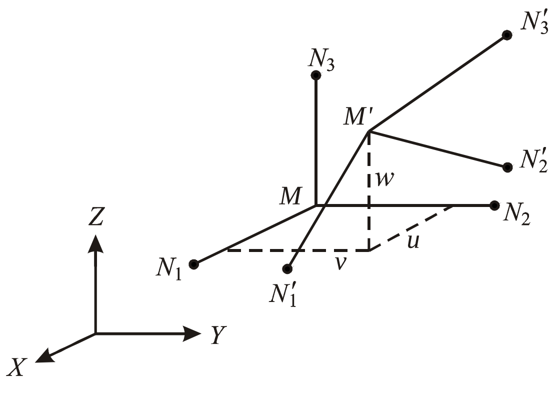


Рис. 2.11. К определению деформации сдвига между двумя отрезками

Деформацией сдвига между прямыми MN_1 и MN_2, согласно определению, будет разность между прямым углом и острым углом между $M'N_1'$ и $M'N_2'$. Тогда, с использованием гипотезы теории упругости о том, что деформации малы по сравнению с единицей, можно записать:

$$\gamma_{xy} \approx \sin\gamma_{xy} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}\right) = \cos\left(M'N_1'; M'N_2'\right), \tag{2.32}$$

но:

$$\cos\left(M'N_1';\, M'N_2'\right)=\cos\left(M'N_1';\, x\right)\cos\left(M'N_2';\, x\right)+ \\ +\cos\left(M'N_1';\, y\right)\cos\left(M'N_2';\, y\right)+\cos\left(M'N_1';\, z\right)\cos\left(M'N_2';\, z\right). \tag{2.33}$$

Чтобы вычислить косинусы углов между отрезками и осями координат, необходимо знать их длины и проекции на соответствующие оси координат. Отрезок MN_1 параллелен оси X, поэтому длина $M'N_1'$ в соответствии с формулой (2.21) равна:

$$ds_1=\left(1+\varepsilon_x\right)dx\,. \tag{2.34}$$

Аналогично длина $M'N_2'$ определяется как:

$$ds_2=\left(1+\varepsilon_y\right)dy\,. \tag{2.35}$$

Из формул (2.24)—(2.26) для отрезка, первоначально параллельного оси X, можно получить проекции ds_1 на оси координат:

$$dx_1=\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx\,;$$

$$dy_1=\frac{\partial v}{\partial x}dx\,;$$

$$dz_1=\frac{\partial w}{\partial x}dx\,,$$

Аналогично для проекций ds_2 на оси координат получаем:

$$dx_2=\frac{\partial u}{\partial y}dy\,;$$

$$dy_2=\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy\,;$$

$$dz_2=\frac{\partial w}{\partial y}dy\,.$$

Тогда, например:

$$\cos\left(M'N_1';\, x\right)=\frac{dx_1}{ds_1}\,;$$

$$\cos\left(M'N_2';\, y\right)=\frac{dy_2}{ds_2}\,.$$

и т. д., поэтому:

$$\cos\left(M'N_1';\ M'N_2'\right)=\frac{\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial y}}{\left(1+\varepsilon_x\right)\cdot\left(1+\varepsilon_y\right)}+\frac{\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial x}}{\left(1+\varepsilon_x\right)\cdot\left(1+\varepsilon_y\right)}+\frac{\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}}{\left(1+\varepsilon_x\right)\cdot\left(1+\varepsilon_y\right)},$$

или, пренебрегая ε_x и ε_y по сравнению с единицей, окончательно получаем:

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\right]. \qquad (2.36)$$

Аналогичные рассуждения приводят к выражениям:

$$\gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}+\left[\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}\right]; \qquad (2.37)$$

$$\gamma_{zx}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}+\left[\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\right]. \qquad (2.38)$$

Таким образом, показано, что γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx} в выражении (2.28) есть не что иное, как сдвиги в соответствующих плоскостях.

Геометрические уравнения (2.29)—(2.31) и (2.36)—(2.38) используются в нелинейной теории упругости. Если ограничиться только рассмотрением задач, в которых перемещения u, v, w малы, а также малы квадраты их производных, то эти уравнения становятся линейными и существенно упрощаются, принимая вид:

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}; \qquad (2.39) \qquad\qquad \gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}; \qquad (2.42)$$

$$\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}; \qquad (2.40) \qquad\qquad \gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}; \qquad (2.43)$$

$$\varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}; \qquad (2.41) \qquad\qquad \gamma_{zx}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}. \qquad (2.44)$$

Добавление уравнений (2.39)—(2.44) к уравнениям (2.14) не замыкает задачу, т. к. все еще количество уравнений меньше количества неизвестных. Но прежде чем выписать дополнительные уравнения, сделаем несколько замечаний, связанных с геометрическими уравнениями.

2.5.1. Объемная деформация

Объем элементарного параллелепипеда до приложения нагрузки равен:

$$dV = dxdydz\,.$$

Длины ребер $M'N_1'$, $M'N_2'$, $M'N_3'$ параллелепипеда равны соответственно:

$$ds_1 = \left(1+\varepsilon_x\right)dx;$$

$$ds_2 = \left(1+\varepsilon_y\right)dy;$$

$$ds_3 = \left(1+\varepsilon_z\right)dz,$$

а новый объем равен:

$$dV' = ds_1 ds_2 ds_3 = \left(1+\varepsilon_x\right)\left(1+\varepsilon_y\right)\left(1+\varepsilon_z\right)dV\,,$$

или:

$$dV' \cong \left(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z\right)dV\,.$$

Тогда относительная объемная деформация равна:

$$\Theta = \frac{dV' - dV}{dV} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\,. \tag{2.45}$$

Таким образом, относительная объемная деформация равна сумме трех относительных линейных деформаций в трех взаимно перпендикулярных направлениях.

Подобно главным площадкам для напряжений можно в любой точке тела найти площадки, на которых сдвиги равны нулю. Взаимно перпендикулярные направления, соответствующие этим площадкам, называются *главными осями деформации* [2.1]. Для изотропных материалов, свойства которых не зависят от направления, направления главных напряжений и главных деформаций совпадают.

Соответствующее кубическое уравнение для главных деформаций имеет вид:

$$\varepsilon_n^3 - \varepsilon_n^2 E_1 + E_2\varepsilon_n - E_3 = 0\,,$$

где инварианты тензора деформаций равны:

$$E_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\,;$$

$$E_2 = \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x - \frac{1}{4}\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2\right);$$

$$E_3 = \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z + \frac{1}{4}\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx} - \frac{1}{4}\left(\varepsilon_x\gamma_{yz}^2 + \varepsilon_y\gamma_{zx}^2 + \varepsilon_z\gamma_{xy}^2\right),$$

которые не меняются при повороте осей координат, связанных с рассматриваемой точкой. Сравнивая выражение для E_1 с (2.45), можно видеть, что объемная деформация Θ является инвариантом по отношению к выбору осей координат в точке.

2.5.2. Уравнения сплошности Сен-Венана

Полученные ранее уравнения Коши (2.39)—(2.44) связывают три перемещения u, v, w с шестью деформациями, поэтому эти величины не являются независимыми. Действительно, если задать три перемещения, то составляющие деформации определяются однозначно, а если произвольно задать шесть компонентов деформаций, то шесть уравнений относительно трех неизвестных u, v, w могут иметь не единственное решение. Это означает, что для получения однозначного решения задавать произвольно деформации нельзя, и они должны быть связаны дополнительными зависимостями. Выполнение этих зависимостей позволяет обеспечить сплошность тела при его деформировании. Если деформации задавать произвольно, то сплошность тела не будет обеспечена.

Получим эти зависимости, исключив перемещения из уравнений Коши. Продифференцируем (2.39) дважды по y, а (2.40) по x и сложим полученные уравнения:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

или:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \tag{2.46}$$

Аналогично получаем:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \tag{2.47}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial z}. \tag{2.48}$$

Формулы (2.46)—(2.48) получены дифференцированием формул Коши, при этом порядок уравнений повысился, и количество решений может превысить число уравнений. Для исключения этих решений необходимы дополнительные условия, которые можно получить из уравнений Коши для сдвигов.

Дифференцируем их следующим образом:

$$\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial x};$$

$$\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}=\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x};$$

$$\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}=\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}.$$

Складывая две первые строки и вычитая третью, получаем:

$$\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}=2\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial x},$$

или, дифференцируя это выражение еще раз по y, имеем:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}\right]=2\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z\partial x}. \tag{2.49}$$

Теперь, складывая первую и третью строки и вычитая вторую, а затем дифференцируя по x, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}\right]=2\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\partial z}. \tag{2.50}$$

Аналогично получается и третье уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right]=2\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\partial y}. \tag{2.51}$$

Перепишем полученные выражения, которые называются *условиями сплошности Сен-Венана*:

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}; \tag{2.52}$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z}; \tag{2.53}$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial x\partial z}; \tag{2.54}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right]=2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}; \tag{2.55}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right]=2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}; \tag{2.56}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right]=2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}. \tag{2.57}$$

Таким образом, при задании шести деформаций, по которым определяются три перемещения, необходимо, чтобы деформации удовлетворяли условиям сплошности (2.52)—(2.57).

2.6. Физические уравнения

Чтобы замкнуть систему уравнений равновесия и геометрические соотношения Коши, необходимо дополнительно воспользоваться физическими соотношениями, связывающими напряжения и деформации. В линейной теории упругости используется закон Гука (1676 г.). Этот закон получен для одноосного напряженного состояния. Если распространить его на трехмерное напряженное состояние, полагая, что между напряжениями и деформациями существует линейная зависимость, то для однородного изотропного тела можно получить обобщенный закон Гука, который записывается в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x-\mu\left(\sigma_y+\sigma_z\right)\right]; \quad \gamma_{xy}=\frac{1}{G}\tau_{xy};\\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y-\mu\left(\sigma_x+\sigma_z\right)\right]; \quad \gamma_{yz}=\frac{1}{G}\tau_{yz};\\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z-\mu\left(\sigma_x+\sigma_y\right)\right]; \quad \gamma_{zx}=\frac{1}{G}\tau_{zx},
\end{aligned}\right\} \tag{2.58}$$

где E — модуль упругости; μ — коэффициент Пуассона; G — модуль сдвига. Это технические упругие константы, которые получаются экспериментально и зависят от свойств материала.

Уравнения (2.58) получены для изотропного тела. Используя закон независимости воздействий, можно получить закон Гука для анизотропного и, в частности, для ортотропного тела.

Относительно напряжений соотношения (2.58) можно переписать так:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_x + \mu\left(\varepsilon_y + \varepsilon_z\right)\right]; \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy};\\
\sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_y + \mu\left(\varepsilon_x + \varepsilon_z\right)\right]; \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz};\\
\sigma_z &= \frac{E}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_z + \mu\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right)\right]; \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}.
\end{aligned}\right\}. \tag{2.59}$$

Причем модуль сдвига и модуль упругости связаны зависимостью:

$$G = \frac{E}{2\left(1+\mu\right)}.$$

2.7. Сводка уравнений

Приведем здесь для справки полную систему уравнений теории упругости, которая состоит из трех групп уравнений:

❒ Уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0; \tag{2.60}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0; \tag{2.61}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \tag{2.62}$$

❒ Геометрические уравнения:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \tag{2.63}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \tag{2.64}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \tag{2.65}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \tag{2.66}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \tag{2.67}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \tag{2.68}$$

❒ Физические уравнения:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]; \qquad (2.69) \qquad\qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}; \qquad (2.72)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right]; \qquad (2.70) \qquad\qquad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}; \qquad (2.73)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]; \qquad (2.71) \qquad\qquad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx}. \qquad (2.74)$$

Пятнадцать уравнений (2.60)—(2.74) содержат пятнадцать неизвестных, и система уравнений теории упругости полностью замкнута. К записанной системе уравнений необходимо добавить условия на поверхности, т. е. формулы Коши:

$$F_{nx} = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z; \qquad (2.75)$$

$$F_{ny} = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z; \qquad (2.76)$$

$$F_{nz} = \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z, \qquad (2.77)$$

а контролем правильности решения системы уравнений может служить выполнение условий сплошности Сен-Венана.

Полученные уравнения используются при решении задач линейной теории упругости. Дальнейшее расширение класса задач механики сплошных сред состоит во введении геометрической нелинейности в уравнения Коши и физической нелинейности в закон Гука.

Так, в задачах теории пластичности используются иные физические уравнения, которые так же, как и закон Гука, получаются из физических, а иногда и из экспериментальных соображений.

В этом смысле уравнения линейной теории упругости можно рассматривать как простейшую модель напряженного состояния тела, которая позволяет в сложных случаях получить лишь качественные результаты.

С другой стороны имеется широкий круг задач, которые могут быть решены с достаточной для практики точностью на базе уравнений линейной теории упругости.

Выводы

В этой главе были изучены следующие вопросы:

1. Основные гипотезы, на которых строится линейная теория упругости.
2. Рассмотрены примеры, иллюстрирующие принцип Сен-Венана.

3. Изучена теория напряжений. Определено понятие тензора напряжений и получены формулы для расчета напряжений на произвольной наклонной площадке, проведенной в точке тела.
4. Установлена связь между напряжениями и внешними поверхностными нагрузками.
5. Определены главные напряжения, главные деформации и площадки, на которых они действуют.
6. Получены уравнения равновесия для точки внутри тела. С помощью уравнений равновесия для моментов получен закон парности касательных напряжений.
7. Из геометрических соображений получены уравнения Коши, связывающие деформации с перемещениями.
8. Получены условия сплошности тела, записанные в виде дифференциальных соотношений Сен-Венана.
9. Записаны физические уравнения теории упругости в виде обобщенного закона Гука, который связывает напряжения в точке тела с относительными деформациями и углами сдвига.

Упражнения и вопросы

1. Сформулируйте принцип Сен-Венана о локальности эффекта воздействия внешних сил на твердое тело. Приведите примеры для конструкций, выполненных из балок, пластин и осесимметричных оболочек.
2. Сформулируйте принцип независимости действия сил и объясните, на основании какой гипотезы теории упругости можно пользоваться этим принципом.
3. Прямоугольная пластинка нагружена известным внешним давлением $p_0 = 5 \cdot 10^5$ Па. Плоскость XY совпадает с плоскостью, которая делит пластинку по толщине на две равные части. Ось Z по направлению совпадает с направлением давления. Воспользовавшись формулами Коши, запишите граничные условия на наружной и внутренней поверхностях пластинки.
4. Почему главные напряжения в точке не зависят от системы координат, в которой определяется напряженное состояние твердого тела? На основании этого докажите, что инварианты тензора напряжений I_1, I_2, I_3 постоянны и тоже не зависят от системы координат.

5. Сформулируйте правило знаков для нормальных и касательных напряжений. В каком случае касательные напряжения направлены к линии пересечения взаимно-перпендикулярных площадок, а в каких от этой линии?
6. Составьте уравнения равновесия элементарного параллелепипеда для моментов относительно осей Y, Z и докажите справедливость закона парности касательных напряжений.
7. Приведите геометрические уравнения нелинейной теории упругости, связывающие деформации с перемещениями. Какая из гипотез линейной теории упругости не будет выполняться в этом случае.
8. Можно ли в качестве физических уравнений линейной теории упругости использовать обобщенный закон Гука для ортотропного или анизотропного тела?
9. Запишите обобщенный закон Гука для ортотропного материала, выразив сначала деформации через напряжения, а затем наоборот, напряжения через деформации.
10. Выпишите уравнения равновесия с учетом сил инерции. Определите, к какому типу относятся эти уравнения: эллиптическому, параболическому или гиперболическому.

Литература к главе 2

1. Александров А. В., Потапов В. Д. Основы теории упругости и пластичности. — М.: Высшая школа, 1990.
2. Горшков А. Е. Теория упругости и пластичности: Учебник для вузов. — М.: Физматлит, 2002, 416 с.
3. Кац А. М. Теория упругости. 2-е изд., стер. — СПб.: Лань, 2002, 208 с.
4. Лурье А. И. Теория упругости. — М.: Наука, 1970.
5. Новожилов В. В. Теория упругости. — Л.: Судпромгиз, 1958, 370 с.
6. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. — М.: Наука, 1975.

Глава 3

Брусья, стержни и балки

Эта глава посвящена расчету брусьев, которые представляют собой тела, два измерения которых значительно меньше их третьего измерения — длины. Уравнения, описывающие напряженно деформированное состояние брусьев, получаются последовательным упрощением уравнений теории упругости, приведенным в *гл. 2*, путем применения к ним гипотез Эйлера—Бернулли. Растягиваемые брусья принято называть стержнями, а изгибаемые — балками.

Будут рассмотрены осевое растяжение/сжатие стержней и поперечный изгиб брусьев. Практическое применение полученных соотношений показано на примерах расчета осесимметричной фермы и подкрепленной цилиндрической оболочки.

В этой главе будут рассмотрены следующие темы:

- классификация брусьев и гипотезы Эйлера—Бернулли;
- преобразование уравнений теории упругости;
- геометрические уравнения;
- уравнения равновесия бруса;
- внутренние усилия и напряжения в брусе;
- уравнения теории брусьев в перемещениях;
- растяжение и сжатие стержней;
- напряжения и деформации при изгибе балок.

3.1. Классификация брусьев

В строительстве, машиностроении, кораблестроении и авиаракетостроении широко используются элементы конструкций, у которых один или два характерных размера меньше других размеров. Так, если у тела призматической формы один размер значительно меньше двух других, то его называют *пластиной*. Криволинейное тело с малой толщиной называют *оболочкой*, а главной особенностью бруса является то, что его длина значительно больше двух других размеров — ширины и высоты.

> ***Брусом*** называют прямолинейное или криволинейное тело, у которого один линейный размер значительно больше двух других линейных размеров.

> ***Примечание***
>
> Иногда брусья, не совсем правильно, называют единым термином — стержни, независимо от характера их нагружения.

Особую группу составляют тонкостенные брусья, к которым относится большинство стальных и алюминиевых прокатных профилей, составные и гнутые профили, тонкостенные элементы из железобетона, асбестоцемента, пластмасс и других материалов.

Тело бруса образуется движением плоского сечения вдоль линии, проходящей через центр тяжести сечения так, что эта линия, называемая *осью бруса*, остается перпендикулярна его сечению.

> ***Ось бруса*** — это геометрическое место центров тяжести его поперечных сечений.

Формы оси бруса и поперечного сечения определяют форму самого бруса. Здесь и далее в этой книге будут рассматриваться только брусья с прямолинейной осью и постоянным по длине бруса поперечным сечением.

> ***Прямолинейные брусья*** — это брусья, у которых осью служит прямая.

В зависимости от доминирующей нагрузки, действующей на брусья, их принято делить на следующие две группы:

1. Прямолинейные брусья, которые работают на растяжение или сжатие, называют *стержнями*. Примерами стержней могут служить брусья силового набора крыла (рис. 3.1, *а*), работающие на осевое растяжение—сжатие.
2. Прямолинейные брусья, нагруженные силами, перпендикулярными оси бруса, или парами сил, действующими в плоскости, проходящей через его ось, называют *балками*. В отличие от осевого растяжения бруса, изгиб характеризуется тем, что ось бруса, прямолинейная до деформации, становится кривой линией. Так, на рис. 3.1, *б* изображен фронтальный вид самолета, у которого крылья нагружены поперечными аэродинамическими силами и в простейших расчетных схемах они могут рассматриваться как балки.

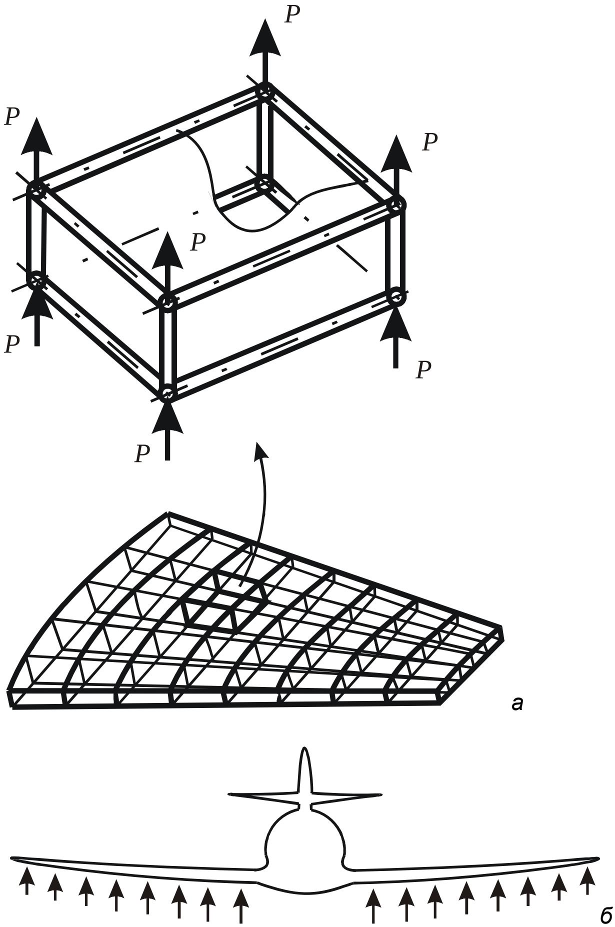


Рис. 3.1. Примеры брусьев в виде стержней (*а*) и балок (*б*)

Кроме этого, тонкостенные брусья в зависимости от формы поперечного сечения принято делить на следующие две группы:

1. Тонкостенные брусья с открытым сечением, к которым относятся двутавр, швеллер, корытообразный профиль, зетообразный профиль и уголок.
2. Тонкостенные брусья с замкнутым сечением, к которым относят коробчатые, трубчатые брусья и т. п.

Теоретические основы расчета брусьев были разработаны еще в XVIII в. Так, в 1705 г. швейцарский математик и механик Якоб Бернулли в одной из своих последних статей впервые предложил считать напряжения функцией деформации, а кривизну балки пропорциональной изгибающему моменту.

Позднее, в 1727 г. математик и механик Леонард Эйлер предложил зависимость между напряжениями и деформациями вида $\sigma = E\varepsilon$. Он также ввел в 1744 г. понятие энергии деформации на единицу длины балки и показал, что она пропорциональна квадрату кривизны балки.

Французский инженер и физик Шарль-Августин Коломб был первым, кто предложил выражение $\sigma = \frac{My}{I}$ для расчета напряжений при чистом изгибе однородной балки.

В целом, эти открытия и многочисленные экспериментальные данные позволили в дальнейшем сформулировать гипотезы плоских сечений, которые, отдавая дань уважения ученым, стоявшим у истоков теории расчета брусьев, называют *гипотезами Эйлера—Бернулли*, хотя и сами уравнения теории упругости были получены значительно позднее.

Следует заметить, что в отличие от обычных (сплошных) брусьев сечения тонкостенного бруса при его деформации не остаются плоскими (*явление депланации*), что ставит под сомнение возможность использования для их расчета гипотез плоских сечений. Однако на практике обычно пользуются так называемой технической теорией тонкостенных брусьев. В этой теории основываются на гипотезах о недеформируемости контура поперечного сечения и об отсутствии сдвигов в срединной поверхности стержня.

С помощью гипотез Эйлера—Бернулли трехмерное напряженное состояние в брусе сводится к одномерному напряженному состоянию, что сокращает количество неизвестных в полной системе уравнений теории упругости и позволяет получить простые расчетные соотношения.

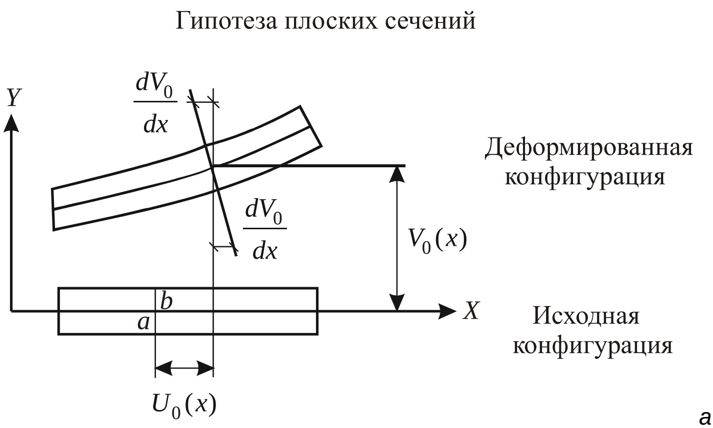
3.2. Гипотезы Эйлера—Бернулли

Классическая теория брусьев основывается на следующих допущениях:

1. Поперечное сечение бруса остается жестким и недеформируемым в собственной плоскости.
2. Поперечное сечение бруса остается плоским после приложения нагрузки.
3. Плоские сечения, первоначально перпендикулярные продольной оси бруса, остаются перпендикулярными ей и после деформации.
4. Перемещения и деформации малы, а поведение бруса подчиняется гипотезам теории упругости.
5. Материал бруса предполагается упругим и изотропным.

Многочисленные экспериментальные данные подтверждают справедливость этих гипотез для брусьев из изотропных материалов с жестким поперечным сечением.

В теории изгиба балок широко используются также гипотезы нашего выдающегося ученого, механика и педагога Степана Прокофьевича Тимошенко (1878—1972), работавшего в Киевском и Петербургском политехнических университетах, а с 1922 г. — в университетах США и ФРГ. В отличие от гипотез Эйлера—Бернулли, он предложил изменить третью из перечисленных гипотез и полагать, что плоское поперечное сечение балки при изгибе поворачивается не только из-за изгиба ее оси, но и из-за поворота сечения относительно этой оси (рис. 3.2, *а*, *б*).



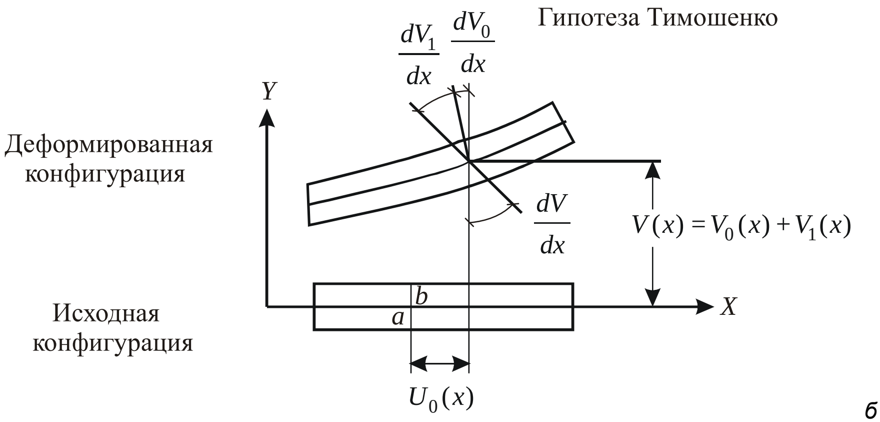


Рис. 3.2. Поворот поперечного сечения балки по гипотезам Эйлера—Бернулли (*а*) и Тимошенко (*б*)

Здесь и далее по тексту книги используются расчетные соотношения, описывающие напряженно-деформированное состояние в брусьях и основанные на гипотезах Эйлера—Бернулли. Получим эти соотношения, применяя гипотезы к уравнениям теории упругости, записанным в декартовой системе координат.

3.3. Преобразование уравнений теории упругости

Рассмотрим брус, который зафиксирован в правой декартовой системе координат *XYZ* так, что ось *X* направлена по оси бруса, ось *Y* — вверх и перпендикулярно оси бруса, а ось *Z* — на нас, перпендикулярно плоскости чертежа (рис. 3.3, *б*) [3.5].

3.3.1. Геометрические уравнения

Составляющие перемещения произвольной точки бруса в направлении осей координат обозначим, как и ранее *(см. гл. 2)*, через u, v, w соответственно.

На основании первой гипотезы Эйлера—Бернулли поперечное сечение бруса не деформируется в собственной плоскости, поэтому поле перемещений в этой плоскости определяется перемещениями всего сечения как твердого тела $v_0(x)$ и $w_0(x)$ в направлении осей *Y* и *Z*, зависящими только от осевой координаты x, т. к. они поворачиваются в процессе деформации. Таким образом, имеем:

$$v(x,y,z)=v_0(x); \quad w(x,y,z)=w_0(x). \tag{3.1}$$

Отсчет положительных углов будем вести против часовой стрелки, и тогда угол поворота поперечного сечения равен $\left(-\dfrac{dw}{dx}\right)$ вокруг оси y и $\dfrac{dv}{dx}$ вокруг оси *Z*, т. к. на основании третьей гипотезы Эйлера—Бернулли плоские сечения бруса остаются перпендикулярными его деформированной оси.

Положительный угол поворота балки вокруг оси *Y* приводит к уменьшению перемещению по оси *Z*, поэтому знак у производной отрицательный. В то же время положительный поворот вокруг оси *Z* приводит к увеличению перемещения по оси *Y*, и знак соответствующей производной положительный.

Теперь суммарное осевое перемещение точки сечения с координатами y, z относительно его центра масс можно определить из следующего соотношения (рис. 3.3, *а*—*в*):

$$u(x,y,z)=u_0(x)-z\frac{dw_0}{dx}-y\frac{dv_0}{dx}. \tag{3.2}$$

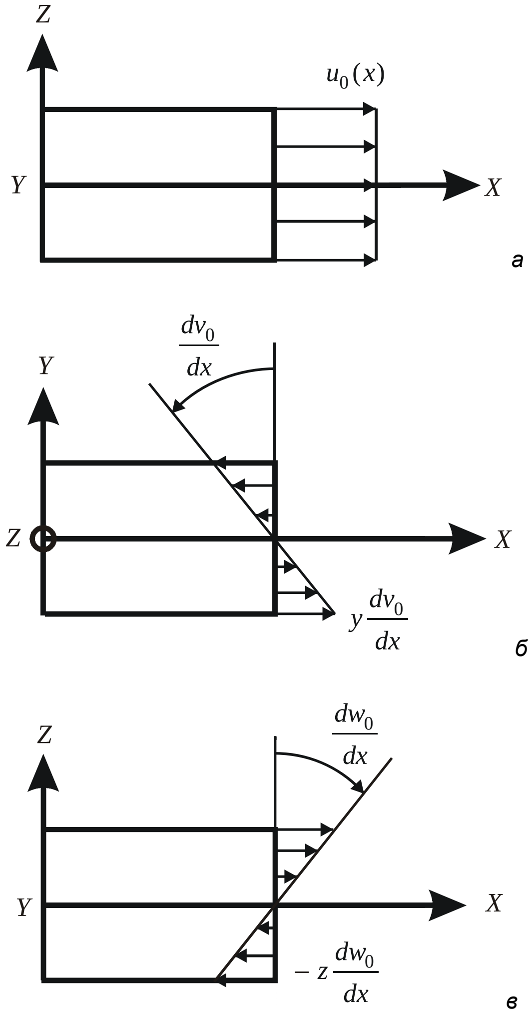


Рис. 3.3. Составляющие осевого перемещения бруса

Из полученного с помощью гипотез Эйлера—Бернулли соотношения для перемещения в направлении оси X следует, что оно зависит только от координаты x.

Воспользовавшись выражениями (3.1) и (3.2), получим следующие соотношения для геометрических уравнений:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du_0}{dx} - z\frac{d^2 w_0}{dx^2} - y\frac{d^2 v_0}{dx^2}; \tag{3.3}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0\,; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial y} = 0\,; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0\,; \tag{3.4}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{dv_0}{dx} + \frac{dv_0}{dx} = 0\,; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{dw_0}{dx} + \frac{dw_0}{dx} = 0\,. \tag{3.5}$$

Выражение (3.3) для относительной деформации в направлении оси X можно переписать в следующем виде:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z\kappa_2(x) - y\kappa_3(x)\,, \tag{3.6}$$

если воспользоваться такими обозначениями:

$\varepsilon_x^0 = \dfrac{du_0}{dx}$ — осевая относительная деформация всего сечения; $\kappa_2(x) = -\dfrac{d^2 w_0}{dx^2}$ — кривизна бруса относительно оси Y; $\kappa_3(x) = \dfrac{d^2 v_0}{dx^2}$ — кривизна бруса относительно оси Z.

Соотношения (3.4) являются прямым следствием жесткости сечения бруса в своей плоскости, а допущение о перпендикулярности сечения деформированной оси бруса отражено математически в соотношениях (3.5). Кроме того, из (3.6) следует, что относительные деформации в направлении оси X изменяются линейно по сечению.

3.3.2. Уравнения равновесия

Уравнения равновесия, в которых отброшены объемные силы, останутся без изменений, т. к. в них присутствуют производные от напряжений σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{zy}, соизмеримые с производной от напряжения σ_x. В то же время, на основании гипотез Эйлера—Бернулли, сама величина этих напряжений мала, и ими можно пренебречь по сравнению с напряжением σ_x.

Таким образом, имеем:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0\,; \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0\,; \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0\,. \tag{3.9}$$

Интегрируя уравнение (3.7) по площади поперечного сечения F бруса, получим:

$$\frac{d}{dx}\int_F \sigma_x dF + \int_F \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right) dF = 0 .$$

Если ввести обозначение для осевой внутренней силы, возникающей в сечении бруса:

$$N_x(x) = \int_F \sigma_x dF \tag{3.10}$$

и воспользоваться формулой Гаусса—Остроградского для преобразования второго интеграла по площади F в интеграл по ее контуру C, то получим:

$$\frac{dN_x}{dx} + \oint_C \left(\tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z\right) ds = 0 , \tag{3.11}$$

где n_y и n_z — проекции единичной нормали к боковой поверхности бруса на оси Y и Z соответственно.

Но из формул Коши (2.4) следует, что интенсивность внешней нагрузки F_{nx} на единицу площади в проекции на ось X равна:

$$F_{nx} = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{zx} n_z ,$$

а т. к. $n_x = 0$ в силу постоянства поперечного сечения бруса, то интеграл в (3.11) есть не что иное, как погонная осевая (в проекции на ось X) внешняя нагрузка $q_x(x)$, действующая на брус.

Тогда (3.11) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{dN_x}{dx} = -q_x(x) . \tag{3.12}$$

Если кроме осевых сил брус нагружен еще и поперечными, то он изгибается, а напряжения σ_x переменны по сечению и создают изгибающие моменты.

Для получения соотношения, определяющего эти моменты, умножим (3.7) на y, проинтегрируем полученное соотношение по площади и применим формулу Гаусса—Остроградского ко второму интегралу для приведения его к контурному интегралу. После всех преобразований имеем:

$$\frac{d}{dx}\int_F y\sigma_x dF + \oint_C y\left(n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz}\right) ds - \int_F \tau_{xy} dF = 0 , \tag{3.13}$$

где $M_z(x)=\int\limits_F y\sigma_x dF$ — момент, создаваемый напряжениями σ_x вокруг оси Z; $Q_y(x)=-\int\limits_F \tau_{xy} dF$ — перерезывающая сила, создаваемая напряжениями τ_{xy} в направлении оси Y.

Контурный интеграл в (3.13) равен нулю, т. к. система координат находится в центре тяжести сечения. С учетом принятых обозначений для момента и перерезывающей силы из (3.13) получаем:

$$\frac{dM_z}{dx}+Q_y=0\,. \tag{3.14}$$

Аналогично, умножая (3.6) на z и интегрируя полученное выражение по площади, получаем:

$$\frac{dM_y}{dx}-Q_z=0\,, \tag{3.15}$$

где $M_y(x)=-\int\limits_F z\sigma_x dF$ — момент, создаваемый напряжениями σ_x вокруг оси Y; $Q_z(x)=-\int\limits_F \tau_{xz} dF$ — перерезывающая сила, создаваемая напряжениями τ_{xz} в направлении оси Z.

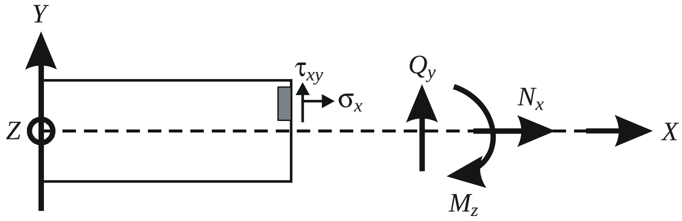
Знаки в выражениях для моментов и перерезывающих сил определены при положительном направлении напряжений (рис. 3.4, *а*, *б*). Причем знак изгибающего момента устанавливается по знаку кривизны изогнутого бруса и зависит от выбранного направления осей координат. Для поперечных сил, независимо от направления координатных осей, устанавливается следующее правило знаков: если результирующая поперечная сила вращает рассматриваемую часть балки по ходу часовой стрелки, то она считается положительной, в обратном случае — отрицательной.

Теперь интегрируем по площади сечения бруса второе уравнение равновесия (3.8):

$$\frac{d}{dx}\int\limits_F \tau_{yx} dA+\int\limits_F\left(\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}\right)dF=0\,,$$

которое после применения формулы Гаусса—Остроградского и использования обозначения Q_y с учетом знака для перерезывающей силы по оси Y, принимает следующий вид:

$$\frac{dQ_y}{dx}+\oint\limits_C\left(\sigma_y n_y+\tau_{yz} n_z\right)ds=0\,.$$



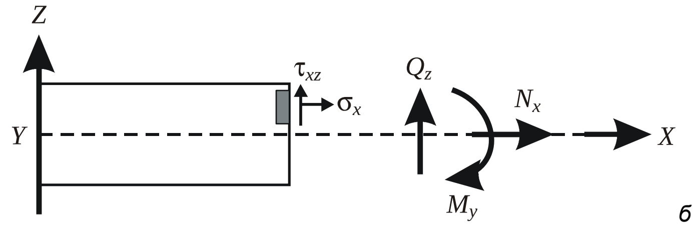


Рис. 3.4. Положительные направления внутренних силовых факторов в брусе

Но из второй формулы Коши (2.4) с учетом того, что $n_x = 0$, получаем, что интенсивность внешней нагрузки F_{ny} на единицу площади в проекции на ось *Y* равна:

$$F_{ny} = \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z ,$$

а контурный интеграл в полученном выражении есть погонная осевая (в проекции на ось *Y*) внешняя нагрузка $q_y(x)$, действующая на брус.

Теперь проинтегрированное уравнение равновесия можно переписать в следующем виде:

$$\frac{dQ_y}{dx} + q_y = 0 . \qquad (3.16)$$

После интегрирования и преобразований третьего уравнения равновесия (3.9) получаем:

$$\frac{dQ_z}{dx} + q_z = 0 , \qquad (3.17)$$

где $q_z(x)$ — погонная внешняя нагрузка в направлении оси *Z*.

Исключим перерезывающие силы Q_y и Q_z из уравнений (3.14) и (3.15) с помощью (3.16) и (3.17). Получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{d^2 M_y}{dx^2} = -q_z(x) ; \quad \frac{d^2 M_z}{dx^2} = q_y(x) . \qquad (3.18)$$

Теперь воспользуемся физическими уравнениями — законом Гука для замыкания задачи и получения соотношений для перемещений и напряжений.

3.3.3. Внутренние усилия и напряжения

Так как поперечное сечение бруса не деформируется, а нормальные напряжения σ_y и σ_z значительно меньше напряжения σ_x, то закон Гука сводится к одному-единственному выражению, связывающему напряжение σ_x с относительной деформацией по оси X, которое с учетом (3.6) можно записать так:

$$\sigma_x(x,y,z) = E\varepsilon_x = E\left(\varepsilon_x^0 + z\kappa_2(x) - y\kappa_3(x)\right). \tag{3.19}$$

Подставляя (3.19) в выражение для осевого внутреннего усилия N_x, получаем:

$$N_x = \varepsilon_x^0 \int\limits_F EdF + \kappa_2(x)\int\limits_F EzdF - \kappa_3(x)\int\limits_F EydF .$$

Из полученного выражения следует, что в общем случае изгиб бруса оказывает влияние на величину осевой силы, вычисленной в произвольной системе координат. Если начало системы координат поместить в центре тяжести сечения, то два последних интеграла будут равны нулю, и поэтому осевое усилие не зависит от изгиба и вычисляется по формуле:

$$N_x = \varepsilon_x^0 \int\limits_F EdF = B_{11}\varepsilon_x^0 , \tag{3.20}$$

где интеграл равен EF, т. е. произведению модуля упругости на площадь сечения F, если брус изготовлен из одного материала.

Изгибающие моменты M_y и M_z получим, подставляя выражение для напряжений (3.19) в их определения, приведенные ранее:

$$M_y(x) = \int\limits_F z\sigma_x dF = \int\limits_F zE\varepsilon_x^0 dF + \int\limits_F z^2 E\kappa_2(x)dF - \int\limits_F zyE\kappa_3(x)dF =$$

$$= \varepsilon_x^0 \int\limits_F EzdF + \kappa_2(x)\int\limits_F Ez^2 dF - \kappa_3(x)\int\limits_F yzEdF =$$

$$= A_{22}\kappa_2(x) - A_{23}\kappa_3(x) \tag{3.21}$$

и

$$M_z(x) = -\int\limits_F y\sigma_x dF = -\int\limits_F yE\varepsilon_x^0 dF - \int\limits_F yzE\kappa_2(x)dF + \int\limits_F y^2 E\kappa_3(x)dF =$$

$$= -\varepsilon_x^0 \int_F EydF - \kappa_2(x) \int_F EyzdF + \kappa_3(x) \int_F y^2 EdF =$$

$$= -A_{23}\kappa_2(x) + A_{33}\kappa_3(x)\,. \qquad (3.22)$$

Осевая жесткость бруса характеризуется коэффициентом B_{11}, жесткость на изгиб вокруг оси Z характеризуется A_{33}, вокруг оси Y — A_{22}, а A_{23} — смешанная жесткость на изгиб.

Перепишем полученные соотношения для внутренних силовых факторов в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} N_x(x) \\ M_y(x) \\ M_z(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & -A_{23} \\ 0 & -A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \kappa_2(x) \\ \kappa_3(x) \end{pmatrix}. \qquad (3.23)$$

Отсюда можно получить столбец деформаций, умножив его на матрицу, обратную матрице жесткостей, т. е.:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \kappa_2(x) \\ \kappa_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & -A_{23} \\ 0 & -A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} N_x(x) \\ M_y(x) \\ M_z(x) \end{pmatrix},$$

или после вычисления обратной матрицы имеем:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \kappa_2(x) \\ \kappa_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{B_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{A_{33}}{\Delta} & \dfrac{A_{23}}{\Delta} \\ 0 & \dfrac{A_{23}}{\Delta} & \dfrac{A_{22}}{\Delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_x(x) \\ M_y(x) \\ M_z(x) \end{pmatrix}, \qquad (3.24)$$

где $\Delta = A_{22}A_{33} - A_{23}A_{23}$ — определитель матрицы жесткостей.

Подставляя полученные выражения для деформаций в формулу (3.19) для напряжения, получаем:

$$\sigma_x = E\left(\frac{N_x}{B_{11}} + z\frac{A_{33}M_y + A_{23}M_z}{\Delta} - y\frac{A_{23}M_y + A_{22}M_z}{\Delta} \right). \qquad (3.25)$$

Это соотношение позволяет определить напряжения в любой точке поперечного сечения бруса с координатами y, z по известным внутренним силовым факторам, которые в свою очередь определяются по внешним нагрузкам.

3.3.4. Уравнения в перемещениях

Для получения уравнений, позволяющих определить перемещения в брусьях, подставим выражения из (3.23) для внутренних силовых факторов в (3.12) и (3.18), а затем воспользуемся определением составляющих деформации в выражении (3.6):

$$\frac{d}{dx}\left(B_{11}\frac{du}{dx}\right) = -q_x(x)\,; \tag{3.26}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(A_{33}\frac{d^2 v_0}{dx^2} + A_{23}\frac{d^2 w_0}{dx^2}\right) = q_y(x)\,; \tag{3.27}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(A_{23}\frac{d^2 v_0}{dx^2} + A_{22}\frac{d^2 w_0}{dx^2}\right) = q_z(x)\,. \tag{3.28}$$

Уравнения теории брусьев представляют собой систему трех уравнений (3.26)—(3.28) относительно трех перемещений поперечного сечения бруса u_0, v_0, w_0. Они имеют второй порядок для осевых перемещений и четвертый для поперечных. Всего нужно поставить 10 граничных условий — по 5 на каждом крае бруса. Система распадается на две подсистемы уравнений, которые можно решать по отдельности. В первую подсистему входит только одно уравнение (3.26), а во вторую — уравнения (3.27) и (3.28).

Важно отметить, что система уравнений (3.26)—(3.28) записана в системе координат, начало которой расположено в центре тяжести сечения бруса. Возможно дальнейшее разделение связи уравнений (3.27) и (3.28) так, чтобы они решались по отдельности.

Это можно сделать, если дополнительно повернуть в плоскости сечения вокруг оси *X* центральную систему координат так, чтобы в ней коэффициент жесткости $A_{23} = 0$. Если обозначить через α угол поворота центральной системы координат вокруг оси *X*, записанное условие позволяет получить следующие выражения для его определения:

$$\sin 2\alpha = \frac{A_{23}}{\Delta}\,; \qquad \cos 2\alpha = \frac{A_{33} - A_{22}}{2\Delta}\,, \tag{3.29}$$

где:

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{A_{33} - A_{22}}{2}\right)^2 + \left(A_{23}\right)^2}\,. \tag{3.30}$$

Эти выражения позволяют определить единственное решение для угла α.

В системе координат, повернутой на угол α, жесткости выражаются через жесткости исходной системы координат следующим образом:

$$A_{22}(\alpha)=\frac{A_{33}+A_{22}}{2}-\Delta\,;\quad A_{33}(\alpha)=\frac{A_{33}+A_{22}}{2}+\Delta\,.$$

Рассмотрим теперь два частных случая применения изложенной в этом разделе теории. Первый из них относится к расчету стержней, а второй — к изгибу балок.

3.4. Растяжение и сжатие стержней

Стержни являются наиболее простым элементом конструкций, который нагружается осевой распределенной нагрузкой $q_x(x)$ и сосредоточенной силой P_1, приложенной на одном из его концов в центре тяжести сечения и направленной вдоль его оси (рис. 3.5). Продольные силы, вызывающие растяжение, считаются положительными, а вызывающие сжатие — отрицательными.

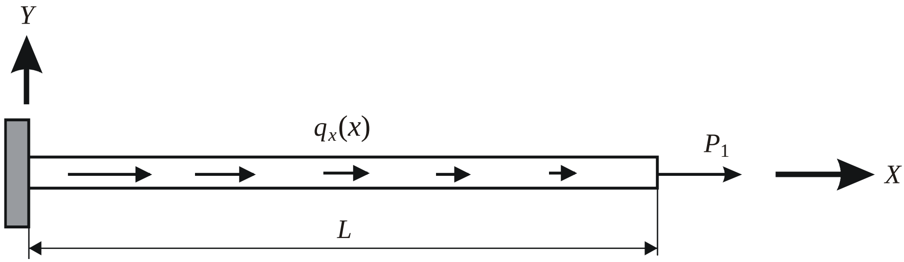


Рис. 3.5. Стержень, нагруженный осевыми усилиями

3.4.1. Геометрические уравнения

Поле перемещений, описываемое соотношениями (3.1) и (3.2), в данном случае принимает следующий вид:

$$u(x,y,z)=u_0(x)\,;\quad v(x,y,z)=0\,;\quad w(x,y,z)=0\,, \tag{3.31}$$

а относительная деформация равна:

$$\varepsilon_x=\varepsilon_x^0=\frac{du_0}{dx}\,. \tag{3.32}$$

3.4.2. Физическое уравнение

Запишем физическое уравнение для линейно упругого изотропного материала. Так как поперечное сечение не деформируется в собственной плоскости, то напряжения σ_y и σ_z равны нулю, и поэтому закон Гука записывается в следующем виде:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x^0(x), \tag{3.33}$$

а осевое внутреннее усилие:

$$N_x(x) = B_{11}\varepsilon_x^0(x), \tag{3.34}$$

где осевая жесткость стержня $B_{11} = \int\limits_F E dF$. Если модуль упругости постоянный по сечению стержня, то $B_{11} = EF$.

Если поперечное сечение стержня состоит из материалов с различными модулями упругости, то осевая жесткость определяется как сумма жесткостей участков, т. е.:

$$B_{11} = \sum_{i=1}^{n} E^{(i)} \int\limits_{F_i} dF,$$

где n — количество участков.

3.4.3. Осевое перемещение

При осевом нагружении стержня уравнение равновесия единственное и имеет вид (3.12):

$$\frac{dN_x}{dx} = -q_x(x),$$

а уравнение для перемещений в форме (3.26):

$$\frac{d}{dx} B_{11} \frac{du_0}{dx} = -q_x(x). \tag{3.35}$$

Решение последнего уравнения позволяет определить поле осевых перемещений по известному распределению осевой погонной нагрузки $q_x(x)$.

К уравнению (3.35) необходимо поставить два граничных условия, которые зависят от способа закрепления концов стержня. Типичные случаи закрепления определяются следующими граничными условиями:

1. **Жесткое закрепление.** В этом случае осевое перемещение равно нулю:

$$u_0 = 0.$$

2. **Свободный ненагруженный конец.** В этом случае осевое усилие равно нулю:

$$N_x = 0.$$

3. **Конец, нагруженный осевой силой.** Здесь $N_x = P_1$, а граничное условие к уравнению (3.35) записывается в следующем виде:

$$B_{11} \frac{du_0}{dx} = P_1 .$$

3.4.4. Расчет напряжений

Формулу для определения напряжения σ_x в любой точке поперечного сечения стержня можно выразить через осевое внутреннее усилие, если подставить выражение для относительной деформации ε_x^0 из (3.24) в (3.34):

$$\sigma_x = \frac{E}{B_{11}} N_x , \qquad (3.36)$$

причем если стержень изготовлен из одного материала с постоянным модулем упругости E , то:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{F} ,$$

т. е. напряжения постоянные по сечению и не зависят от модуля упругости (рис. 3.6, *а*). Однако если сечение состоит из нескольких слоев с различными модулями упругости, то напряжение по сечению стержня изменяется от одного слоя к другому (рис. 3.6, *б*), а напряжение в *i*-ом слое определяется по формуле:

$$\sigma_x^{(i)} = E^{(i)} \frac{N_x(x)}{A_{11}} .$$

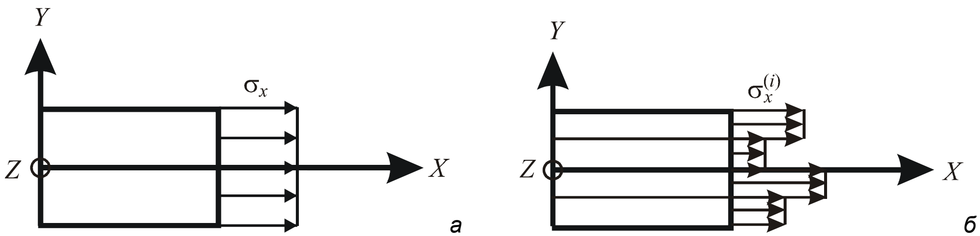


Рис. 3.6. Распределение напряжений в сечении стержня из однородного (*а*) и слоистого (*б*) материалов

Из этой формулы следует, что осевые напряжения в *i*-ом слое пропорциональны модулю упругости этого слоя. При оценке несущей способности стержня необходимо сравнивать максимальные напряжения в каждом слое с допускаемыми напряжениями для материала этого слоя.

3.5. Расчет фермы

В качестве примера расчета конструкции, составленной из стержней, рассмотрим ферму, состоящую из двух жестких колец разного диаметра, соединенных стержнями (рис. 3.7). Такие фермы входят в состав конструкции ракеты как переходные отсеки между ступенями ракеты, а также используются для соединения стартовых ускорителей на зенитных ракетах и для крепления двигательных установок к корпусу хвостового или среднего отсека в баллистических ракетах [3.2].

Ограничимся рассмотрением фермы, имеющей следующие конструктивные особенности:

1. Верхний и нижний пояса фермы являются абсолютно жесткими, поэтому верхний и нижний шпангоуты не выходят из своей плоскости под действием внешней нагрузки.
2. Стержни в ферме соединены шарнирно, а нагрузка на ферменную конструкцию прикладывается в узлах, причем отсутствуют внешние моменты в узлах крепления стержней.
3. На всю ферму действует осевая сжимающая сила N_p, поперечная сила Q_p и изгибающий момент M_p, расположенные в плоскости симметрии фермы (рис. 3.7).
4. Ферма состоит из n одинаковых стержней длиной l, равномерно и симметрично соединенных с верхним и нижним поясами.

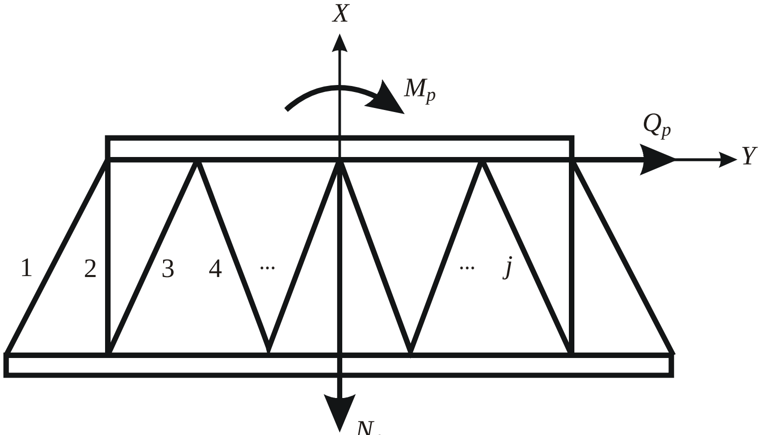


Рис. 3.7. Схема стержневой фермы

Для определения усилий в стержнях фермы введем правую систему координат с началом координат в центре верхнего кольца: ось X направлена вверх, Y — вправо (рис. 3.7), а Z — от нас перпендикулярно плоскости XY .

Составим сначала таблицу геометрических соотношений для стержней фермы (табл. 3.1), которая будет использоваться при составлении уравнений равновесия фермы.

***Таблица 3.1.** Геометрические характеристики стержней*

Номер стержня		**1**	**2**	**3**	**...**	***n* – 1**	***n***
Проекции стержня	x_i						
	y_i						
	z_i						
Квадраты проекций	x_i^2						
	y_i^2						
	z_i^2						
Направляющие косинусы с осями *X*, *Y*, *Z*	$\cos(x;\ l_i)$						
	$\cos(y;\ l_i)$						
	$\cos(z;\ l_i)$						

При заполнении таблицы следует для контроля правильности вычислений воспользоваться формулой для расчета длины стержня $l_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$, которая должна быть постоянной и равна l . Кроме того, правильность вычислений проверяется из условия равенства единице суммы квадратов косинусов углов между стержнем и осями координат:

$$\cos^2(x;l_i) + \cos^2(y;l_i) + \cos^2(z;l_i) = 1 .$$

Обозначив через N_i осевое усилие в *i*-ом стержне, составим уравнения равновесия для определения усилий в стержне, значения которых зависят от его геометрического положения относительно плоскости действия внешних сил и момента. Проведем по стержням фермы сечение (рис. 3.8), перпендикулярное оси X, и составим три условия равновесия верхнего пояса:

1. Сумма всех сил, действующих на ферму, в проекции на ось X:

$$N_p + \sum_1^n N_i \cdot \cos(x;\ l_i) = 0\,. \qquad (3.37)$$

2. Сумма всех сил, действующих на ферму, в проекции на ось Y:

$$Q_p + \sum_1^n N_i \cdot \cos(y;\ l_i) = 0\,. \qquad (3.38)$$

3. Уравнение моментов относительно оси Z:

$$M_p + \sum_1^n N_i \cdot y_i \cdot \cos(x;\ l_i) = 0\,. \qquad (3.39)$$

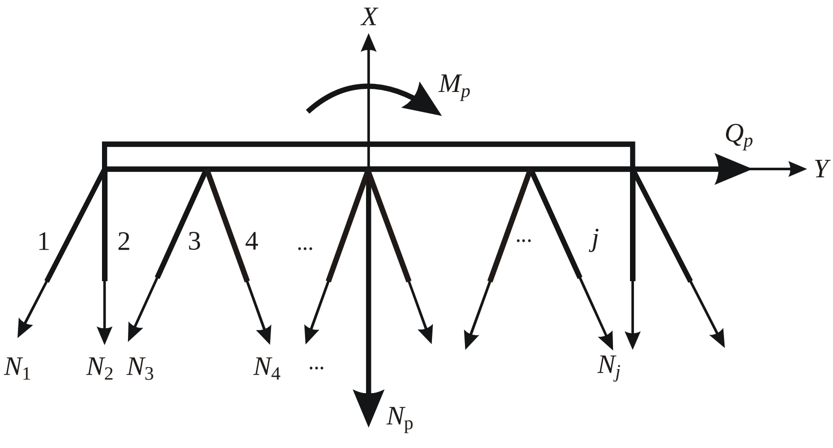


Рис. 3.8. К составлению уравнений равновесия верхнего пояса фермы

Система 3-х уравнений содержит n неизвестных, поэтому преобразуем ее относительно перемещений центра масс абсолютно жесткого (на основании допущений) верхнего пояса крепления стержней по осям X, Y и угла его поворота как твердого тела вокруг оси Z.

В результате приложения нагрузки верхний пояс сместится по оси X на Δx_0, по оси Y на Δy_0 и повернется относительно оси Z на угол $\Delta\varphi$ (рис. 3.9).

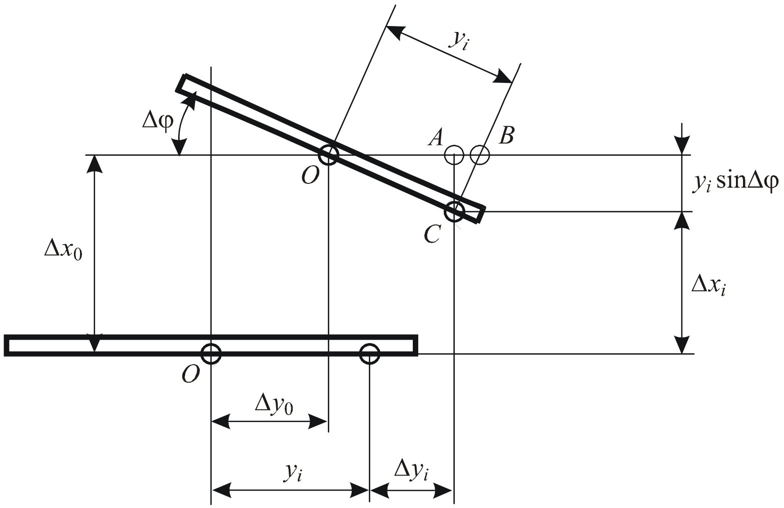


Рис. 3.9. Схема перемещения верхнего пояса фермы

Из геометрических соображений смещение узлов крепления стержней к верхнему поясу фермы, в которых приложены усилия N_i, можно определить так:

$$\Delta x_i = \Delta x_0 - y_i \cdot \sin \Delta\varphi ;$$

$$\Delta y_i = \Delta y_0 - y_i \cdot (1 - \cos \Delta\varphi) .$$

Ввиду малости этих величин можно в записанных выражениях принять $\sin \Delta\varphi = \Delta\varphi$, $\cos \Delta\varphi = 1$, тогда выражения примут следующий вид:

$$\Delta x_i = \Delta x_0 - y_i \cdot \Delta\varphi ; \qquad (3.40)$$

$$\Delta y_i = \Delta y_0 . \qquad (3.41)$$

Теперь свяжем перемещения узлов стержней с их удлинениями. Если полная длина стержня равна:

$$l_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2} = l ,$$

то тогда его удлинение вычисляется из следующего линейного соотношения:

$$\Delta l = \frac{\partial l}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial l}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial l}{\partial z} \Delta z .$$

Для определения частных производных в записанном выражении продифференцируем выражение для l и получим:

$$\frac{\partial l}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{2 \cdot x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{l} = \cos(x;\ l);$$

$$\frac{\partial l}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{y}{l} = \cos(y;\ l);$$

$$\frac{\partial l}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{z}{l} = \cos(z;\ l).$$

В силу симметрии смещения узлов фермы по оси Z отсутствуют, поэтому $\Delta z = 0$, а при смещении по оси Y стержень укорачивается, поэтому $\frac{\partial l}{\partial y} \le 0$, и, следовательно:

$$\Delta l_i = \Delta x_i \cdot \cos(x; l_i) - \Delta y_i \cdot \sin(y;\ l_i). \tag{3.42}$$

Теперь, воспользовавшись законом Гука и считая, что все стержни одинаковые, получаем следующее выражение для усилия в стержне:

$$N_i = \frac{E \cdot F}{l}\Delta l_i,$$

где F — площадь поперечного сечения стержней.

Подставляя в это выражение удлинение Δl_i из (3.42), получаем усилие в стержне, выраженное через перемещение его узла крепления:

$$N_i = \frac{E \cdot F}{l}\left(\Delta x_i \cdot \cos(x;\ l_i) - \Delta y_i \cdot \sin(y;\ l_i)\right).$$

Теперь, подставляя полученное выражение, в котором Δx_i и Δy_i определяются по формулам (3.40) и (3.41), в уравнения равновесия (3.37)—(3.39), получаем следующую систему трех уравнений относительно трех неизвестных Δx_0, Δy_0 и $\Delta\varphi$:

$$\begin{aligned} N_p + \frac{E \cdot F}{l}\Bigg[\Delta x_0 \sum_1^n \cos^2(x;\ l_i) - \Delta\varphi \sum_1^n y_i \cdot \cos^2(x;\ l_i) - \\ - \Delta y_0 \sum_1^n \cos(x;\ l_i) \cdot \cos(y;\ l_i)\Bigg] = 0; \end{aligned} \tag{3.43}$$

$$Q_p + \frac{E \cdot F}{l}\left[\Delta x_0 \sum_1^n \cos(x;\ l_i) \cdot \cos(y;\ l_i) - \Delta\varphi \sum_1^n y_i \cdot \cos(x;\ l_i) \cdot \cos(y;\ l_i) - \right. \\ \left. -\Delta y_0 \sum_1^n \cos^2(y;\ l_i)\right] = 0; \tag{3.44}$$

$$M_p + \frac{E \cdot F}{l}\left[\Delta x_0 \sum_1^n y_i \cdot \cos^2(x;\ l_i) - \Delta\varphi \sum_1^n y_i^2 \cdot \cos^2(x;\ l_i) - \right. \\ \left. -\Delta y_0 \sum_1^n y_i \cdot \cos(x;\ l_i) \cdot \cos(y;\ l_i)\right] = 0. \tag{3.45}$$

Полученные выражения можно упростить, если учесть симметрию величин, входящих под знаки сумм.

Так, величины $\cos(x;\ l_i)$ относительно плоскости *XY* прямо симметричны, т. е. по одну и другую ее сторону всегда есть стержни с одинаковыми углами наклона. Величины же y_i и $\cos(y;\ l_i)$, симметричные относительно плоскости *XZ*, будут обратно симметричны, т. к. пары, имеющие одинаковые по модулю y_i и $\cos(y_i;\ l_i)$, имеют противоположные знаки. Поэтому если общий порядок обратно симметричных величин под знаком суммы нечетный (1, 3, 5, ...), то сумма равна нулю, а если общий порядок обратно симметричных величин четный (0, 2, 4, ...), то сумма не равна нулю.

С учетом сказанного получаем:

$$\sum_1^n y_i \cdot \cos^2(x;\ l_i) = 0; \quad \sum_1^n \cos(x;\ l_i) \cdot \cos(y;\ l_i) = 0,$$

а система уравнений (3.43)—(3.45) упрощается и принимает следующий вид:

$$N_p + \frac{E \cdot F}{l} \Delta x_0 \sum_1^n \cos^2(x;\ l_i) = 0; \tag{3.46}$$

$$Q_p - \frac{E \cdot F}{l}\left[\Delta\varphi \sum_1^n y_i \cdot \cos(x;\ l_i) \cdot \cos(y;\ l_i) - \Delta y_0 \sum_1^n \cos^2(y;\ l_i)\right] = 0; \tag{3.47}$$

$$M_p - \frac{E \cdot F}{l}\left[\Delta\varphi \sum_1^n y_i^2 \cdot \cos^2(x;\ l_i) - \Delta y_0 \sum_1^n y_i \cdot \cos(x;\ l_i) \cdot \cos(y;\ l_i)\right] = 0. \tag{3.48}$$

Решая систему линейных алгебраических уравнений (3.46)—(3.48), находим Δx_0, Δy_0 и $\Delta\varphi$. По найденным значениям Δx_0, Δy_0 и $\Delta\varphi$ определяются усилия в стержнях фермы N_i, причем положительный знак усилия показывает, что стержень растянут, а отрицательный — стержень сжат. Формула для расчета усилия в стержне фермы имеет вид:

$$N_i = \frac{E \cdot F}{l}\left[\left(\Delta x_0 - y_i \Delta\varphi\right)\cdot \cos\left(x;\ l_i\right) - \Delta y_0 \cdot \cos\left(y;\ l_i\right)\right], \quad i = 1, 2, 3, ..., n. \quad (3.49)$$

Так как все стержни фермы одинаковые, то для оценки несущей способности выбираются те стержни, у которых возникают наибольшие по абсолютной величине усилия. Растянутые стержни проверяются на прочность, а сжатые — на прочность и устойчивость. Критические напряжения потери устойчивости определяются по формуле Эйлера *(см. гл. 12)*.

3.6. Изгиб балок

Рассмотрим балку, нагруженную в направлении оси Y погонной нагрузкой q_y и сосредоточенной силой P_2 на одном из ее концов (рис. 3.10). Под действием этих нагрузок в сечениях балки возникают перерезывающие силы, изгибающие моменты и соответствующие им касательные и нормальные напряжения. А сама балка получает перемещения $v_0(x)$ в направлении оси Y, и ось балки становится криволинейной. Рассмотрим соотношения теории упругости, которые являются частным случаем соотношений, полученных в *разд. 3.3*.

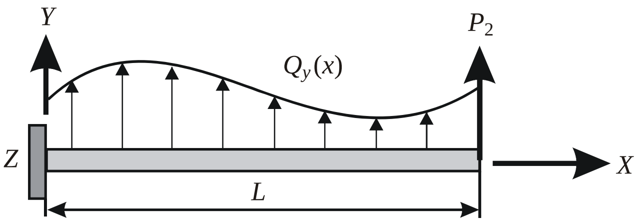


Рис. 3.10. Схема нагрузок, действующих на балку

3.6.1. Геометрические уравнения

Поле перемещений в рассматриваем случае описывается следующими соотношениями:

$$u(x, y, z) = -y\frac{dv_0}{dx}; \quad v(x, y, z) = v_0(x); \quad w(x, y, z) = 0, \quad (3.50)$$

а относительная деформация в осевом направлении равна:

$$\varepsilon_x(x, y, z) = -y\kappa_3(x). \quad (3.51)$$

3.6.2. Физические уравнения

Так как сечение балки не деформируется в собственной плоскости, то закон Гука, как и в случае осевого растяжения, сводится к одному уравнению, связывающему напряжение с осевыми относительными деформациями, и записывается так:

$$\sigma_x(x, y, z) = -Ey\kappa_3(x) . \tag{3.52}$$

Вычислим осевое внутреннее усилие:

$$N_x(x) = \int_F \sigma_x(x, y, z)\, dF = -\kappa_3(x)\left[\int_F Ey\, dF\right].$$

Но интеграл в скобках равен нулю, т. к. это средневзвешенное значение модуля упругости, которое равно нулю, и используется система координат, расположенная в центре масс сечения. Тогда $N_x(x) = 0$, если на балку действуют только поперечные силы.

Изгибающий момент найдем после подстановки напряжений из (3.52) в формулу (3.22):

$$M_z(x) = \kappa_3(x)\left[\int_F Ey^2 dF\right] = A_{33}\kappa_3(x) , \tag{3.53}$$

где изгибная жесткость A_{33} и кривизна вычисляются в центральной системе координат, которая имеет начало в центре масс сечения.

3.6.3. Прогиб балки

Так как здесь рассматривается изгиб балки только в одной плоскости *XY*, то из системы уравнений, полученной в *разд. 3.3.2* из уравнений теории упругости, необходимо взять лишь уравнения (3.15) и (3.16), которые перепишем так:

$$\frac{dM_z}{dx} + Q_y = 0 ; \quad \frac{dQ_y}{dx} = -q_y(x) .$$

Подставляя второе уравнение в первое, чтобы исключить перерезывающую силу, получаем:

$$\frac{d^2 M_z}{dx^2} = q_y(x) . \tag{3.54}$$

Воспользовавшись далее соотношением (3.53) для изгибающего момента M_z с учетом кривизны балки $\kappa_3(x) = \dfrac{d^2 v_0}{dx^2}$, определенной в (3.6), имеем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка для определения поперечного перемещения:

$$\frac{d^2}{dx^2} A_{33} \frac{d^2 v_0}{dx^2} = q_y(x) . \tag{3.55}$$

К этому уравнению следует поставить четыре граничных условия, которые зависят от способа закрепления краев балки. Изгиб балки происходит в одной плоскости, когда перемещение $w_0 = 0$, поэтому граничные условия выражаются через перемещение $v_0(x)$ и его производные по x следующим образом:

1. **Жесткая заделка.** В этом случае перемещение и угол поворота равны нулю:

$$v_0 = 0 ; \quad \frac{dv_0}{dx} = 0 .$$

2. **Шарнирное закрепление.** Перемещение равно нулю, а угол поворота не ограничивается, поэтому изгибающий момент в этом случае равен нулю:

$$v_0 = 0 ; \quad \frac{d^2 v_0}{dx^2} = 0 .$$

3. **Свободный ненагруженный конец.** Здесь перерезывающая сила и изгибающий момент равны нулю:

$$\frac{d^2 v_0}{dx^2} = 0 ; \quad \frac{d}{dx} A_{33} \frac{d^2 v_0}{dx^2} = 0 .$$

4. **Свободный край с сосредоточенной поперечной силой $\boldsymbol{P_2}$.** В этом случае изгибающий момент равен нулю, а перерезывающая сила должна быть равна сосредоточенной силе:

$$-\frac{d}{dx} A_{33} \frac{d^2 v_0}{dx^2} = P_2 ; \quad \frac{d^2 v_0}{dx^2} = 0 .$$

3.6.4. Напряжения в балке

Выражая с помощью формулы (3.53) кривизну балки через изгибающий момент и подставляя полученное соотношение в (3.52), получим следующую формулу для вычисления напряжений по известному изгибающему моменту:

$$\sigma_x(x, y, z) = -Ey \frac{M_z}{A_{33}} . \tag{3.56}$$

Если материал балки однородный, то жесткость стержня равна $A_{33} = EI_z$, где момент инерции сечения относительно оси Z, проходящей через центр масс сечения, равен:

$$I_z = \int_F y^2 dF \tag{3.57}$$

и является геометрической характеристикой сечения. В этом случае формула (3.56) упрощается и принимает вид (рис. 3.11, *а*):

$$\sigma_x(x, y, z) = -\frac{M_z y}{I_z}. \tag{3.58}$$

При неоднородном сечении, состоящем из нескольких слоев с различными материалами, напряжения вычисляются по слоям:

$$\sigma_x^{(i)}(x, y, z) = -E^{(i)} y \frac{M_z}{A_{33}}, \tag{3.59}$$

а жесткость балки должна определяться с учетом модуля упругости каждого слоя:

$$A_{33} = \sum_{i=1}^{n} E^{(i)} \int_{F_i} y^2 dF. \tag{3.60}$$

В этом случае и распределение напряжений по сечению имеет ступенчатый характер (рис. 3.11, *б*), т. к. модули упругости в слоях имеют разные значения.

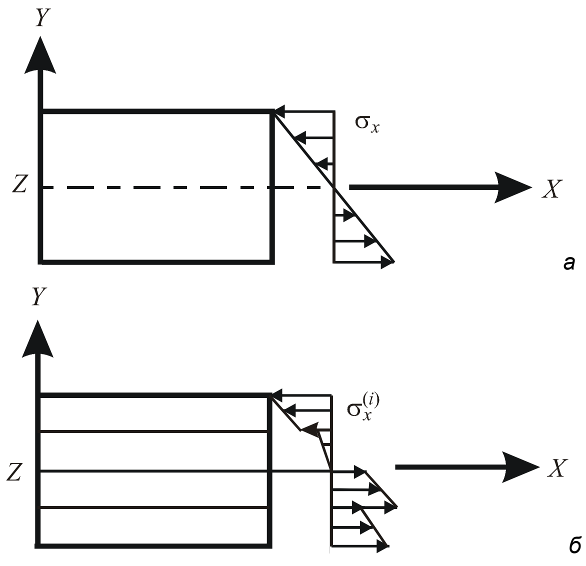


Рис. 3.11. Распределение напряжений в однослойной (*а*) и многослойной (*б*) балках

Теперь в качестве примера рассмотрим, как можно воспользоваться балочной расчетной схемой для определения напряжений в цилиндрической оболочке, подкрепленной изнутри продольными стержнями.

3.7. Напряжения в подкрепленной оболочке

Схема рассматриваемой конструкции в виде подкрепленного отсека корпуса летательного аппарата из однородного материала изображена на рис. 3.12, *а*. Отсек изгибается сосредоточенными моментами M_p, которые действуют по его краям в плоскости XY вокруг оси Z против часовой стрелки. Ось X направлена по оси симметрии отсека вниз, оси Y и Z — так, как показано на рис. 3.12, *б*.

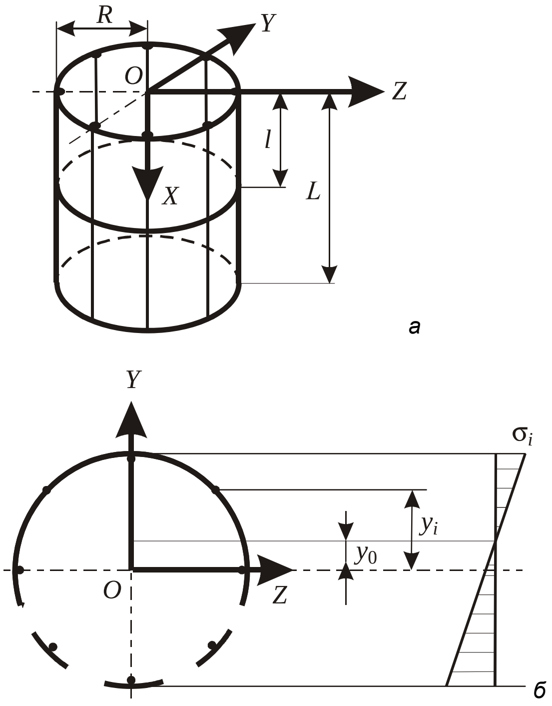


Рис. 3.12. Схема подкрепленного отсека, изгибаемого моментом

Будем считать, что габаритные размеры отсека и его элементов известны, причем изгибающий момент действует так, что верхние стрингеры на рис. 3.12, *б* растягиваются, а нижние — сжимаются. При растяжении разрушающим напряжением является предел прочности материала, а при сжатии — критические напряжения потери устойчивости.

В растянутой области вся обшивка работает вместе со стрингерами, а в сжатой — только часть обшивки, примыкающая к стрингерам на ширине $b_{\text{пр}}$, которую по терминологии И. Г. Бубнова называют *присоединенной* [3.3].

Сечение, таким образом, становится несимметричным, и поэтому необходимо сначала определить действительное положение его нейтральной оси, а затем найти напряжения в продольном элементе силового набора — стрингере.

Расчет проводится методом последовательных приближений, а промежуточные результаты удобно хранить в таблице, аналогичной табл. 3.2.

Таблица 3.2. *Расчетная таблица для определения напряжений в подкрепленном отсеке*

№	**№ стрингера**	**1**	**2**	**3**	**...**	***i***	**...**	***n***
1	F_i							
2	$y_i^{(1)}$							
3	$\sigma_i^{(1)}$							
4	$\varphi_i^{(2)}$							
5	$F_i^{(2)}$							
6	$F_i^{(2)} y_i^{(1)}$							
7	$y_i^{(2)}$							
8	$\left(y_i^{(2)}\right)^2$							
9	$F_i^{(2)} \left(y_i^{(2)}\right)^2$							
10	$\sigma_i^{(2)}$							
11	$\varphi_i^{(3)}$							
...	...							

В этой таблице верхний индекс в скобках указывает на номер приближения, а нижний индекс i — на номер стрингера, который изменяется от 1 до n. Кроме того, F_i — площадь поперечного сечения i-ого стрингера, а y_i — расстояние от нейтрального слоя до стрингера, которое изменяется на каждом приближении.

Расчет начинается с заполнения первой строки таблицы с площадью стрингеров и второй строки с их координатами относительно нейтральной оси. В первом приближении считается, что нейтральная ось, на которой напряжения равны нулю, совпадает с осью Z (рис. 3.12, *б*), а напряжения в стрингерах определяются по формуле:

$$\sigma_i^{(1)} = \frac{M_p y_i^{(1)}}{I_z^{(1)}},$$

в которой $I_z^{(1)}$ — момент инерции сечения на первом приближении; $y_i^{(1)}$ — расстояние до i-ого стрингера, измеренное от нейтральной оси, которая на первом приближении совпадает с осью Z.

Для вычисления момента инерции сечения на первом приближении, когда обшивка и силовой набор работают равномерно, предполагается, что продольный силовой набор можно "размазать" по обшивке, а толщина такой эквивалентной обшивки $\delta_э$ равна:

$$\delta_э = \delta + \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i}{t_с}, \tag{3.61}$$

где $t_с$ — постоянное расстояние между стрингерами, причем считается, что площадь стрингеров симметрична относительно плоскости XY, в которой действует изгибающий момент M_p.

Таким образом, на первом приближении нужно вычислять момент инерции кольца толщиной $\delta_э$, который равен:

$$I_z^{(1)} \approx \pi R^3 \delta_э .$$

Результаты расчета напряжений в точках сечения отсека, совпадающих со стрингерами, используются для последующего заполнения табл. 3.2. Во втором приближении сначала определяются редукционные коэффициенты $\varphi_i^{(2)}$ для каждого стрингера, и заполняется четвертая строка таблицы. Эти коэффициенты учитывают взаимодействие стрингеров и обшивки в процессе восприятия внешней нагрузки.

Для растянутой области, т. е. когда напряжения $\sigma_i^{(1)}$ в стрингере положительные, принимаем, что редукционные коэффициенты постоянны и пропорциональны отношению предела прочности материала обшивки к пределу прочности материала стрингера:

$$\varphi = \left(0,8 \div 0,85\right)\frac{\sigma_b^{\text{обш}}}{\sigma_b^{\text{стр}}}.$$

Коэффициент перед отношением напряжений учитывает ослабление обшивки из-за крепления к ней стрингеров. Редукционный коэффициент в сжатой области определяем по формуле Маргуэра [3.3]:

$$\varphi_i^{(2)} = \sqrt[3]{\frac{\sigma_{\text{кр}}^{\text{обш}}}{\sigma_i^{(1)}}},$$

в которой $\sigma_i^{(1)}$ — напряжение в *i*-ом стрингере на первом приближении; $\sigma_{\text{кр}}^{\text{обш}}$ — критическое напряжение потери устойчивости части обшивки, расположенной между стрингерами, определяемое по формуле [3.3]:

$$\sigma_{\text{кр}}^{\text{обш}} = 0,1E\frac{\delta}{R} + 3,6E\left(\frac{\delta}{t_{\text{с}}}\right)^2.$$

При этом если $\sigma_i^{(1)} < \sigma_{\text{кр}}^{\text{обш}}$, то $\varphi_i^{(2)} = 1$. Заполнив четвертую строку табл. 3.2, переходим к вычислению суммарной площади стрингера и примыкающей к нему обшивки с учетом редукционного коэффициента по формуле:

$$F_i^{(2)} = F_i + \varphi_i^{(2)} t_{\text{с}} \delta$$

и заполняем пятую и шестую строки таблицы. Далее определяем координату нейтральной оси:

$$y_0^{(2)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i^{(2)} y_i^{(1)}}{\sum_{i=1}^{n} F_i^{(2)}}$$

и новые координаты стрингеров $y_i^{(2)}$ относительно нейтрального слоя:

$$y_i^{(2)} = y_i^{(1)} - y_0^{(2)}.$$

Теперь переходим к вычислению напряжений во втором приближении, определив сначала момент инерции сечения:

$$I_z^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} F_i^{(2)} \left(y_i^{(2)} \right)^2 .$$

Тогда напряжения во втором приближении равны:

$$\sigma_i^{(2)} = \frac{M_p y_i^{(2)}}{I_z^{(2)}} .$$

Полученные в 10-ой строке табл. 3.2 напряжения сравниваются с исходными (строка 3), и если они отличаются на величину, превышающую заданную точность, выполняется следующее приближение, после которого уже необходимо сравнить полученные напряжения с напряжениями второго приближения.

Свойство конструкций разрушаться раньше от потери устойчивости, чем от потери прочности, позволяет достигнуть уменьшения массы конструкции, если стрингеры, расположенные в растянутой области, сделать с меньшим поперечным сечением, чем в сжатой области. Такая возможность появляется в ракетах-носителях, у которых ориентация сечения подкрепленного отсека не меняется во время полета по траектории выведения спутника на орбиту Земли [3.2].

Выводы

В этой главе были изучены следующие вопросы:

1. С помощью гипотез Эйлера—Бернулли из уравнений теории упругости в декартовой системе координат получены одномерные уравнения теории брусьев.
2. Установлено, что осевые и поперечные жесткости бруса оказывают взаимное влияние на осевое растяжение и изгиб при произвольном положении системы координат.
3. Показано, что взаимное влияние растяжения и изгиба исчезает, если жесткости вычисляются в системе координат, связанной с центром масс сечения.
4. Влияние взаимного изгиба во взаимно перпендикулярных плоскостях отсутствует, если повернуть центральную систему координат так, чтобы связанная изгибная жесткость равнялась нулю.
5. Осевое напряжение в многослойном стержне имеет ступенчатый характер, а величина скачка напряжений между слоями зависит от соотношения модулей упругости материалов, из которых изготовлены слои стержня.

6. Получены расчетные соотношения для определения внутренних усилий и напряжений в симметричной ферме, составленной из стержней, которые соединены по верхнему и нижнему основанию двумя поясами жестких колец.
7. Осевое напряжение в изгибаемой балке распределено в сечении по линейному закону и имеет скачки по толщине слоев, если многослойная балки изготовлена из материалов с разными модулями упругости.
8. Составлена схема расчета напряжений, основанная на одномерной балочной теории, в подкрепленной оболочке, изгибаемой моментом.

Упражнения и вопросы

1. В каких случаях можно использовать гипотезы Эйлера—Бернулли для расчета брусьев при осевом растяжении и изгибе? В чем их отличие от гипотез Тимошенко С. П.?
2. Почему в уравнениях равновесия теории упругости при использовании гипотез Эйлера—Бернулли нельзя пренебречь слагаемыми, содержащими касательные и нормальные напряжения, значительно малые по сравнению с осевыми нормальными напряжениями?
3. Сформулируйте условия и запишите их в виде аналитических соотношений, при которых комбинированное нагружение бруса, включающее осевое растяжение и изгиб в двух плоскостях, можно рассматривать по отдельности.
4. Постройте эпюру напряжений в трехслойном растянутом стержне, у которого наружные слои изготовлены из материала с модулем упругости $E = 0,7 \cdot 10^{11}$ Па, а внутренний с $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па. Стержень имеет круглое сечение с наружным радиусом $R = 0,05$ м и внутренним $r = 0,02$ м, толщина слоев одинаковая и равна $0,01$ м. Один конец стержня жестко закреплен, а на втором свободном конце приложена сосредоточенная сила $P = 2,0 \cdot 10^{6}$ Н.
5. Для условий предыдущей задачи получите значение осевого перемещения в середине стержня, если его длина $l = 1$ м.
6. Получите формулы для определения продольного перемещения и усилия во вращающейся с угловой скоростью ω вокруг оси Y лопасти вертолета длиной l и плотностью материала ρ. Площадь сечения в жестко заделанном, но вращающемся вокруг оси Y, основании лопасти равна F_0, а на

свободном конце — F_1. Между ними площадь сечения изменяется по линейному закону и описывается зависимостью: $F(x) = F_0 + (F_1 - F_0)\frac{x}{l}$.

7. Лонжерон крыла в виде балки длиной l с одним жестко заделанным и другим свободным концом изгибается сосредоточенной силой P, приложенной на расстоянии αl (α — коэффициент) от заделки. Получить формулу для вычисления прогиба крыла $v_0(x)$ в направлении оси Y. Считать, что жесткость крыла постоянна по его длине и равна A_{33}.
8. Получите формулы для вычисления жесткостей B_{11}, A_{22}, A_{23} и A_{33} тонкостенного бруса зетообразного сечения, если толщина его стенки одинакова и равна t, ширина горизонтальных полок равна a, а вертикальной стенки — $2a$. Исходная система координат находится в центре масс сечения, ось Y параллельна горизонтальным полкам, а ось Z — вертикальной стойке. Получите также формулу для вычисления угла α, на который нужно повернуть систему координат, чтобы жесткость $A_{23} = 0$.
9. Составьте расчетную схему для определения напряжений в подкрепленном отсеке по балочной схеме для случая, когда материал обшивки и стрингеров разный. Получите формулы, по которым нужно определять напряжения в стрингере и жесткость сечения в процессе выполнения расчетных приближений.

Литература к главе 3

1. Болотин В. В., Гольденблат И. И., Смирнов А. Ф. Строительная механика, 2 изд. — М.: 1972.
2. Конструкция управляемых баллистических ракет. Колл. авт. — М.: Воениздат, 1969.
3. Розин Л. А., Константинов И. А., Смелов В. А. Расчет статически определимых стержневых систем. — Л.: 1983.
4. Стригунов В. М. Расчет на прочность фюзеляжей и герметических кабин самолетов. — М.: Машиностроение, 1974, 288 с.
5. Bauchau O. A., Craig J. I. Aerospace Structural Analysis. — School of Aerospace Engineering Georgia Institute of Technology, January 9, 2005.

Глава 4

Заряд твердого топлива, скрепленный с оболочкой

В этой главе изучается напряженно-деформированное состояние толстой трубы из материала, обладающего свойством ползучести. Труба находится внутри тонкой оболочки, а в качестве физических уравнений используется закон Гука и линейная вязкоупругая механическая модель ползучести. Выражения для напряжений и перемещений получаются из уравнений теории упругости в цилиндрической системе координат и формул безмоментной теории оболочек. Получены соотношения для определения напряжений и деформаций при нагрузке трубы внутренним давлением и при ее нагреве.

В этой главе будут рассмотрены следующие темы:

- расчетная схема заряда твердого топлива, скрепленного с тонкой оболочкой;
- механическая модель линейного вязкоупругого материала;
- решение уравнений теории упругости для плоской деформации в цилиндрических координатах;
- напряжения и деформации от внутреннего давления для упругого и вязкоупругого материала;
- температурные напряжения и деформации для упругого и вязкоупругого материала.

4.1. Расчетная схема

Задача Ламе о расчете напряжений в однослойной и многослойной упругих трубах, нагруженных давлением, хорошо известна из курса сопротивления материалов. Здесь мы рассмотрим применение решения этой задачи для определения напряженно-деформированного состояния в двухслойной трубе, один слой которой — внутренний — имеет значительную толщину по сравнению с ее радиусом, а второй — тонкостенная оболочка, напряжения и деформации в которой можно определять по безмоментной теории *(см. гл. 7)*. Кроме того, рассмотрим также случай, когда материал внутреннего слоя трубы обладает не только упругими свойствами, но и ползучестью. Такие комбинации возникают при сильном нагреве внутренней трубы или в тех случаях, когда она изготовлена из наполненного полимера. Здесь же для определенности мы будем рассматривать заряд твердого топлива в ракетном двигателе, который обладает подобными свойствами и имеет тонкую металлическую цилиндрическую оболочку.

При определении нагрузок будем иметь в виду, что в процессе эксплуатации ракеты заряд двигателя на твердом топливе (РДТТ) подвергается воздействию следующих внешних факторов:

- внутреннего давления газов p_0 при работе двигателя в полете;
- массовых сил при хранении и полете ракеты по траектории;
- нагрева при изготовлении заряда и хранении РДТТ.

Для оценки прочности заряда обычно определяют его полную линейную деформацию, полученную на всех этапах эксплуатации изделия, которая затем сравнивается с предельно допустимым значением, составляющим обычно для существующих видов топлива величину порядка $0{,}15 \div 0{,}20$.

4.1.1. Геометрическая форма

В большинстве случаев заряд твердого топлива представляет собой цилиндрическое по наружной поверхности тело, которое имеет внутренний приосевой канал не обязательно цилиндрической формы (рис. 4.1, *а*) или продольные торцевые пропилы, которые называются *щелями*. Заряд вкладывается в металлическую камеру сгорания двигателя или приклеивается к ее стенкам.

Составляя расчетную схему, будем считать, что заряд выполнен в виде длинного полого толстостенного цилиндра, скрепленного по внешней поверхности и торцам с корпусом двигателя (рис. 4.1, *б*). При этом реальная форма торцов не учитывается, они считаются плоскими и передают на корпус только осевые усилия, растягивающие или сжимающие. Сам корпус двигателя представляет собой тонкую оболочку, напряжения и перемещения в которой определяются по безмоментной теории. Теперь определим характер нагружения этого цилиндрического тела, рассматривая особенности эксплуатации заряда твердого топлива.

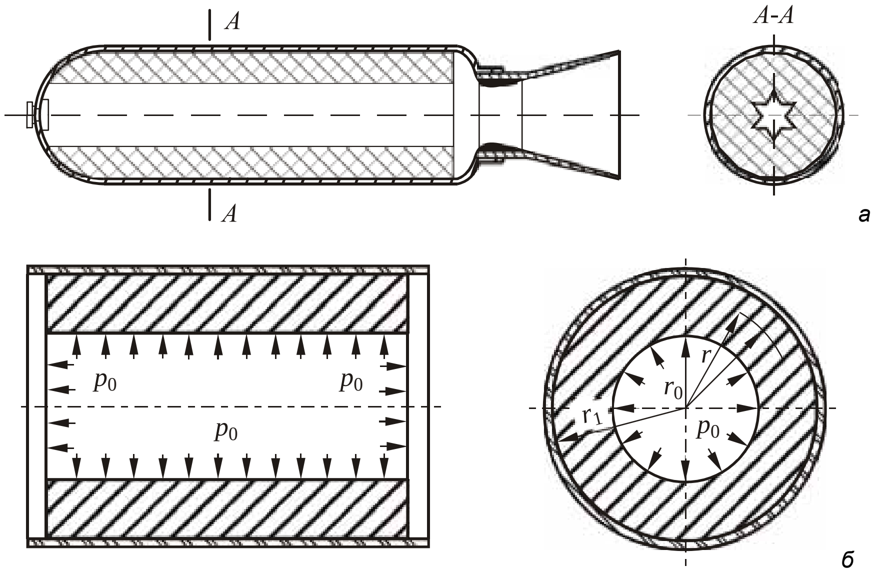


Рис. 4.1. Двигатель твердого топлива и расчетная схема для определения напряжений и деформаций

4.1.2. Внешние нагрузки

Во время работы двигателя на внутренней поверхности заряда действует давление, которое распределяется между зарядом и корпусом пропорционально отношению их плоскостных жесткостей, каждая из которых равна произведению модуля упругости соответствующего материала на характерный геометрический размер. Это отношение равно $\frac{E_k\delta}{Ee}$, где E_k и E — модули упругости материала корпуса и заряда твердого топлива; δ — толщина стенки корпуса; e — толщина свода цилиндра, равная разности между его наружным и внутренним радиусами (рис. 4.2, *а*).

Плоскостная жесткость заряда значительно меньше, чем у корпуса, т. к. $E << E_k$, поэтому корпус препятствует расширению заряда под действием внутреннего давления. Из-за этого между ними возникает контактное давления q_k, которое сжимает заряд по наружной поверхности и растягивает корпус изнутри. Сжатие заряда внутренним и контактным давлениями в радиальном направлении (рис. 4.2, *б*) приводит к расширению его в осевом направлении, чему препятствует связанный с ним корпус. Поэтому и в осевом направлении заряд сжат, а корпус растянут (рис. 4.2, *в*).

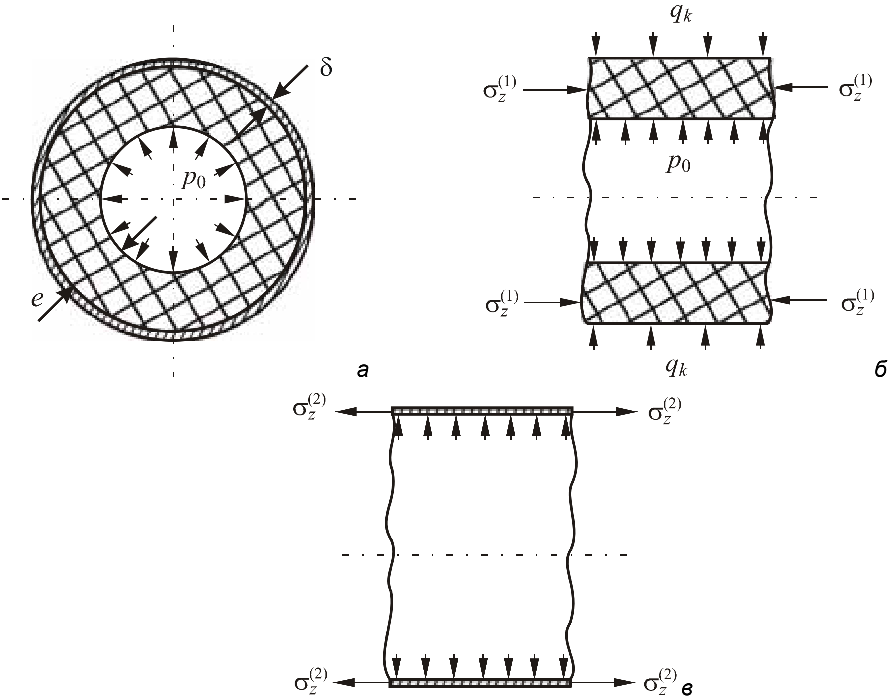


Рис. 4.2. Напряжения в заряде (*б*) и корпусе (*в*) при внутреннем давлении (*а*)

Другим источником возникновения напряжений в заряде является значительная разница в значениях коэффициентов температурного расширения материала корпуса двигателя и заряда твердого топлива. Эта разница коэффициентов приводит к неодинаковому изменению линейных размеров заряда и корпуса и возникновению на поверхности раздела контактного давления, которое, например, при охлаждении РДТТ относительно равновесной температуры растягивает заряд снаружи и сжимает корпус изнутри. При равновесной температуре заряд и корпус находятся в ненапряженном состоянии. Такой температурой является *температура полимеризации топлива* $T_0 = 30\,°\mathrm{C} \div 80\,°\mathrm{C}$, причем изменение температуры в любую сторону от T_0 создает в заряде температурные напряжения и деформации.

В этом случае заряд растягивается крышками корпуса в осевом направлении через торцевые поверхности (рис. 4.3, *б*), поэтому по наружной цилиндрической поверхности он нагружен контактным давлением, аналогично тому, как это происходит при работающем двигателе. Только теперь давление меняет свое направление и растягивает заряд твердого топлива, а источником контактного давления является отличие температуры заряда и корпуса двигателя от равновесной температуры.

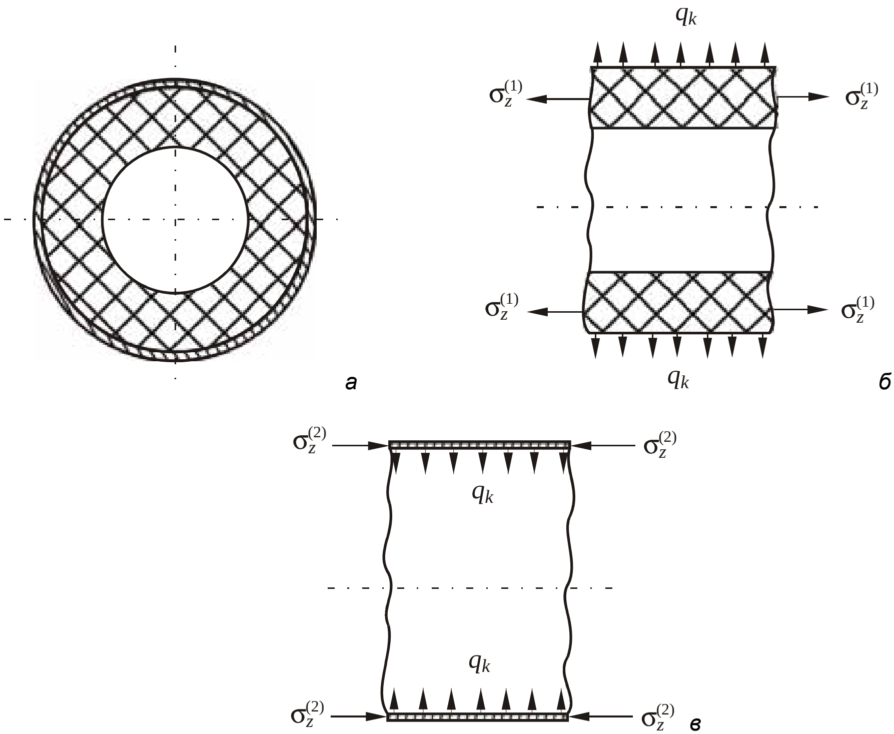


Рис. 4.3. Напряжения в заряде (*б*) и корпусе (*в*)
при отличии температуры конструкции от равновесной (*а*)

Изложенные соображения позволяют свести расчет заряда к расчету толстостенного цилиндра, нагруженного контактным давлением с наружной стороны (частный случай задачи Ламе) с учетом осевых сил.

Прежде чем определить напряжения и деформации в цилиндрическом теле, нагруженном по внешней поверхности контактным давлением, а в случае работающего двигателя еще и внутренним давлением, остановимся на выборе модели материала, которая определит запись физических уравнений, связывающих напряжения с деформациями.

4.2. Свойства материала

Рассмотрим сначала расчетную модель материала заряда, основанную на обобщенном законе Гука. Кроме самостоятельного интереса, результаты, полученные по этой модели, будут использоваться затем в качестве основы для построения второй модели, в которой учитываются эффекты ползучести.

4.2.1. Линейно-упругое тело

Обобщенный закон Гука в цилиндрической системе координат (ось Z направлена по оси симметрии цилиндрической шашки, а ось r — по ее радиусу) при осевой симметрии записывается в следующем виде *(см. Приложение 3)*:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E}\left(\sigma_r - \mu\left(\sigma_z + \sigma_\varphi\right)\right); \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{E}\left(\sigma_\varphi - \mu\left(\sigma_r + \sigma_z\right)\right); \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \mu\left(\sigma_r + \sigma_\varphi\right)\right). \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

Отсутствие тангенциальных напряжений и деформаций является следствием осевой симметрии конструкции и нагрузок.

Для дальнейших рассуждений здесь важно отметить, что если приложить к линейно-упругому телу нагрузку и сохранять ее неизменной в течение сколь угодно большого промежутка времени, то и полученная в момент приложения нагрузки относительная деформация тоже останется неизменной и не будет зависеть от времени. После снятия нагрузки в теле исчезнут напряжения, и оно вернется в исходное недеформированное состояние. Это поведение упругого тела отражено на диаграммах зависимостей напряжения и относительной деформации от времени на рис. 4.4, *а* и *б* соответственно.

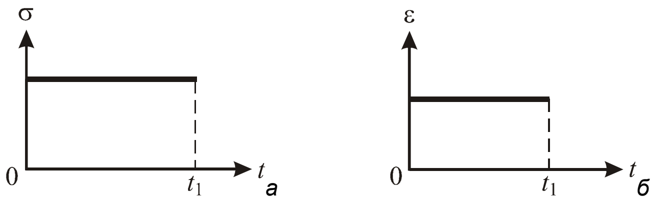


Рис. 4.4. Зависимости напряжения (*а*) и деформации (*б*) от времени для линейно-упругого тела

4.2.2. Линейное вязкоупругое тело

Другое поведение наблюдается в зарядах твердого топлива, если в них поддерживать постоянные напряжения в течение заданного промежутка времени. Тогда относительная деформация при постоянном напряжении (рис. 4.5, *а*) увеличивается со временем и зависит от температуры (рис. 4.5, *б*), которую имеет заряд к моменту начала его нагружения. Это явление называется *ползучестью* и наблюдается в наполненных полимерах, к которым и относится заряд твердого топлива, а также в конструкционных материалах, нагретых до высоких температур.

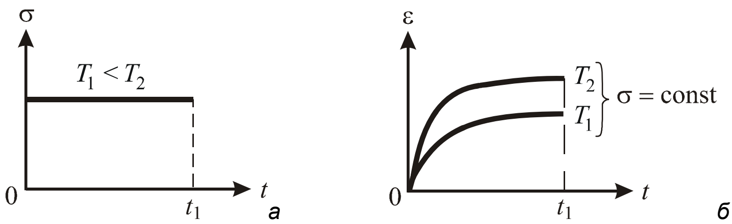


Рис. 4.5. Зависимости деформации от времени и начальной температуры при ползучести материала

Таким образом, к одному и тому же моменту времени при разных постоянных напряжениях и одинаковой начальной температуре деформации заряда будут отличаться. Причем для получения большей деформации за одно и то же время потребуется и большая скорость деформации. Отсюда следует, что напряжения в заряде зависят от деформации и скорости деформации.

Для твердого топлива, кроме ползучести, наблюдается явление ослабления напряжения (рис. 4.6, *б*) при постоянной деформации (рис. 4.6, *а*), которое называется *релаксацией*.

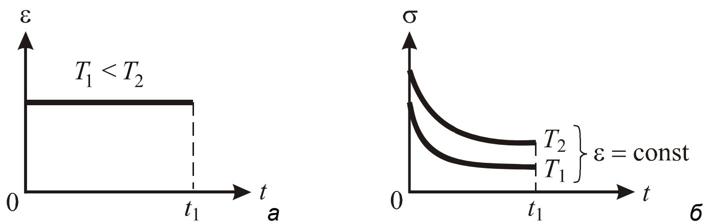


Рис. 4.6. Зависимость напряжения от времени при постоянной деформации

При построении аналитической модели, учитывающей эти факторы, обычно используют аналогию с механической системой, состоящей из упругой пружины и демпфера. Пружина и демпфер соединяются последовательно или параллельно. Используя последовательное соединение элементов, представим деформацию, получаемую зарядом, в виде суммы упругой и вязкой составляющих деформации, что аналитически записывается так:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon_b, \tag{4.2}$$

где ε — полная деформация; $\frac{\sigma}{E} = \varepsilon_y$ — упругая деформация; ε_b — деформация вязкого элемента (демпфера).

Первое слагаемое в (4.2) постоянное и соответствует упругой деформации, которую получает заряд в момент приложения нагрузки, а второе слагаемое линейно зависит от времени. Если мгновенно создать напряжение в механической модели твердого топлива, то в начальный момент растянется пружина, а демпфер останется неподвижным, поэтому начальная деформация механической модели твердого топлива будет равна ε_y. Эту зависимость для постоянного напряжения можно представить графиком, приведенным на рис. 4.7.

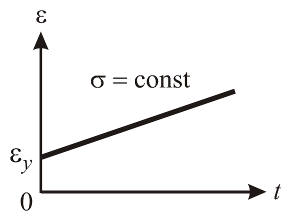


Рис. 4.7. Зависимость деформации от времени при постоянном напряжении для механической модели твердого топлива

Аналогично, если в механической модели твердого топлива в начальный момент создать постоянную деформацию, то будет деформироваться только пружина, а демпфер останется неподвижным. Так как деформация поддерживается постоянной, пружина растянута и в ней возникли напряжения, то она подтягивает поршень демпфера к себе, и напряжения в пружине будут уменьшаться со временем. В конечном итоге упругие напряжения в механической модели твердого топлива отрелаксируют, а пружина сожмется. Этот процесс релаксации механической модели твердого топлива показан на рис. 4.8.

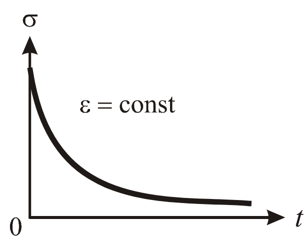


Рис. 4.8. Зависимость напряжения от времени при постоянной деформации для механической модели твердого топлива

Получим уравнение, связывающее напряжения со скоростью деформации. Дифференцируя формулу (4.2), записанную для механической модели твердого топлива, по времени, т. е. $\dfrac{d\varepsilon}{dt}=\dfrac{1}{E}\dfrac{d\sigma}{dt}+\dfrac{d\varepsilon_b}{dt}$, а потом учитывая то, что $\sigma=\lambda\dfrac{d\varepsilon_b}{dt}$, получаем соотношение, связывающее скорость деформации с напряжениями:

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=\frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt}+\frac{\sigma}{\lambda}, \tag{4.3}$$

в котором E и λ — константы материала, определяемые экспериментально.

Далее для краткости записи производные по времени будем обозначать точкой над дифференцируемой величиной, и тогда (4.3) перепишется так:

$$\dot{\varepsilon}=\frac{\dot{\sigma}}{E}+\frac{\sigma}{\lambda}. \tag{4.4}$$

Аналогичные выражения можно записать и для трехмерного напряженного состояния, распространяя соотношение (4.4) на обобщенный закон Гука (4.1):

$$\dot{\varepsilon}_r=\frac{1}{E}\Big(\dot{\sigma}_r-\mu\big(\dot{\sigma}_z+\dot{\sigma}_\varphi\big)\Big)+\frac{1}{\lambda}\Big(\sigma_r-\mu\big(\sigma_z+\sigma_\varphi\big)\Big); \tag{4.5}$$

$$\dot{\varepsilon}_\varphi=\frac{1}{E}\Big(\dot{\sigma}_\varphi-\mu\big(\dot{\sigma}_r+\dot{\sigma}_z\big)\Big)+\frac{1}{\lambda}\Big(\sigma_\varphi-\mu\big(\sigma_r+\sigma_z\big)\Big); \tag{4.6}$$

$$\dot{\varepsilon}_z=\frac{1}{E}\Big(\dot{\sigma}_z-\mu\big(\dot{\sigma}_r+\dot{\sigma}_\varphi\big)\Big)+\frac{1}{\lambda}\Big(\sigma_z-\mu\big(\sigma_r+\sigma_\varphi\big)\Big). \tag{4.7}$$

В средней части цилиндрического заряда отсутствует влияние краевых эффектов на его торцах, поэтому здесь заряд находится в условиях плоской деформации, когда $\varepsilon_z=0$ и, следовательно, $\dot{\varepsilon}_z=0$, из (4.7) имеем:

$$\frac{\dot{\sigma}_z}{E}+\frac{\sigma_z}{\lambda}=\frac{\mu}{E}\big(\dot{\sigma}_r+\dot{\sigma}_\varphi\big)\frac{\mu}{\lambda}\big(\sigma_r+\sigma_\varphi\big). \tag{4.8}$$

Принимая коэффициент Пуассона $\mu=0{,}5$ и подставляя (4.8) в (4.6), после преобразований получаем следующее уравнение связи для механической модели твердого топлива в условиях плоской деформации $\varepsilon_z=0$:

$$\dot{\varepsilon}_\varphi=\frac{3}{4}\left(\frac{\dot{\sigma}_\varphi-\dot{\sigma}_r}{E}+\frac{\sigma_\varphi-\sigma_r}{\lambda}\right). \tag{4.9}$$

В это уравнение входят тангенциальные, радиальные напряжения и их производные по времени. Для определения напряжений и их производных по времени в правой части (4.9) необходимо воспользоваться уравнениями равновесия теории упругости.

Заметим также, что здесь не приводится выражение для производной $\dot{\varepsilon}_r$, получаемое аналогично $\dot{\varepsilon}_\varphi$, потому что тангенциальная деформация значительно превышает радиальную, которая не имеет практического интереса.

4.3. Плоская деформация в цилиндрических координатах

Цилиндрический заряд скрепляется с корпусом двигателя по боковой поверхности и торцам (см. рис. 4.1, б), поэтому в нем возникает объемное напряженное состояние, определяемое шестью напряжениями (тремя нормальными σ_r, σ_φ, σ_z и тремя касательными $\tau_{r\varphi}$, $\tau_{\varphi z}$, τ_{zr}) и шестью деформациями (тремя линейными ε_r, ε_φ, ε_z и тремя углами сдвига $\gamma_{r\varphi}$, $\gamma_{\varphi z}$, γ_{zr}). Если отношение длины заряда к толщине его цилиндрического свода $\frac{l}{e} > 4$, то согласно принципу Сен-Венана влиянием краевых эффектов можно пренебречь и считать, что заряд находится в условиях плоского деформированного состояния, когда осевая деформация ε_z равна нулю.

В этом случае поперечные сечения заряда, плоские до деформации, остаются плоскими и после приложения нагрузки. Тогда касательные напряжения $\tau_{\varphi z}$, τ_{zr} и углы сдвига $\gamma_{\varphi z}$ и γ_{zr} равны нулю. Кроме того, из-за осевой симметрии заряда и нагрузки касательное напряжение $\tau_{r\varphi}$ и угол сдвига $\gamma_{r\varphi}$ также равны нулю. Таким образом, напряженное состояние заряда характеризуется тремя главными напряжениями σ_r, σ_φ, σ_z и двумя линейными деформациями ε_r, ε_φ. Тогда система уравнений упругости в цилиндрической системе координат *(см. Приложение 3)* записывается в следующем виде:

1. Уравнение равновесия:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0 . \qquad (4.10)$$

2. Геометрические уравнения:

$$\varepsilon_r = \frac{dw}{dr}; \quad \varepsilon_\varphi = \frac{w}{r} . \qquad (4.11)$$

3. Физические уравнения:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left(\sigma_r - \mu\left(\sigma_z + \sigma_\varphi\right)\right); \tag{4.12}$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E}\left(\sigma_\varphi - \mu\left(\sigma_r + \sigma_z\right)\right); \tag{4.13}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \mu\left(\sigma_r + \sigma_\varphi\right)\right) = 0, \tag{4.14}$$

которые относительно напряжений записываются так:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\varphi\right); \tag{4.15}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_\varphi + \mu\varepsilon_r\right); \tag{4.16}$$

$$\sigma_z = \mu\left(\sigma_r + \sigma_\varphi\right). \tag{4.17}$$

Эти напряжения действуют по всем поперечным сечениям трубы, включая концевые, где они являются следствием сил, необходимых для поддержания плоской деформации. Силы в виде реакций опор создаются гладкими и абсолютно жесткими плоскостями на торцах трубы.

Преобразуем уравнение равновесия (4.10), подставляя в него выражения для напряжений (4.15), (4.16), в которых в свою очередь деформации представим через перемещение w с помощью геометрических уравнений (4.11). После подстановки и преобразований приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr} - \frac{w}{r^2} = 0.$$

Перейдем в этом уравнении от независимой переменной r к t по формуле $t = \ln r$, или $r = e^t$. Преобразованное к новой независимой переменной уравнение примет вид:

$$\frac{d^2w}{dt^2} - w = 0.$$

Его решение записывается так:

$$w = Ae^t + Be^{-t},$$

или через исходную независимую переменную r:

$$w = Ar + \frac{B}{r}. \tag{4.18}$$

Для определения констант интегрирования A и B следует задать два граничных условия.

Теперь с помощью выражения (4.18) можно переписать формулы для относительных деформаций и напряжений.

Для относительных деформаций из (4.11) имеем:

$$\varepsilon_r = A - \frac{B}{r^2}; \quad \varepsilon_\varphi = A + \frac{B}{r^2}. \tag{4.19}$$

А для нормальных напряжений из (4.15)—(4.17) с учетом (4.19) получаем:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}\left((1+\mu)A - (1-\mu)\frac{B}{r^2}\right); \tag{4.20}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1-\mu^2}\left((1+\mu)A + (1-\mu)\frac{B}{r^2}\right); \tag{4.21}$$

$$\sigma_z = \frac{2\mu E}{1-\mu}A. \tag{4.22}$$

Примечание

Соотношения (4.19)—(4.22) относятся к линейно-упругому телу. Для вязкоупругого тела следует пользоваться соотношениями, приведенными ранее в *разд. 4.2.2*. Тому, как используются эти соотношения, и будут посвящены следующие разделы.

Теперь рассмотрим, как определяются напряжения и деформации при нагружении толстостенного цилиндра внутренним и внешним давлениями или только контактным давлением, возникающим из-за разности коэффициентов линейного расширения материала заряда и корпуса.

4.4. Напряжения и деформации от внутреннего давления

В этом разделе изучим напряженно-деформированное состояние толстостенной трубы, которая по внутренней поверхности нагружена давлением p_0, а по наружной — давлением $p_н$. В частности, $p_н$ может быть и контактным давлением, которое будем обозначать q_k. Это обозначение позволит отличать его от наружного давления, возникающего не по причине взаимодействия с корпусом двигателя, в который вложен заряд твердого топлива.

4.4.1. Линейно-упругий материал

Для определения констант интегрирования A и B воспользуемся такими граничными условиями на внутреннем и внешнем радиусе трубы, следующими из существа решаемой задачи:

1. При $r = r_0$ (на внутренней поверхности) $\sigma_r = -p_0$. Знак минус показывает, что труба сжимается.
2. При $r = r_1$ (на наружной поверхности) $\sigma_r = -p_н$, т. к. труба сжимается и по наружной поверхности.

Подставляя эти условия в формулы (4.20), получаем:

$$A = \frac{(1-\mu)}{E}\frac{\left(p_0 r_0^2 - p_н r_1^2\right)}{\left(r_1^2 - r_0^2\right)}; \quad B = \frac{(1+\mu)}{E}\frac{(p_0 - p_н)r_0^2 r_1^2}{\left(r_1^2 - r_0^2\right)}. \tag{4.23}$$

После подстановки (4.23) в формулы для напряжений (4.20) и (4.21) имеем:

$$\sigma_r = \frac{p_0 r_0^2 - p_н r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} + \frac{r_1^2 r_0^2 (p_н - p_0)}{r^2\left(r_1^2 - r_0^2\right)}; \quad \sigma_\varphi = \frac{p_0 r_0^2 - p_н r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} - \frac{r_1^2 r_0^2 (p_н - p_0)}{r^2\left(r_1^2 - r_0^2\right)},$$

или после введения обозначений для отношений радиусов $m = \frac{r_0}{r_1}$ и $\bar{r} = \frac{r_0}{r}$ получаем окончательные выражения для напряжений в цилиндрической трубе:

$$\sigma_r = \frac{m^2 p_0 - p_н}{1-m^2} + \frac{\bar{r}^2 (p_н - p_0)}{1-m^2}; \tag{4.24}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{m^2 p_0 - p_н}{1-m^2} - \frac{\bar{r}^2 (p_н - p_0)}{1-m^2}; \tag{4.25}$$

$$\sigma_z = 2\mu\frac{m^2 p_0 - p_н}{1-m^2}. \tag{4.26}$$

Полученные соотношения называются *формулами Ламе*.

Рассмотрим частные случаи этих соотношений, которые соответствуют условиям работы заряда твердого топлива.

1. Цилиндр нагружен одинаковым внутренним и внешним давлениями, что соответствует заряду, свободно вложенному в камеру сгорания и нагруженному всесторонним давлением.

Так как в этом случае $p_0 = p_н$, то:

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = -p_0; \quad \sigma_z = -2\mu p_0,$$

т. е. в цилиндре возникают сжимающие напряжения, причем радиальные и тангенциальные напряжения равны по величине внутреннему давлению, а осевые — части этого давления.

2. Давление на наружной поверхности цилиндра отсутствует, т. е. $p_н = 0$.

   В этом случае радиальные и тангенциальные напряжения равны соответственно:

$$\sigma_r = \frac{m^2 - \bar{r}^2}{1 - m^2} p_0; \quad \sigma_\varphi = \frac{m^2 + \bar{r}^2}{1 - m^2} p_0.$$

   Так как $m \le \bar{r} \le 1$, то радиальные напряжения σ_r отрицательные, а тангенциальные σ_φ положительные, причем их наибольшие по величине значения возникают на внутренней поверхности цилиндра при $\bar{r} = 1$ и равны соответственно:

$$\sigma_r = -p_0; \quad \sigma_\varphi = \frac{m^2 + 1}{1 - m^2} p_0.$$

3. Цилиндр соединен по наружной поверхности с жестким недеформируемым корпусом двигателя.

   В этом случае заряд нагружается по внутренней поверхности давлением p_0, а по наружной — контактным давлением, т. е. $p_н = q_k$, которое определим из условий равенства нулю тангенциальной и осевой относительных деформаций, которые записываются так:

$$\varepsilon_\varphi^н = \frac{1}{E}\left(\sigma_\varphi^н - \mu\left(\sigma_r^н + \sigma_z^н\right)\right) = 0; \quad \varepsilon_z^н = \frac{1}{E}\left(\sigma_z^н - \mu\left(\sigma_r^н + \sigma_\varphi^н\right)\right) = 0.$$

   Исключая из этих равенств осевое напряжение $\sigma_z^н$, а потом подставляя в полученное выражение напряжения $\sigma_r^н$ и $\sigma_\varphi^н$ с помощью формул (4.24), (4.25), в которых следует подставить $\bar{r} = m$, т. к. $r = r_1$, получим следующее выражение для контактного давления на наружной поверхности цилиндра:

$$\frac{q_k}{p_0} = \frac{2m^2(1-\mu)}{1 + m^2 - 2\mu}. \tag{4.27}$$

Подставив этот результат в формулы (4.24) и (4.25), можно получить выражения для напряжений. Радиальное напряжение σ_r будет всегда сжимающим, в то время как знак тангенциального напряжения σ_φ зависит от величины параметров m, $\overline{r}$ и μ. Максимальное значение тангенциальное напряжение принимает на внутренней поверхности, где оно определяется по формуле:

$$\frac{(\sigma_\varphi)_{\max}}{p_0} = \frac{1 - m^2 - 2\mu}{1 + m^2 - 2\mu}. \tag{4.28}$$

На наружной поверхности эти напряжения принимают минимальное значение:

$$\frac{(\sigma_\varphi)_{\min}}{p_0} = \frac{-2\mu m^2}{1 + m^2 - 2\mu}. \tag{4.29}$$

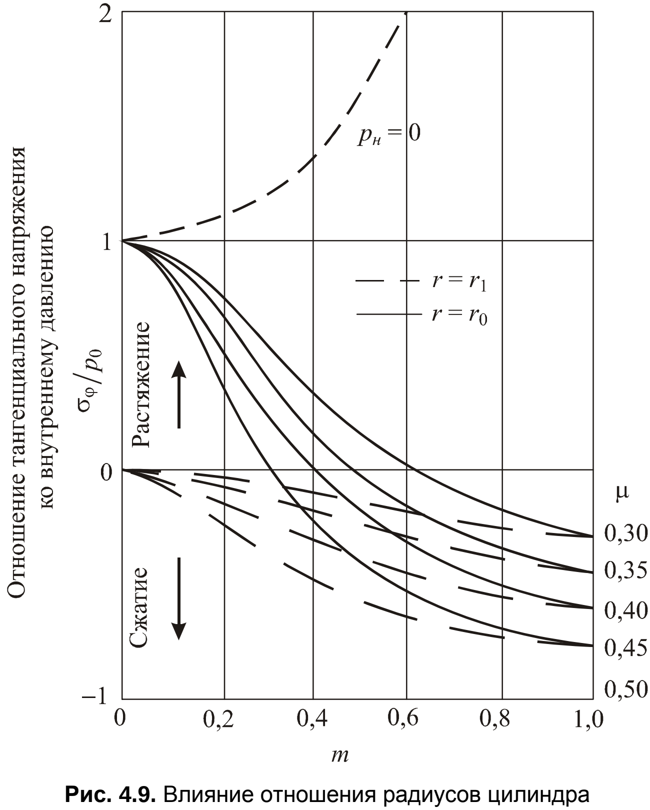


Рис. 4.9. Влияние отношения радиусов цилиндра на тангенциальные напряжения при жесткой оболочке

На рис. 4.9 построены графики зависимостей безразмерных тангенциальных напряжений на наружной (4.29) и внутренней (4.28) поверхностях цилиндрического заряда от отношения внутреннего радиуса цилиндра к наружному $0 \le m \le 1$ при нескольких значениях коэффициента Пуассона [4.1].

Из этих графиков следует, что тангенциальные напряжения на наружной поверхности всегда отрицательные, т. е. сжимающие. В это же время тангенциальные напряжения на внутренней поверхности становятся положительными при малых значениях m. На рис. 4.9 также построен график зависимости тангенциального напряжения для случая, когда цилиндр по наружной поверхности не нагружен, т. е. контактное давление $q_k = 0$. Этот случай наиболее опасен для заряда, т. к. напряжения стремятся к бесконечности при уменьшении толщины свода $e = r_1 - r_0$ цилиндра, когда m стремится к 1.

4. Цилиндр, соединенный с упругим корпусом двигателя.

В этом случае для определения контактного давления q_k воспользуемся условиями совместности деформации заряда и корпуса, которые сводятся к равенству тангенциальных и осевых деформаций корпуса и заряда при $r = r_1$, т. е. при $\bar{r} = m$:

$$\varepsilon_\varphi = \varepsilon_2 ; \quad \varepsilon_z = \varepsilon_1 = 0 .$$

С помощью закона Гука их можно переписать так:

$$\frac{1}{E}\left(\sigma_\varphi - \mu\left(\sigma_z + \sigma_r\right)\right) = \frac{1}{E_k}\left(\sigma_2 - \mu_k \sigma_1\right); \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{E_k}\left(\sigma_1 - \mu_k \sigma_2\right) = 0, \qquad (4.30)$$

где E_k — модуль упругости, а μ_k — коэффициент Пуассона материала корпуса.

Тангенциальные напряжения в корпусе σ_2 определим по формуле Лапласа, т. е. $\sigma_2 = \dfrac{q_k r_1}{\delta}$, в которой δ — толщина стенки корпуса. А из второго условия в (4.30) находим, что осевые напряжения $\sigma_1 = \mu_k \sigma_2$. Кроме того, из формул для напряжений в цилиндре (4.24)—(4.26) на наружной поверхности, т. е. при $\bar{r} = m$, имеем:

$$\sigma_r = -q_k ; \qquad (4.31)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{2m^2 p_0 - q_k\left(1 + m^2\right)}{1 - m^2}; \qquad (4.32)$$

$$\sigma_z = 2\mu \frac{m^2 p_0 - p_н}{1 - m^2}. \tag{4.33}$$

Подставляя (4.31)—(4.33) в первое условие (4.30), получим уравнение для определения контактного давления q_k, из которого находим:

$$\frac{q_k}{p_0} = \frac{2m^2(1-\mu)}{\left(1+m^2-2\mu\right)+\left(1-m^2\right)\frac{\left(1-\mu_k^2\right)}{(1+\mu)}\frac{Er_1}{E_k\delta}}. \tag{4.34}$$

При $\mu = 0{,}5$ (4.34) принимает вид:

$$\frac{q_k}{p_0} = \frac{1}{\left(1+\frac{2}{3}\frac{\left(1-m^2\right)}{m^2}\left(1-\mu_k^2\right)\frac{Er_1}{E_k\delta}\right)}. \tag{4.35}$$

Теперь, зная контактное давление, можно определить напряжения по формулам (4.24)—(4.26), а затем и относительные деформации по формулам (4.12)—(4.14).

4.4.2. Вязкоупругий материал

Получим сначала выражение для определения контактного давления, если материал корпуса по-прежнему упругий, а материал заряда — цилиндрической шашки — вязкоупругий. В этом случае второе условие из (4.30) останется без изменений, а первое условие запишется так:

$$\frac{r_1\left(1-\mu_k^2\right)}{E_k\delta} q_k = \varepsilon_\varphi. \tag{4.36}$$

Продифференцируем равенство (4.36) по времени:

$$\frac{r_1\left(1-\mu_k^2\right)}{E_k\delta} \dot{q}_k = \dot{\varepsilon}_\varphi. \tag{4.37}$$

Скорость изменения тангенциальной деформации $\dot{\varepsilon}_\varphi$ в заряде выражается через напряжения с помощью уравнения связи (4.9) для механической модели материала заряда:

$$\frac{r_1\left(1-\mu_k^2\right)}{E_k\delta} \dot{q}_k = \frac{3}{4}\left(\frac{\dot{\sigma}_\varphi - \dot{\sigma}_r}{E} + \frac{\sigma_\varphi - \sigma_r}{\lambda}\right), \tag{4.38}$$

в которое следует подставить выражения для напряжений (4.31), (4.32) на наружной поверхности заряда при $\overline{r} = m$. Производные этих напряжений по времени равны:

$$\dot{\sigma}_r = -\dot{q}_k; \tag{4.39}$$

$$\dot{\sigma}_\varphi = -\frac{1+m^2}{1-m^2}\dot{q}_k. \tag{4.40}$$

Подставляя (4.39) и (4.40) в условие (4.38), приходим к следующему обыкновенному линейному дифференциальному уравнению первого порядка относительно контактного давления:

$$\lambda\left(\frac{1}{E} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1-m^2}{m^2}\cdot\frac{1-\mu_k^2}{E_k}\cdot\frac{r_1}{\delta}\right)\dot{q}_k + q_k = p_o. \tag{4.41}$$

Обозначая в (4.41) коэффициент при производной контактного давления по времени как:

$$\tau = \frac{\lambda\left(1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1-m^2}{m^2}\left(1-\mu_k^2\right)\frac{Er_1}{E_k\delta}\right)}{E}$$

и решая это уравнение, получаем следующую формулу для расчета контактного давления в зависимости от времени t:

$$q_k(t) = q_{k0}e^{-\frac{t}{\tau}} + p_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \tag{4.42}$$

в которой q_{k0} — начальное контактное давление, которое определяется по упругой модели материала заряда с постоянным модулем упругости по формуле (4.35).

По известному контактному давлению и его производной от времени можно определить зависимость тангенциальной деформации от времени, если воспользоваться уравнением (4.9), в которое нужно подставить выражения для напряжений, определяемых по формулам Ламе (4.24), (4.25), и их производных. После подстановки приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению относительно тангенциальной деформации в заряде:

$$\dot{\varepsilon}_\varphi = \frac{3}{2}\cdot\frac{\overline{r}^2}{1-m^2}\left(-\frac{\dot{q}_k}{E} - \frac{q_k}{\lambda} + \frac{p_0}{\lambda}\right). \tag{4.43}$$

Дифференцируя (4.42), находим производную по времени от контактного давления:

$$\dot{q}_k = \frac{1}{\tau}(p_0 - q_{k0})e^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{4.44}$$

После подстановки (4.42) и (4.44) в (4.43) приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\dot{\varepsilon}_\varphi = \frac{3}{2}\cdot\frac{\overline{r}^2}{1-m^2}\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot\left(1-\frac{1}{1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1-m^2}{m^2}\cdot\left(1-\mu_k^2\right)\cdot\frac{Er_1}{E_k\delta}}\right)\cdot(p_0 - q_{k0})e^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{4.45}$$

Интегрируя это уравнение, получаем следующее выражение для определения тангенциальной деформации в заряде в зависимости от времени:

$$\varepsilon_\varphi(t) = \varepsilon_{\varphi 0} + \frac{\overline{r}^2}{m^2}\cdot\left(1-\mu_k^2\right)\cdot\frac{r_1}{E_k\delta}\cdot(p_0 - q_{k0})\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \tag{4.46}$$

в котором относительная деформация в начальный момент времени $\varepsilon_{\varphi 0}$ соответствует упругой линейной деформации, определяемой по закону Гука.

На внутренней поверхности заряда при $r = r_1$ и $\overline{r} = 1$ тангенциальная деформация равна:

$$\varepsilon_\varphi = \varepsilon_{\varphi 0} + \frac{1-\mu_k^2}{m^2}\cdot\frac{r_1}{E_k\delta}\cdot(p_0 - q_{k0})\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \tag{4.47}$$

Таким образом, тангенциальная деформация в вязкоупругом заряде складывается из относительной тангенциальной деформации $\varepsilon_{\varphi 0}$ в упругом заряде и деформации ползучести, которая равна второму слагаемому в формуле (4.47).

4.5. Температурные напряжения и деформации

Теперь рассмотрим случай нагружения заряда, когда внутреннее давление отсутствует, а контактное давление возникает из-за разной температурной деформации корпуса и материала заряда.

В физических уравнениях теории упругости, записанных для относительных деформаций, появится слагаемое, учитывающее температурное расширение:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\Big(\sigma_r - \mu\big(\sigma_z + \sigma_\varphi\big)\Big) + \alpha\Delta T\,; \tag{4.48}$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E}\Big(\sigma_\varphi - \mu\big(\sigma_r + \sigma_z\big)\Big) + \alpha\Delta T\,; \tag{4.49}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\Big(\sigma_z - \mu\big(\sigma_r + \sigma_\varphi\big)\Big) + \alpha\Delta T = 0\,. \tag{4.50}$$

Здесь α — коэффициент линейного расширения, а ΔT — перепад температур между текущей температурой заряда и ее равновесным значением, при котором деформации в заряде не возникают. Важно также отметить, что в рассматриваемой модели перепад температур постоянный по всему объему заряда.

Для заряда твердого топлива, скрепленного со стенками корпуса двигателя, обычно напряжения определяются по формулам Ламе (4.24)—(4.26), в которых внутреннее давление $p_0 = 0$, а внешнее контактное давление q_k определяется из условия равенства тангенциальных деформаций заряда и корпуса на поверхности их соединения с учетом температурных удлинений.

4.5.1. Линейно-упругий материал

Перепишем выражения для напряжений (4.24)—(4.26) для рассматриваемого случая. При этом учтем, что внутреннее давление отсутствует, т. е. $p_0 = 0$, а контактное давление растягивающее, поэтому в этих формулах нужно изменить знак наружного давления $p_н = -q_k$ на противоположный. Получаем:

$$\sigma_r = \frac{q_k\left(1 - \bar{r}^2\right)}{1 - m^2}\,; \tag{4.51}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{q_k\left(1 + \bar{r}^2\right)}{1 - m^2}\,. \tag{4.52}$$

Для определения осевого напряжения σ_z воспользуемся условием плоской деформации, которое запишется так:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\Big(\sigma_z - \mu\big(\sigma_r + \sigma_\varphi\big)\Big) + \alpha\Delta T = 0\,, \tag{4.53}$$

где α — коэффициент температурного расширения, а ΔT — отклонение температуры заряда от равновесной температуры, при которой температурные деформации отсутствуют.

Теперь, подставляя в (4.53) выражения для напряжений σ_r и σ_φ по формулам (4.51), (4.52), получим после преобразований:

$$\sigma_z = \frac{2\mu}{1-m^2} q_k - \alpha E \Delta T. \tag{4.54}$$

Рассуждая аналогичным образом и используя условие плоской деформации, получим осевые напряжения σ_z и в стенке корпуса. В данном случае условие плоской деформации записывается так:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E_k}\left(\sigma_1 - \mu_k \sigma_2\right) + \alpha_k \Delta T = 0, \tag{4.55}$$

где α_k — коэффициент температурного расширения материала корпуса.

Но так как $\sigma_2 = -\dfrac{q_k r_1}{\delta}$, то из (4.55) получаем искомые осевые (меридиональные) напряжения в оболочке корпуса в следующем виде:

$$\sigma_1 = -\mu_k \frac{q_k r_1}{\delta} - \alpha_k E_k \Delta T. \tag{4.56}$$

Для определения контактного давления q_k, входящего в записанные соотношения, воспользуемся условием равенства тангенциальных деформаций в корпусе и на наружной поверхности заряда, которое имеет вид:

$$\frac{1}{E_k}\left(\sigma_2 - \mu_k \sigma_1\right) + \alpha_k \Delta T = \frac{1}{E}\Big(\sigma_\varphi - \mu\left(\sigma_r + \sigma_z\right)\Big) + \alpha \Delta T. \tag{4.57}$$

Подставляя в него формулы для напряжений, получим алгебраическое уравнение относительно одного неизвестного q_k:

$$\begin{gathered}\frac{E}{E_k}\left(-\frac{q_k r_1}{\delta} + \mu_k^2 \frac{q_k r_1}{\delta}\right) - \left(\alpha - \alpha_k\right) E \Delta T - \left(\alpha\mu - \alpha_k \mu_k\right) E \Delta T = \\ = \frac{1+m^2}{1-m^2} q_k - \mu q_k - \frac{2\mu^2}{1-m^2} q_k.\end{gathered} \tag{4.58}$$

Решая уравнение (4.58), получим:

$$q_k = -\frac{\left(\alpha - \alpha_k \dfrac{1+\mu_k}{1+\mu}\right)\left(1-m^2\right) E \Delta T}{\left(1+m^2-2\mu\right) + \left(1-m^2\right)\dfrac{1-\mu_k^2}{1+\mu} \cdot \dfrac{E r_1}{E_k \delta}}. \tag{4.59}$$

При $\mu = 0,5$ это уравнение перепишется так:

$$q_k = -\frac{\left(\alpha - \frac{2}{3}\alpha_k\left(1+\mu_k\right)\right)\frac{1-m^2}{m^2}E\Delta T}{1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1-m^2}{m^2}\cdot\left(1-\mu_k^2\right)\frac{Er_1}{E_k\delta}}. \tag{4.60}$$

По известному контактному давлению температурные напряжения и деформации на внутренней поверхности определяются обычно в следующем порядке.

При $\bar{r} = 1$ из формул (4.51), (4.52) и (4.54) получаем:

$$\sigma_r = 0; \quad \sigma_\varphi = \frac{2}{1-m^2}q_k; \quad \sigma_z = \frac{2\mu}{1-m^2}q_k - \alpha E\Delta T.$$

Для иллюстрации влияния различий в коэффициентах линейного расширения материалов корпуса и твердотопливного заряда на температурные напряжения в топливе на рис. 4.10 построены графики зависимостей безразмерных тангенциальных напряжений от отношения этих коэффициентов [4.1].

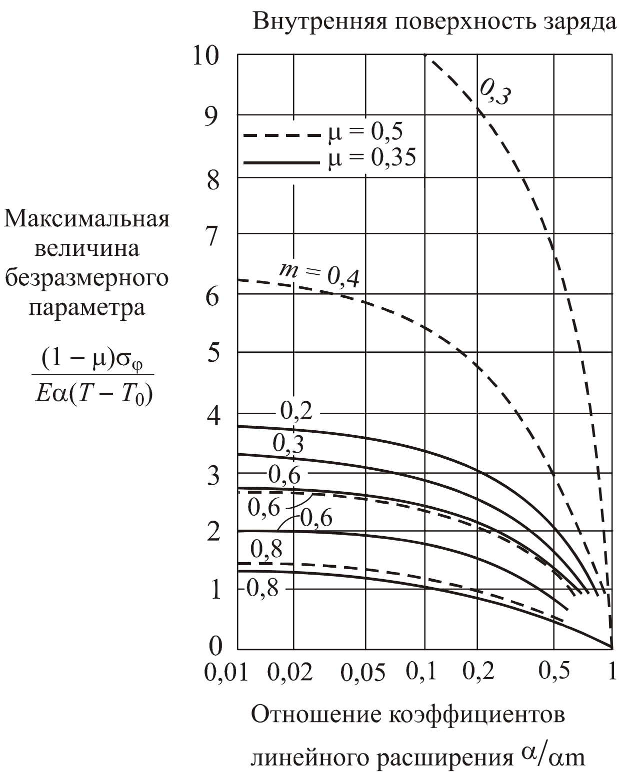


Рис. 4.10. Температурные напряжения в заряде, скрепленном с оболочкой

А так как температурные деформации используются только для определения контактного давления, то тангенциальная деформация на внутренней поверхности определяется без учета температурного расширения заряда по следующей формуле:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E}\left(\sigma_\varphi - \mu\left(\sigma_r + \sigma_z\right)\right) + \alpha\Delta T .$$

Полученная деформация складывается с деформацией, полученной зарядом в результате нагружения его давлением, т. к. использовались линейные соотношения для напряжений и деформаций, основанные на законе Гука.

4.5.2. Вязкоупругий материал

В случае вязкоупругого материала исходной формулой для расчета контактного давления будет та же формула (4.42), в которой внутреннее давление p_0 равно нулю, т. к. в этом случае на заряд действует только контактное давление q_k. Тогда формула (4.42) принимает следующий вид:

$$q_k = q_{k0} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \tag{4.61}$$

где q_{k0} — начальное контактное давление, которое определяется по формуле (4.60), что соответствует упругому заряду, когда контактное давление растягивает заряд и q_{k0} положительное; τ — время релаксации, которое определяется по формуле:

$$\tau = \frac{\lambda}{E}\left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1-m^2}{m^2} \cdot \left(1-\mu_k^2\right) \cdot \frac{Er_1}{E_k\delta}\right).$$

Определим теперь тангенциальную деформацию на внутренней поверхности порохового заряда при $r = r_0$ и $\overline{r} = 1$. Для этого воспользуемся выражением (4.47), в котором нужно внутреннее давление p_0 принять равным нулю:

$$\varepsilon_\varphi = \varepsilon_{\varphi 0} + \frac{1-\mu_k^2}{m^2}\frac{r_1}{E_k\delta} q_{k0} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \tag{4.62}$$

Таким образом, расчет тангенциальной деформации в вязкоупругом заряде сводится к расчету деформации в упругом заряде $\varepsilon_{\varphi 0}$ с мгновенным модулем упругости и к расчету деформации ползучести, которая в соотношении (4.62) представлена вторым слагаемым. Расчет упругой деформации заряда $\varepsilon_{\varphi 0}$ ведется по формулам, приведенным в *разд. 4.5.1*.

Выводы

В этой главе были изучены следующие вопросы:

1. Построена вязкоупругая модель ползучести материала, основанная на механической модели упругой пружины с демпфером.
2. Решена задача о напряженно-деформированном состоянии упругой цилиндрической трубы, соединенной с упругой тонкой оболочкой.
3. Получены соотношения для расчета контактного давления и относительной деформации в следующих случаях:
   - упругое тело, нагруженное внутренним давлением;
   - вязкоупругое тело, нагруженное внутренним давлением;
   - нагретое упругое тело, не нагруженное внутренним давлением;
   - нагретое вязкоупругое тело, не нагруженное внутренним давлением.

Упражнения и вопросы

1. Почему для расчета напряжений и деформаций в цилиндрическом заряде твердого топлива можно воспользоваться моделью плоского деформированного состояния?
2. В какой точке по радиусу упругой цилиндрической трубы возникают наибольшие тангенциальные напряжения, если на внутренней поверхности цилиндра действует давление, а наружная поверхность скреплена с жестким недеформируемым корпусом?
3. В чем особенность поведения материала при ползучести? Постройте диаграмму релаксации материала при постоянной деформации.
4. Нарисуйте кривую ползучести для вязкоупругого линейного материала.
5. Определите контактное давление и тангенциальную деформацию на внутренней поверхности упругого цилиндрического заряда, нагруженного внутренним давлением 4 МПа при следующих исходных данных: $r_0 = 0{,}15$ м; $r_1 = 0{,}5$ м; $\delta = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ м; $E = 5 \cdot 10^7$ Па; $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $\mu = 0{,}5$; $\mu_k = 0{,}3$.
6. Цилиндрический заряд твердого топлива охлажден до температуры $\Delta T = -50°$. Коэффициент линейного расширения материала заряда $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-4}$ 1/°C, а корпуса $\alpha_k = 2 \cdot 10^{-5}$ 1/°C. Определите контактное давление и тангенциальную деформацию на внутренней поверхности ци-

линдра, если внутреннее давление отсутствует (исходные данные взять из предыдущей задачи).

7. Определите тангенциальную деформацию на внутреннем радиусе цилиндрического заряда твердого топлива в начальный момент времени и к концу третьей секунды при ползучести. Данные для расчета: $p_0 = 4\ \text{МПа}$; $r_0 = 0{,}15\ \text{м}$; $r_1 = 0{,}5\ \text{м}$; $\delta = 2 \cdot 10^{-3}\ \text{м}$; $E = 3{,}5 \cdot 10^7\ \text{Па}$; $E = 2 \cdot 10^{11}\ \text{Па}$; $\mu = 0{,}5$; $\mu_k = 0{,}3$; коэффициент вязкости $\lambda = 8{,}8 \cdot 10^7\ \text{Па} \cdot \text{с}$.
8. Определите тангенциальную деформацию на внутреннем радиусе цилиндрического заряда твердого топлива в начальный момент времени и через 1 год ($3{,}15 \cdot 10^7\ \text{с}$) при ползучести. Данные для расчета: температура хранения $\Delta T = -50°\text{C}$; $r_0 = 0{,}15\ \text{м}$; $r_1 = 0{,}5\ \text{м}$; $\delta = 2 \cdot 10^{-3}\ \text{м}$; $E = 3{,}5 \cdot 10^7\ \text{Па}$; $E = 2 \cdot 10^{11}\ \text{Па}$; $\mu = 0{,}5$; $\mu_k = 0{,}3$; коэффициент вязкости $\lambda = 10^{10}\ \text{Па} \cdot \text{с}$.

Литература к главе 4

1. Баррер М., Жомотт Ф., Вебек Б. Ф., Ванденкерхове Ж. Ракетные двигатели. — М.: Оборонгиз, 1962, 799 с.
2. Конструкция управляемых баллистических ракет. Колл. авт. — М.: Воениздат, 1969.
3. Кристинсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. — М.: Мир, 1974, 338 с.
4. Москвитин В. В. Сопротивление вязко-упругих материалов (применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе). — М.: Наука, 1972, 328 с.
5. Фахрутдинов И. Х., Котельников А. В. Конструкция и проектирование ракетных двигателей твердого топлива. Учебник для машиностроительных вузов. — М.: Машиностроение, 1987, 328 с.
6. Шапиро Я. М., Мазинг Г. Ю., Прудников Н. Е. Основы проектирования ракет на твердом топливе. — М.: ВИМО, 1968, 352 с.

Глава 5

Тонкие пластинки

Эта глава посвящена изгибу тонких пластин с эллиптической или круглой конфигурацией контура. Исходное уравнение, описывающее изгиб пластин, будет получено последовательным упрощением уравнений теории упругости путем применения к ним гипотез Кирхгоффа. Практическое применение этого уравнения иллюстрируется на примере пластин, имеющих геометрическую форму контура, наиболее часто используемую в инженерных сооружениях и конструкциях.

В этой главе рассматриваются следующие темы:

- классификация пластин и гипотезы Кирхгоффа в теории тонких пластин;
- дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности тонкой пластинки;
- внутренние погонные усилия и моменты, граничные условия;
- эллиптическая пластинка, закрепленная по контуру;
- осесимметричный изгиб круглых пластин;
- особенности расчета перфорированных пластин.

5.1. Определения

Начнем с терминологических определений, указывающих на особенности пластин как тонкостенных конструкций, созданных из твердых тел.

> ***Пластиной*** называют плоское тело, ограниченное двумя поверхностями, расстояние между которыми (толщина) мало по сравнению с размерами самих поверхностей.
>
> Плоскость, равноудаленная от наружных поверхностей пластины, называется ***срединной***.

Этим пластины отличаются от оболочек, у которых срединная поверхность не плоская. При изгибе пластины срединная плоскость искривляется и превращается в поверхность.

В зависимости от формы контура пластины могут быть круглыми, прямоугольными, эллиптическими и т. д. На рис. 5.1 приведены примеры пластин, используемых в качестве элементов конструкций летательных аппаратов.

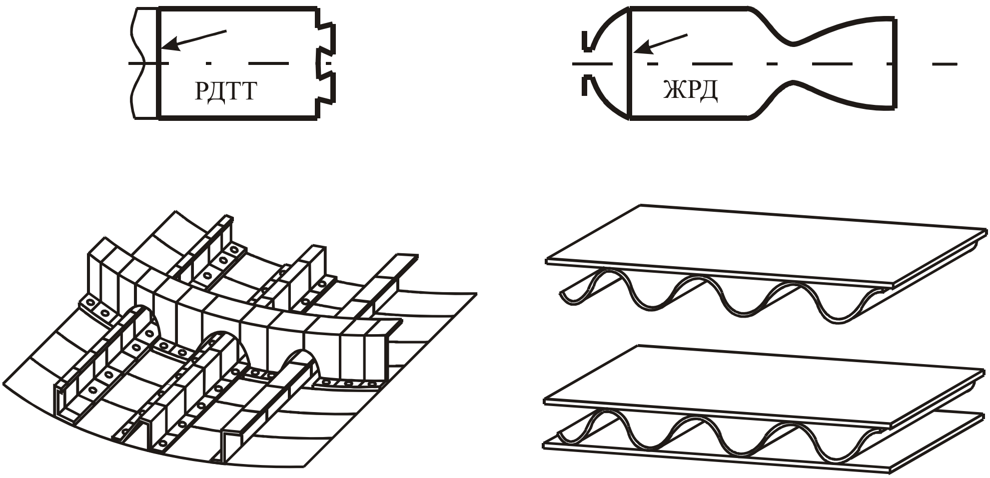


Рис. 5.1. Примеры элементов конструкций в виде пластин

5.2. Классификация пластинок

В зависимости от отношения толщины пластинки δ к ее наименьшему размеру a в плоскости основания, пластины принято делить на следующие группы:

1. Плиты или толстые пластины: $\frac{\delta}{a} > 0,2$.
2. Тонкие пластинки: $\frac{1}{40} \le \frac{\delta}{a} \le 0,2$.
3. Мембраны: $\frac{\delta}{a} < \frac{1}{40}$.

Геометрические особенности пластин различных групп позволяют принимать физически обоснованные только для них допущения, которые делают возможным упрощение системы уравнений теории упругости. Так, например, прогиб мембраны может в несколько раз превышать ее толщину, и можно сказать, что нормальные напряжения по толщине мембраны постоянные. В то же время тонкие пластинки получают прогиб, не превосходящий их толщины. Пластинки подобного типа широко распространены в технике, а их теория основана на гипотезах Кирхгоффа, которые позволяют существенно упростить систему уравнений теории упругости. Далее в этой главе будут рассматриваться только тонкие пластинки.

5.3. Гипотезы Кирхгоффа

Эти гипотезы являются дальнейшим обобщением гипотез Бернулли, которые используются при расчете изгиба балок. В этих гипотезах принимается, что поперечные сечения балки остаются плоскими и нормальными к ее оси в процессе изгиба. Дополнительно принимается, что волокна балки не надавливают друг на друга. Для пластинок эти гипотезы формулируются следующим образом.

Первая гипотеза: нормаль к срединной поверхности не искривляется, а только поворачивается при изгибе пластинки. Это означает, что сдвиги в плоскостях, проходящих через нормаль к срединной поверхности, равны нулю. Для системы координат, изображенной на рис. 5.2, можно записать: $\gamma_{zx} \approx 0$, $\gamma_{zy} \approx 0$.

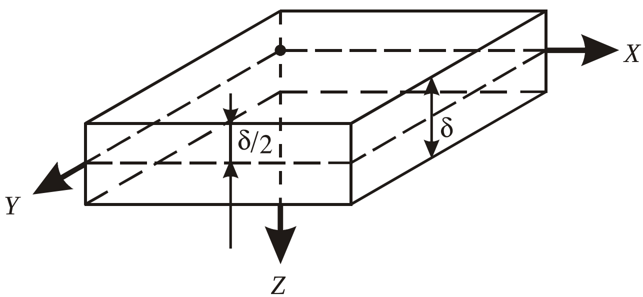


Рис. 5.2. Декартова система координат пластинки

Вторая гипотеза: нормаль к срединной поверхности не растягивается, т. е. $\varepsilon_z \approx 0$.

Третья гипотеза: нормальными напряжениями на площадках, параллельных срединной плоскости, можно пренебречь по сравнению с другими напряжениями, т. е. $\sigma_z \approx 0$.

Четвертая гипотеза: срединная поверхность не растягивается и не сжимается, т. е. нормальные напряжения на ней равны нулю.

Если провести сравнение с гипотезами Лава в теории оболочек *(см. разд. 6.3)*, то первые три гипотезы полностью совпадают с гипотезами, которые используются в теории тонких оболочек. В то же время последняя "четвертая" гипотеза используется только в пластинках.

Таким образом, с помощью гипотез Кирхгоффа можно трехмерное напряженное состояние свести к двумерному и сократить количество неизвестных в общей системе уравнений теории упругости. Для тонких пластинок на основании гипотез принимают: $\tau_{zx} = \tau_{xz} \approx 0$; $\tau_{zy} = \tau_{yz} \approx 0$; $\gamma_{zx} \approx 0$; $\gamma_{zy} \approx 0$; $\sigma_z \approx 0$; $\varepsilon_z \approx 0$. Если выделить в окрестности любой точки пластинки элементарный параллелепипед, показанный на рис. 5.3, то на его гранях будут действовать только напряжения σ_x, σ_y, τ_{xy}, τ_{yx}, а на срединной поверхности могут возникать только касательные напряжения $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, т. к. на основании четвертой гипотезы нормальные напряжения здесь равны нулю, т. е. $\sigma_x = \sigma_y = 0$.

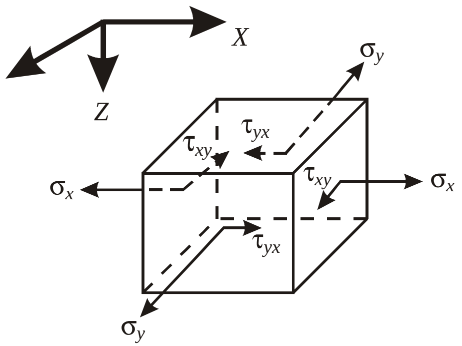


Рис. 5.3. Напряжения в тонкой пластинке

5.4. Геометрические уравнения

Рассмотрим прямоугольную пластинку, нагруженную внешней нагрузкой интенсивностью $q(x, y)$. Преобразуем систему уравнений теории упругости, воспользовавшись гипотезами Кирхгоффа. Установим сначала характер изменения перемещений по толщине пластинки из геометрических уравнений теории упругости, которые в декартовой системе координат записываются так:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \tag{5.1}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \tag{5.4}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \approx 0; \tag{5.2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \tag{5.5}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \approx 0; \tag{5.3}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \approx 0. \tag{5.6}$$

Проинтегрируем (5.2) и (5.3) по z:

$$v = -\frac{\partial w}{\partial y} z + C_1; \tag{5.7}$$

$$u = -\frac{\partial w}{\partial x} z + C_2. \tag{5.8}$$

Здесь использовалось условие независимости w от z, которое следует из (5.6), т. к. $w = w(x, y)$. Физически это означает, что толщина пластинки не меняется, а перемещения всех точек, имеющих одинаковые координаты в направлении оси *Z*, равны.

Определим константы C_1 и C_2, воспользовавшись четвертой гипотезой Кирхгоффа, на основании которой на срединной поверхности, т. е. при $z = 0$, $u = v = 0$. Тогда $C_1 = C_2 = 0$, и выражения (5.7), (5.8) принимают вид:

$$u = -\frac{\partial w}{\partial x} x; \tag{5.9}$$

$$v = -\frac{\partial w}{\partial y} z, \tag{5.10}$$

а геометрические уравнения можно переписать так:

$$\gamma_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z; \quad \varepsilon_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z; \quad \varepsilon_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z. \tag{5.11}$$

5.5. Физические уравнения

Воспользуемся теперь гипотезами Кирхгоффа и полученными соотношениями для преобразования физических уравнений. Имеем:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y\right); \qquad (5.12)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}; \qquad (5.15)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x\right); \qquad (5.13)$$

$$\tau_{yz} \approx 0; \qquad (5.16)$$

$$\sigma_z \approx 0; \qquad (5.14)$$

$$\tau_{zx} \approx 0. \qquad (5.17)$$

Подставляя в уравнения (5.12), (5.13) и (5.15) преобразованные геометрические уравнения (5.11), получаем:

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right); \qquad (5.18)$$

$$\sigma_y = -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right); \qquad (5.19)$$

$$\tau_{xy} = -2Gz\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{Ez}{(1+\mu)}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \qquad (5.20)$$

где в последнее соотношение вместо модуля сдвига подставлено его выражение через модуль упругости:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

5.6. Уравнение изгиба тонкой пластинки

Уравнения равновесия теории упругости, в которых отброшены объемные силы, останутся без изменений, т. к. в них присутствуют производные от напряжений σ_z, τ_{zx}, τ_{zy}, которые соизмеримы с другими производными. В то же время на основании гипотез Кирхгоффа величиной этих напряжений можно пренебречь из-за их малости по сравнению с другими напряжениями. Перепишем уравнения равновесия, исключив из них проекции объемных сил:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} = 0; \qquad (5.21)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}=0\,; \qquad (5.22)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}=0\,. \qquad (5.23)$$

Определим сначала из уравнений (5.21) и (5.22) малые напряжения τ_{xz}, τ_{yz}, воспользовавшись физическими уравнениями (5.18)—(5.20). Имеем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}&=\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\mu\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)+\frac{Ez}{1+\mu}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}=\\&=\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right);\end{aligned} \qquad (5.24)$$

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}=\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial y\partial x^2}\right). \qquad (5.25)$$

Интегрируем (5.24) и (5.25) по z:

$$\tau_{xz}=\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)\frac{z^2}{2}+C_3\,; \qquad (5.26)$$

$$\tau_{yz}=\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial y\partial x^2}\right)\frac{z^2}{2}+C_4\,. \qquad (5.27)$$

Для определения констант C_3 и C_4 воспользуемся формулами Коши:

$$F_{nx}=\sigma_x n_x+\tau_{yx}n_y+\tau_{zx}n_z\,;$$

$$F_{ny}=\tau_{xy}n_x+\sigma_y n_y+\tau_{zy}n_z\,;$$

$$F_{nz}=\tau_{xz}n_x+\tau_{yz}n_y+\sigma_z n_z$$

и граничными условиями на поверхностях пластинки.

Нормалью к наружной поверхности ($z=-\delta/2$) пластинки служит отрицательная ось *Z*, поэтому $n_z=-1$; $n_x=n_y=0$ и, кроме этого, здесь $F_{nx}=0$; $F_{ny}=0$; $F_{nz}=q(x,y)$, поэтому из формул Коши получаем:

$$\tau_{zx}\left(x,y,-\frac{\delta}{2}\right)=0\,;\quad \tau_{zy}\left(x,y,-\frac{\delta}{2}\right)=0\,;\quad \sigma_z\left(x,y;-\frac{\delta}{2}\right)=-q(x,y)\,. \qquad (5.28)$$

На внутренней поверхности пластинки при $z=\delta/2$: $n_z=1$, $n_x=n_y=0$, $F_{nx}=0$, $F_{ny}=0$, $F_{nz}=0$, и из формул Коши получаем:

$$\tau_{zx}\left(x,y,\frac{\delta}{2}\right)=0;\quad \tau_{zy}\left(x,y,\frac{\delta}{2}\right)=0;\quad \sigma_z\left(x,y,\frac{\delta}{2}\right)=0. \tag{5.29}$$

Теперь константы интегрирования в (5.26) и (5.27) определяем с помощью (5.28), (5.29) и получаем:

$$C_3=-\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)\frac{\delta^2}{8};\quad C_4=-\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial y\partial x^2}\right)\frac{\delta^2}{8},$$

поэтому выражения (5.26), (5.27) для искомых напряжений принимают следующий вид:

$$\tau_{xz}=\frac{E}{2\left(1-\mu^2\right)}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)\left(z^2-\frac{\delta^2}{4}\right); \tag{5.30}$$

$$\tau_{yz}=\frac{E}{2\left(1-\mu^2\right)}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial y\partial x^2}\right)\left(z^2-\frac{\delta^2}{4}\right). \tag{5.31}$$

Теперь найдем σ_z из (5.23), подставляя в него производные от τ_{xz} и τ_{yz}:

$$\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=-\frac{E}{2\left(1-\mu^2\right)}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)\left(z^2-\frac{\delta^2}{4}\right), \tag{5.32}$$

где $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\nabla^4 w$ — бигармонический оператор.

Проинтегрируем (5.32) по z:

$$\sigma_z=\frac{E}{2\left(1-\mu^2\right)}\nabla^4 w\left(\frac{\delta^2}{4}z-\frac{z^3}{3}\right)+C_5\left(x,y\right). \tag{5.33}$$

Для определения константы $C_5\left(x,y\right)$ воспользуемся третьим граничным условием из (5.29). Получим:

$$C_5=-\frac{E}{2\left(1-\mu^2\right)}\left(\frac{\delta^3}{8}-\frac{\delta^3}{24}\right)\nabla^4 w,$$

и поэтому (5.33) записывается в следующем виде:

$$\sigma_z = \frac{E}{2\left(1-\mu^2\right)} \nabla^4 w \left(\frac{\delta^2}{4} z - \frac{z^3}{3} - \frac{\delta^3}{12} \right). \tag{5.34}$$

Таким образом, выражения (5.18)—(5.20), (5.30), (5.31) и (5.33) позволяют определить все напряжения в пластине, если известно перемещение w, которое, как было установлено, не зависит от z.

Получим уравнение для определения $w(x, y)$, воспользовавшись (5.34) и третьим граничным условием в (5.28). Имеем:

$$-q = \frac{E}{2\left(1-\mu^2\right)} \nabla^4 w \left(-\frac{\delta^3}{8} + \frac{\delta^3}{24} - \frac{\delta^3}{12} \right),$$

или окончательно:

$$D \nabla^4 w = q(x, y), \tag{5.35}$$

где $D = \dfrac{E\delta^3}{12\left(1-\mu^2\right)}$ — цилиндрическая жесткость пластинки.

В цилиндрической системе координат *(см. Приложение 2)* бигармонический оператор записывается в виде:

$$\nabla^4 w = \frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr}.$$

Уравнение равновесия изогнутой срединной поверхности пластинки в форме (5.35) впервые было получено Софи Жермен в 1811 г., французским математиком и механиком, ученицей выдающегося французского математика Жозефа Луи Лагранжа (долгое время она общалась с ним анонимно под именем бывшего студента Политехнической школы Антуана Огюста Леблана). Ее наивысшим достижением в механике был "Мемуар о колебаниях упругих пластин" — работа, заложившая основы современной теории упругости. За эту работу и за работы по Великой теореме Ферма Софи Жермен была удостоена медали Института Франции.

На Эйфелевой башне в Париже начертаны имена семидесяти двух ученых, внесших весомый вклад в развитие и становление теории упругости. Но среди этих имен отсутствует имя Софи Жермен, исследования которой во многом способствовали становлению теории упругости, и только лишь потому, что она была женщиной.

5.7. Внутренние погонные усилия и моменты

Решая уравнение (5.35), можно получить распределение нормальных перемещений по поверхности пластинки, которые постоянны по ее толщине. Запишем теперь окончательные выражения для напряжений по толщине пластинки.

5.7.1. Распределение напряжений по толщине

Гипотезы Кирхгоффа позволили существенно упростить исходную систему уравнений теории упругости и получить следующие выражения для расчета напряжений в пластинке:

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right); \tag{5.36}$$

$$\sigma_y = -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right); \tag{5.37}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Ez}{1+\mu}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \tag{5.38}$$

$$\tau_{xz} = \frac{E}{2\left(1-\mu^2\right)}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right)\left(z^2 - \frac{\delta^2}{4}\right); \tag{5.39}$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2\left(1-\mu^2\right)}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right)\left(z^2 - \frac{\delta^2}{4}\right); \tag{5.40}$$

$$\sigma_z = \frac{E}{2\left(1-\mu^2\right)}\nabla^4 w\left(\frac{\delta^2}{4}z - \frac{z^3}{3} - \frac{\delta^3}{12}\right). \tag{5.41}$$

Как следует из выражений (5.36)—(5.38), напряжения σ_x, σ_y, τ_{xy} распределены по толщине пластинки линейно (координата z имеет первую степень) и равны нулю при $z=0$, т. е. на срединной плоскости (рис. 5.4). В то же время малые напряжения (принимаемые равными нулю на основании гипотез Кирхгоффа) τ_{xz}, τ_{yz} и σ_z распределены по толщине пластинки параболически. Причем нормальные напряжения σ_z равны нулю при $\delta/2$ и по величине равны $q(x,y)$ на внешней поверхности при $z=-\frac{\delta}{2}$, где приложено внешнее изгибающее пластинку давление.

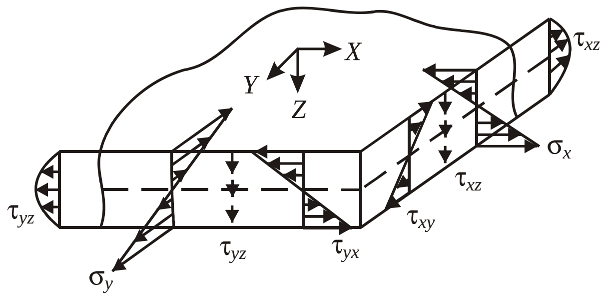


Рис. 5.4. Распределение напряжений по толщине пластинки

5.7.2. Погонные усилия и моменты

Перепишем выражения для напряжений (5.36)—(5.41) в более компактном виде, введя понятия погонных усилий и моментов. Как известно, на каждой грани пластинки будут действовать внутреннее усилие и момент, которые характеризуют воздействие отброшенной части тела на выделенную часть. Это усилие и момент можно разложить на три проекции по осям выбранной системы координат. В расчетах удобнее использовать не полное усилие и момент, действующие на грань пластинки, а их погонные значения (т. е. на единицу длины грани).

Таким образом, если на грани пластинки взять полоску единичной ширины и проинтегрировать выражения для напряжений по толщине пластинки, то это и будут погонные усилия. Интегрируя (5.36), (5.37) и (5.38), получаем:

$$N_x=-\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\int\limits_{-\delta/2}^{\delta/2} z dz=0\,;$$

$$N_y=-\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\int\limits_{-\delta/2}^{\delta/2} z dz=0\,;$$

$$N_{xy}=0\,.$$

Результат, полученный для N_x, N_y, N_{xy}, не является удивительным, если вспомнить, что на основании четвертой гипотезы Кирхгоффа срединная поверхность пластинки не деформируется.

Интегрируя (5.39) по толщине пластинки, получим:

$$Q_x = \int\limits_{-\delta/2}^{\delta/2} \tau_{xz} dz = \frac{E}{2\left(1-\mu^2\right)} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \left(\frac{z^3}{3} - \frac{\delta^2}{4} z \right) \Bigg|_{-\delta/2}^{\delta/2} =$$

$$= \frac{E}{2\left(1-\mu^2\right)} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \left(\frac{\delta^3}{24} - \frac{\delta^3}{8} + \frac{\delta^3}{24} - \frac{\delta^3}{8} \right),$$

или:

$$Q_x = -\frac{E\delta^3}{12\left(1-\mu^2\right)} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right). \tag{5.42}$$

Аналогично из (5.40) и (5.41) получаем:

$$Q_y = \int\limits_{-\delta/2}^{\delta/2} \tau_{yz} dz = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right); \tag{5.43}$$

$$Q_z = \int\limits_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_z dz = \frac{E}{2\left(1-\mu^2\right)} \nabla^4 w \left(\frac{\delta^2 z^2}{8} - \frac{z^4}{12} - \frac{\delta^3}{12} z \right) \Bigg|_{-\delta/2}^{\delta/2} =$$

$$= \frac{E}{2\left(1-\mu^2\right)} \nabla^4 w \left(\frac{\delta^4}{32} - \frac{\delta^4}{16 \cdot 12} - \frac{\delta^4}{24} - \frac{\delta^4}{32} + \frac{\delta^4}{16 \cdot 12} - \frac{\delta^4}{24} \right);$$

$$Q_z = -\frac{E\delta^4}{12\left(1-\mu^2\right)} \nabla^4 w. \tag{5.44}$$

Чтобы понять причину возникновения изгибающих и крутящих моментов, рассмотрим эпюры напряжений по толщине пластинки, построенные на рис. 5.4 с помощью формул (5.36)—(5.41). На рис. 5.4 положительными считаются напряжения при $z > 0$, причем сами напряжения переменные по толщине. Это и служит причиной возникновения изгибающих и крутящих моментов вокруг срединной поверхности. Вычислим только погонные моменты M_x, M_y, M_{xy}, т. к. погонные моменты, соответствующие напряжениям σ_z, τ_{xz}, τ_{yz}, равны нулю.

Имеем:

$$M_x = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_x dz = -\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\frac{z^3}{3}\Bigg|_{-\delta/2}^{\delta/2} = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right); \quad (5.45)$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right); \quad (5.46)$$

$$M_{xy} = -\frac{E\delta^3}{12\left(1+\mu^2\right)}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -D\left(1-\mu\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (5.47)$$

Воспользуемся полученными выражениями для погонных внутренних усилий и моментов, чтобы записать в компактном виде формулы для напряжений в пластинке.

5.7.3. Запись напряжений через погонные усилия и моменты

Таким образом, соотношения (5.42)—(5.44) для перерезывающих сил, (5.45), (5.46) для изгибающих моментов и одно соотношение (5.47) для крутящего момента позволяют записать выражения для соответствующих напряжений в следующем виде:

$$\sigma_x = \frac{12M_x}{\delta^3}z; \quad (5.48) \qquad \tau_{xz} = \frac{6Q_x}{\delta^3}\left(\frac{\delta^2}{4}-z^2\right); \quad (5.51)$$

$$\sigma_y = \frac{12M_y}{\delta^3}z; \quad (5.49) \qquad \tau_{yz} = \frac{6Q_y}{\delta^3}\left(\frac{\delta^2}{4}-z^2\right); \quad (5.52)$$

$$\tau_{xy} = \frac{12M_{xy}}{\delta^3}z; \quad (5.50) \qquad \sigma_z = \frac{12Q_z}{\delta^4}\left(\frac{\delta^3}{12}+\frac{z^3}{3}-\frac{\delta^2}{4}z\right). \quad (5.53)$$

В дальнейшем будем считать, что перерезывающие силы и моменты положительные, если на той части грани пластинки, где $z > 0$, они создают положительные напряжения.

5.8. Граничные условия

Формулы (5.48)—(5.53) позволяют определить напряжения в пластинке, если известны ее перемещения w в направлении оси Z. Для определения w необходимо решить уравнение Софи Жермен, к которому следует добавить граничные условия, следующие из условий закрепления пластинки по контуру. Рассмотрим граничные условия для различных закреплений краев прямоугольной пластинки *OABC*, изображенной на рис. 5.5.

- Жесткая заделка на стороне *OA* при $y=0$.

  В заделке отсутствуют прогибы и невозможен поворот краевого сечения относительно оси *X*, поэтому при $y=0$ должно быть $w=0$; $\dfrac{\partial w(x,0)}{\partial y}=0$.

- Шарнирно опертые края *CO* и *AB* при $x=0$ и $x=a$.

  На шарнирных краях перемещения и изгибающие моменты равны нулю, т. е. $w=0$ и $M_x=0$. Последнее условие можно выразить через перемещение w с помощью формулы (5.45), поэтому граничные условия на шарнирно опертых краях *CO* и *AB* принимают следующий вид: при $x=0$ и $x=a$ должно быть $w=0$; $M_x=\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$.

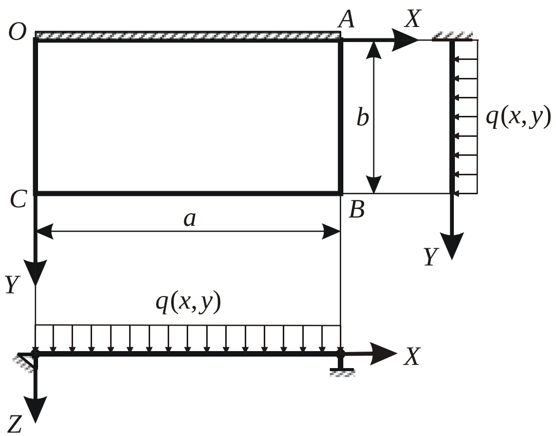


Рис. 5.5. Варианты закрепления краев прямоугольной пластинки

- Свободный край *CB* при $y=b$.

  На свободном краю должны обращаться в ноль изгибающий момент M_y, перерезывающая сила Q_y и крутящий момент M_{xy}, т. е. имеются три граничных условия вместо двух. Однако граничные условия для Q_y и M_{xy} можно заменить одним эквивалентным граничным условием.

Для этого рассмотрим крутящий момент $H = M_{xy} = M_{yx}$, распределенный вдоль грани *CB*, параллельной оси *X* (рис. 5.6, *а*). На участке грани длиной dx действует крутящий момент, равный Hdx, который можно представить в виде двух вертикальных противоположно направленных сил H с плечом dx (рис. 5.6, *б*). На соседнем элементе крутящий момент будет больше, т. к. сила возрастает на бесконечно малую величину и равна $\left(H + \dfrac{\partial H}{\partial x}dx\right)$. Его также можно представить в виде двух вертикально и противоположно направленных сил $H + \dfrac{\partial H}{\partial x}dx$ с плечом dx. Осуществим подобную замену крутящих моментов вертикальными силами по всей длине грани *CB*. На границах каждого из бесконечно малых участков длиной dx, за исключением крайних точек *C* и *B*, возникают две противоположно направленные силы, разность между которыми равна $\dfrac{\partial H}{\partial x}dx$, а в точках *C* и *B* возникают сосредоточенные силы H_C и H_B (рис. 5.6, *в*).

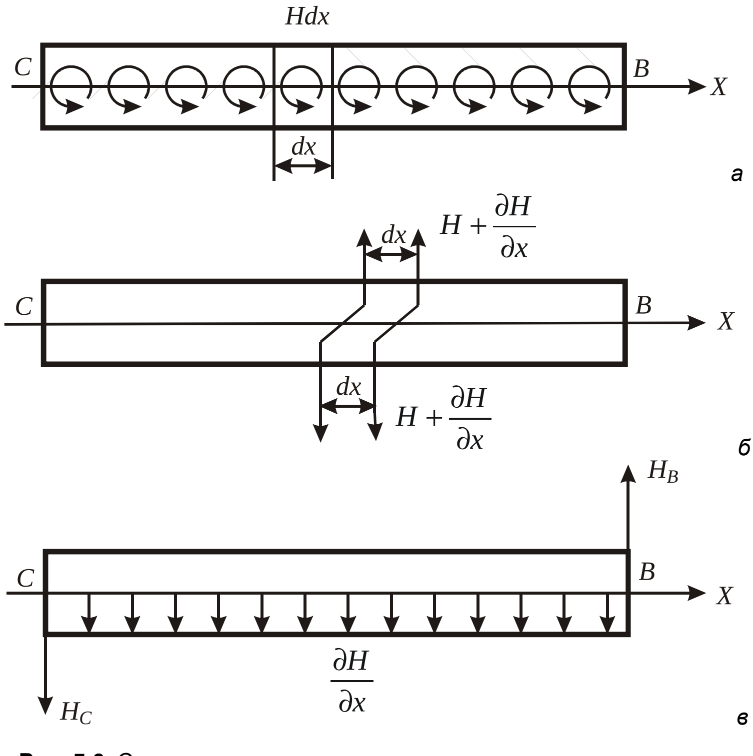


Рис. 5.6. Схема замены крутящих моментов приведенными силами

Объединяя полученную вертикальную нагрузку с перерезывающей силой Q_y, будем считать, что на грани CB действует следующая приведенная погонная перерезывающая сила:

$$Q_y^* = Q_y + \frac{\partial H}{\partial x} = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right) - D(1-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right).$$

Следовательно, на свободном от закрепления крае CB вместо трех условий $M_y = 0$; $Q_y = 0$; $M_{xy} = 0$ можно потребовать выполнения лишь двух условий: $M_y = 0$ и $Q_y^* = 0$, которые через перемещения записываются так:

$$\text{при } y = b \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0.$$

При такой записи исходные граничные условия удовлетворяются приближенно, т. к. не учитываются сосредоточенные силы в углах пластинки. Однако эффект их воздействия в этих зонах на основании принципа Сен-Венана быстро затухает и не сказывается на напряженном состоянии всей пластинки.

5.9. Эллиптическая пластинка, защемленная по контуру

Решим бигармоническое уравнение (5.35) для эллиптической пластинки, нагруженной равномерным давлением при $z = -\delta/2$. Схема пластинки приведена на рис. 5.7. В этом случае уравнение будет таким:

$$D\nabla^4 w = p. \tag{5.54}$$

Имеем следующие граничные условия на ее контуре:

$$w_n = 0; \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_n = 0; \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_n = 0, \tag{5.55}$$

т. е. перемещения и углы поворота равны нулю.

Уравнение (5.54) и граничные условия будут удовлетворяться, если для прогиба принять следующее выражение:

$$w = C\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2, \tag{5.56}$$

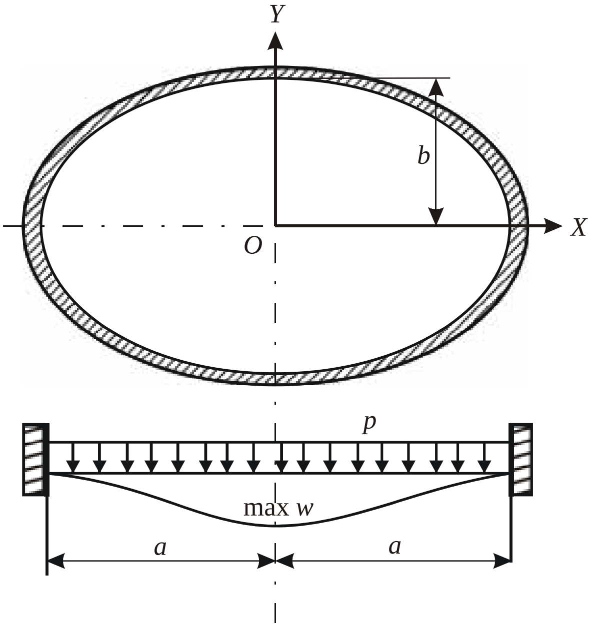


Рис. 5.7. Схема нагружения эллиптической пластинки

где C — константа. Для ее определения подставим решение (5.56) в исходное уравнение.

Вычислим производные:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -4C\left(x - \frac{x^3}{a^2} - \frac{y^2 x}{b^2}\right)\frac{1}{a^2}; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{4C}{a^2}\left(1 - \frac{3x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right);$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = \frac{24C}{a^4}x; \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{24C}{a^4}. \tag{5.57}$$

Аналогично получим:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{24C}{b^4}; \tag{5.58}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{8C}{a^2 b^2}. \tag{5.59}$$

Тогда:

$$\frac{24C}{a^4} + \frac{16C}{a^2 b^2} + \frac{24C}{b^4} = \frac{p}{D},$$

откуда константа C равна:

$$C=\frac{p}{D\left(\dfrac{24}{a^4}+\dfrac{16}{a^2b^2}+\dfrac{24}{b^4}\right)}. \tag{5.60}$$

Тогда решение (5.56) записывается так:

$$w=\frac{pa^4b^4}{D\left(24b^4+16a^2b^2+24a^4\right)}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^2. \tag{5.61}$$

Подставив $x=y=0$ в полученное выражение, убеждаемся, что константа C будет прогибом пластинки в ее центре. Если $a=\infty$, прогиб становится равным прогибу полоски шириной $2b$, защемленной по концам. Изгибающий и крутящий моменты определяются после подстановки выражения (5.61) в формулы (5.45)—(5.47). Так, для момента M_x находим:

$$M_x=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=-4CD\left(\frac{3x^2}{a^4}+\frac{y^2}{a^2b^2}-\frac{1}{a^2}+\mu\left(\frac{x^2}{a^2b^2}+\frac{3y^2}{b^4}-\frac{1}{b^2}\right)\right).$$

Для центра пластинки и для конца большой полуоси эллипса получим соответственно:

$$\left(M_x\right)_{x=0,\ y=0}=4CD\left(\frac{1}{a^2}+\frac{\mu}{b^2}\right);\quad \left(M_x\right)_{x=a,\ y=0}=-\frac{8CD}{a^2}.$$

Аналогично для момента M_y в центре и на концах малой оси эллипса находим:

$$\left(M_y\right)_{x=0,\ y=0}=4CD\left(\frac{1}{b^2}+\frac{\mu}{a^2}\right);\quad \left(M_y\right)_{x=0,\ y=b}=-\frac{8CD}{b^2}.$$

Из полученных формул видно, что максимальные напряжения изгиба возникают на концах малой полуоси эллипса. По известным моментам M_x и M_y можно определить изгибающий и крутящий моменты в плоскости, нормальной к контуру пластинки. Эти погонные моменты определяются выражениями для нормальных и касательных к контуру напряжений, полученных в результате поворота осей X и Y на угол α до совмещения оси X с нормалью n, а оси Y — с касательной t:

$$\sigma_n=\sigma_x\cos^2\alpha+\sigma_y\sin^2\alpha+2\tau_{xy}\sin\alpha\cdot\cos\alpha;$$

$$\tau_{nt}=\tau_{xy}\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)+\left(\sigma_y-\sigma_x\right)\sin\alpha\cdot\cos\alpha.$$

Изгибающий момент будет равен:

$$M_n = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_n z dz = M_x \cos^2\alpha + M_y \sin^2\alpha + 2M_{xy} \sin\alpha \cdot \cos\alpha\,,$$

а крутящий:

$$M_{nt} = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \tau_{nt} z dz = M_{xy}\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) + \left(M_y - M_x\right)\sin\alpha \cdot \cos\alpha\,.$$

Угол α измеряется между осью X и нормалью n к контуру пластинки:

$$\cos\alpha = \frac{dy}{ds} = \frac{b^2 x}{\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}}\,; \quad \sin\alpha = -\frac{dx}{ds} = -\frac{a^2 y}{\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}}\,.$$

5.10. Изгиб круглых пластин

Конструкции в виде круглых пластин находят широкое применение в качестве плоских днищ сосудов, крышек, фланцев, диафрагм и т. п. В качестве основы для расчета таких пластин воспользуемся выражением (5.61) для прогиба эллиптической пластинки и выражениями для моментов в декартовой системе координат, полученными в предыдущем разделе.

5.10.1. Пластинка, защемленная по контуру

Если пластинка круглая, то $a = b$, и поэтому:

$$w = \frac{Pa^4}{64D}\left(\frac{a^2 - x^2 - y^2}{a^2}\right)^2 = \frac{p}{64D}\left(a^2 - x^2 - y^2\right)^2\,. \tag{5.62}$$

Напряжения на наружной и внутренней поверхностях пластинки определяются по формулам:

$$\sigma_x = \mp\frac{6M_x}{\delta^2}\,; \tag{5.63}$$

$$\sigma_y = \mp\frac{6M_y}{\delta^2}\,; \tag{5.64}$$

$$\tau_{xy} = \mp\frac{6M_{xy}}{\delta^2}\,, \tag{5.65}$$

где:

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right); \quad (5.66)$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right); \quad (5.67)$$

$$M_{xy} = -D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (5.68)$$

Вычислим вторые производные от $w(x, y)$, используя выражение (5.62):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{p}{16D}\left(3x^2 + y^2 - a^2\right); \quad (5.69)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{p}{8D} yx; \quad (5.70)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{p}{16D}\left(x^2 + 3y^2 - a^2\right). \quad (5.71)$$

Тогда:

$$M_x = -\frac{p}{16}\left(3x^2 + y^2 - a^2 + \mu\left(x^2 + 3y^2 - a^2\right)\right) =$$

$$= -\frac{p}{16}\left(x^2(3+\mu) + y^2(1+3\mu) - a^2(1+\mu)\right);$$

$$M_y = -\frac{p}{16}\left(x^2(1+3\mu) + y^2(3+\mu) - a^2(1+\mu)\right);$$

$$M_{xy} = -\frac{p(1-\mu)}{8} xy.$$

Окончательные выражения для напряжений на наружной и внутренней поверхностях пластинки примут вид:

$$\sigma_x = \pm\frac{3}{8}\frac{p}{\delta^2}\left(x^2(3+\mu) + y^2(1+3\mu) - a^2(1+\mu)\right); \quad (5.72)$$

$$\sigma_y = \pm\frac{3}{8}\frac{p}{\delta^2}\left(x^2(1+3\mu) + y^2(3+\mu) - a^2(1+\mu)\right); \quad (5.73)$$

$$\tau_{xy} = \pm\frac{3}{4}\frac{p}{\delta^2} xy. \quad (5.74)$$

Определим напряжения в характерных точках пластинки:

- центр пластинки при $x = y = 0$:

$$\sigma_x = \pm \frac{3p}{8}\left(\frac{a}{\delta}\right)^2 (1+\mu)\,; \tag{5.75}$$

$$\sigma_y = \pm \frac{3p}{8}\left(\frac{a}{\delta}\right)^2 (1+\mu)\,; \tag{5.76}$$

$$\tau_{xy} = 0\,;$$

- контур пластинки при $x = a$, $y = 0$:

$$\sigma_x = \pm \frac{3}{4} p\left(\frac{a}{\delta}\right)^2 ; \tag{5.77}$$

$$\sigma_y = \pm \frac{3}{4} \mu p\left(\frac{a}{\delta}\right)^2 ; \tag{5.78}$$

$$\tau_{xy} = 0\,.$$

На рис. 5.8 приведены эпюры напряжений, которые возникают в пластинке. Из этих эпюр следует, что наибольшие напряжения возникают на контуре пластинки. Они и определяют ее несущую способность.

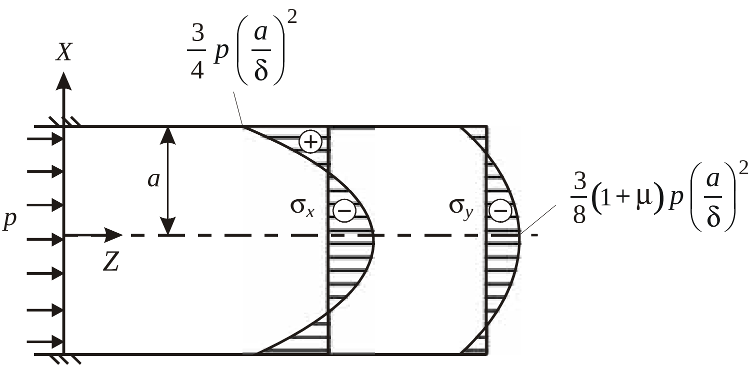


Рис. 5.8. Напряжения в круглой пластинке, защемленной по контуру

Получим выражения для деформаций и напряжений при других случаях закрепления пластинки.

5.10.2. Пластинка с шарнирным закреплением

В отличие от предыдущего случая теперь на контуре пластинки равен нулю изгибающий момент, но не равен нулю угол поворота.

Если пластинка нагружена постоянным внешним давлением, то перерезывающая сила Q равна:

$$Q = \frac{1}{r}\int_0^r prdr = \frac{pr}{2},$$

а уравнение изгиба пластинки можно переписать так:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\vartheta)\right) = -\frac{pr}{2D}.$$

После первого интегрирования находим:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\vartheta) = -\frac{pr^2}{4D} - C_1,$$

где C_1 — константа интегрирования.

Умножая обе части уравнения на r и производя повторное интегрирование, получаем:

$$r\vartheta = -\frac{pr^4}{16D} - \frac{C_1 r}{2} - C_2,$$

откуда угол поворота:

$$\vartheta = -\frac{pr^3}{16D} - \frac{C_1 r}{2} - \frac{C_2}{r}, \tag{5.79}$$

а перемещение после повторного интегрирования с учетом того, что $\vartheta = -\frac{dw}{dx}$, равно:

$$w = \frac{pr^4}{64D} + \frac{C_1 r^2}{4} + C_2 \ln\frac{r}{a} + C_3, \tag{5.80}$$

где a — радиус пластинки; C_1, C_2, C_3 — константы интегрирования, определяемые из граничных условий.

В выражении (5.80) последняя константа интегрирования для удобства дальнейшего использования записана как $\left(C_3 - C_2 \ln a\right)$.

Угол поворота в центре пластинки равен нулю, поэтому в выражениях для угла поворота (5.79) и перемещения (5.80) константа $C_2 = 0$. Константы C_1 и C_3 определяются из следующих условий на контуре пластинки:

$$\left.\left(\frac{pr^4}{64D} + \frac{C_1 r^2}{4} + C_3\right)\right|_{r=a} = 0; \tag{5.81}$$

$$M_1\big|_{r=a} = D\left.\left(\frac{d\vartheta}{dr} + \frac{\mu}{r}\vartheta\right)\right|_{r=a} = 0. \tag{5.82}$$

Подставляя (5.79) в (5.82), находим сначала константу C_1, а затем константу C_3 из (5.81). Подставляя константы в (5.80), получим следующее выражение для перемещений в пластинке с шарнирным закреплением краев:

$$w = \frac{p\left(a^2 - r^2\right)}{64D}\left(\frac{5+\mu}{1+\mu}a^2 - r^2\right). \tag{5.83}$$

Изгибающие моменты равны:

$$M_1 = -D\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\mu}{r}\frac{dw}{dr}\right) = D\left(\frac{d\vartheta}{dr} + \frac{\mu}{r}\vartheta\right) = \frac{p}{16}(3+\mu)\left(a^2 - r^2\right); \tag{5.84}$$

$$M_2 = -D\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \mu\frac{d^2w}{dr^2}\right) = D\left(\frac{1}{r}\vartheta + \mu\frac{d\vartheta}{dr}\right) = \frac{p}{16}\left(a^2(3+\mu) - r^2(1+3\mu)\right). \tag{5.85}$$

Максимальный изгибающий момент получается в центре пластинки (рис. 5.9):

$$M_1 = M_2 = \frac{3+\mu}{16}pa^2,$$

а соответствующее максимальное напряжение:

$$(\sigma_1)_{\max} = (\sigma_2)_{\max} = \frac{6M_1}{\delta^2} = \frac{3(3+\mu)pa^2}{8\delta^2}. \tag{5.86}$$

Напряжения на контуре пластинки равны:

$$(\sigma_1)_{r=a} = 0; \quad (\sigma_2)_{r=a} = \frac{3}{4}(1-\mu)pa^2.$$

Сравнение наибольших напряжений в жестко заделанной пластинке, определяемых по формуле (5.77), и в пластинке с шарнирным закреплением контура (формула (5.86)) показывает, что шарнирное закрепление пластинки менее выгодно, чем жесткая заделка.

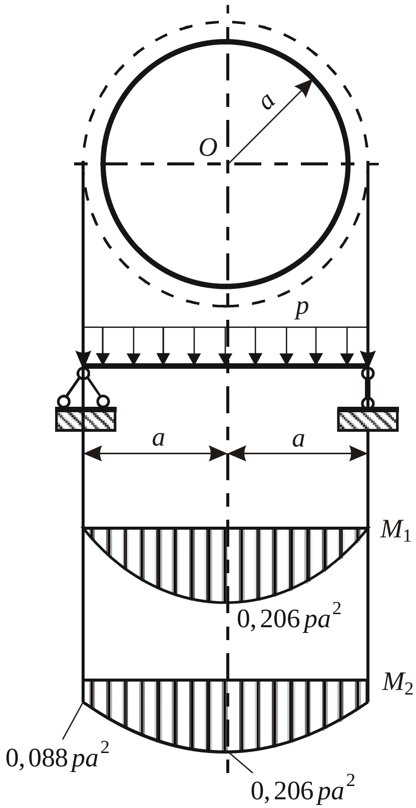


Рис. 5.9. Пластинка с шарнирным закреплением контура

5.10.3. Пластинка с отверстием, нагруженная краевыми моментами

В этом случае пластинка нагружена погонными моментами по ее внешнему и внутреннему контурам, как это показано на рис. 5.10, а перерезывающая сила в уравнении изгиба исчезает, поэтому в данном случае оно записывается так:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\vartheta)\right)=0\,.$$

Интегрируя его дважды, получим:

$$\vartheta=-\frac{dw}{dr}=\frac{C_1 r}{2}+\frac{C_2}{r}\,. \tag{5.87}$$

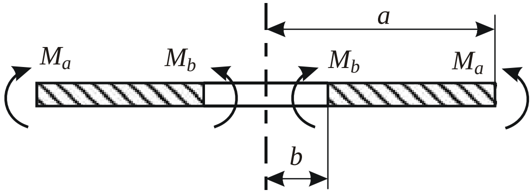


Рис. 5.10. Схема нагружения пластинки с отверстием

Интегрируем полученное выражение еще раз и находим перемещение:

$$w=-\frac{C_1 r^2}{4}-C_2\ln\frac{r}{a}+C_3. \tag{5.88}$$

Постоянные интегрирования определим из условий на внутреннем отверстии и на контуре пластинки.

Воспользовавшись (5.87), запишем выражение для момента так:

$$M_1=D\left(\frac{d\vartheta}{dr}+\frac{\mu}{r}\vartheta\right)=D\left(\frac{C_1}{2}-\frac{C_2}{r^2}+\mu\left(\frac{C_1}{2}+\frac{C_2}{r^2}\right)\right).$$

Приравнивая это выражение к моменту M_b в отверстии пластинки и к моменту M_a на ее контуре, получим уравнения для определения констант интегрирования C_1 и C_2:

$$D\left(\frac{C_1}{2}(1+\mu)-\frac{C_2}{b^2}(1-\mu)\right)=M_b;$$

$$D\left(\frac{C_1}{2}(1+\mu)-\frac{C_2}{a^2}(1-\mu)\right)=M_a,$$

из которых получаем:

$$C_1=\frac{2\left(a^2M_a-b^2M_b\right)}{D(1+\mu)\left(a^2-b^2\right)};\quad C_2=\frac{a^2b^2\left(M_a-M_b\right)}{D(1-\mu)\left(a^2-b^2\right)}. \tag{5.89}$$

Для определения постоянной C_3 примем, что пластинка закреплена по внешнему контуру и перемещения на нем равны нулю. Тогда, воспользовавшись выражением (5.88), в которое следует подставить выражение для константы C_1 из (5.89), получаем:

$$C_3=\frac{C_1a^2}{4}=\frac{a^2\left(a^2M_a-b^2M_b\right)}{2D(1+\mu)\left(a^2-b^2\right)}. \tag{5.90}$$

Подставляя выражения для констант в (5.88), получаем:

$$w=\frac{\left(a^2M_a-b^2M_b\right)}{2D(1+\mu)\left(a^2-b^2\right)}\left(a^2-r^2\right)-\frac{a^2b^2\left(M_a-M_b\right)}{D(1-\mu)\left(a^2-b^2\right)}\ln\frac{r}{a}. \tag{5.91}$$

Рассмотрим частные случаи полученного выражения.

1. Момент на контуре равен нулю, т. е. $M_a=0$:

$$w=-\frac{b^2M_b}{2D(1+\mu)\left(a^2-b^2\right)}\left(a^2-r^2\right)+\frac{a^2b^2M_b}{D(1-\mu)\left(a^2-b^2\right)}\ln\frac{r}{a}.$$

2. Момент в отверстии равен нулю, т. е. $M_b=0$:

$$w=\frac{a^2M_a}{2D(1+\mu)\left(a^2-b^2\right)}\left(a^2-r^2\right)-\frac{a^2b^2M_a}{D(1-\mu)\left(a^2-b^2\right)}\ln\frac{r}{a}.$$

3. Пластинка без отверстия, нагруженная моментом по контуру:

$$w=\frac{M_a}{2D(1+\mu)}\left(a^2-r^2\right). \tag{5.92}$$

Напряжения определяются с помощью моментов, которые нетрудно вычислить по известным перемещениям.

5.11. Перфорированные пластины

Из-за перфорации пластины ее жесткость уменьшается, причем экспериментально установлено, что при одинаковой внешней нагрузке форма прогиба перфорированной пластинки подобна форме изгиба сплошной пластинки.

Исходя из подобия кривых прогибов пластин, можно записать:

$$\frac{w}{w_0}=\gamma, \tag{5.93}$$

где γ — коэффициент пропорциональности, учитывающий снижение жесткости пластины из-за ее перфорации, а индексом ноль обозначено перемещение сплошной пластины, имеющей такую же жесткость, что и перфорированная пластина.

Значение коэффициента пропорциональности можно определять по формуле:

$$\gamma=0,25(3+\kappa)\left(1-\frac{d}{s}\right)\left(1-\mu^2\right), \tag{5.94}$$

где d — диаметр отверстия; s — шаг отверстий; κ — коэффициент жесткости пластинки:

$$\kappa = \frac{1,41}{1+\left(\frac{\delta}{s-d}\right)^2}.$$

На рис. 5.11, *а* и *б* изображены схемы перфорации пластин. Расчет перфорированной пластины проводится по формулам сплошной пластинки, в которые вводится поправка на снижение жесткости из-за отверстий следующим методом.

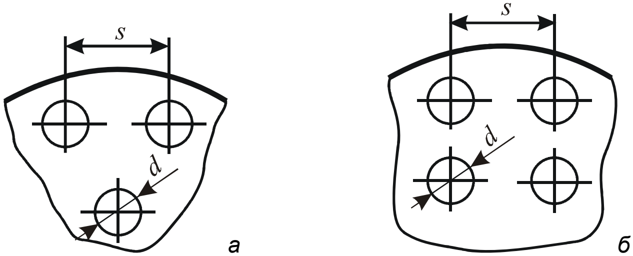


Рис. 5.11. Схемы перфорации пластинки

Воспользовавшись выражением для перемещений пластинки с защемленным контуром, имеем:

$$w = \frac{p\left(a^2 - r^2\right)^2}{64D}; \quad w_0 = \frac{p\left(a^2 - r^2\right)^2}{64D_0}, \tag{5.95}$$

откуда $D_0 = \gamma D$. Так как цилиндрическая жесткость пластинок определяется по формулам:

$$D = \frac{E\delta^3}{12\left(1-\mu^2\right)}; \quad D_0 = \frac{E\delta_0^3}{12\left(1-\mu^2\right)},$$

то толщина сплошной пластинки, эквивалентной по жесткости перфорированной пластинке, равна:

$$\delta_0 = \delta\sqrt[3]{\gamma}.$$

После определения толщины и жесткости эквивалентной пластинки дальнейший расчет проводится по формулам сплошных пластинок.

Выводы

В этой главе были изучены следующие вопросы:

1. Гипотезы Кирхгоффа и их связь с гипотезой плоских сечений в теории балок.
2. Преобразование уравнений теории упругости с помощью гипотез Кирхгоффа к одному дифференциальному уравнению, описывающему изогнутую срединную поверхность тонкой пластинки.
3. Формулы для напряжений в изогнутой пластинке, выраженные через внутренние погонные усилия и моменты.
4. Соотношения для расчета внутренних погонных усилий и моментов по известным поперечным перемещениям.
5. Аналитические соотношения для расчета поперечных перемещений в эллиптической пластинке, жестко заделанной по контуру.
6. Аналитические соотношения для расчета поперечных перемещений и напряжений в круглой пластинке, изгибаемой внешним давлением, при жестком и шарнирном закреплении ее краев.
7. Аналитические соотношения для расчета поперечных перемещений в круглой пластинке с отверстием, изгибаемой по контуру погонным моментом.
8. Особенности расчета перфорированных пластин.

Упражнения и вопросы

1. Чем гипотезы Кирхгоффа отличаются от гипотез Бернулли? В каких предположениях они совпадают?
2. Почему поперечные перемещения по толщине пластинки остаются постоянными?
3. На круглую пластинку толщиной 0,005 м и радиусом 0,1 м, жестко заделанную по контуру, действует постоянное внешнее давление 5 МПа. Постройте эпюру нормальных напряжений σ_z в центре пластинки. Сравните их максимальное значение (можно ли назвать его сразу без расчета?) с максимальными радиальными напряжениями.
4. Получите соотношения для расчета напряжений в эллиптической пластинке, заделанной по контуру, если известна формула для расчета поперечных перемещений в этой пластинке.

5. Получите аналитические соотношения для расчета погонных моментов в эллиптической пластинке, заделанной по контуру, если известна формула для расчета поперечных перемещений в этой пластинке.
6. На круглую пластинку толщиной 0,004 м и радиусом 0,15 м действует постоянное внешнее давление 4 МПа. Сравните максимальные напряжения в пластинке при жестком и шарнирном закреплении ее краев.
7. Получите аналитические соотношения для расчета погонных моментов в круглой пластинке с отверстием, изгибаемой по контуру погонным моментом, по известному выражению для поперечного перемещения.
8. Запишите аналитические соотношения для расчета напряжений в круглой пластинке с отверстием, изгибаемой по контуру погонным моментом, по известным погонным изгибающим моментам.
9. Постройте зависимость коэффициента γ, учитывающего снижение жесткости перфорированной пластинки, от отношения диаметров отверстий d перфорации к их шагу s для $s = 6 \cdot 10^{-2}$ м и $\delta = 6 \cdot 10^{-3}$ м. Отношение $\frac{d}{s}$ принять в диапазоне от 0 до 1.

Литература к главе 5

1. Бажанов В. Л. и др. Пластинки и оболочки из стеклопластиков. Учебное пособие для вузов. — М.: Высшая школа, 1970, 408 с.
2. Бояршинов С. В. Основы строительной механики машин. Учебное пособие для студентов вузов. — М.: Машиностроение, 1973, 250 с.
3. Вайнберг Д. В., Вайнберг Е. Д. Расчет пластин. — Киев: Изд-во "Будивельник", 1970, 268 с.
4. Донелл Л. Г. Балки, пластины и оболочки. — М.: Наука, 1982, 568 с.
5. Образцов И. Ф., Булычев Л. А. и др. Строительная механика летательных аппаратов. Учебник для авиационных специальностей вузов. — М.: Машиностроение, 1986, 536 с.
6. Самуль В. И. Основы теории упругости и пластичности. Учебное пособие для инженерно-строительных специальностей вузов. — М.: Высшая школа, 1970, 288 с.
7. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. — М.: ГИФМЛ, 1963, 636 с.

Глава 6

Уравнения теории тонких оболочек

Из этой главы вы узнаете о том, как выводятся геометрические, физические уравнения и уравнения равновесия в линейной теории оболочек. Познакомитесь с тем, как записываются физические уравнения для многослойных, ортотропных и вафельных оболочек. Получите выражения для коэффициентов Ламе, которые позволяют записывать уравнения теории оболочек в произвольной ортогональной криволинейной системе координат.

В этой главе будут рассмотрены следующие вопросы:

- необходимые сведения из теории поверхностей;
- гипотезы Лава—Кирхгоффа в теории тонких оболочек;
- деформация срединной и произвольной поверхностей оболочки;
- физические уравнения, основанные на законе Гука;
- уравнения равновесия бесконечно-малого элемента;
- уравнения динамики тонкой оболочки.

6.1. Сведения из теории поверхностей

Приведем сначала основные терминологические определения, связанные с оболочкой, которые будут использоваться в дальнейшем. Для начала напомним определение оболочки, которое приводилось ранее в первой главе в связи с построением расчетных схем конструкций.

> ***Оболочкой*** называют тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с другими его размерами.
>
> Поверхность, равноудаленная от наружной и внутренней ограничивающих оболочку поверхностей, называется ***срединной***. Она делит оболочку на две одинаковые части.

Если срединная поверхность оболочки симметрична относительно некоторой прямой — оси вращения, то такая оболочка называется ***оболочкой вращения***. В этом случае срединная поверхность образована вращением кривой, называемой ***меридианом***, вокруг оси вращения.

Параллелью оболочки вращения называют окружность, полученную в результате пересечения срединной поверхности и любой плоскости, перпендикулярной оси симметрии.

Установим некоторые геометрические соотношения для произвольного слоя оболочки, которые понадобятся в дальнейшем при получении системы уравнений теории тонких оболочек. Таким слоем может служить, в частности, срединная поверхность, и поэтому для удобства все дальнейшие рассуждения будем относить к этой поверхности.

6.1.1. Первая квадратичная форма

Рассмотрим произвольную точку M на срединной поверхности оболочки, которая зафиксирована относительно декартовой системы координат XYZ (рис. 6.1).

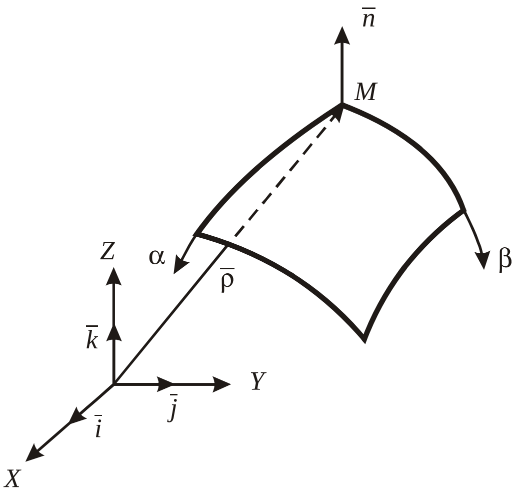


Рис. 6.1. Положние подвижной системы координат относительно неподвижной декартовой

Векторное уравнение поверхности в декартовой системе координат XYZ имеет вид: $\bar{\rho} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, где $\bar{\rho}$ — радиус-вектор точки M; x, y, z — ее декартовы координаты. Но этой же точке можно поставить в соответствие два параметра α и β, поэтому уравнение поверхности можно записать и в параметрической форме:

$$x = x(\alpha, \beta); \quad y = y(\alpha, \beta); \quad z = z(\alpha, \beta),$$

или:

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}(\alpha, \beta). \tag{6.1}$$

При этом через точку M на поверхности можно провести две кривые, соединяющие точки с постоянными параметрами, причем векторное уравнение кривой α имеет вид: $\bar{\rho} = \bar{\rho}(\alpha, \beta_0)$, где β_0 — фиксированное значение параметра β, а уравнение кривой β: $\bar{\rho} = \bar{\rho}(\alpha_0, \beta)$, где α_0 — постоянное значение параметра α.

Теперь построим в каждой точке срединной поверхности единичные векторы $\bar{\tau}_1$ и $\bar{\tau}_2$, касательные к линиям α и β. Вместе с вектором единичной нормали $\bar{n}$ они образуют локальный триэдр, направление векторов которого меняется от одной точки поверхности к другой. Перейдем теперь к рассмотрению метрики срединной поверхности и для этого определим длину бесконечно малой дуги ds, соединяющей точки M и N на рис. 6.2.

Так как $\dfrac{d\rho}{ds} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta\rho}{\Delta s} = 1$, то $ds = d\rho$, и поэтому $ds^2 = (d\bar{\rho} \cdot d\bar{\rho})$, но $d\bar{\rho} = \dfrac{\partial\bar{\rho}}{\partial\alpha} d\alpha + \dfrac{\partial\bar{\rho}}{\partial\beta} d\beta$.

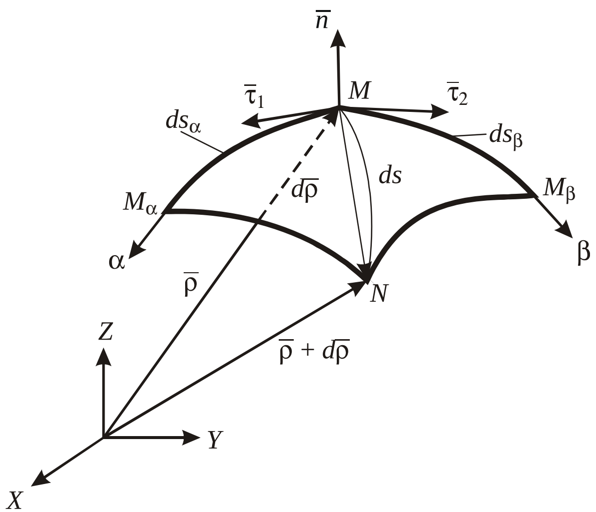


Рис. 6.2. Элементарная дуга на срединной поверхности

Определим сначала направления производных от вектора $\bar{\rho}$ по α и β. По определению производной имеем:

$$\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\alpha} = \lim_{\substack{\Delta\alpha\to 0\\ \beta=\text{const}}} \frac{\Delta\bar{\rho}}{\Delta\alpha},$$

но в точке M (рис. 6.2) параметр β постоянен при вычислении частной производной по α, поэтому $\Delta\bar{\rho}$ совпадает с секущей $M_\alpha M$. Тогда в пределе при $M_\alpha \to M$ вектор $\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\alpha}$ совпадает с направлением $\bar{\tau}_1$. Аналогичные рассуждения позволяют установить, что вектор $\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\beta}$ по направлению совпадает с $\bar{\tau}_2$.

В общем случае векторы $\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\alpha}$ и $\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\beta}$ не обязательно ортогональны. Вводя обозначение h_1 и h_2 для абсолютных значений этих векторов, имеем:

$$\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\alpha} = h_1\bar{\tau}_1; \tag{6.2}$$

$$\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\beta} = h_2\bar{\tau}_2. \tag{6.3}$$

Тогда длина малого сегмента дуги кривой равна:

$$\text{при } \beta = \text{const} \quad ds_\alpha = h_1 d\alpha; \tag{6.4}$$

$$\text{при } \alpha = \text{const} \quad ds_\beta = h_2 d\beta. \tag{6.5}$$

Рассматривая криволинейный треугольник со сторонами ds, ds_α, ds_β и используя теорему косинусов для определения квадрата длины дуги сегмента, соединяющей точки M и N (рис. 6.2), получаем:

$$ds^2 = {ds_\alpha}^2 + {ds_\beta}^2 - 2ds_\alpha ds_\beta \cos\theta,$$

или после подстановки выражений (6.4) и (6.5):

$$ds^2 = h_1^2 d\alpha^2 + h_2^2 d\beta^2 - 2h_1 h_2 d\alpha d\beta \cos\theta.$$

Для исключения $\cos\theta$ из полученного выражения найдем скалярное произведение векторов $\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\alpha}$ и $\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\beta}$:

$$\left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\beta}\right) = h_1 h_2 \left(\bar{\tau}_1\cdot\bar{\tau}_2\right) = h_1 h_2 \cos\left(180^\circ - \theta\right) = -h_1 h_2 \cos\theta,$$

тогда:

$$ds^2 = h_1^2 d\alpha^2 + h_2^2 d\beta^2 + 2h_1 h_2 \left(\overline{\tau}_1 \cdot \overline{\tau}_2\right) d\alpha d\beta,$$

или:

$$ds^2 = E d\alpha^2 + 2F d\alpha d\beta + G d\beta^2.$$

Полученное выражение и является первой квадратичной формой поверхности. Ясно, что ее коэффициенты определяются по следующим формулам:

$$E = h_1^2 = \left(\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial\alpha} \cdot \frac{\partial\overline{\rho}}{\partial\alpha}\right); \quad F = \left(\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial\alpha} \cdot \frac{\partial\overline{\rho}}{\partial\beta}\right); \quad G = h_2^2 = \left(\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial\beta} \cdot \frac{\partial\overline{\rho}}{\partial\beta}\right). \tag{6.6}$$

Практический интерес представляют только оболочки, имеющие регулярные поверхности, в любой точке которых выполняются следующие условия:

1. Векторы $\dfrac{\partial\overline{\rho}}{\partial\alpha}$ и $\dfrac{\partial\overline{\rho}}{\partial\beta}$ линейно независимы, т. е. их векторное произведение не равно нулю:

$$\left[\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial\alpha} \times \frac{\partial\overline{\rho}}{\partial\beta}\right] \neq 0.$$

2. Существует вектор единичной нормали к поверхности:

$$\overline{n} = \frac{\left[\dfrac{\partial\overline{\rho}}{\partial\alpha} \times \dfrac{\partial\overline{\rho}}{\partial\beta}\right]}{\left|\dfrac{\partial\overline{\rho}}{\partial\alpha} \times \dfrac{\partial\overline{\rho}}{\partial\beta}\right|}.$$

В теории оболочек обычно используют координатные линии α и β, касательные к которым взаимно перпендикулярны. В этом случае $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, а выражение для первой квадратичной формы поверхности упрощается $(F = 0)$ и принимает вид:

$$ds^2 = h_1^2 d\alpha^2 + h_2^2 d\beta^2,$$

а величины h_1 и h_2 в этом случае принято называть *коэффициентами Ламе*.

Из выражений (6.2), (6.3) видно, что коэффициенты Ламе представляют собой местные масштабы длины на соответствующих координатных линиях. Если известно параметрическое уравнение поверхности (6.1), то коэффициенты h_1 и h_2 вычисляются по формулам (6.6).

Но с другой стороны:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \alpha} = \frac{\partial x}{\partial \alpha}\bar{i} + \frac{\partial y}{\partial \alpha}\bar{j} + \frac{\partial z}{\partial \alpha}\bar{k};$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \beta} = \frac{\partial x}{\partial \beta}\bar{i} + \frac{\partial y}{\partial \beta}\bar{j} + \frac{\partial z}{\partial \beta}\bar{k},$$

откуда:

$$\left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \alpha}\right) = \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2; \tag{6.7}$$

$$\left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \beta}\right) = \left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2. \tag{6.8}$$

Сравнивая (6.6) с (6.7) и (6.8), получаем:

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2};$$

$$h_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2}.$$

6.1.2. Вторая квадратичная форма

Рассмотрим произвольную точку *M* срединной поверхности и бесконечно близкую к ней точку *N* (рис. 6.3) с радиусами-векторами $\bar{\rho}_0$ и $\bar{\rho}$ соответственно. Расстояние от касательной плоскости, проведенной в точке *M*, до точки *N*, измеряемое в направлении нормали к плоскости, можно определить по формуле:

$$d = -\left(\bar{n} \cdot \Delta\bar{\rho}\right), \tag{6.9}$$

где $\Delta\bar{\rho} = \bar{\rho} - \bar{\rho}_0$. Так как касательная плоскость делит пространство на две части, знак d указывает на то, к какой части пространства относительно внешней нормали $\bar{n}$ принадлежит точка *N*.

Разложим в ряд Тейлора вектор $\bar{\rho}$ относительно точки *M*, отбрасывая слагаемые порядка малости больше второго:

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 + \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \alpha}\Delta\alpha + \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \beta}\Delta\beta + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \bar{\rho}}{\partial \alpha^2}\Delta\alpha^2 + \frac{\partial^2 \bar{\rho}}{\partial \beta^2}\Delta\beta^2 + 2\frac{\partial^2 \bar{\rho}}{\partial \alpha \partial \beta}\Delta\alpha\Delta\beta\right) +$$
$$+ O\left(\Delta\alpha^2 + \Delta\beta^2\right).$$

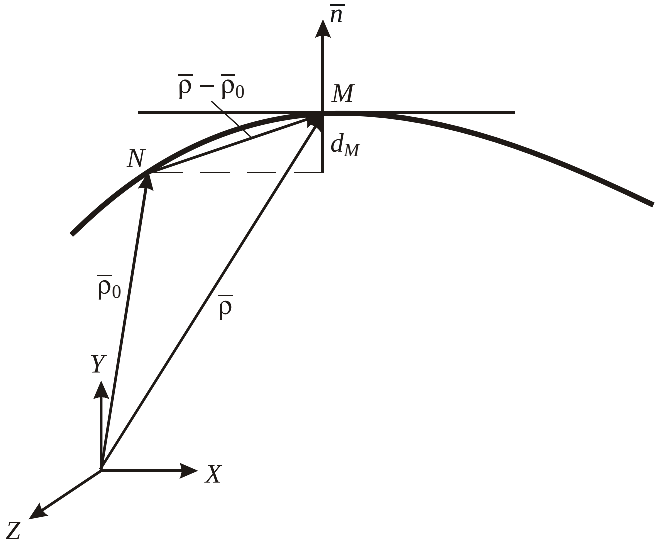


Рис. 6.3. К определению второй квадратичной формы

Тогда если учесть, что векторы $\dfrac{\partial\bar{\rho}}{\partial\alpha}$ и $\dfrac{\partial\bar{\rho}}{\partial\beta}$ перпендикулярны нормали к поверхности в точке M, выражение (6.9) в пределе при стремлении M к N можно переписать так:

$$d_M = -\frac{1}{2}\left[\left(\bar{n}\cdot\frac{\partial^2\bar{\rho}}{\partial\alpha^2}\right)d\alpha^2 + \left(\bar{n}\cdot\frac{\partial^2\bar{\rho}}{\partial\alpha^2}\right)d\beta^2 + 2\left(\bar{n}\cdot\frac{\partial^2\bar{\rho}}{\partial\alpha\partial\beta}\right)d\alpha d\beta\right].$$

Выражение в квадратных скобках называют второй квадратичной формой поверхности. Преобразуем ее коэффициенты:

$$D = \left(\bar{n}\cdot\frac{\partial^2\bar{\rho}}{\partial\alpha^2}\right);\quad D' = \left(\bar{n}\cdot\frac{\partial^2\bar{\rho}}{\partial\alpha\partial\beta}\right);\quad D'' = \left(\bar{n}\cdot\frac{\partial^2\bar{\rho}}{\partial\beta^2}\right),$$

воспользовавшись следующими очевидными тождествами:

$$\left(\bar{n}\cdot\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\alpha}\right) = 0;\quad \left(\bar{n}\cdot\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\beta}\right) = 0,$$

которые являются следствием ортогональности скалярно перемножаемых векторов. Дифференцируя эти тождества по параметрам α и β, получаем:

$$\left(\frac{\partial\bar{n}}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\alpha}\right) + \left(\bar{n}\cdot\frac{\partial^2\bar{\rho}}{\partial\alpha^2}\right) = 0;\quad \left(\frac{\partial\bar{n}}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\alpha}\right) + \left(\bar{n}\cdot\frac{\partial^2\bar{\rho}}{\partial\alpha\partial\beta}\right) = 0;$$

$$\left(\frac{\partial\overline{n}}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial\beta}\right)+\left(\overline{n}\cdot\frac{\partial^2\overline{\rho}}{\partial\alpha\partial\beta}\right)=0\,;\quad \left(\frac{\partial\overline{n}}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial\beta}\right)+\left(\overline{n}\cdot\frac{\partial^2\overline{\rho}}{\partial\beta^2}\right)=0\,,$$

откуда:

$$D=-\left(\frac{\partial\overline{n}}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial\alpha}\right);\quad D'=-\left(\frac{\partial\overline{n}}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial\alpha}\right)=-\left(\frac{\partial\overline{n}}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial\beta}\right);\quad D''=-\left(\frac{\partial\overline{n}}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial\beta}\right).$$

Коэффициенты первой и второй квадратичной формы используются для вычисления кривизны поверхности.

6.1.3. Кривизна поверхности

В уравнениях теории оболочек содержатся радиусы кривизны координатных линий α и β. Выразим их через кривизну.

Кривизной плоской кривой в рассматриваемой точке называют предел отношения угла φ между направлениями касательных в данной точке и в бесконечно близкой точке к длине ΔS дуги, заключенной между этими точками (рис. 6.4):

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\varphi}{\Delta s}\,.$$

Радиусом кривизны называется величина, обратная кривизне.

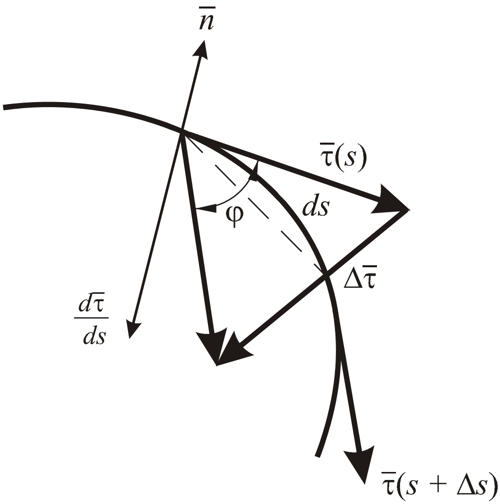


Рис. 6.4. К определению кривизны поверхности

Для установления физического смысла кривизны рассмотрим равнобедренный треугольник со сторонами $\bar{\tau}(s)$ и $\bar{\tau}(s+\Delta s)$ и основанием, равным приращению единичного вектора касательной (рис. 6.4). Величина $\Delta\bar{\tau}$ равна: $|\Delta\bar{\tau}| = 2\sin\frac{\dot{\varphi}}{2}$.

Вычислим величину (модуль) производной от единичного вектора касательной $\bar{\tau}$ к кривой по длине дуги:

$$\frac{d\tau}{ds} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}}{\Delta s} = \lim_{\varphi\to 0}\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\varphi}{\Delta s} = K.$$

Таким образом, кривизна кривой представляет собой скорость изменения направления касательной вдоль кривой.

Теперь рассмотрим произвольную кривую, расположенную на поверхности оболочки с касательной $\bar{\tau}$ и нормалью $\bar{n}$ в рассматриваемой точке.

В силу ортогональности $\bar{\tau}$ и $\bar{n}$ имеем:

$$\left(\bar{\tau}\cdot\bar{n}\right) = 0\,. \tag{6.10}$$

Дифференцируем (6.10) по длине дуги:

$$\left(\frac{d\bar{\tau}}{ds}\cdot\bar{n}\right) + \left(\bar{\tau}\cdot\frac{d\bar{n}}{ds}\right) = 0\,. \tag{6.11}$$

Найдем направление вектора $\frac{d\bar{\tau}}{ds}$, величина которого равна кривизне K. Для этого продифференцируем по s очевидное тождество $\left(\bar{\tau}\cdot\bar{\tau}\right)=1$. Имеем $\left(2\bar{\tau}\cdot\frac{d\bar{\tau}}{ds}\right)=0$. Откуда следует, что вектор $\frac{d\bar{\tau}}{ds}$ ортогонален касательной $\bar{\tau}$ и направлен, как это следует из рис. 6.4, в сторону, противоположную внешней нормали к поверхности.

Тогда:

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = -K\bar{n}\,, \tag{6.12}$$

где знак минус показывает, что вектор направлен против нормали. Подставляя (6.12) в выражение (6.11), получаем:

$$K = \left(\bar{\tau}\cdot\frac{d\bar{n}}{ds}\right). \tag{6.13}$$

Производная радиус-вектора $\bar{\rho}$ рассматриваемой точки по длине дуги кривой s есть вектор, направленный по касательной к линии в сторону возрастания s, а его величина равна единице, поэтому единичный вектор касательной равен:

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{\rho}}{ds}. \tag{6.14}$$

Но, с другой стороны:

$$\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial s} = \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial s} + \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial s}; \quad \frac{\partial\bar{n}}{\partial s} = \frac{\partial\bar{n}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial s} + \frac{\partial\bar{n}}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial s},$$

поэтому из (6.13) с помощью (6.14) получаем:

$$K = \frac{-\left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\bar{n}}{\partial\alpha}\right)d\alpha^2 - 2\left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\bar{n}}{\partial\beta}\right)d\alpha d\beta - \left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\bar{n}}{\partial\beta}\right)d\beta^2}{ds^2}. \tag{6.15}$$

Но в числителе стоит выражение для второй квадратичной формы поверхности, а в знаменателе — для первой, поэтому с учетом принятых в *разд. 6.1.2* обозначений перепишем (6.15) так:

$$K = -\frac{D\,d\alpha^2 + 2D'\,d\alpha\,d\beta + D''d\beta^2}{E\,d\alpha^2 + 2F\,d\alpha\,d\beta + G\,d\beta^2},$$

т. е. кривизна поверхности может быть выражена через ее первую и вторую квадратичные формы. В частности, кривизна линии α ($\beta = \text{const}$, $d\beta = 0$) равна:

$$K_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{D}{E}, \tag{6.16}$$

а линии β ($\alpha = \text{const}$, $d\alpha = 0$):

$$K_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{D''}{G}. \tag{6.17}$$

Если координатные линии ортогональны, то $F = 0$ и выражение для ds^2 упрощается.

Теперь исследуем поведение кривизны в зависимости от выбранного направления, считая, что α и β — ортогональные направления. Обозначим через ω угол между касательной $\bar{\tau}$ к произвольной кривой и касательной $\bar{\tau}_1$, проведенной к координатной кривой (рис. 6.5).

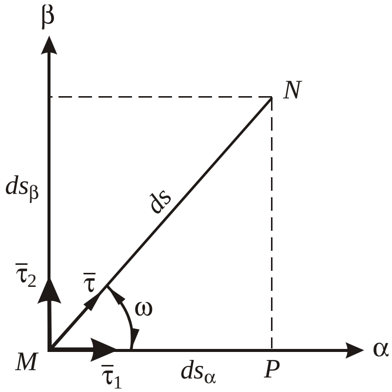


Рис. 6.5. К исследованию кривизны в зависимости от направления на поверхности

Единичные векторы $\bar{\tau}_1$, $\bar{\tau}_2$ находятся в плоскости, касательной к поверхности оболочки в рассматриваемой точке. Из треугольника MNP (рис. 6.5) имеем:

$$\sin\omega = \frac{NP}{ds} = \frac{ds_\beta}{ds} = \sqrt{G}\,\frac{d\beta}{ds}; \quad \cos\omega = \frac{MP}{ds} = \sqrt{E}\,\frac{d\alpha}{ds}, \tag{6.18}$$

но кривизна кривой:

$$-K = D\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 + 2D'\frac{d\alpha}{ds}\cdot\frac{d\beta}{ds} + D''\left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2,$$

или с учетом (6.18):

$$-K = \frac{D}{E}\cos^2\omega + \frac{2D'}{\sqrt{EG}}\sin\omega\cos\omega + \frac{D''}{G}\sin^2\omega,$$

а после подстановки кривизны координатных линий из (6.16) и (6.17) получаем:

$$K(\omega) = K_1\cos^2\omega + 2K_{12}\sin\omega\cos\omega + K_2\sin^2\omega, \tag{6.19}$$

где:

$$K_{12} = -\frac{D'}{\sqrt{EG}}. \tag{6.20}$$

В матричном виде выражение (6.19) записывается так:

$$K(\omega) = (\cos\omega\sin\omega)\begin{pmatrix} K_1 & K_{12} \\ K_{12} & K_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\omega \\ \sin\omega \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица:

$$\begin{pmatrix} K_1 & K_{12} \\ K_{12} & K_2 \end{pmatrix}$$

называется *тензором кривизны* поверхности и может быть приведена к диагональному виду. В этом случае кривизны координатных линий называются *главными*, причем одна из них имеет наибольшее значение, а другая — наименьшее. Эти направления взаимно перпендикулярны, поэтому $F = 0$, а т. к. $K_{12} = 0$, то в силу (6.20) и $D' = 0$. В теории оболочек в качестве координатных линий принимают главные кривые, т. к. существенно упрощаются соответствующие уравнения.

Пусть теперь K_1 и K_2 — главные кривизны, и тогда выражение (6.19) перепишется так:

$$K(\omega) = K_1 \cos^2 \omega + K_2 \sin^2 \omega .$$

Произведение K_1 и K_2, т. е. $\Gamma = K_1 K_2$, называют *гауссовой кривизной*, а $H = \frac{K_1 K_2}{2}$ — *средней кривизной*. Знак гауссовой кривизны указывает на тип поверхности: при $\Gamma > 0$ поверхность называют *эллиптической* (рис. 6.6, *а*), при $\Gamma < 0$ — *гиперболической* (рис. 6.6, *б*), а при $\Gamma = 0$ — *параболической* (рис. 6.6, *в*).

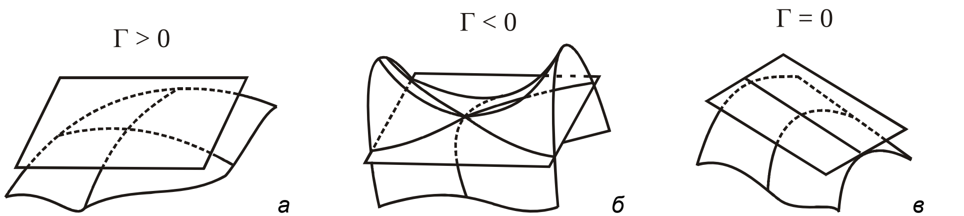


Рис. 6.6. Поверхности с различной гауссовой кривизной: эллиптической (*а*), гиперболической (*б*) и параболической (*в*)

Определим, в качестве примера, радиусы кривизны срединной поверхности оболочки вращения, получающейся в результате вращения меридиана вокруг оси симметрии. В качестве координатных линий примем меридианы, вдоль которых изменяется параметр α и параллели с изменяющимся параметром β (рис. 6.7).

Зафиксируем оболочку относительно декартовой системы координат *XYZ*. Угол между осью *X* и радиусом параллельного круга r, проведенным в точку *M*, обозначим через φ, а угол между нормалью к поверхности и осью симметрии (осью Z) обозначим буквой ϑ. Выберем в качестве параметра α длину дуги s меридиана, отсчитываемую от начальной параллели в точке K, а параметр β примем равным углу φ.

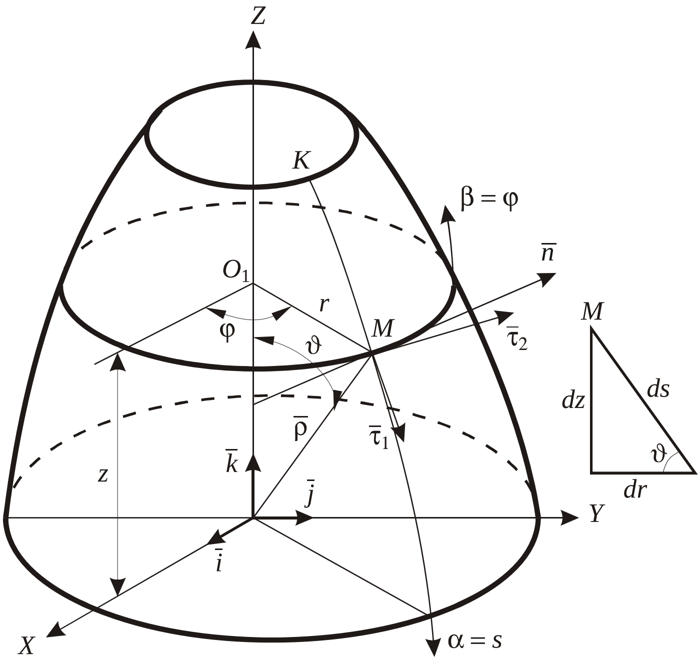


Рис. 6.7. Радиусы кривизны осесимметричной оболочки

В декартовой системе координат уравнение поверхности имеет вид:

$$\bar{\rho} = r\cos\varphi\,\bar{i} + r\sin\varphi\,\bar{j} + z\bar{k}\ .$$

Производные от радиуса-вектора равны:

$$\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\alpha} = \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial s} = \frac{dr}{ds}\cos\varphi\bar{i} + \frac{dr}{ds}\sin\varphi\bar{j} + \frac{dz}{ds}\bar{k}\ ; \quad \frac{\partial\rho}{\partial\beta} = \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\varphi} = -r\sin\varphi\bar{i} + r\cos\varphi\bar{j}\ .$$

Но из геометрических соображений (рис. 6.7) $\dfrac{dr}{ds} = \cos\vartheta$; $\dfrac{dz}{ds} = -\sin\vartheta$, и тогда:

$$\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\alpha} = \cos\vartheta\left(\cos\varphi\,\bar{i} + \sin\varphi\,\bar{j}\right) - \sin\vartheta\,\bar{k}\ .$$

Коэффициенты первой квадратичной формы равны:

$$E = \left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \alpha} \right) = \cos^2 \vartheta \left(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \right) + \sin^2 \vartheta = 1;$$

$$F = \left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \beta} \right) = -\cos \vartheta \cdot \cos \varphi \cdot r \cdot \sin \varphi + \cos \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot r \cdot \cos \varphi = 0;$$

$$G = \left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \beta} \right) = r^2 \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \varphi = r^2 .$$

Из равенства нулю коэффициента F следует, что касательные к меридиану и параллели ортогональны. Вторые производные от радиуса-вектора равны:

$$\frac{\partial^2 \bar{\rho}}{\partial \alpha^2} = \frac{\partial^2 \bar{\rho}}{\partial s^2} = -\sin \vartheta \frac{d\vartheta}{ds} \left(\cos \varphi \, \bar{i} + \sin \varphi \, \bar{j} \right) - \cos \vartheta \frac{d\vartheta}{ds} \bar{k} ;$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\rho}}{\partial \beta^2} = \frac{\partial^2 \bar{\rho}}{\partial \varphi^2} = -\cos \varphi \, \bar{i} - r \sin \varphi \, \bar{j} ;$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\rho}}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 \bar{\rho}}{\partial s \partial \varphi} = \cos \vartheta \left(-\sin \varphi \, \bar{i} + \cos \varphi \, \bar{j} \right) .$$

Единичные векторы $\bar{\tau}_1$ и $\bar{\tau}_2$ из выражений (6.2) и (6.3) с учетом обозначений коэффициентов первой квадратичной формы равны:

$$\bar{\tau}_1 = \frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \alpha} = \frac{1}{\sqrt{E}} \cdot \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial s} = \cos \vartheta \cos \varphi \, \bar{i} + \cos \vartheta \sin \varphi \, \bar{j} - \sin \vartheta \, \bar{k} ;$$

$$\bar{\tau}_2 = \frac{1}{h_2} \cdot \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \beta} = \frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \beta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \varphi} = -\sin \varphi \, \bar{i} + \cos \varphi \, \bar{j} .$$

Тогда единичная нормаль к срединной поверхности определяется как векторное произведение $\bar{\tau}_1$ и $\bar{\tau}_2$:

$$\bar{n} = \left[\bar{\tau}_1 \times \bar{\tau}_2 \right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \cos \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \sin \varphi & -\sin \vartheta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \sin \vartheta \cos \varphi \, \bar{i} + \sin \vartheta \sin \varphi \, \bar{j} + \cos \vartheta \, \bar{k}.$$

Коэффициенты второй квадратичной формы равны:

$$D = \left(\bar{n} \cdot \frac{\partial^2 \bar{\rho}}{\partial \alpha^2} \right) = -\sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi \frac{d\vartheta}{ds} - \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi \frac{d\vartheta}{ds} - \cos^2 \vartheta \frac{d\vartheta}{ds} = -\frac{d\vartheta}{ds} ;$$

$$D' = \left(\bar{n} \cdot \frac{\partial^2 \bar{\rho}}{\partial\alpha\partial\beta} \right) = -\sin\vartheta\cos\varphi\cos\vartheta\sin\varphi + \sin\vartheta\sin\varphi\cos\vartheta\cos\varphi = 0\,;$$

$$D'' = \left(\bar{n} \cdot \frac{\partial^2 \bar{\rho}}{\partial\beta^2} \right) = -r\cos^2\varphi\sin\vartheta - r\sin^2\varphi\sin\vartheta = -r\sin\vartheta\,.$$

Так как $D' = 0$, то меридианы и параллели являются главными направлениями, а их кривизна экстремальной. Кривизна меридиана равна:

$$K_1 = \frac{1}{R_1} = -\frac{D}{E} = \frac{\partial\vartheta}{\partial s}\,,$$

а кривизна параллели:

$$K_2 = \frac{1}{R_2} = -\frac{D''}{G} = \frac{\sin\vartheta}{r}\,. \tag{6.21}$$

Первым главным радиусом кривизны оболочки вращения называется радиус кривизны ее меридиана, который определяется в меридиональной плоскости, содержащей нормаль к поверхности.

Рассматривая меридиан как плоскую кривую, расположенную в плоскости *YZ*, радиус кривизны R_1 удобно определять по формуле:

$$R_1 = \frac{\dfrac{d^2 z}{dy^2}}{\left(1 + \left(\dfrac{dz}{dy} \right)^2 \right)^{3/2}}\,.$$

Как следует из (6.21), второй главный радиус кривизны (радиус параллели) можно определить через радиус параллельного круга и угол наклона нормали к оси симметрии, т. к. $R_2 = \dfrac{r}{\sin\vartheta}$.

Второй главный радиус кривизны оболочки вращения — это расстояние от рассматриваемой точки *M* на поверхности оболочки до оси симметрии, измеряемое вдоль направления нормали.

6.1.4. Производные векторов единичного триэдра

Вычислим сначала производные от вектора нормали $\bar{n}$. Из подобия треугольников *OMN* и *MAA'* на рис. 6.8 можно записать:

$$\frac{|\Delta\bar{n}|}{|\bar{n}|} = \frac{MN}{R_2},$$

где R_2 — радиус кривизны линии β в точке M. Но $MN = \Delta S_\beta = h_2\Delta\beta$, а $|\bar{n}| = 1$, поэтому $|\Delta\bar{n}| = \frac{(h_2\Delta\beta)}{R_2}$. Из рис. 6.8 видно, что при $\Delta\beta \to 0$, когда точка *M* стремится к точке *N*, вектор $\Delta\bar{n}$ стремится совпасть по направлению с $\bar{\tau}_2$, поэтому:

$$\frac{\partial\bar{n}}{\partial\beta} = \frac{h_2}{R_2}\bar{\tau}_2.$$

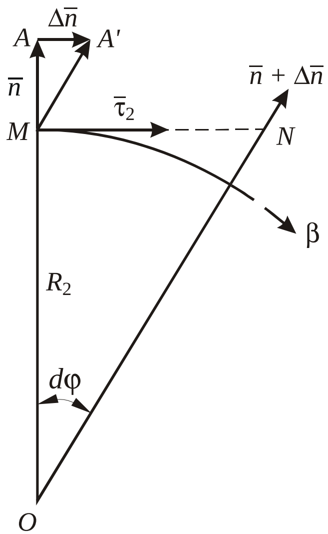


Рис. 6.8. К определению вектора приращения нормали

Аналогично получаем, что:

$$\frac{\partial\bar{n}}{\partial\alpha} = \frac{h_1}{R_1}\bar{\tau}_1,$$

где R_1 — радиус кривизны координатной линии α в точке M. Найдем теперь проекции $\dfrac{\partial\bar{\tau}_1}{\partial\alpha}$ на оси $\bar{\tau}_1$, $\bar{\tau}_2$, $\bar{n}$, записав эту производную так:

$$\frac{\partial\bar{\tau}_1}{\partial\alpha}=T_{11}\bar{\tau}_1+T_{12}\bar{\tau}_2+N_{11}\bar{n}\,. \tag{6.22}$$

Тогда $T_{11}=\left(\bar{\tau}_1\cdot\dfrac{\partial\bar{\tau}_1}{\partial\alpha}\right)$. Но эти векторы взаимно перпендикулярны, в чем нетрудно убедиться из рассмотрения рис. 6.4, и поэтому $T_{11}=0$.

Далее находим:

$$T_{12}=\left(\bar{\tau}_2\cdot\frac{\partial\bar{\tau}_1}{\partial\alpha}\right)=\frac{\partial\left(\bar{\tau}_1\cdot\bar{\tau}_2\right)}{\partial\alpha}-\left(\bar{\tau}_1\cdot\frac{\partial\bar{\tau}_2}{\partial\alpha}\right)=-\left(\bar{\tau}_1\cdot\frac{\partial\bar{\tau}_2}{\partial\alpha}\right); \tag{6.23}$$

$$N_{11}=\left(\bar{n}\cdot\frac{\partial\bar{\tau}_1}{\partial\alpha}\right)=\frac{\partial\left(\bar{n}\cdot\bar{\tau}_1\right)}{\partial\alpha}-\left(\bar{\tau}_1\frac{\partial\bar{n}}{\partial\alpha}\right)=-\left(\bar{\tau}_1\cdot\frac{\partial\bar{n}}{\partial\alpha}\right)=-\frac{h_1}{R_1}\,. \tag{6.24}$$

Для вычисления производной $\dfrac{\partial\bar{\tau}_2}{\partial\alpha}$ воспользуемся очевидным тождеством:

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\alpha}\right)\equiv\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\beta}\right), \tag{6.25}$$

которое с помощью выражений (6.2) и (6.3) перепишем в виде:

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(h_1\bar{\tau}_1\right)=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(h_2\bar{\tau}_2\right)$$

или:

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(h_1\bar{\tau}_1\right)=\bar{\tau}_2\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}+h_2\frac{\partial\bar{\tau}_2}{\partial\alpha}\,,$$

откуда:

$$\frac{\partial\bar{\tau}_2}{\partial\alpha}=\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(h_1\bar{\tau}_1\right)-\frac{\bar{\tau}_2}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}\,. \tag{6.26}$$

Подставляя (6.26) и (6.23), получаем после преобразований:

$$T_{12}=-\frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\beta}\,. \tag{6.27}$$

Подставляя (6.24) и (6.27) в (6.22), имеем:

$$\frac{\partial \bar{\tau}_1}{\partial \alpha} = -\frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial \beta}\bar{\tau}_2 - \frac{h_1}{R_1}\bar{n}\ . \tag{6.28}$$

Вычислим теперь производную:

$$\frac{\partial \bar{\tau}_1}{\partial \beta} = T_{21}\bar{\tau}_1 + T_{22}\bar{\tau}_2 + N_{21}\bar{n}\ .$$

Имеем:

$$T_{21} = \left(\frac{\partial \bar{\tau}_1}{\partial \beta}\cdot \bar{\tau}_1\right) = 0\ ;$$

$$T_{22} = \left(\frac{\partial \bar{\tau}_1}{\partial \beta}\cdot \bar{\tau}_2\right); \tag{6.29}$$

$$N_{21} = \left(\frac{\partial \bar{\tau}_1}{\partial \beta}\cdot \bar{n}\right) = \frac{\partial\left(\bar{\tau}_1\cdot \bar{n}\right)}{\partial \beta} - \left(\bar{\tau}_1\cdot\frac{\partial \bar{n}}{\partial \beta}\right).$$

Определив $\frac{\partial \bar{\tau}_1}{\partial \beta}$ из (6.25) как:

$$\frac{\partial \bar{\tau}_1}{\partial \beta} = \frac{1}{h_1}\left(-\bar{\tau}_1\frac{\partial h_1}{\partial \beta} + h_2\frac{\partial \bar{\tau}_2}{\partial \alpha} + \bar{\tau}_2\frac{\partial h_2}{\partial \alpha}\right),$$

получим после подстановки в (6.29):

$$T_{22} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha},$$

и поэтому:

$$\frac{\partial \bar{\tau}_1}{\partial \beta} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha}\bar{\tau}_2\,. \tag{6.30}$$

Производные от $\bar{\tau}_2$ по α и β можно получить из выражений (6.28) и (6.30), если в них произвести циклическую перестановку индексов 1 и 2, а также α и β. Для дальнейшего использования запишем сводку для производных единичных векторов:

$$\frac{\partial \bar{n}}{\partial \alpha} = \frac{h_1}{R_1}\bar{\tau}_1\ ; \quad \frac{\partial \bar{n}}{\partial \beta} = \frac{h_2}{R_2}\bar{\tau}_2\ ; \tag{6.31}$$

$$\frac{\partial\bar{\tau}_1}{\partial\alpha} = -\frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\beta}\bar{\tau}_2 - \frac{h_1}{R_1}\bar{n}\,; \quad \frac{\partial\bar{\tau}_1}{\partial\beta} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}\bar{\tau}_2\,;$$

$$\frac{\partial\bar{\tau}_2}{\partial\alpha} = \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\beta}\bar{\tau}_1\,; \quad \frac{\partial\bar{\tau}_2}{\partial\beta} = -\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}\bar{\tau}_1 - \frac{h_2}{R_2}\bar{n}\,. \tag{6.32}$$

6.1.5. Условия Кодацци и Гаусса

Выпишем еще два дополнительных геометрических соотношения, которые потребуются в дальнейшем. Запишем следующее очевидное тождество:

$$\frac{\partial^2\bar{n}}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{\partial^2\bar{n}}{\partial\beta\partial\alpha}\,,$$

или, в силу (6.31),

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{h_2}{R_2}\bar{\tau}_2\right) = \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{h_1}{R_1}\bar{\tau}_1\right).$$

Дифференцируя его:

$$\bar{\tau}_2\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{h_2}{R_2}\right) + \frac{h_2}{R_2}\frac{\partial\bar{\tau}_2}{\partial\alpha} = \bar{\tau}_1\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{h_1}{R_1}\right) + \frac{h_1}{R_1}\frac{\partial\bar{\tau}_1}{\partial\beta}$$

и подставляя полученные ранее производные от единичных векторов, получаем после преобразований:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{h_1}{R_1}\right) - \frac{1}{R_2}\frac{\partial h_1}{\partial\beta}\right)\bar{\tau}_1 - \left(\frac{1}{R_1}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha} - \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{h_2}{R_2}\right)\right)\bar{\tau}_2 = 0\,.$$

Но вектор, равный нулю, имеет и нулевые проекции на оси координат, поэтому:

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{h_1}{R_1}\right) = \frac{1}{R_2}\frac{\partial h_1}{\partial\beta}\,;$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{h_2}{R_2}\right) = \frac{1}{R_1}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}\,.$$

Это и есть условие Кодацци. Теперь получим условия Гаусса из тождества:

$$\frac{\partial^2\bar{\tau}_1}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{\partial^2\bar{\tau}_1}{\partial\beta\partial\alpha}\,.$$

Имеем после подстановки производных от $\bar{\tau}_1$ по β и α:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}\bar{\tau}_2\right)=-\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\beta}\bar{\tau}_2+\frac{h_1}{R_1}\bar{n}\right)$$

или:

$$\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}\frac{\partial\bar{\tau}_2}{\partial\alpha}+\bar{\tau}_2\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}\right)+\frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\beta}\frac{\partial\bar{\tau}_2}{\partial\beta}+\bar{\tau}_2\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\beta}\right)+\bar{n}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{h_1}{R_1}\right)=-\frac{h_1}{R_1}\frac{\partial\bar{n}}{\partial\beta}.$$

Подставляя сюда выражения для производных $\bar{\tau}_2$ и $\bar{n}$, а также используя условия Кодацци, получаем после преобразований *условие Гаусса*:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\beta}\right)=-\frac{h_1}{R_1}\frac{h_2}{R_2}.$$

В данном условии правая часть содержит Гауссову кривизну поверхности $\mathit{\Gamma}=\dfrac{1}{R_1R_2}$.

6.2. Деформация срединной поверхности

Пусть точка M на рис. 6.9 соответствует исходному состоянию срединной поверхности, а M' — деформированному. Тогда радиус-вектор $\bar{\rho}'$ точки M' можно определить как сумму радиуса-вектора $\bar{\rho}$ точки M в недеформированном состоянии и перемещения $\bar{V}_0$ этой точки: $\bar{\rho}'=\bar{\rho}+\bar{V}_0$, или $\bar{\rho}'=\bar{\rho}+u_0\bar{\tau}_1+v_0\bar{\tau}_2+w_0\bar{n}$, где u_0, v_0, w_0 — проекции вектора перемещения $\bar{V}_0$ точки M на оси единичного триэдра.

При определении коэффициентов Ламе было отмечено, что они представляют собой локальные масштабы длины, а т. к. форма поверхности после деформирования изменится, то изменятся и масштабы длины. Рассмотрим элемент линии α с координатами его концов (α,β) и $(\alpha+\Delta\alpha,\beta)$. До деформации длина этого элемента равна $ds_\alpha=h_1d\alpha$, а после деформации — $ds'_\alpha=h'_1d\alpha$, и поэтому относительное удлинение в этом направлении равно:

$$\varepsilon_1=\frac{ds'_\alpha-ds_\alpha}{ds_\alpha}=\frac{h'_1}{h_1}-1. \qquad (6.33)$$

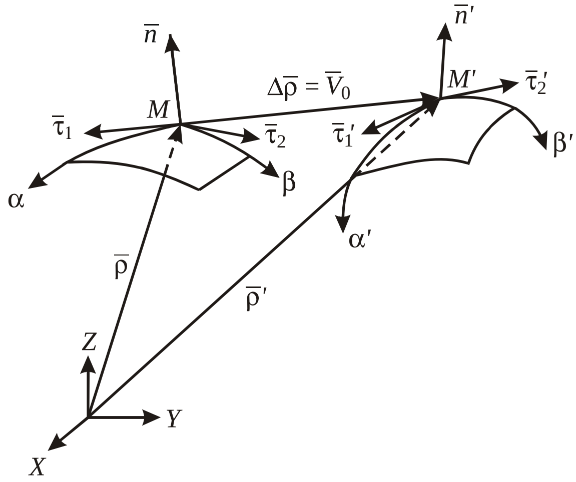


Рис. 6.9. Перемещение точки срединной поверхности при деформации

Аналогичные рассуждения позволяют определить относительное удлинение в направлении β:

$$\varepsilon_2 = \frac{h_2'}{h_2} - 1. \tag{6.34}$$

Угол сдвига в срединной поверхности равен изменению первоначально прямого угла между $\overline{\tau}_1$ и $\overline{\tau}_2$, т. е. $\gamma_{12} = \frac{\pi}{2} - \varphi$, где φ — угол между векторами $\overline{\tau}_1'$ и $\overline{\tau}_2'$.

Получим соотношения, связывающие компоненты деформации ε_1, ε_2, γ_{12} с перемещениями u_0, v_0, w_0. Разность квадратов длин элементарной дуги до и после деформации является инвариантной и не зависит от выбора конкретной системы координат. Этот инвариант — мера деформации тела, и если в теле $(ds')^2 - ds^2 = 0$, то оно не деформируется.

Вычислим инвариант, имея в виду, что $(ds')^2 = (d\overline{\rho}' \cdot d\overline{\rho}')$; $(ds)^2 = (d\overline{\rho} \cdot d\overline{\rho})$.

Получим:

$$d\overline{\rho} = \frac{\partial\overline{\rho}}{\partial\alpha} d\alpha + \frac{\partial\overline{\rho}}{\partial\beta} d\beta; \quad d\overline{\rho}' = d\overline{\rho} + \frac{\partial\overline{V}_0}{\partial\alpha}\partial\alpha + \frac{\partial\overline{V}_0}{\partial\beta} d\beta, \tag{6.35}$$

но $\dfrac{\partial\bar{\rho}}{\partial\alpha}=h_1\bar{\tau}_1$ и $\dfrac{\partial\bar{\rho}}{\partial\beta}=h_2\bar{\tau}_2$, поэтому $ds^2=h_1^2d\alpha^2+h_2^2d\beta^2$. Далее:

$$\frac{\partial\bar{V}_0}{\partial\alpha}=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(u_0\bar{\tau}_1+v_0\bar{\tau}_2+w_0\bar{n}\right)=u_0\frac{\partial\bar{\tau}_1}{\partial\alpha}+v_0\frac{\partial\bar{\tau}_2}{\partial\alpha}+w_0\frac{\partial\bar{n}}{\partial\alpha}+\bar{\tau}_1\frac{\partial u_0}{\partial\alpha}+\bar{\tau}_2\frac{\partial v_0}{\partial\alpha}+\bar{n}\frac{\partial w_0}{\partial\alpha},$$

или после подстановки производных от единичных векторов получаем:

$$\frac{\partial\bar{V}_0}{\partial\alpha}=h_1\left[\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial u_0}{\partial\alpha}+\frac{v_0}{h_1h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\beta}+\frac{w_0}{R_1}\right)\bar{\tau}_1+\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial v_0}{\partial\alpha}-\frac{u_0}{h_1h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\beta}\right)\bar{\tau}_2+\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial w_0}{\partial\alpha}-\frac{u_0}{R_1}\right)\bar{n}\right] \quad (6.36)$$

Обозначив:

$$e_1=\frac{1}{h_1}\frac{\partial u_0}{\partial\alpha}+\frac{v_0}{h_1h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\beta}+\frac{w_0}{R_1}; \quad (6.37)$$

$$\gamma_1=\frac{1}{h_1}\frac{\partial v_0}{\partial\alpha}-\frac{u_0}{h_1h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\beta}; \quad (6.38)$$

$$-\vartheta_1=\frac{1}{h_1}\frac{\partial w_0}{\partial\alpha}-\frac{u_0}{R_1}, \quad (6.39)$$

перепишем (6.36) так:

$$\frac{\partial\bar{V}_0}{\partial\alpha}=h_1\left(e\bar{\tau}_1+\gamma_1\bar{\tau}_2-\vartheta_1\bar{n}\right). \quad (6.40)$$

Аналогично получаем:

$$\frac{\partial\bar{V}_0}{\partial\beta}=h_2\left(\gamma_2\bar{\tau}_1+e_2\bar{\tau}_2-\vartheta_2\bar{n}\right), \quad (6.41)$$

где γ_2, e_2, ϑ_2 определяются из (6.37)—(6.39) циклической перестановкой индексов 1, 2 и переменных α и β. Подставляя (6.40) и (6.41) в (6.35), получаем:

$$d\bar{\rho}'=h_1\left(\left(1+e_1\right)\bar{\tau}_1+\gamma_1\bar{\tau}_2-\vartheta_1\bar{n}\right)d\alpha+h_2\left(\gamma_2\bar{\tau}_1+\left(1+e_2\right)\bar{\tau}_2-\vartheta_2\bar{n}\right)d\beta,$$

тогда:

$$ds'^2=\left(\left(1+e_1\right)^2+\gamma_1^2+\vartheta_1^2\right)h_1^2d\alpha^2+\left(\gamma_2^2+\left(1+e_2\right)^2+\vartheta_2^2\right)h_2^2d\beta^2.$$

Искомый инвариант деформации равен:

$$ds'^2-ds^2=\left(2e_1+e_1^2+\gamma_1^2+\vartheta_1^2\right)h_1^2d\alpha^2+\left(\gamma_2^2+2e_2+e_2^2+\vartheta_2^2\right)h_2^2d\beta_2+$$

$$+2\left(\left(1+e_1\right)\gamma_2+\left(1+e_2\right)\gamma_1+\vartheta_1\vartheta_2\right)h_1h_2d\alpha d\beta.$$

Теперь установим связь между компонентами деформаций ε_1, ε_2, γ_{12} и e_1, e_2, γ_1, γ_2, ϑ_1, ϑ_2. Для деформированного состояния в точке M можно записать:

$$\frac{\partial \bar{\rho}'}{\partial \alpha} = h_1' \bar{\tau}_1'; \tag{6.42}$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}'}{\partial \beta} = h_2' \bar{\tau}_1', \tag{6.43}$$

но, с другой стороны:

$$\frac{\partial \bar{\rho}'}{\partial \alpha} = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \bar{V}_0}{\partial \alpha} = h_1 \bar{\tau}_1 + h_1 \left(e_1 \bar{\tau}_1 + \gamma_1 \bar{\tau}_2 - \vartheta_1 \bar{n} \right); \tag{6.44}$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}'}{\partial \beta} = h_2 \left(\gamma_2 \bar{\tau}_1 + (1 + e_2) \bar{\tau}_2 - \vartheta_2 \bar{n} \right), \tag{6.45}$$

поэтому:

$$(h_1')^2 = \left(\frac{\partial \bar{\rho}'}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \bar{\rho}'}{\partial \alpha} \right) = h_1^2 \left((1 + e_1)^2 + \gamma_1^2 + \vartheta_1^2 \right),$$

$$(h_2')^2 = \left(\frac{\partial \bar{\rho}'}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \bar{\rho}'}{\partial \beta} \right) = h_2^2 \left(\gamma_2^2 + (1 + e_2)^2 + \vartheta_2^2 \right),$$

откуда:

$$\left(\frac{h_1'}{h_1} \right)^2 = (1 + e_1)^2 + \gamma_1^2 + \vartheta_1^2; \quad \left(\frac{h_2'}{h_2} \right)^2 = \gamma_2^2 + (1 + e_2)^2 + \vartheta_2^2.$$

Воспользовавшись формулами (6.33) и (6.34) для относительных деформаций, получаем:

$$\varepsilon_1 = \sqrt{(1 + e_1)^2 + \gamma_1^2 + \vartheta_1^2} - 1;$$

$$\varepsilon_2 = \sqrt{(1 + e_2)^2 + \gamma_2^2 + \vartheta_2^2} - 1.$$

Данные нелинейные соотношения справедливы при любых деформациях и углах поворота оболочки, однако практический интерес представляют оболочки, в которых возникают деформации, малые по сравнению с единицей, т. е. $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) << 1$. В этом случае:

$$\varepsilon_1 = e_1 + \frac{1}{2} \left(e_1^2 + \gamma_1^2 + \vartheta_1^2 \right); \tag{6.46}$$

$$\varepsilon_2 = e_2 + \frac{1}{2}\left(e_2^2 + \gamma_2^2 + \vartheta_2^2\right). \tag{6.47}$$

Для определения угла сдвига найдем сначала угол φ между осями $\overline{\tau}_1'$ и $\overline{\tau}_2'$, который из-за деформаций оболочки не равен $90°$. Приравнивая (6.42) и (6.44), а также (6.43) и (6.45), получаем:

$$\overline{\tau}_1' = \frac{h_1}{h_1'}\left(\left(1+e_1\right)\overline{\tau}_1 + \gamma_1\overline{\tau}_2 - \vartheta_1\overline{n}\right); \tag{6.48}$$

$$\overline{\tau}_2' = \frac{h_2}{h_2'}\left(\gamma_2\overline{\tau}_1 + \left(1+e_2\right)\overline{\tau}_2 - \vartheta_2\overline{n}\right);$$

$$\cos\varphi = \frac{h_1}{h_1'}\cdot\frac{h_2}{h_2'}\left(\left(1+e_1\right)\gamma_2 + \left(1+e_2\right)\gamma_1 + \vartheta_1\vartheta_2\right),$$

но $\cos\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{12}\right) = \sin\gamma_{12}$, поэтому:

$$\sin\gamma_{12} = \frac{1}{\left(1+\varepsilon_1\right)^2\left(1+\varepsilon_2\right)^2}\left(\left(1+e_1\right)\gamma_2 + \left(1+e_2\right)\gamma_1 + \vartheta_1\vartheta_2\right).$$

Принимаем далее, что углы сдвига, так же как и относительные деформации, малы по сравнению с единицей, тогда получаем:

$$\gamma_{12} \cong \left(1+e_1\right)\gamma_2 + \left(1+e_2\right)\gamma_1 + \vartheta_1\vartheta_2. \tag{6.49}$$

Выражения (6.46), (6.47), (6.49) соответствуют нелинейному варианту теории тонких упругих оболочек, когда компоненты деформаций значительно меньше единицы.

Получим линейный вариант этих уравнений. Для этого предположим дополнительно, что углы поворота всех линейных элементов оболочки малы настолько, что их квадратами можно пренебречь по сравнению с самими углами. Тогда ввиду малости углов их косинусы можно считать равными единице, и, в частности, $\left(\overline{\tau}_1\cdot\overline{\tau}_1'\right)\approx 1$, $\left(\overline{\tau}_2\cdot\overline{\tau}_2'\right)\approx 1$, $\left(\overline{n}\cdot\overline{n}'\right)\approx 1$. Из формул (6.48), (6.33), (6.34) получаем в этом случае, что $\varepsilon_1^0 = e_1$, $\varepsilon_2^0 = e_2$. Так как деформации малы, то теперь:

$$\overline{\tau}_1' = \overline{\tau}_1 + \gamma_1\overline{\tau}_2 - \vartheta_1\overline{n}; \quad \overline{\tau}_2' = \gamma_2\overline{\tau}_1 + \overline{\tau}_2 - \vartheta_2\overline{n}. \tag{6.50}$$

Прежде чем найти γ_{12}, выясним физический смысл γ_1, γ_2, ϑ_1, ϑ_2. Для этого составим следующие скалярные произведения: $\left(\overline{\tau}_1' \cdot \overline{\tau}_2\right) = \gamma_1$; $\left(\overline{\tau}_1' \cdot \overline{n}\right) = -\vartheta_1$. Видно, что γ_1, ϑ_1, а также γ_2, ϑ_2 — это углы поворота, а они малы, поэтому:

$$\gamma_{12}^0 = \left(\overline{\tau}_1' \cdot \overline{\tau}_2'\right) = \gamma_2 + \gamma_1 + \vartheta_1\vartheta_2 \approx \gamma_1 + \gamma_2 .$$

Таким образом, в линейном варианте теории упругих оболочек для компонент деформации можно записать следующие выражения:

$$\varepsilon_1^0 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial u_0}{\partial \alpha} + \frac{v_0}{h_1 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial \beta} + \frac{w_0}{R_1};$$

$$\varepsilon_2^0 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial v_0}{\partial \beta} + \frac{u_0}{h_1 h_2}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha} + \frac{w_0}{R_2};$$

$$\gamma_{12}^0 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial u_0}{\partial \beta} + \frac{1}{h_1}\frac{\partial v_0}{\partial \alpha} - \frac{v_0}{h_1 h_2}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha} - \frac{u_0}{h_1 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial \beta};$$

$$\vartheta_1 = \frac{u_0}{R_1} - \frac{1}{h_1}\frac{\partial w_0}{\partial \alpha};$$

$$\vartheta_2 = \frac{v_0}{R_2} - \frac{1}{h_1}\frac{\partial w_0}{\partial \beta}.$$

В заключение найдем нормаль $\overline{n}'$ к срединной поверхности как векторное произведение $\overline{\tau}_1'$ и $\overline{\tau}_2'$, используя выражения (6.50):

$$\overline{n}' = \left[\overline{\tau}_1' \times \overline{\tau}_2'\right] = \begin{vmatrix} \overline{\tau}_1 & \overline{\tau}_2 & \overline{n} \\ 1 & \gamma_1 & -\vartheta_1 \\ \gamma_2 & 1 & -\vartheta_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \overline{\tau}_1\left(-\gamma_1\vartheta_2 + \vartheta_1\right) - \overline{\tau}_2\left(-\vartheta_2 + \gamma_2\vartheta_1\right) + \overline{n}\left(1 - \gamma_1\gamma_2\right),$$

а если пренебречь квадратами углов для линейного варианта теории оболочек, то:

$$\overline{n}' \cong \vartheta_1\overline{\tau}_1 + \vartheta_2\overline{\tau}_2 + \overline{n} . \tag{6.51}$$

Составляя скалярные произведения $\overline{n}'$ с $\overline{\tau}_1$ и $\overline{\tau}_2$, получим: $\left(\overline{n}' \cdot \overline{\tau}_1\right) = \vartheta_1$; $\left(\overline{n}' \cdot \overline{\tau}_2\right) = \vartheta_2$, т. е. ϑ_1 и ϑ_2 — это углы поворота нормали к срединной поверхности относительно осей $\overline{\tau}_2$ и $\overline{\tau}_1$ соответственно.

6.3. Гипотезы Лава—Кирхгоффа

В теории оболочек используются гипотезы, подобные гипотезам плоских сечений при рассмотрении изгиба балок и гипотезам Кирхгоффа в теории тонких пластин. Они позволяют существенно упростить решение задачи об определении напряженного состояния в оболочке, т. к. его размерность уменьшается на единицу.

К тонким относят оболочки, у которых отношение толщины к минимальному главному радиусу кривизны находится в диапазоне:

$$10^{-5} \leq \frac{\delta}{R} \leq \left(\frac{1}{30} \div \frac{1}{50} \right).$$

Для этого диапазона отношений $\frac{\delta}{R}$ можно использовать следующие гипотезы Лава—Кирхгоффа:

1. Нормаль к срединной поверхности в процессе деформирования оболочки не искривляется и остается перпендикулярной срединной поверхности.
2. Нормаль к срединной поверхности не изменяет своей длины.
3. Нормальные напряжения на площадках, параллельных срединной поверхности, малы по сравнению с другими напряжениями.

Если $\frac{\delta}{R} < 10^{-3}$, то оболочка называется *мягкой*, и ее расчет обычно ведется в предположении постоянства напряжения по ее толщине. При $\frac{\delta}{R} > \frac{1}{30}$ необходимо использовать полную систему уравнений теории упругости, т. к. гипотезы Лава—Кирхгоффа приводят к большим погрешностям.

6.4. Деформация произвольного слоя

Выражения для относительных деформаций и сдвигов в срединной поверхности получены из геометрических соображений и справедливы для любого слоя оболочки, не совпадающего со срединным.

Получим теперь соотношения для расчета относительных деформаций и углов сдвига в произвольном слое оболочки, выразив их через уже известные величины в срединной поверхности и ограничившись линейным вариантом геометрических уравнений. Используя гипотезы Лава—Кирхгоффа о прямолинейности и нерастяжимости нормали к срединной поверхности, запишем следующее геометрическое соотношение (рис. 6.10):

$$z\bar{n} + \bar{V}_z = z\bar{n}' + \bar{V}_0,$$

где $\bar{V}_z$, $\bar{V}_0$ — перемещения точек M и N соответственно. Отметим, что на основании гипотезы Лава $MN = M'N' = z$, тогда:

$$\bar{V}_z = z\left(\bar{n}' - \bar{n}\right) + \bar{V}_0.$$

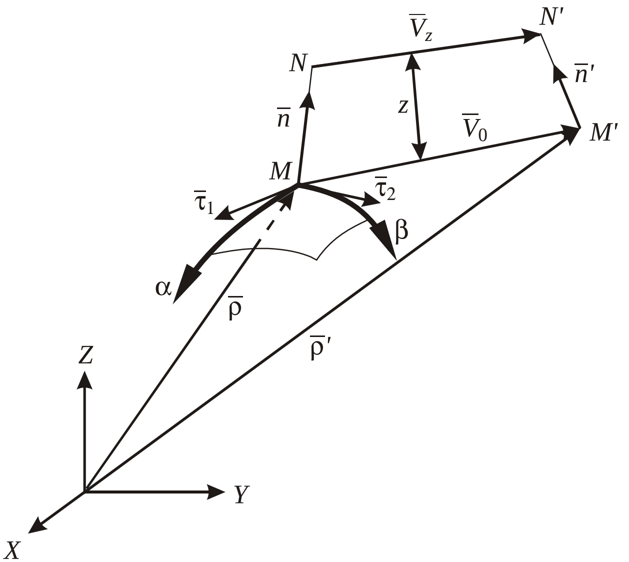


Рис. 6.10. Схема перемещения точек на срединной и эквидистантной поверхности

Найдем проекции вектора перемещения, $\bar{V}_z$ на оси $\bar{\tau}_1$, $\bar{\tau}_2$, $\bar{n}$ обозначив их через u, v, w соответственно и учитывая, что $\bar{V}_0 = u_0\bar{\tau}_1 + v_0\bar{\tau}_2 + w_0\bar{n}$:

$$u = \left(\bar{V}_z \cdot \bar{\tau}_1\right) = z\left(\left(\bar{n}' - \bar{n}\right) \cdot \bar{\tau}_1\right) + \left(\bar{V}_0 \cdot \bar{\tau}_1\right),$$

или:

$$u = u_0 + z\vartheta_1, \tag{6.52}$$

т. к. $\left(\bar{n}' \cdot \bar{\tau}_1\right) = \vartheta_1$; $\left(\bar{n} \cdot \bar{\tau}_1\right) = 0$.

Аналогично получаем:

$$v = v_0 + z\vartheta_2; \quad w = w_0, \tag{6.53}$$

т. е. перемещения точек оболочки в направлении осей $\bar{\tau}_1$, $\bar{\tau}_2$ меняются по линейному закону, а перемещение в направлении нормали к срединной поверхности постоянно, что является очевидным следствием гипотезы Лава. Для слоя оболочки, не совпадающего со срединным, можно также записать следующие выражения для относительных деформаций и углов сдвига:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{h_1 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial \beta} + \frac{w}{R_1};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{u}{h_1 h_2}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha} + \frac{w}{R_2};$$

$$\gamma_{12}^0 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{1}{h_1}\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{v}{h_1 h_2}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha} - \frac{u}{h_1 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial \beta}.$$

Полагаем $\left(\frac{\delta}{R_1}, \frac{\delta}{R_2}\right) << 1$, что позволяет считать постоянными по толщине оболочки ее радиусы кривизны и коэффициенты Ламе. Преобразуем выражения для ε_1, ε_2, γ_{12}, подставив в них перемещения u, v, w, определяемые формулами (6.52), (6.53). Имеем:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial u_0}{\partial \alpha} + \frac{v_0}{h_1 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial \beta} + \frac{w_0}{R_1} + z\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial \vartheta_1}{\partial \alpha} + \frac{\vartheta_2}{h_1 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial \beta}\right);$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial v_0}{\partial \beta} + \frac{u_0}{h_1 h_2}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha} + \frac{w_0}{R_2} + z\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial \vartheta_2}{\partial \beta} + \frac{\vartheta_1}{h_1 h_2}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha}\right),$$

или $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^0 + \kappa_1 z$; $\varepsilon_2 = \varepsilon_2^0 + \kappa_2 z$,

где:

$$\kappa_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \vartheta_1}{\partial \alpha} + \frac{\vartheta_2}{h_1 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial \beta};$$

$$\kappa_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial \vartheta_2}{\partial \beta} + \frac{\vartheta_1}{h_1 h_2}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha}.$$

Аналогично получаем:

$$\gamma_{12} = \frac{1}{h_2}\frac{\partial u_0}{\partial \beta} + \frac{1}{h_1}\frac{\partial v_0}{\partial \alpha} - \frac{v_0}{h_1 h_2}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha} - \frac{u_0}{h_1 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial \beta} +$$

$$+ z\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial \vartheta_1}{\partial \beta} + \frac{1}{h_1}\frac{\partial \vartheta_2}{\partial \alpha} - \frac{\vartheta_2}{h_1 h_2}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha} - \frac{\vartheta_1}{h_1 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial \beta}\right),$$

или $\gamma_{12}=\gamma_{12}^0+z\left(t_1+t_2\right)$,

где:

$$t_1=\frac{1}{h_1}\frac{\partial\vartheta_2}{\partial\alpha}-\frac{\vartheta_1}{h_1h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\beta};$$

$$t_2=\frac{1}{h_2}\frac{\partial\vartheta_1}{\partial\beta}-\frac{\vartheta_2}{h_1h_2}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}.$$

Можно убедиться при непосредственной подстановке соответствующих выражений, что выполняется следующее тождество:

$$t_1+\frac{\gamma_2^0}{R_1}\equiv t_2+\frac{\gamma_1^0}{R_2}=\kappa_{12},$$

из которого следует:

$$t_1+t_2=2\kappa_{12}-\left(\frac{\gamma_1^0}{R_2}+\frac{\gamma_2^0}{R_1}\right).$$

С учетом последнего соотношения выражение для γ_{12} принимает вид:

$$\gamma_{12}=\gamma_1^0+\gamma_2^0+2z\,\kappa_{12}-\frac{z}{R_2}\gamma_1^0-\frac{z}{R_1}\gamma_2^0,$$

или $\gamma_{12}\cong\gamma_{12}^0+2z\,\kappa_{12}$, т. к. $\left(\frac{z}{R_1},\frac{z}{R_2}\right)<<1$. Получим теперь выражение для κ_{12}. Имеем:

$$\kappa_{12}=t_1+\frac{\gamma_2^0}{R_1}=\frac{1}{h_1}\frac{\partial\vartheta_2}{\partial\alpha}-\frac{\vartheta_1}{h_1h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\beta}+\frac{1}{R_1}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial u_0}{\partial\alpha}-\frac{v_0}{h_1h_2}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}\right).$$

Подставляя сюда ϑ_1, ϑ_2, получаем:

$$\kappa_{12}=\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v_0}{R_2}\right)-\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{h_2}\right)\frac{\partial w_0}{\partial\beta}-\frac{1}{h_1h_2}\left(\frac{u_0}{R_1}-\frac{1}{h_1}\frac{\partial w_0}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial h_1}{\partial\beta}+$$
$$+\frac{1}{R_1}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial u_0}{\partial\beta}-\frac{v_0}{h_1h_2}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}\right),$$

или:

$$\kappa_{12}=\frac{1}{h_1R_2}\frac{\partial v_0}{\partial\alpha}+\frac{v_0}{h_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{R_2}\right)-\frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial\beta\partial\alpha}-\frac{1}{h_1}\frac{\partial w_0}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{h_2}\right)-$$
$$-\frac{v_0}{h_1h_2R_1}\frac{\partial h_1}{\partial\beta}+\frac{\partial w_0}{\partial\alpha}\frac{1}{h_1^2h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\beta}++\frac{1}{R_1}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial u_0}{\partial\beta}-\frac{v_0}{h_1h_2}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}\right). \qquad (6.54)$$

Преобразуем сумму второго и последнего слагаемых:

$$A = \frac{v_0}{h_1}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{R_2}\right) - \frac{1}{h_2 R_1}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}\right] = \frac{v_0}{h_1 h_2}\left[h_2\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{R_2}\right) - \frac{1}{R_1}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}\right].$$

Но из условия Кодацци имеем:

$$\frac{1}{R_1}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{h_2}{R_2}\right),$$

поэтому:

$$A = -\frac{v_0}{h_1 h_2}\frac{1}{R_2}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}.$$

Окончательно получим κ_{12}, подставив A в (6.54). Перепишем в окончательном виде сводку геометрических уравнений (6.55), которые будут использоваться в дальнейшем:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_1^0 &= \frac{1}{h_1}\frac{\partial u_0}{\partial\alpha} + \frac{v_0}{h_1 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\beta} + \frac{w_0}{R_1};\\
\varepsilon_2^0 &= \frac{1}{h_2}\frac{\partial v_0}{\partial\beta} + \frac{u_0}{h_1 h_2}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha} + \frac{w_0}{R_2};\\
\gamma_{12} &= \frac{1}{h_2}\frac{\partial u_0}{\partial\beta} - \frac{v_0}{h_1 h_2}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha} + \frac{1}{h_1}\frac{\partial v_0}{\partial\alpha} - \frac{u_0}{h_1 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\beta};\\
\varepsilon_1 &= \varepsilon_1^0 + \kappa_1 z; \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_2^0 + \kappa_2 z; \quad \gamma_{12} = \gamma_{12}^0 + 2\kappa_{12} z;\\
\kappa_1 &= \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u_0}{R_1} - \frac{1}{h_1}\frac{\partial w_0}{\partial\alpha}\right) + \frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\beta}\left(\frac{v_0}{R_2} - \frac{1}{h_2}\frac{\partial w_0}{\partial\beta}\right);\\
\kappa_2 &= \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{v_0}{R_2} - \frac{1}{h_2}\frac{\partial w_0}{\partial\beta}\right) + \frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}\left(\frac{u_0}{R_1} - \frac{1}{h_1}\frac{\partial w_0}{\partial\alpha}\right);\\
\kappa_{12} &= -\frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial\beta}\frac{\partial w_0}{\partial\alpha} - \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}\frac{\partial w_0}{\partial\beta}\right) +\\
&+ \frac{1}{R_1}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial u_0}{\partial\beta} - \frac{u_0}{h_1 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\beta}\right) + \frac{1}{R_2}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial v_0}{\partial\alpha} - \frac{v_0}{h_1 h_2}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{6.55}$$

Можно показать, что κ_1, κ_2 характеризуют изменения главных кривизн в направлениях α, β соответственно. Шесть величин ε_1^0, ε_2^0, γ_{12}^0, κ_1, κ_2, κ_{12} выражаются через три функции u_0, v_0, w_0 и, следовательно, должны быть связаны еще тремя дополнительными условиями неразрывности деформаций, аналогичными условиям сплошности Сен-Венана в теории упругости.

6.5. Физические уравнения

Запишем обобщенный закон Гука для многослойной оболочки, у которой главные направления упругости слоев совпадают с главными направлениями кривизны.

На основании гипотез, принимаемых в теории тонких оболочек (гипотез Лава—Кирхгоффа), в пределах каждого слоя нормальное напряжение $\sigma_3 = 0$ и относительная деформация $\varepsilon_3 = 0$, а также сдвиги $\gamma_{23} = 0$ и $\gamma_{31} = 0$, т. к. нормаль к срединной поверхности не искривляется. Тогда для каждого *i*-ого слоя можно записать:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_2^i &= \frac{E_2^i}{1-\mu_1^i\mu_2^i}\left(\varepsilon_2^i + \mu_1^i\varepsilon_1^i\right); \\ \sigma_2^i &= \frac{E_2^i}{1-\mu_1^i\mu_2^i}\left(\varepsilon_2^i + \mu_1^i\varepsilon_1^i\right); \\ \tau_{12}^i &= G^i\gamma_{12}^i, \end{aligned}\right\} \tag{6.56}$$

где E_1^i, E_2^i — модули упругости *i*-ого слоя в направлениях α и β соответственно; G^i — модуль сдвига; μ_1^i, μ_2^i — коэффициенты Пуассона.

На основании геометрических уравнений (6.55) можно записать, что:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1^i &= \frac{E_1^i}{1-\mu_1^i\mu_2^i}\left(\varepsilon_1^0 + \mu_2^i\varepsilon_2^0 + z\left(\kappa_1 + \mu_2^i\kappa_2\right)\right); \\ \sigma_2^i &= \frac{E_2^i}{1-\mu_1^i\mu_2^i}\left(\varepsilon_2^0 + \mu_1^i\varepsilon_1^0 + z\left(\kappa_2 - \mu_1^i\kappa_1\right)\right); \\ \tau_{12}^i &= G^i\left(\gamma_{12}^0 + 2z\kappa_{12}\right), \end{aligned}\right\} \tag{6.57}$$

где z — расстояние от срединной поверхности оболочки.

Отметим, что на основании принятых гипотез κ_1, κ_2, κ_{12} постоянны по толщине оболочки, но, с другой стороны, свойства каждого из ее слоев различны.

6.6. Внутренние погонные усилия и моменты

Выделим четырьмя плоскостями, нормальными к срединной поверхности, бесконечно малый элемент оболочки. По граням элемента будут действовать напряжения, характеризующие воздействие отброшенной части оболочки на выделенный элемент.

Проведем координатную поверхность, на которой введем криволинейную сетку координат α, β (рис. 6.11). Для многослойной оболочки эту поверхность можно проводить произвольно, и она не обязательно должна совпадать со срединной поверхностью оболочки.

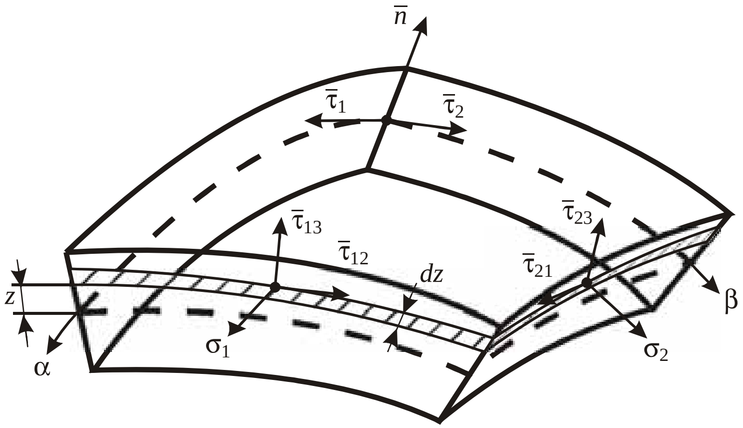


Рис. 6.11. Положение координатной поверхности

Для определения знака нормальных напряжений будем пользоваться следующим правилом.

> **Вне зависимости от направления единичных векторов $\bar{\tau}_1$, $\bar{\tau}_2$, $\bar{n}$, *нормальные напряжения*, действующие на выделенной площадке, считаются *положительными*, если их направление совпадает с направлением нормали к этой площадке.**

Введем понятие погонных внутренних усилий и моментов относительно координатной поверхности с помощью следующих выражений:

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \int_\delta \sigma_1 dz; \quad N_2 = \int_\delta \sigma_2 dz; \quad T_{12} = \int_\delta \tau_{12} dz; \\ M_1 &= \int_\delta \sigma_1 z dz; \quad M_2 = \int_\delta \sigma_2 z dz; \quad M_{12} = \int_\delta \tau_{12} z dz, \end{aligned}\right\} \tag{6.58}$$

в которых интегрирование выполняется по всей толщине оболочки.

Подставляя в (6.58) выражения для напряжений (6.57), получаем:

$$N_1 = B_{11}\varepsilon_1^0 + B_{12}\varepsilon_2^0 + A_{11}\kappa_1 + A_{12}\kappa_2\,; \quad N_2 = B_{22}\varepsilon_2^0 + B_{21}\varepsilon_1^0 + A_{22}\kappa_2 + A_{21}\kappa_1\,;$$

$$T_{12} = B_{33} + \gamma_{12}^0 + A_{33}\kappa_{12}\,; \quad M_1 = A_{11}\varepsilon_1^0 + A_{12}\varepsilon_2^0 + D_{11}\kappa_1 + D_{12}\kappa_2\,;$$

$$M_2 = A_{22}\varepsilon_2^0 + A_{21}\varepsilon_1^0 + D_{22}\kappa_2 + D_{21}\kappa_1\,; \quad H = M_{12} = M_{21} = A_{33}\gamma_{12}^0 + 2D_{33}\kappa_{12}\,,$$

где:

$$\left.\begin{aligned}
&B_{11} = \sum_i \int_\delta \frac{E_1^i}{\left(1-\mu_1^i\mu_2^i\right)}dz; \quad B_{22} = \sum_i \int_\delta \frac{E_2^i}{\left(1-\mu_1^i\mu_2^i\right)}dz;\\
&B_{12} = \sum_i \int_\delta \frac{E_1^i\mu_2^i}{\left(1-\mu_1^i\mu_2^i\right)}dz; \quad B_{21} = \sum_i \int_\delta \frac{E_2^i\mu_1^i}{\left(1-\mu_1^i\mu_2^i\right)}dz;\\
&A_{11} = \sum_i \int_\delta \frac{E_1^i z}{\left(1-\mu_1^i\mu_2^i\right)}dz; \quad A_{22} = \sum_i \int_\delta \frac{E_2^i z}{\left(1-\mu_1^i\mu_2^i\right)}dz;\\
&A_{12} = \sum_i \int_\delta \frac{E_1^i z\mu_2^i}{\left(1-\mu_1^i\mu_2^i\right)}dz; \quad A_{21} = \sum_i \int_\delta \frac{E_2^i z\mu_1^i}{\left(1-\mu_1^i\mu_2^i\right)}dz;\\
&D_{11} = \sum_i \int_\delta \frac{E_1^i z^2}{\left(1-\mu_1^i\mu_2^i\right)}dz; \quad D_{22} = \sum_i \int_\delta \frac{E_2^i z^2}{\left(1-\mu_1^i\mu_2^i\right)}dz;\\
&D_{12} = \sum_i \int_\delta \frac{E_1^i\mu_2^i z^2}{\left(1-\mu_1^i\mu_2^i\right)}dz; \quad D_{21} = \sum_i \int_\delta \frac{E_2^i\mu_1^i z^2}{\left(1-\mu_1^i\mu_2^i\right)}dz;\\
&B_{33} = \sum_i \int_\delta G_i dz; \quad A_{33} = \sum_i \int_\delta G^i z dz; \quad D_{33} = \sum_i \int_\delta G^i z^2 dz.
\end{aligned}\right\} \qquad (6.59)$$

Рассмотрим теперь частные случаи записи полученных выражений.

6.6.1. Изотропная однослойная оболочка

В этом случае в качестве координатной удобно выбрать срединную поверхность оболочки. Тогда:

$$B_{11} = B_{22} = \frac{E\delta}{1-\mu^2}\,; \quad B_{12} = B_{21} = \frac{\mu E\delta}{1-\mu^2}\,;$$

$$A_{11} = A_{22} = A_{12} = A_{21} = 0\,;$$

$$D = D_{11} = D_{22} = \frac{E\delta^3}{12\left(1-\mu^2\right)}; \quad D_{12} = D_{21} = \mu\frac{E\delta^3}{12\left(1-\mu^2\right)};$$

$$B_{33} = G\delta; \quad A_{33} = 0; \quad D_{33} = \frac{G\delta^3}{12},$$

и выражения для погонных внутренних усилий принимают следующий вид:

$$N_1 = \frac{E\delta}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_1^0 - \mu\varepsilon_2^0\right); \quad N_2 = \frac{E\delta}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_2^0 - \mu\varepsilon_1^0\right);$$

$$M_1 = D\left(\kappa_1 + \mu\kappa_2\right); \quad M_2 = D\left(\kappa_2 + \mu\kappa_1\right);$$

$$T_{12} = T_{21} = G\delta\gamma_{12}^0; \quad H = G\left(\frac{\delta^3}{3}\right)\kappa_{12}.$$

А если учесть, что модуль сдвига $G = \dfrac{E}{2\left(1+\mu\right)}$, то:

$$T_{12} = \frac{E\delta}{2\left(1+\mu\right)}\gamma_{12}^0; \quad H = D\left(1-\mu\right)\kappa_{12}.$$

Комплекс D называют *цилиндрической жесткостью* оболочки.

6.6.2. Ортотропная однослойная оболочка

В этом случае координатную поверхность тоже удобно совместить со срединной поверхностью оболочки, но теперь физико-механические свойства материала оболочки различны в направлениях α и β.

Такой случай типичен для оболочек из стеклопластика, когда они представляются в виде однородного тела и слои, из которых состоит оболочка, отдельно не выделяются.

Вычисляя коэффициенты по формулам (6.59), после преобразований получаем:

$$\left.\begin{aligned} N_1 = \frac{E_1\delta}{1-\mu_1\mu_2}\left(\varepsilon_1^0 + \mu_2\varepsilon_2^0\right); \quad N_2 = \frac{E_2\delta}{1-\mu_1\mu_2}\left(\varepsilon_2^0 + \mu_1\varepsilon_1^0\right);\\ M_1 = \frac{E_1\delta^3}{12\left(1-\mu_1\mu_2\right)}\left(\kappa_1 + \mu_2\kappa_2\right); \quad M_2 = \frac{E_2\delta^3}{12\left(1-\mu_1\mu_2\right)}\left(\kappa_2 + \mu_1\kappa_1\right);\\ T_{12} = G\delta\gamma_{12}^0; \quad H = G\left(\frac{\delta^3}{3}\right)\kappa_{12}. \end{aligned}\right\} \tag{6.60}$$

Если учесть, что для ортотропной оболочки справедлива гипотеза о существовании потенциала [3] и $E_1\mu_2 = E_2\mu_1$, то приведенные выражения можно переписать в несколько более простом виде.

Отметим также, что в ортотропной оболочке модуль сдвига считается постоянным во всех направлениях.

6.6.3. Конструктивно анизотропные оболочки

Теперь предположим, что на поверхности оболочки имеются продольные и поперечные ребра, направления которых совпадают с главными направлениями кривизны. Координатную поверхность поместим на срединной поверхности оболочки. В этом случае выражения для соответствующих коэффициентов целесообразно представить в виде двух слагаемых, одно из которых относится к оболочке, а другое — к подкрепляющим элементам. Тогда:

$$A_{ij} = \overline{A}_{ij} + A_{ij}^0; \quad B_{ij} = \overline{B}_{ij} + B_{ij}^0; \quad D_{ij} = \overline{D}_{ij} + D_{ij}^0,$$

где $\overline{A}_{ij}$, $\overline{B}_{ij}$, $\overline{D}_{ij}$ — слагаемые, относящиеся к обшивке, вид которых зависит от типа оболочки: изотропная или ортотропная. Эти коэффициенты определяются по формулам из двух предыдущих разделов.

Далее представляя подкрепляющие элементы в виде размазанного по поверхности оболочки ортотропного слоя, получаем после интегрирования в (6.59):

$$B_{ii}^0 = \frac{E_i^0 F_i}{l_i} \quad (i = 1,\, 2); \quad B_{12}^0 = B_{21}^0 = B_{33}^0 = 0;$$

$$A_{ii}^0 = \frac{E_i^0 S_i}{l_i} \quad (i = 1,\, 2); \quad A_{12}^0 = A_{21}^0 = A_{33}^0 = 0;$$

$$D_{ii}^0 = \frac{E_i^0 J_i}{l_i} \quad (i = 1,\, 2); \quad D_{12}^0 = D_{21}^0 = D_{33}^0 = 0.$$

где E_1^0, E_2^0 — модули упругости; S_1, S_2 — статические моменты; J_1, J_2 — моменты инерции; F_1, F_2 — площади сечений подкреплений; l_1, l_2 — расстояния между ними. Заметим, что если z_i — координата центра тяжести сечения i-ого подкрепления, то $S_i = F_i z_i$; $J_i = J_{0i} + z_i^2 F_i$, где J_{0i} — момент инерции сечения относительно собственного центра тяжести.

Рассмотрим частный случай изотропной оболочки с подкреплениями, изготовленными из того же материала (вафельная оболочка) (рис. 6.12):

$$B_{11} = \frac{E\delta}{1-\mu^2} + \frac{EF_1}{l_1}; \quad B_{22} = \frac{E\delta}{1-\mu^2} + \frac{EF_2}{l_2}; \quad B_{12} = B_{21} = \mu \frac{E\delta}{1-\mu^2};$$

$$A_{11} = \frac{ES_1}{l_1}; \quad A_{22} = \frac{ES_2}{l_2}; \quad A_{12} = A_{21} = 0;$$

$$D_{11} = D + \frac{EJ_1}{l_1}; \quad D_{22} = D + \frac{EJ_2}{l_2}; \quad D_{12} = D_{21} = \mu D;$$

$$B_{33} = G\delta; \quad A_{33} = 0; \quad D_{33} = G\left(\frac{\delta^3}{12}\right),$$

и выражения для погонных внутренних усилий и моментов принимают вид:

$$N_1 = \frac{E\delta}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_1^0 + \mu\varepsilon_2^0\right) + \frac{EF_1}{l_1}\varepsilon_1^0 + \frac{ES_1}{l_1}\kappa_1;$$

$$N_2 = \frac{E\delta}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_2^0 + \mu\varepsilon_1^0\right) + \frac{EF_2}{l_2}\varepsilon_2^0 + \frac{ES_2}{l_2}\kappa_2; \qquad (6.61)$$

$$T_{12} = G\delta\gamma_{12}^0;$$

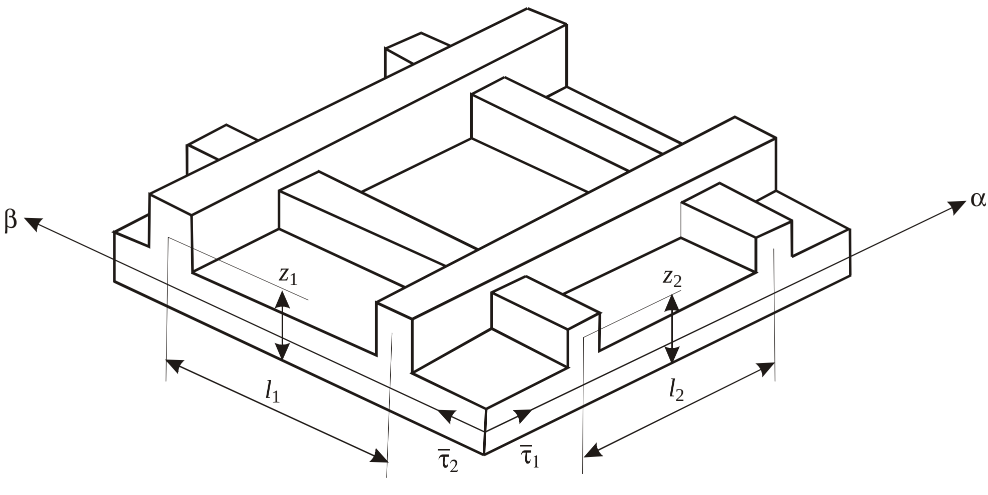


Рис. 6.12. Геометрия вафельной оболочки

$$M_1 = \frac{ES_1}{l_1}\varepsilon_1^0 + D\left(\kappa_1 + \mu\kappa_2\right) + \frac{EJ_1}{l_1}\kappa_1; \tag{6.62}$$

$$M_2 = \frac{ES_2}{l_2}\varepsilon_2^0 + D\left(\kappa_2 + \mu\kappa_1\right) + \frac{EJ_2}{l_2}\kappa_2; \quad H = G\frac{\delta^3}{6}\kappa_{12} = D\left(1-\mu\right)\kappa_{12}.$$

Ясно, что при рассмотрении подкрепляющих ребер в виде размазанного по поверхности оболочки слоя их взаимным влиянием друг на друга, а также влиянием на сдвиг и кручение срединной поверхности обшивки пренебрегаем. Последнее обстоятельство находит свое отражение, в частности, в формулах (6.61) и (6.62).

6.7. Напряжения в оболочке

Для практических расчетов напряжений в оболочке иногда вместо формул (6.56) удобнее воспользоваться выражениями, связывающими напряжения с погонными усилиями и моментами. Получим их для случая однослойной ортотропной оболочки, переписав сначала (6.60) относительно деформаций:

$$\varepsilon_1^0 = \frac{1}{E_1\delta}\left(N_1 - \mu_1 N_2\right); \quad \varepsilon_2^0 = \frac{1}{E_2\delta}\left(N_2 - \mu_2 N_1\right);$$

$$\gamma_{12}^0 = \frac{1}{G\delta}T_{12}; \quad \kappa_{12} = \frac{6}{G\delta^3}H;$$

$$\kappa_1 = \frac{12}{E_1\delta^3}\left(M_1 - \mu_1 M_2\right); \quad \kappa_2 = \frac{12}{E_2\delta^3}\left(M_2 - \mu_2 M_1\right).$$

Подставляя эти выражения в закон Гука (6.57), получаем:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{\delta} + \frac{12M_1}{\delta^3}z; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{\delta} + \frac{12M_2}{\delta^3}z; \quad \tau_{12} = \frac{T_{12}}{\delta} + \frac{12H}{\delta^3}z,$$

в которых первые слагаемые определяются погонными усилиями в оболочке, а вторые — моментами.

6.8. Уравнения равновесия элемента

Составим уравнения равновесия малого элемента срединной поверхности тонкой оболочки. Действие отброшенной части оболочки на выделенный элемент заменим погонными усилиями и моментами. На основании теоремы статики тело находится в равновесии, если главный вектор и главный момент всех внешних сил, действующих на него, равен нулю.

На рис. 6.13, *а—б* показан элемент оболочки, на который действуют положительные погонные усилия и моменты. Найдем сначала главный вектор внешних сил. На грань *OB* элемента действует сила, равная $\left(-N_1\bar{\tau}_1 - T_{12}\bar{\tau}_{12} - Q_1\bar{n}\right)h_2 d\beta$, а на *AC*:

$$\left(N_1\bar{\tau}_1 + T_{12}\bar{\tau}_2 + Q_1\bar{n}\right)h_2 d\beta + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\left(N_1\bar{\tau}_1 + T_{12}\bar{\tau}_2 + Q_1\bar{n}\right)h_2 d\beta\right]d\alpha .$$

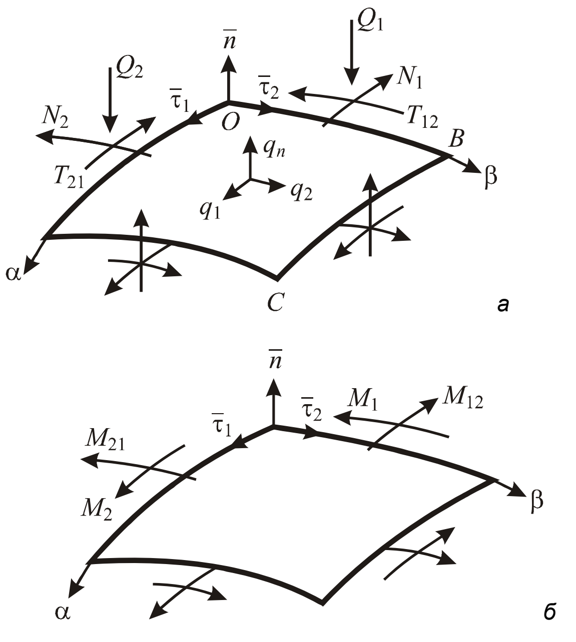


Рис. 6.13. Погонные силы (*а*) и моменты (*б*), действующие на малый элемент оболочки

Аналогично определяется сила на грани *OA*: $\left(-N_2\bar{\tau}_2 - T_{21}\bar{\tau}_1 - Q_2\bar{n}\right)h_1 d\alpha$, а на противоположной ей:

$$\left(N_2\bar{\tau}_2 + T_{12}\bar{\tau}_1 + Q_2\bar{n}\right)h_1 d\alpha + \frac{\partial}{\partial\beta}\left[\left(N_2\bar{\tau}_2 + T_{21}\bar{\tau}_1 + Q_2\bar{n}\right)h_1 d\alpha\right]d\beta .$$

Вектор внешней нагрузки равен:

$$\left(q_1\bar{\tau}_1 + q_2\bar{\tau}_2 + q_n\bar{n}\right)h_1 h_2 d\alpha d\beta .$$

Складывая полученные выражения и приравнивая результат к нулю, получаем после приведения подобных членов:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big[\left(N_1\bar{\tau}_1+T_{12}\bar{\tau}_2+Q_1\bar{n}\right)h_2 d\beta\Big]d\alpha+\frac{\partial}{\partial\beta}\Big[\left(N_2\bar{\tau}_2+T_{21}\bar{\tau}_1+Q_2\bar{n}\right)h_1 d\alpha\Big]d\beta+$$

$$+\left(q_1\bar{\tau}_1+q_2\bar{\tau}_2+q_n\bar{n}\right)h_1h_2\,d\alpha d\beta=0,$$

или, разделив на $d\alpha d\beta$:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\left(N_1\bar{\tau}_1+T_{12}\bar{\tau}_2+Q_1\bar{n}\right)h_2\right]+\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\left(N_2\bar{\tau}_2+T_{21}\bar{\tau}_1+Q_2\bar{n}\right)h_1\right]+$$

$$+\left(q_1\bar{\tau}_1+q_2\bar{\tau}_2+q_n\bar{n}\right)h_1h_2=0\,.$$

Проведем почленное дифференцирование слагаемых полученного выражения:

$$\frac{\partial N_1h_2}{\partial\alpha}\bar{\tau}_1+\frac{\partial T_{12}h_2}{\partial\alpha}\bar{\tau}_2+\frac{\partial Q_1h_2}{\partial\alpha}\bar{n}+\frac{\partial N_2h_1}{\partial\beta}\bar{\tau}_2+\frac{\partial T_{21}h_1}{\partial\beta}\bar{\tau}_2+$$

$$+\frac{\partial Q_2h}{\partial\beta}\bar{n}+N_1h_2\frac{\partial\bar{\tau}_1}{\partial\alpha}+T_{12}h_2\frac{\partial\bar{\tau}_2}{\partial\alpha}+Q_1h_2\frac{\partial\bar{n}}{\partial\alpha}+N_2h_1\frac{\partial\bar{\tau}_2}{\partial\beta}+$$

$$+T_{21}h_1\frac{\partial\bar{\tau}_1}{\partial\beta}+Q_2h_1\frac{\partial\bar{n}}{\partial\beta}+h_1h_2\left(q_1\bar{\tau}_1+q_2\bar{\tau}_2+q_n\bar{n}\right)=0.$$

Подставляя выражения для производных от единичных векторов, получаем после преобразований:

$$\bar{\tau}_1\left(\frac{\partial N_1h_2}{\partial\alpha}+\frac{\partial T_{21}h_1}{\partial\beta}+T_{12}\frac{\partial h_1}{\partial\beta}+\frac{Q_1h_1h_2}{R_1}-N_2\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}+q_1h_1h_2\right)+$$

$$+\bar{\tau}_2\left(\frac{\partial T_{12}h_2}{\partial\alpha}+\frac{\partial N_2h_1}{\partial\beta}-N_1\frac{\partial h_1}{\partial\beta}+T_{21}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}+\frac{Q_2h_1h_2}{R_2}+q_2h_1h_2\right)+$$

$$+\bar{n}\left(\frac{\partial Q_1h_2}{\partial\alpha}+\frac{\partial Q_2h_1}{\partial\beta}-N_1\frac{h_1h_2}{R_1}-N_2\frac{h_1h_2}{R_2}+q_nh_1h_2\right)=0.$$

Спроектировав полученное векторное выражение на оси единичного триэдра, получим:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{h_1h_2}\left(\frac{\partial N_1h_2}{\partial\alpha}+\frac{\partial T_{21}h_1}{\partial\beta}+T_{12}\frac{\partial h_1}{\partial\beta}-N_2\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}\right)+\frac{Q_1}{R_1}+q_1=0;\\
&\frac{1}{h_1h_2}\left(\frac{\partial T_{12}h_2}{\partial\alpha}+\frac{\partial N_2h_1}{\partial\beta}+T_{21}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}-N_1\frac{\partial h_1}{\partial\beta}\right)+\frac{Q_2}{R_2}+q_2=0;\\
&\frac{1}{h_1h_2}\left(\frac{\partial Q_1h_2}{\partial\alpha}+\frac{\partial Q_2h_1}{\partial\beta}\right)-\frac{N_1}{R_1}-\frac{N_2}{R_2}+q_n=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(6.63)$$

Составим теперь выражение для главного момента всех внешних сил, действующих на выделенный элемент срединной поверхности оболочки. Сначала определим суммарный момент, создаваемый погонными моментами:

$$\begin{aligned}\bar{M}_{\Sigma} &= \left(M_{12}\bar{\tau}_1 - M_1\bar{\tau}_2\right)h_2\partial\beta + \left(M_1\bar{\tau}_2 - M_{12}\bar{\tau}_1\right)h_2\partial\beta + \\ &+ \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\left(M_1\bar{\tau}_2 - M_{12}\bar{\tau}_1\right)h_2\partial\beta\right]\partial\alpha + \left(M_2\bar{\tau}_1 - M_{21}\bar{\tau}_2\right)h_1 d\alpha + \\ &+ \left(M_{21}\bar{\tau}_2 - M_2\bar{\tau}_1\right)h_1 d\alpha + \frac{\partial}{\partial\beta}\left[\left(M_{21}\bar{\tau}_2 - M_2\bar{\tau}_1\right)h_1 d\alpha\right]d\beta,\end{aligned}$$

откуда:

$$\begin{aligned}\bar{M}_{\Sigma} = &\left(\frac{\partial M_1}{\partial\alpha}h_2\bar{\tau}_2 - \frac{\partial M_{12}}{\partial\alpha}h_2\bar{\tau}_1 + M_1 h_2\frac{\partial\bar{\tau}_2}{\partial\alpha} - M_{12}h_2\frac{\partial\bar{\tau}_1}{\partial\alpha} + \right. \\ &\left. + \frac{\partial M_{21}}{\partial\beta}h_1\bar{\tau}_2 - \frac{\partial M_2}{\partial\beta}h_1\bar{\tau}_1 + M_{21}h_1\frac{\partial\bar{\tau}_2}{\partial\beta} - M_2 h_1\frac{\partial\bar{\tau}_1}{\partial\beta}\right)d\alpha d\beta.\end{aligned} \tag{6.64}$$

При вычислении моментов, создаваемых погонными усилиями, будем пренебрегать моментами второго и более высокого порядков малости по α и β. Тогда:

$$\bar{M}_0 = Q_2 h_1\, d\alpha\, h_2\, d\beta\bar{\tau}_1 - Q_1 h_1\, d\alpha\, h_2\, d\beta\bar{\tau}_2 + \left(T_{12} - T_{21}\right)h_1\, d\alpha\, h_2\, d\beta\,\bar{n}\,. \tag{6.65}$$

Складывая выражения (6.64), (6.65) и подставляя соотношения для производных от единичных векторов, получаем:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial M_1}{\partial\alpha}h_2\bar{\tau}_2 - \frac{\partial M_{12}}{\partial\alpha}h_2\bar{\tau}_1 + \frac{\partial M_{21}}{\partial\beta}h_1\bar{\tau}_2 - \frac{\partial M_2}{\partial\beta}h_1\bar{\tau}_1 + Q_2 h_1 h_2\bar{\tau}_1 - Q_1 h_1 h_2\bar{\tau}_2 + \\ &+ \left(T_{12} - T_{21}\right)h_1 h_2\bar{n} + M_1\frac{\partial h_1}{\partial\beta}\bar{\tau}_1 + M_{12}\frac{\partial h_1}{\partial\beta}\bar{\tau}_2 + \frac{M_{12}h_1 h_2}{R_1}\bar{n} - \\ &- M_{21}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}\bar{\tau}_1 - h_1 h_2 M_2\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}\bar{\tau}_2 = 0,\end{aligned}$$

или в проекциях на оси координат:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial M_{12}h_2}{\partial\alpha} + \frac{\partial M_2 h_1}{\partial\beta} - M_1\frac{\partial h_1}{\partial\beta} + M_{21}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}\right) = Q_2; \\ &\frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial M_1 h_2}{\partial\alpha} + \frac{\partial M_{21}h_1}{\partial\beta} + M_{12}\frac{\partial h_1}{\partial\beta} - M_2\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}\right) = Q_1; \\ &T_{12} - T_{21} + \frac{M_{12}}{R_1} - \frac{M_{21}}{R_2} = 0.\end{aligned}\right\} \tag{6.66}$$

Так как $T_{12} = T_{21}$ и $M_{12} = M_{21}$, а радиусы кривизны R_1 и R_2 в общем случае различны, то последнее уравнение тождественно не удовлетворяется. Однако в большинстве случаев величина вносимой при этом погрешности мала, и ею обычно пренебрегают. Кроме того, полная система уравнений теории тонких оболочек замыкается и без этого уравнения, поэтому оно обычно не используется.

Иной вариант теории оболочек получается, если учесть изменение радиусов кривизны по толщине оболочки. В частности, можно выбрать такие выражения для сдвигающих сил и крутящих моментов, которые позволят удовлетворить тождественно и последнее из уравнений в (6.66).

6.9. Сводка уравнений линейной теории

Перепишем окончательную систему уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние в тонкой оболочке.

❒ Геометрические уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_1^0 &= \frac{1}{h_1}\frac{\partial u_0}{\partial\alpha} + \frac{v_0}{h_1 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\beta} + \frac{w_0}{R_1};\\
\varepsilon_2^0 &= \frac{1}{h_2}\frac{\partial v_0}{\partial\beta} + \frac{u_0}{h_1 h_2}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha} + \frac{w_0}{R_2};\\
\gamma_{12}^0 &= \frac{1}{h_2}\frac{\partial u_0}{\partial\beta} - \frac{v_0}{h_1 h_2}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha} + \frac{1}{h_1}\frac{\partial v_0}{\partial\alpha} - \frac{u_0}{h_1 h_2}\frac{dh_1}{\partial\beta};\\
\kappa_1 &= \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u_0}{R_1} - \frac{1}{h_1}\frac{\partial w_0}{\partial\alpha}\right) + \frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\alpha}\left(\frac{v_0}{R_2} - \frac{1}{h_2}\frac{\partial w_0}{\partial\beta}\right);\\
\kappa_2 &= \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{v_0}{R_2} - \frac{1}{h_2}\frac{\partial w_0}{\partial\beta}\right) + \frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}\left(\frac{u_0}{R_1} - \frac{1}{h_1}\frac{\partial w_0}{\partial\alpha}\right);\\
\kappa_{12} &= -\frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial\beta}\frac{\partial w_0}{\partial\alpha}\frac{1}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}\frac{\partial w_0}{\partial\beta}\right) + \\
&+ \frac{1}{R_1}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial u_0}{\partial\beta} - \frac{u_0}{h_1 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\beta}\right) + \frac{1}{R_2}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial v_0}{\partial\alpha} - \frac{v_0}{h_1 h_2}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (6.67)$$

Относительные деформации и сдвиг в слое оболочки, не совпадающем со срединным и расположенном на расстоянии z от него, можно определить по формулам:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^0 + z\kappa_1; \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_2^0 + z\kappa_2; \quad \gamma_{12} = \gamma_{12}^0 + 2z\kappa_{12}.$$

- Уравнения равновесия:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{h_1h_2}\left(\frac{\partial h_2N_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial h_1T_{12}}{\partial\beta} + T_{12}\frac{\partial h_1}{\partial\beta} - N_2\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}\right) + \frac{Q_1}{R_1} + q_1 = 0;\\
&\frac{1}{h_1h_2}\left(\frac{\partial h_2T_{12}}{\partial\alpha} + \frac{\partial h_1N_2}{\partial\beta} + T_{12}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha} - N_1\frac{\partial h_1}{\partial\beta}\right) + \frac{Q_2}{R_2} + q_2 = 0;\\
&\frac{1}{h_1h_2}\left(\frac{\partial Qh_2}{\partial\alpha} + \frac{\partial Q_2h_1}{\partial\beta}\right) - \frac{N_1}{R_1} - \frac{N_2}{R_2} + q_n = 0;\\
&\frac{1}{h_1h_2}\left(\frac{\partial H_2h_2}{\partial\alpha} + \frac{\partial M_2h_1}{\partial\beta} - M_1\frac{\partial h_1}{\partial\beta} + H\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}\right) = Q_2;\\
&\frac{1}{h_1h_2}\left(\frac{\partial M_1h_2}{\partial\alpha} + \frac{\partial Hh_1}{\partial\beta} + H\frac{\partial h_1}{\partial\beta} - M_2\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}\right) = Q_1.
\end{aligned}\right\} \qquad (6.68)$$

При больших R_1 и R_2 шестое уравнение равновесия (см. формулу (6.66)) обращается в тождество. В общем случае при выбранной записи для T_{12} и H это уравнение не удовлетворяется, однако возникающие погрешности невелики и соизмеримы с погрешностями гипотез Лава—Кирхгоффа.

- Физические уравнения (однослойная изотропная оболочка):

$$\left.\begin{aligned}
&N_1 = \frac{E\delta}{\left(1-\mu^2\right)}\left(\varepsilon_1^0 - \mu\varepsilon_2^0\right); \quad N_2 = \frac{E\delta}{\left(1-\mu^2\right)}\left(\varepsilon_2^0 - \mu\varepsilon_1^0\right);\\
&T_{12} = \frac{E\delta}{2(1+\mu)}\gamma_{12}^0; \quad M_1 = D(\kappa_1 + \mu\kappa_2);\\
&M_2 = D(\kappa_2 + \mu\kappa_1); \quad H = D(1-\mu)\kappa_{12}.
\end{aligned}\right\} \qquad (6.69)$$

Записанная система уравнений (6.67)—(6.69) вместе с соответствующими граничными условиями позволяет определить относительные деформации и сдвиг срединной поверхности, а также внутренние погонные усилия и моменты.

При решении практических задач обычно используются системы координат, которые наиболее удобны для данной оболочки. Например, для цилиндра удобнее использовать цилиндрическую систему координат, а не декартову или сферическую.

В этой связи возникает вопрос о вычислении коэффициентов Ламе, которые входят в уравнения записанной системы.

6.10. Коэффициенты Ламе

Для определения коэффициентов Ламе можно воспользоваться одним из следующих способов.

1. Определить вид зависимостей, устанавливающих связь между декартовыми x, y, z и выбранными криволинейными координатами α и β:

$$x = x(\alpha,\beta); \quad y = y(\alpha,\beta); \quad z = z(\alpha,\beta),$$

а далее вычислить искомые коэффициенты по полученным ранее формулам:

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2}; \quad h_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2}.$$

Проиллюстрируем порядок вычисления h_1 и h_2 на примере сферической системы координат. Пусть ϑ — меридиональный, φ — широтный угол, а ρ — радиус-вектор, выходящий из начала декартовой системы координат (рис. 6.14).

В декартовой системе координат точка *M* имеет координаты x, y, z, а в сферической — ρ, ϑ, φ.

Имеем из геометрических соображений (рис. 6.14):

$$x = \rho \sin\vartheta \cos\varphi; \quad y = \rho \sin\vartheta \sin\varphi; \quad z = \rho\cos\vartheta,$$

или:

$$x = \rho \sin\alpha \cos\beta; \quad y = \rho \sin\alpha \sin\beta; \quad z = \rho\cos\alpha.$$

Получаем после вычислений, что $h_1 = \rho$; $h_2 = \rho\sin\alpha$.

В некоторых случаях не удается получить аналитические зависимости, связывающие декартовые и криволинейные координаты точки срединной поверхности оболочки, и тогда можно воспользоваться вторым способом вычисления h_1 и h_2.

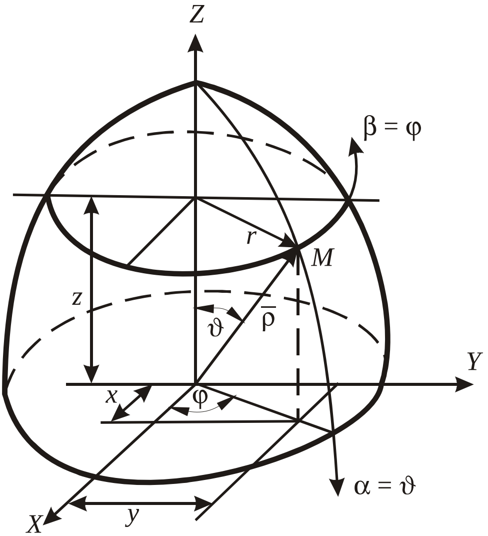


Рис. 6.14. К вычислению коэффициентов Ламе в сферической системе координат

3. Определить коэффициенты Ламе из выражения дифференциала дуги произвольной кривой, проведенной на срединной поверхности:

$$ds^2 = h_1^2 d\alpha^2 + h_2^2 d\beta^2 .$$

В этом случае выражение для дифференциала дуги произвольной кривой на поверхности получается из геометрических построений.

6.11. Динамические уравнения

Уравнения динамики оболочек можно получить из уравнений, приведенных в *разд. 6.9*, если в уравнениях равновесия кроме поверхностных сил учесть инерционные силы и моменты. Тогда, определяя проекции линейного ускорения как вторые производные по времени от соответствующих перемещений, а угловые ускорения — как производные от углов поворота нормали к срединной поверхности, придем к следующим уравнениям равновесия:

$$\frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial N_1 h_2}{\partial\alpha} + \frac{\partial T_{12} h_1}{\partial\beta} + T_{12}\frac{\partial h_1}{\partial\beta} - N_2\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}\right) + \frac{Q_1}{R_1} + q_1 = \rho\delta\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}; \tag{6.70}$$

$$\frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial h_2 T_{12}}{\partial\alpha} + \frac{\partial h_1 N_2}{\partial\beta} + T_{12}\frac{\partial h_1}{\partial\alpha} - N_1\frac{\partial h_1}{\partial\beta}\right) + \frac{Q_2}{R_2} - q_2 = \rho\delta\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}; \tag{6.71}$$

$$\frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial Q_1 h_2}{\partial\alpha} + \frac{\partial Q_2 h_1}{\partial\beta}\right) - \frac{N_1}{R_1} - \frac{N_2}{R_2} + q_n = \rho\delta\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}; \tag{6.72}$$

$$Q_2 - \frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial H h_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial M_2 h_1}{\partial \beta} - M_1 \frac{\partial h_1}{\partial \beta} + H \frac{\partial h_2}{\partial \alpha}\right) = \frac{\rho \delta^3}{12} \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial t^2}; \tag{6.73}$$

$$Q_1 - \frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial M_1 h_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial H h_1}{\partial \beta} + H \frac{\partial h_1}{\partial \beta} - M_2 \frac{\partial h_2}{\partial \alpha}\right) = \frac{\rho \delta^3}{12} \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial t^2}, \tag{6.74}$$

где δ — толщина оболочки; ϑ_1, ϑ_2 — углы поворота нормали вокруг осей $\bar{\tau}_1$ и $\bar{\tau}_2$. Отметим также, что уравнение (6.73) — это сумма моментов, действующих на элемент оболочки в проекции на ось $\bar{\tau}_1$, а (6.74) — на ось $\bar{\tau}_2$.

Записанная система уравнений относится к гиперболическому типу и описывает волны деформации срединной поверхности и изгибные волны. В большинстве случаев инерцией вращения нормали к срединной поверхности из-за ее малости пренебрегают, но тогда уравнения перестают быть гиперболическими.

К уравнениям равновесия (6.70)—(6.74) добавляются геометрические и физические уравнения, которые остаются такими же, как и в случае статического нагружения оболочки. Упрощенную систему уравнений динамики оболочек можно свести к трем уравнениям в частных производных относительно неизвестных перемещений u_0, v_0, w_0. С этой целью из (6.70)—(6.72) сначала исключают перерезывающие силы Q_1 и Q_2 с помощью (6.73) и (6.74), а затем другие внутренние усилия и моменты с помощью физических уравнений, в которые подставляют геометрические уравнения. Далее, в *гл. 10*, посвященной пологим оболочкам, эти преобразования приведены для цилиндрической пологой изотропной оболочки.

Выводы

В этой главе были изучены следующие вопросы:

1. Геометрия срединной поверхности и особенности построения криволинейной системы координат, связанной со срединной поверхностью.
2. Установлены соотношения, связывающие деформации оболочки с ее перемещениями.
3. Особенности применения гипотез Кирхгоффа в теории оболочек, которые в этом случае называют гипотезами Лава—Кирхгоффа.
4. На основе гипотез Лава—Кирхгоффа установлена связь между деформациями и перемещениями в срединной поверхности оболочки и в произвольном ее слое.
5. Закон Гука для многослойной ортотропной оболочки, с помощью которого получены выражения для погонных внутренних усилий и моментов

в срединной поверхности оболочки для изотропной, ортотропной и конструктивно анизотропной (вафельной) оболочки.

6. Получены соотношения, позволяющие определять напряжения в любом слое оболочки по известным внутренним погонным усилиям и моментам, возникающим в срединной поверхности.
7. Особенности построения уравнений равновесия бесконечно малого элемента тонкой геометрически линейной оболочки.
8. Особенности получения и решения уравнений динамики тонкой оболочки.

Упражнения и вопросы

1. Какими способами можно записать уравнение поверхности? Приведите примеры.
2. Объясните физический смысл первой квадратичной формы поверхности. Имеет ли она размерность?
3. Какой физический смысл имеют коэффициенты Ламе, в каких случаях они используются и какими способами их можно определить?
4. Объясните физический смысл второй квадратичной формы поверхности. В каких случаях она используется?
5. Как определяется кривизна поверхности, если известно ее уравнение? Объясните, что собой представляет тензор кривизны поверхности. Как определяются его компоненты?
6. Как определяются главные направления на срединной поверхности осесимметричной оболочки вращения? Как определяются радиусы кривизны такой оболочки?
7. Почему единичные вектора криволинейной системы координат, имея постоянную длину, равную единице, будут векторами переменными?
8. Выведите условия Гаусса и объясните, в каких целях используется гауссова кривизна поверхности. Приведите примеры поверхностей с различной гауссовой кривизной.
9. Воспользовавшись общими геометрическими уравнениями теории оболочек, получите из них уравнения геометрически нелинейной и линейной теории оболочек. Чем отличается физическое поведение этих оболочек?
10. Изобразите, как выглядит по толщине оболочки форма линии, совпадавшей до приложения нагрузки с нормалью к поверхности, после приложения нагрузки без учета и с учетом гипотез Лава—Кирхгоффа, а также на основании гипотезы Тимошенко С. П.

11. Постройте характер перемещений, относительных деформаций и сдвига по толщине оболочки.
12. Почему перемещения в направлении нормали к поверхности оболочки постоянные по ее толщине для всех точек оболочки?
13. Запишите закон Гука для трехслойной оболочки, у которой внешний и внутренний слои ортотропные, а внутренний слой изотропный.
14. В каких случаях можно не учитывать влияние кривизны поверхности в выражениях для погонных моментов, возникающих в срединной поверхности оболочки?
15. Запишите выражения для внутренних усилий и моментов в вафельной оболочке, у которой ребра жесткости находятся на ее внутренней поверхности.
16. Получите формулы для расчета напряжений в вафельной оболочке по известным значениям погонных внутренних усилий и моментов.
17. Можно ли воспользоваться уравнениями равновесия, полученными в *разд. 6.8*, при расчете геометрически нелинейных оболочек?
18. В каких случаях уравнения динамики тонких оболочек относятся к гиперболическому типу, и когда они становятся эллиптическими?

Литература к главе 6

1. Авдонин А. С. Прикладные методы расчета оболочек и тонкостенных конструкций. — М.: Машиностроение, 1969, 402 с.
2. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. — М.: Наука, 1974, 446 с.
3. Бажанов В. Л. и др. Пластинки и оболочки из стеклопластиков. Учебное пособие для вузов. — М.: Высшая школа, 1970, 408 с.
4. Бояршинов С. В. Основы строительной механики машин. Учебное пособие для студентов вузов. — М.: Машиностроение, 1973, 250 с.
5. Кан С. Н. Строительная механика оболочек. — М.: Машиностроение, 1966.
6. Тонкостенные оболочечные конструкции: Теория, эксперимент и проектирование. Пер. с англ. К. Г. Бомштейн, А. М. Васильев; Ред. Э. И. Григолюк. — М.: Машиностроение, 1980, 607 с.
7. Палий О. М., Спиро В. Е. Анизотропные оболочки в судостроении. — Л.: Судостроение, 1977, 392 с.
8. Погорелов В. И. Теория тонких оболочек в приложениях к расчету корпусов летательных аппаратов. — Л.: Изд-во ЛМИ, 1990, 162 с.

Глава 7

Расчет оболочек по безмоментной теории

Из этой главы вы узнаете о том, как можно определить напряжения, перемещения и деформации в оболочке, если она настолько тонкая, что они практически постоянны по ее толщине. Будут рассмотрены особенности расчета таких оболочек при нагружении их постоянным внутренним давлением или переменным давлением, создаваемым жидкостью, которая заполняет оболочку.

В этой главе будут рассмотрены следующие темы:

- условия существования безмоментного напряженного состояния;
- уравнения безмоментной теории оболочек;
- безмоментные оболочки при осесимметричной нагрузке;
- напряжения и перемещения в оболочках, нагруженных внутренним давлением;
- оболочки, заполненные жидкостью.

7.1. Условия существования

Приведем сначала определение безмоментной оболочки, а потом укажем условия, при которых оболочка может считаться безмоментной.

> Оболочка называется ***безмоментной***, если в ней возникают лишь нормальные и сдвигающие силы, действующие в плоскостях, касательных к срединной поверхности (рис. 7.1).

В безмоментных оболочках напряжения постоянны по толщине, и поэтому крутящие и изгибающие моменты, а также перерезывающие силы равны нулю. Так, на рис. 7.1 N_1 и N_2 — нормальные, а T_{12} и T_{21} — касательные внутренние погонные усилия, внешняя поверхностная нагрузка — давление q_n, а q_1 и q_2 — трение.

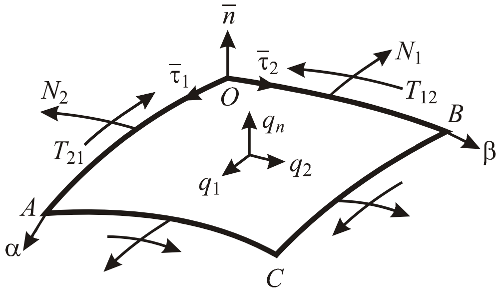


Рис. 7.1. Внутренние погонные усилия в безмоментной оболочке

Для того чтобы в оболочке было безмоментное напряженное состояние, необходимо выполнение следующих условий:

- оболочка должна иметь плавно изменяющуюся непрерывную поверхность, у которой не должно быть разрывов радиусов кривизны. На рис. 7.2 изображен меридиан торосферического днища, состоящий из дуги окружности *AB* и дуги тора *BC*. В общей точке *B* имеется скачок радиусов кривизны меридиана, т. к. радиус тора равен a, а радиус сферы — $R_{сф}$.

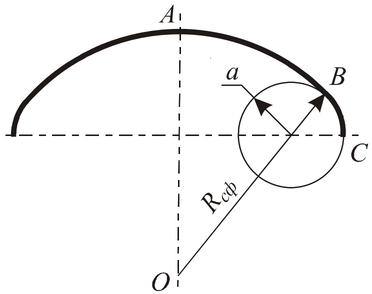


Рис. 7.2. Разрыв радиуса кривизны у меридиана торосферического днища

- поверхностные нагрузки q_n, q_1, q_2 (рис. 7.1), действующие на оболочку, должны быть постоянными или изменяться по линейному закону;
- на оболочку не действуют сосредоточенные силы или моменты, в том числе распределенные;
- края оболочки должны быть закреплены так, чтобы места крепления могли свободно перемещаться по нормали к срединной поверхности оболочки;
- силы, приложенные к краям оболочки, должны лежать в плоскости, касательной к срединной поверхности.

7.2. Исходные уравнения

С учетом того, что $M_1 = M_2 = H = Q_1 = Q_2 = 0$, уравнения (6.66) для моментов становятся тождественно равны нулю, а уравнения равновесия (6.63) для погонных усилий запишутся так:

$$\frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial h_2 N_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial h_1 T_{12}}{\partial\beta} + T_{12}\frac{\partial h_1}{\partial\beta} - N_2\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}\right) + q_1 = 0;$$

$$\frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial h_2 T_{12}}{\partial\alpha} + \frac{\partial h_1 N_2}{\partial\beta} + T_{12}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha} - N_1\frac{\partial h_1}{\partial\beta}\right) + q_2 = 0;$$

$$\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} = q_n.$$

Последнее из записанных уравнений называют *уравнением Лапласа*.

Так как $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_{12} = 0$, то вместо шести геометрических уравнений (6.67) будет только три, и, кроме этого, относительные деформации и сдвиги одинаковые по толщине, поэтому $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_2^0$, $\gamma_{12} = \gamma_{12}^0$ (напоминаем, что значения на срединной поверхности обозначаются верхним нулевым индексом):

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{v}{h_1 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\beta} + \frac{w}{R_1};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{u}{h_1 h_2}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha} + \frac{w}{R_2};$$

$$\gamma_{12} = \frac{1}{h_2}\frac{\partial u}{\partial\beta} - \frac{v}{h_1 h_2}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha} + \frac{1}{h_1}\frac{\partial v}{\partial\alpha} - \frac{u}{h_1 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\beta}.$$

Физические уравнения (однослойная изотропная оболочка) будут выглядеть так:

$$N_1 = \frac{E\delta}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2);$$

$$N_2 = \frac{E\delta}{1-\mu^2}(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1);$$

$$T_{12} = \frac{E\delta}{2(1+\mu)}\gamma_{12}.$$

Запишем систему уравнений для осесимметричных оболочек вращения в криволинейной системе координат s, φ (где s — длина дуги меридиана; φ — широтный угол, отсчитываемый в плоскости параллельного круга) (рис. 7.3).

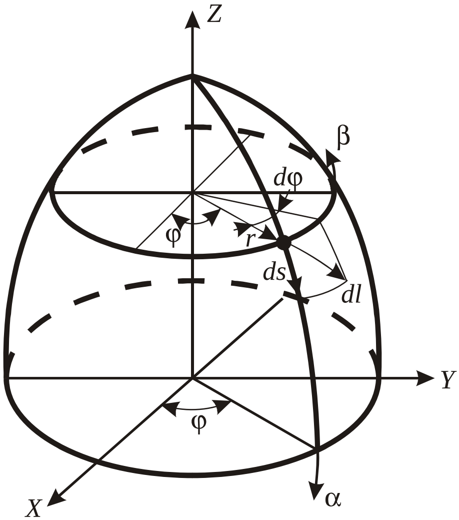


Рис. 7.3. Криволинейная система координат осесимметричной оболочки

Дифференциал дуги dl произвольной кривой l, проведенной на поверхности оболочки, определяется следующим выражением (s и φ — ортогональные направления):

$$dl^2 = ds^2 + r^2 d\varphi^2 .$$

Принимая $\alpha = s$, $\beta = \varphi$ получаем, что коэффициент Ламе $h_1 = 1$, а $h_2 = r$.

Тогда уравнения равновесия в выбранной системе координат запишутся так:

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial r N_1}{\partial s} + \frac{\partial T_{12}}{\partial \varphi} - N_2 \frac{\partial r}{\partial s}\right) + q_1 = 0\,; \tag{7.1}$$

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial r T_{12}}{\partial s} + \frac{\partial N_2}{R_2} + T_{12} \frac{\partial r}{\partial s}\right) + q_2 = 0\,; \tag{7.2}$$

$$\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} = q_n\,, \tag{7.3}$$

а геометрические уравнения будут такими:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R_1}; \tag{7.4}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r}\frac{\partial r}{\partial s} + \frac{w}{R_2}; \tag{7.5}$$

$$\gamma_{12} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r}\frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial s}. \tag{7.6}$$

Физические уравнения при этом останутся без изменений.

Уравнение (7.2) можно привести к виду:

$$\frac{1}{r}\left[\frac{1}{r}\left(r\frac{\partial r T_{12}}{\partial s} + rT_{12}\frac{\partial r}{\partial s}\right) + \frac{\partial N_2}{\partial \varphi}\right] + q_2 = 0,$$

или:

$$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial r^2 T_{12}}{\partial s} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial N_2}{\partial \varphi} + q_2 = 0. \tag{7.7}$$

Из уравнения Лапласа (7.3) находим:

$$N_2 = \left(q_n - \frac{N_1}{R_1}\right)R_2,$$

а, следовательно:

$$\frac{\partial N_2}{\partial \varphi} = R_2\left(\frac{\partial q_n}{\partial \varphi} - \frac{1}{R_1}\frac{\partial N_1}{\partial \varphi}\right). \tag{7.8}$$

Подставив (7.8) в (7.7), получим:

$$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial r^2 T_{12}}{\partial s} + \frac{R^2}{r}\left(\frac{\partial q_n}{\partial \varphi} - \frac{1}{R_1}\cdot\frac{\partial N_1}{\partial \varphi}\right) + q_2 = 0. \tag{7.9}$$

Исключим N_2 из уравнения (7.1):

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial r N_1}{\partial s} + \frac{\partial T_{12}}{\partial \varphi} - \left(q_n - \frac{N_1}{R_1}\right)R_2\frac{\partial r}{\partial s}\right] + q_1 = 0. \tag{7.10}$$

Из геометрических соотношений в меридиональном сечении имеем (рис. 7.4):

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \cos\vartheta; \quad R_1 = \frac{\partial s}{\partial \vartheta}; \quad \frac{r}{R_2} = \sin\vartheta.$$

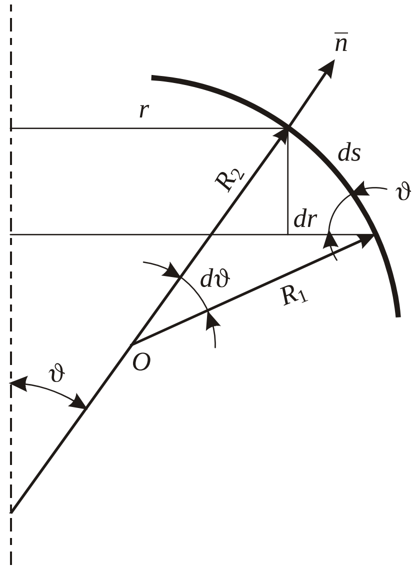


Рис. 7.4. Геометрия элементарной дуги в меридиональном сечении

Подставив эти соотношения в (7.10), получим:

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial r N_1}{\partial s}+\frac{\partial T_{12}}{\partial \varphi}+\frac{r}{\sin\vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial s}\cos\vartheta N_1\right)+q_1-\frac{q_n}{\sin\vartheta}\cos\vartheta=0 .$$

Умножая записанное выражение на $\sin\vartheta$ и вводя обозначение $q_z=q_n\cos\vartheta-q_1\sin\vartheta$, получаем окончательно:

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial r N_1\sin\vartheta}{\partial s}+\sin\vartheta\frac{\partial T_{12}}{\partial \varphi}\right)=q_z ; \qquad (7.11)$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 T_{12}}{\partial s}-\frac{R_2}{rR_1}\frac{\partial N_1}{\partial \varphi}+\frac{R_2}{r}\frac{\partial q_n}{\partial \varphi}=-q_2 ; \qquad (7.12)$$

$$N_2=\left(q_n-\frac{N_1}{R_1}\right)R_2 . \qquad (7.13)$$

Геометрические уравнения в этой координатной системе запишутся так:

$$\varepsilon_1=\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{w}{R_1} ; \qquad (7.14)$$

$$\varepsilon_2=\frac{u\cos\vartheta}{r}+\frac{w}{R_2} ; \qquad (7.15)$$

$$\gamma_{12} = \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v\cos\vartheta}{r}, \tag{7.16}$$

а физические уравнения для относительных деформаций и сдвига будут равны:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E\delta}\left(N_1 - \mu N_2\right); \tag{7.17}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E\delta}\left(N_2 - \mu N_1\right); \tag{7.18}$$

$$\gamma_{12} = \frac{2\left(1+\mu\right)}{E\delta} T_{12}. \tag{7.19}$$

При расчете напряженно деформированного состояния безмоментной оболочки сначала решаются первые два уравнения равновесия относительно N_1 и T_{12}, после чего определяется N_2 из уравнения Лапласа. Далее находятся ε_1, ε_2, γ_{12} из физических уравнений и окончательно перемещения u, v и w из геометрических уравнений.

7.3. Осесимметричная нагрузка

Запишем теперь уравнения безмоментных оболочек для тех случаев, когда внешняя нагрузка симметрична относительно оси симметрии, а затем получим расчетные соотношения для определения внутренних погонных усилий в сечениях оболочки.

7.3.1. Исходная система уравнений

При осесимметричной нагрузке все производные по углу φ обращаются в ноль, и система уравнений переписывается в следующем виде:

$$\frac{drN_1\sin\vartheta}{ds} = q_z r; \quad \frac{dr^2 T_{12}}{ds} = -q_2 r^2;$$

$$N_2 = \left(q_n - \frac{N_1}{R_1}\right)R_2; \quad \varepsilon_1 = \frac{dv}{ds} + \frac{w}{R_1} = \frac{1}{E\delta}\left(N_1 - \mu N_2\right);$$

$$\varepsilon_2 = \frac{u\cos\vartheta}{r} + \frac{w}{R_2} = \frac{1}{E\delta}\left(N_2 - \mu N_1\right);$$

$$\gamma_{12} = \frac{dv}{ds} - \frac{v\cos\vartheta}{r} = \frac{2\left(1+\mu\right)}{E\delta} T_{12}.$$

Теперь система уравнений распадается на две подсистемы, которые могут решаться независимо друг от друга. Первая подсистема уравнений будет такая:

$$\frac{drN_1 \sin\vartheta}{ds} = q_z r \; ; \tag{7.20}$$

$$N_2 = \left(q_n - \frac{N_1}{R_1} \right) R_2 \; ; \tag{7.21}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E\delta} \left(N_1 - \mu N_2 \right) ; \tag{7.22}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E\delta} \left(N_2 - \mu N_1 \right) , \tag{7.23}$$

а вторая подсистема:

$$\frac{dr^2 T_{12}}{ds} = -q_2 r \; ; \tag{7.24}$$

$$\gamma_{12} = \frac{2\left(1+\mu\right)}{E\delta} T_{12} \, . \tag{7.25}$$

Перемещения определяются после решения первых двух подсистем из геометрических уравнений:

$$\varepsilon_1 = \frac{du}{ds} + \frac{w}{R_1} \; ; \tag{7.26}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{u\cos\vartheta}{r} + \frac{w}{R_2} \; ; \tag{7.27}$$

$$\gamma_{12} = \frac{dv}{ds} - \frac{v\cos\vartheta}{r} \, . \tag{7.28}$$

Интегрируем уравнение (7.20):

$$rN_1 \sin\vartheta = \int\limits_{s_0}^{s} q_z r ds + C \, .$$

Это выражение — условие равновесия части оболочки, ограниченной сверху краем $s = s_0$, а снизу сечением, в котором определяется погонное усилие N_1. Уравнение равновесия части оболочки в проекции на ось Z выглядит так:

$$2\pi r N_1 \sin\vartheta + \int\limits_{s_0}^{s} 2\pi r \left(q_1 \sin\vartheta - q_n \cos\vartheta \right) ds + 2\pi r P = 0 \, ,$$

или:

$$rN_1 \sin\vartheta = \int_{s_0}^{s} q_z r ds - Pr = \int_{s_0}^{s} q_z r ds + C \ . \qquad (7.29)$$

Константа интегрирования C учитывает силы, приложенные к верхнему краю оболочки, а также сосредоточенные (осесимметричные) погонные силы, действующие на оболочку между сечениями с координатами s_0 и s (рис. 7.5).

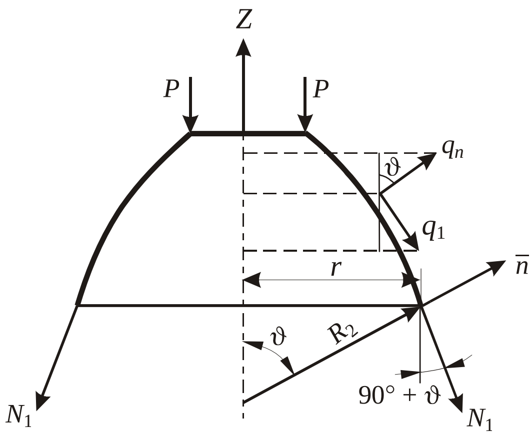


Рис. 7.5. К составлению уравнения равновесия оболочки в проекции на ось симметрии

7.3.2. Порядок определения внутренних усилий

Внутренние погонные усилия в меридиональном направлении N_1 и тангенциальном направлении N_2 определяются в следующем порядке:

1. Составляется уравнение равновесия отсеченной части оболочки в проекции на ось симметрии (7.29), и из него находится меридиональное усилие N_1.
2. Вычисляется погонное усилие N_2 из уравнения Лапласа (7.21).

Если проинтегрировать уравнение (7.24), то получим следующее соотношение:

$$T_{12} r^2 = -\int_{s_0}^{s} q_2 r^2 ds + C_1 \ ,$$

которое является условием равновесия выделенной части оболочки под действием тангенциальных погонных усилий q_2. Крутящий момент, создаваемый внутренним усилием T_{12} и равный $2\pi r^2 T_{12}$, должен уравновесить момент внешних сил. Касательные напряжения (они постоянны по толщине оболочки) равны $\tau_{12} = T_{12}/\delta$.

Если на оболочку не действуют внешние крутящие моменты и $q_2 = 0$, то сдвигающие усилия T_{12} не возникают. Если $q_2 \neq 0$, то угол закручивания ψ оболочки, равный тангенциальному перемещению v, деленному на радиус параллельного круга r, определяется после интегрирования уравнения (7.28) с использованием (7.25):

$$\frac{dv}{ds} - \frac{v\cos\vartheta}{r} = \frac{T_{12}}{G\delta},$$

или:

$$r\frac{d\psi}{ds} + \psi\frac{dr}{ds} - \psi\cos\vartheta = \frac{T_{12}}{G\delta}.$$

Но так как $\dfrac{dr}{ds} = \cos\vartheta$, то второе и третье слагаемые в левой части выражения сокращаются, и после интегрирования полученного уравнения имеем:

$$\psi = \psi_0 + \frac{1}{G\delta}\int_{s_0}^{s}\frac{T_{12}}{r}ds,$$

где ψ_0 — угол закручивания при $s = s_0$ (рис. 7.6).

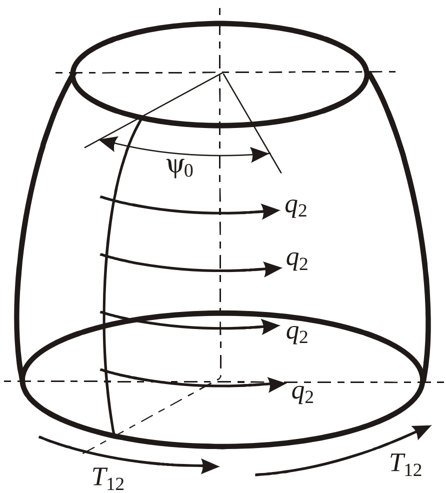


Рис. 7.6. Закручивание оболочки поверхностным трением

7.4. Постоянное давление

В этом разделе рассмотрим порядок расчета напряженно-деформированного состояния безмоментной оболочки, когда она нагружена постоянным давлением. Это давление может быть как внутренним, так и наружным. Если давление внутреннее, то оболочка растягивается и работает на прочность. Исключение составляют те случаи, когда форма меридиана оболочки такова, что в ней возникают отрицательные напряжения, которые способны вызвать ее местную потерю устойчивости (например, при меридиане в форме эллипса).

Если оболочка сжимается внешним давлением, то напряжения в ней отрицательные, и она работает как на прочность, так и на *устойчивость* — изменение геометрической формы, сопровождающееся разрушением всей оболочки. О таких расчетах оболочек речь пойдет в *гл. 12* и *13*.

Далее давление считается положительным, и в случае внешнего давления нужно в полученных расчетных соотношениях использовать его со знаком минус.

> ***Примечание***
>
> Очень часто в практических вычислениях знак минус у сжимающих напряжений и внутренних усилий опускают. Такая операция вполне оправдана, когда напряжения по всей оболочке и в других направлениях тоже отрицательные, но если они положительные, то во избежание ошибок нужно быть внимательным при составлении расчетной схемы для оценки несущей способности оболочки.

7.4.1. Сфера

В этом случае первый R_1 и второй R_2 главные радиусы кривизны одинаковы и равны радиусу сферы, т. е. $R_1 = R_2 = R_{сф}$.

Уравнение равновесия (7.29) части сферы (рис. 7.7) в проекции на ось Z записывается в следующем виде:

$$2\pi r N_1 \sin\vartheta = p_0 \pi r^2,$$

откуда:

$$N_1 = \frac{p_0 r}{2\sin\vartheta} = \frac{p_0 R_{сф}}{2}. \tag{7.30}$$

Из уравнения Лапласа (7.21) получаем:

$$N_2 = p_0 R_{сф} - N_1,$$

или, с учетом (7.30),

$$N_2 = p_0 R_{сф}/2. \tag{7.31}$$

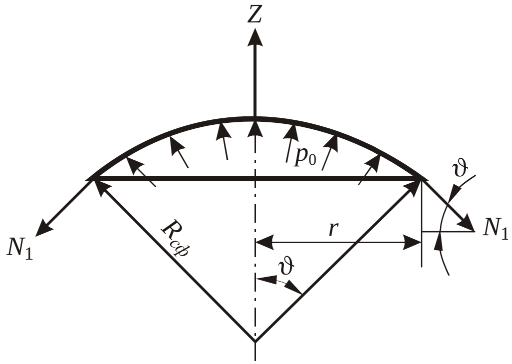


Рис. 7.7. К составлению уравнения равновесия части сферы

Тогда нормальные напряжения равны:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = N_1/\delta = p_0 R_{сф}/(2\delta). \tag{7.32}$$

Определим перемещения из геометрических и физических уравнений:

$$\frac{du}{ds} + \frac{w}{R_{сф}} = \frac{1}{E\delta}(N_1 - \mu N_2) = \varepsilon_1; \tag{7.33}$$

$$\frac{u\cos\vartheta}{r} + \frac{w}{R_{сф}} = \frac{1}{E\delta}(N_2 - \mu N_1) = \varepsilon_2. \tag{7.34}$$

Используя (7.30) и (7.31), имеем:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{p_0 R_{сф}}{2E\delta}(1-\mu), \tag{7.35}$$

а приравнивая (7.33) и (7.34), получаем:

$$\frac{du}{ds} = \frac{u\cos\vartheta}{r}.$$

Перейдем в этом уравнении к независимой переменной ϑ с помощью выражения для радиуса кривизны меридиана $R_{сф} = \dfrac{ds}{d\vartheta}$, совпадающего в данном случае с радиусом сферы. После его подстановки и интегрирования получаем, что меридиональное перемещение равно $u = C\sin\vartheta$, а т. к. константа интегрирования $C = 0$, то и перемещение u равно нулю. Аналогично получается, что и перемещение по касательной к параллельному кругу v тоже равно нулю.

Нулевые значения перемещений u и v являются следствием осевой симметрии оболочки и постоянства давления, поэтому точки срединной поверхности оболочки перемещаются только по нормали к ней. Из геометрического уравнения (7.34) для ε_2 имеем следующее выражение для нормального перемещения:

$$w = \varepsilon_2 R_{сф},$$

или, с учетом (7.35),

$$w = \frac{p_0 R_{сф}^2}{2E\delta}(1-\mu). \qquad (7.36)$$

Из полученного соотношения видно, что оболочка растягивается на одну и ту же величину в направлении радиуса во всех точках ее поверхности.

7.4.2. Конус и цилиндр

В этом случае из геометрических соображений следует (рис. 7.8), что:

$$R_1 = \infty; \quad b = \infty; \quad \frac{dr}{ds} = \sin\alpha,$$

где α — угол полураствора конуса.

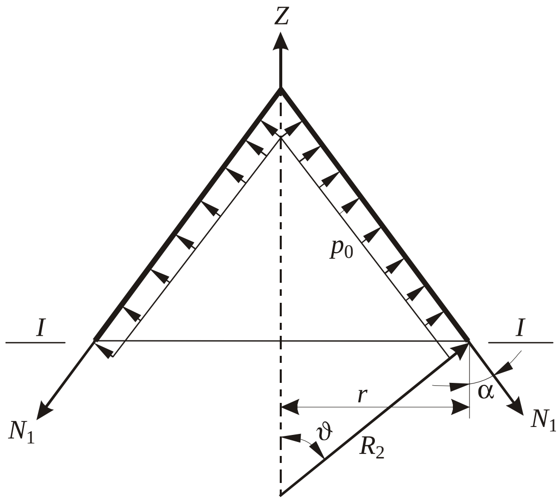


Рис. 7.8. К составлению уравнения равновесия выделенной части конуса

Уравнение равновесия (7.29) части конуса между его вершиной и сечением *I*—*I* запишется в этом случае так (рис. 7.8):

$$-2\pi r N_1 \cos\alpha + \pi r^2 p_0 = 0,$$

откуда:

$$N_1 = \frac{p_0 r}{2\cos\alpha} = \frac{p_0 R_2}{2}.$$

Из уравнения Лапласа (7.21) получаем:

$$N_2 = p_0 R_2,$$

поэтому:

$$\sigma_1 = p_0 R_2 / 2\delta; \quad \sigma_2 = p_0 R_2 / \delta. \tag{7.37}$$

Относительные деформации в направлении меридиана и параллели будут равны:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E\delta}(N_1 - \mu N_2) = \frac{p_0 R_2}{E\delta}\left(\frac{1}{2} - \mu\right); \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E\delta}(N_2 - \mu N_1) = \frac{p_0 R_2}{E\delta}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right).$$

Из геометрических уравнений имеем:

$$\frac{du}{ds} = \varepsilon_1; \tag{7.38}$$

$$\frac{u\cos\vartheta}{r} + \frac{w}{R_2} = \varepsilon_2. \tag{7.39}$$

Переходя в уравнении (7.38) к независимой переменной r, получим:

$$\frac{du}{dr}\sin\alpha = \frac{p_0 r}{E\delta\cos\alpha}\left(\frac{1}{2} - \mu\right) + C$$

и, интегрируя его, получаем в итоге:

$$u = \frac{p_0 r^2}{E\delta\sin 2\alpha}\left(\frac{1}{2} - \mu\right) + C,$$

где константа C определяется из условий закрепления оболочки. Для перемещения в направлении нормали к оболочке имеем из (7.39):

$$w = \varepsilon_2 R_2 - (u R_2 \cos\vartheta)/r.$$

Для цилиндрической оболочки, когда $R_2 = R$, легко находится, что:

$$\sigma_1 = \frac{p_0 R}{2\delta}; \quad \sigma_2 = \frac{p_0 R}{\delta}; \quad w = \frac{p_0 R^2}{E\delta}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right), \tag{7.40}$$

а перемещение u меняется по линейному закону в зависимости от координаты s, отсчитываемой вдоль образующей цилиндра от места его крепления в осевом направлении.

7.4.3. Торовый сосуд

Для определения N_1 составим уравнение равновесия в проекции на ось Z для части тора, образованной вращением дуги AB вокруг оси Z (рис. 7.9).

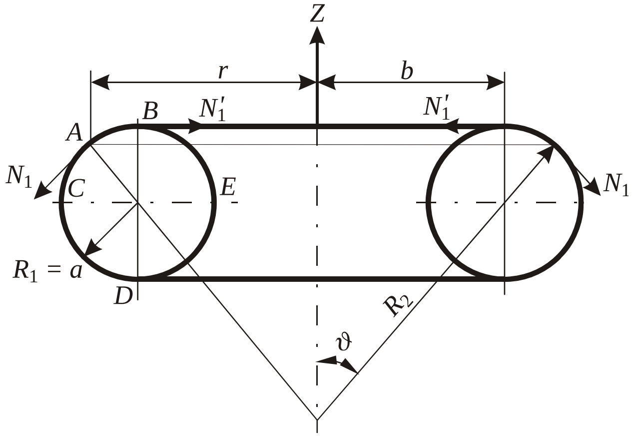


Рис. 7.9. К составлению уравнения равновесия части тора

В этом случае из (7.29) имеем:

$$2\pi r N_1 \sin\vartheta = \pi\left(r^2 - b^2\right) p_0,$$

откуда:

$$N_1 = \frac{p_0\left(r^2 - b^2\right)}{2r\sin\vartheta}. \tag{7.41}$$

Определим N_2 из уравнения Лапласа (7.21):

$$N_2 = R_2\left(p_0 - \frac{N_1}{R_1}\right) = \frac{r}{\sin\vartheta}\left[p_0 - \frac{p_0\left(r^2 - b^2\right)}{2ra\sin\vartheta}\right],$$

но:

$$r - b = a\sin\vartheta, \tag{7.42}$$

поэтому:

$$N_2 = p_0 a/2.$$

Найдем точку экстремума меридионального погонного усилия N_1, выражение для которого (7.41) с учетом (7.42) перепишем в следующем виде:

$$N_1 = \frac{p_0 a}{2} \cdot \frac{(2b + a\cos\vartheta)}{(b + a\sin\vartheta)}.$$

Приравнивая производную по ϑ к нулю, т. е.:

$$\frac{dN_1}{d\vartheta} = \frac{p_0 a}{2} \cdot \frac{((b + a\sin\vartheta)a\cos\vartheta - (2b + a\sin\vartheta)a\cos\vartheta)}{(b + a\sin\vartheta)^2} = 0,$$

находим, что $\cos\vartheta = 0$.

Для внешней половины тора второй главный радиус кривизны R_2 имеет положительные значения, а для внутренней — отрицательные. Действительно, $R_2 = r/\sin\vartheta$ положителен для дуги *BC* ($0 \le \vartheta \le \pi/2$) и для дуги *CD* ($\pi/2 \le \vartheta \le \pi$), отрицателен для дуги *DE* ($\pi \le \vartheta \le 3\pi/2$) и для дуги *EB* ($3\pi/2 \le \vartheta \le 2\pi$).

Максимальное значение N_1 достигается при $\vartheta = 3\pi/2$, т. е. в точке *E*:

$$N_{1\max} = \frac{p_0 a}{2} \cdot \frac{(2b - a)}{b - a}.$$

Напряжения равны:

$$\sigma_1 = \frac{p_0 a}{2\delta} \cdot \frac{(2b + a\sin\vartheta)}{(b + a\sin\vartheta)}; \quad \sigma_2 = \frac{p_0 a}{2\delta}. \tag{7.43}$$

Эпюры меридиональных и тангенциальных напряжений в торе, построенные по формулам (7.43), показывают (рис. 7.10), что тангенциальные напряжения σ_2 постоянные вдоль меридиана, а меридиональные имеют максимум по внутреннему кольцу тора, где он обычно и разрушается. А поскольку в точке максимума меридиональные напряжения превышают напряжения в других точках меридиана, в том числе и тангенциальные, то расчет толщины стенки торового сосуда выполняется по этим напряжениям.

При $b = 0$ тор вырождается в сферу, а при $b = \infty$ — в цилиндр. Наибольшие напряжения ($\sigma_1 = \infty$) возникают в торе, у которого $a = b$. Расчет тора по безмоментной теории дает достаточно точные результаты, если $b \ge (2 \div 3)a$. При меньших b следует воспользоваться моментной теорией торовых оболочек.

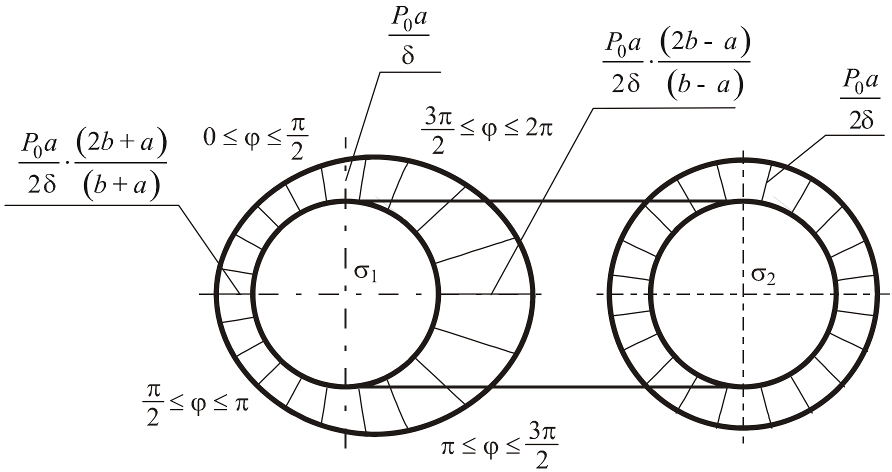


Рис. 7.10. Напряжения в торе, нагруженном внутренним давлением

7.4.4. Эллиптическое днище

Из уравнения равновесия (7.29) части оболочки в проекции на ось симметрии Z имеем (рис. 7.11):

$$2\pi r N_1 \sin\vartheta = p_0 \pi r^2,$$

откуда получаем:

$$N_1 = \frac{p_0 r}{2\sin\vartheta} = \frac{p_0 R_2}{2}. \tag{7.44}$$

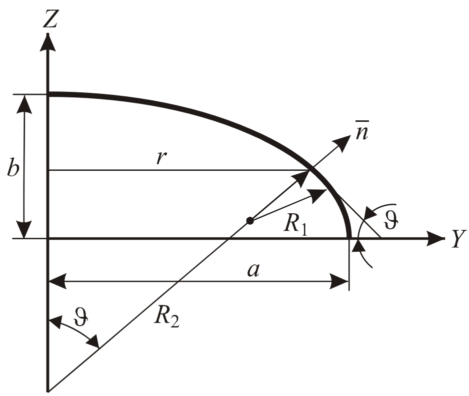


Рис. 7.11. К составлению уравнения равновесия эллиптического днища

Тангенциальное погонное усилие N_2 определим из уравнения Лапласа (7.21):

$$N_2 = p_0 R_2 \left(1 - \frac{R_2}{2R_1}\right). \tag{7.45}$$

У сферической оболочки полуоси одинаковые и равны радиусу сферы, т. е. $a = b = R$, поэтому $N_1 = N_2 = p_0 R/2$. В эллиптическом днище радиусы кривизны R_1, R_2 и напряжения зависят от соотношения полуосей эллипса.

Определим первый и второй главные радиусы кривизны оболочки, воспользовавшись уравнением эллипса для ее меридиана:

$$y^2/a^2 + z^2/b^2 = 1,$$

из которого получаем:

$$z = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - y^2}\ . \tag{7.46}$$

Радиус кривизны меридиана равен:

$$R_1 = \frac{\left(1 + z'^2\right)^{3/2}}{|z''|},$$

но $z' = \dfrac{b^2}{a^2} \cdot \dfrac{y}{z}$; $z'' = \dfrac{-b^4}{a^2 z^3}$, поэтому:

$$R_1 = \frac{\left(a^4 z^2 + b^4 y^2\right)^{3/2}}{a^4 b^4}. \tag{7.47}$$

Второй главный радиус кривизны равен:

$$R_2 = y/\sin\vartheta = r/\sin\vartheta,$$

но $\sin\vartheta = \dfrac{z'}{\sqrt{1 + z'^2}} = \dfrac{b^2 y}{\sqrt{a^4 z^2 + b^4 y^2}}$, и поэтому:

$$R_2 = \frac{\sqrt{a^4 z^2 + b^4 y^2}}{b^2}. \tag{7.48}$$

В верхней точке днища $y = 0$; $z = b$ и $R_1 = R_2 = a^2/b$. В основании днища $y = a$; $z = 0$ и $R_1 = b^2/a$; $R_2 = a$.

Подставив в выражения (7.44) и (7.45) формулы (7.47) и (7.48), получаем с учетом того, что $y = r$:

$$N_1 = \frac{p_0}{2b^2}\sqrt{a^4 z^2 + b^4 r^2}\ ; \tag{7.49}$$

$$N_2 = \frac{p_0}{b^2}\sqrt{a^4z^2 + b^4r^2}\left(1 - \frac{a^4b^2}{2\left(a^4z^2 + b^4r^2\right)}\right). \tag{7.50}$$

Видно, что $N_1 > 0$ всегда, а N_2 может быть и отрицательной величиной, если второе слагаемое в скобках больше единицы. Часть оболочки, для которой выполняется условие:

$$2\left(a^4z^2 + b^4r^2\right) < a^4b^2, \tag{7.51}$$

сжимается в тангенциальном направлении (рис. 7.12).

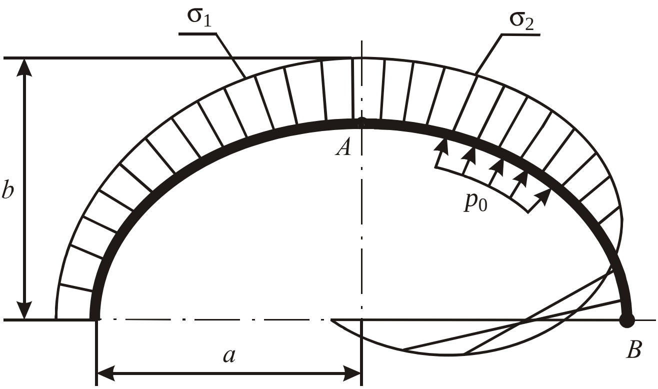


Рис. 7.12. Эпюры напряжений в эллиптическом днище при сжатии в тангенциальном направлении

Выражения для напряжений в днище имеют вид:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{\delta} = \frac{p_0}{2\delta}\sqrt{m^2a^2 - r^2\left(m^2 - 1\right)}; \tag{7.52}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{\delta} = \frac{p_0}{\delta}\sqrt{m^2a^2 - r^2\left(m^2 - 1\right)}\left(1 - \frac{a^2m^2}{2\left(a^2m^2 - r^2\left(m^2 - 1\right)\right)}\right), \tag{7.53}$$

где $m = a/b$ — отношение полуосей эллипса.

В вершине днища напряжения равны:

$$\sigma_1 = p_0a^2/(2\delta b) = \sigma_2,$$

а на экваторе, т. е. при $r = a$:

$$\sigma_1 = p_0a/2\delta; \quad \sigma_2 = \frac{p_0a}{\delta}\left(1 - \frac{a^2}{2b^2}\right).$$

При $m = a/b > \sqrt{2}$ тангенциальные напряжения на экваторе отрицательные, положительные при $1 \le m < \sqrt{2}$, и $\sigma_2 = 0$ при $m = \sqrt{2}$.

На рис. 7.12 в качестве примера приведены эпюры меридиональных σ_1 и тангенциальных σ_2 напряжений в эллиптическом днище, нагруженном постоянным давлением при соотношении его полуосей $m = a/b > \sqrt{2}$, построенные по формулам (7.52) и (7.53).

7.4.5. Торосферическое днище

Меридиан торосферического днища в вершине на оси симметрии начинается дугой окружности радиуса $R_{сф}$, которая плавно переходит в дугу части тора радиуса a, которая соединяется с цилиндрической частью сосуда радиуса R (рис. 7.13).

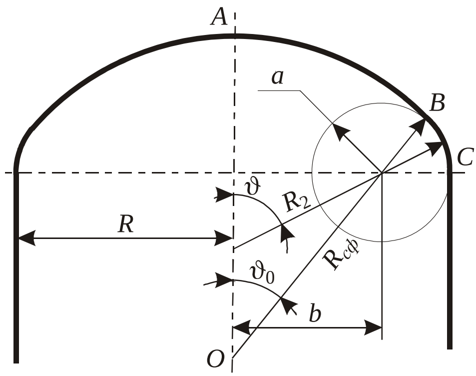


Рис. 7.13. Геометрия меридиана торосферического днища

Напряжения в торосферическом днище, как и в осесимметричных днищах любой другой формы, определяются по следующим формулам, записанным в общем виде через радиусы кривизны:

$$\sigma_1 = \frac{p_0 R_2}{2\delta};$$

$$\sigma_2 = \frac{p_0 R_2}{\delta}\left(1 - \frac{R_2}{2R_1}\right).$$

На полусферическом участке днища радиусы кривизны одинаковы и равны радиусу сферы, т. е. $R_1 = R_2 = R_{сф} = \text{const}$, где $R_{сф}$ — радиус днища, и поэтому:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{p_0 R_{сф}}{2\delta}. \tag{7.54}$$

На торовом участке первый главный радиус кривизны $R_1 = a = \text{const}$, а второй главный радиус кривизны $R_2 > R_1$, переменный и зависит от угла ϑ, т. к. $R_2 = r/\sin\vartheta$. А поскольку на торовом участке днища $\vartheta_0 \le \vartheta \le \pi/2$, то напряжения σ_2 всегда отрицательные. Угол ϑ_0, соответствующий сопряжению сферической и торовой частей днища, определяется из формулы:

$$\sin\vartheta_0 = \frac{b}{R_{сф} - a}, \tag{7.55}$$

в которой b — это расстояние от оси симметрии до центра тора (рис. 7.14). Наибольшие по величине отрицательные тангенциальные напряжения, возникающие при $\vartheta = \vartheta_0$, равны:

$$\sigma_2 = \frac{p_0 R_{сф}}{\delta}\left(1 - \frac{R_{сф}}{2a}\right). \tag{7.56}$$

Меридиональные напряжения, уменьшающиеся на торе, в плоскости основания днища равны:

$$\sigma_1 = \frac{p_0\left(b + a\right)}{2\delta}. \tag{7.57}$$

Так как $b + a < R_{сф}$, то наибольшие меридиональные напряжения возникают на полусферическом участке днища. На рис. 7.14 построены эпюры меридиональных и тангенциальных напряжений в торосферическом днище, вычисленных по формулам (7.54)—(7.57), из которых следует, что толщина такого днища должна определяться по напряжениям в месте стыка сферы и тора.

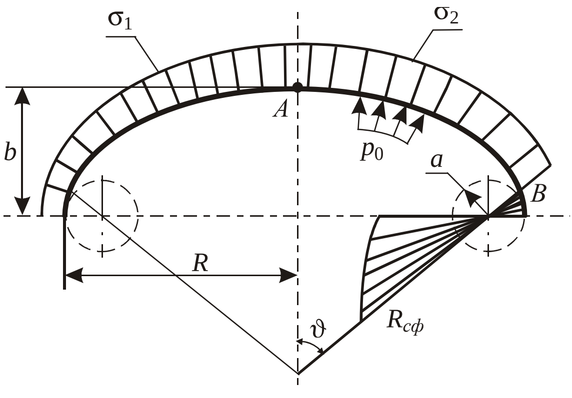


Рис. 7.14. Напряжения в торосферическом днище, нагруженном постоянным давлением

7.5. Оболочки, заполненные жидкостью

Если оболочка заполнена жидкостью, то давление, действующее на ее стенки, изменяется из-за гидростатического столба жидкости, измеряемого от ее свободной поверхности в направлении к поверхности Земли до рассматриваемого сечения. Давление на стенки оболочки еще более возрастает, если она движется с ускорением от поверхности Земли. И наоборот, если она движется с ускорением к поверхности Земли, то гидростатическое давление уменьшается. Количественной мерой влияния ускорения на гидростатическую составляющую давления является коэффициент перегрузки, на величину которого следует умножать плотность жидкости.

Давление в жидкости на глубине h определяется по формуле:

$$p_h = p_H + \rho g n_x h, \tag{7.58}$$

где p_H — давление среды над свободной поверхностью жидкости; ρ — плотность жидкости; h — высота столба жидкости; n_x — осевые перегрузки ($n_x > 0$, если ускорение направлено из жидкости в сторону свободной поверхности). Если сосуд с жидкостью неподвижен, то в формуле (7.58) и во всех последующих, в которых содержится коэффициент перегрузки, необходимо принять $n_x = 1$.

7.5.1. Цилиндр, подвешенный на стержнях

Бак с жидкостью, изображенный на рис. 7.15, надут внутренним давлением p_H, а перегрузки n_x, действующие на него, положительные. Составим уравнение равновесия для двух сечений бака, проходящих по жидкости, одно из которых расположено выше узлов крепления стержней, а другое — ниже.

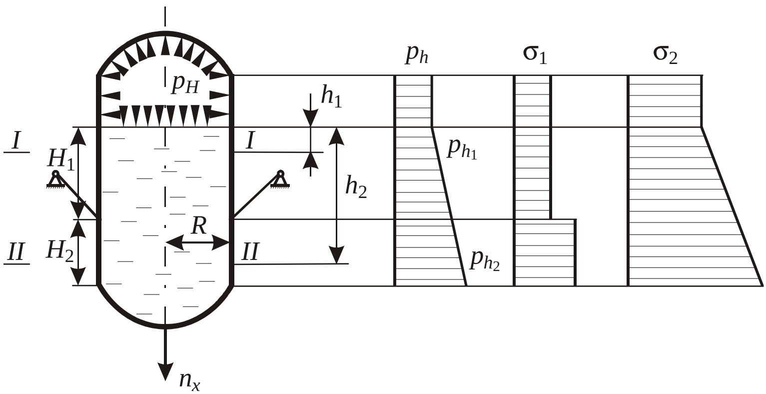


Рис. 7.15. Расчетная схема бака, подвешенного на стержнях

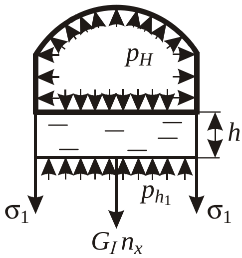


Рис. 7.16. Выделенная верхняя часть бака при составлении уравнения равновесия

Сначала разделим конструкцию на две части по сечению *I*—*I* и рассмотрим верхнюю часть, заменив действие отброшенной части на выделенную: по оболочке — искомыми меридиональными напряжениями σ_1, а по жидкости — давлением на глубине h_1 (рис. 7.16).

Уравнение равновесия выделенной части, на которую действует массовая сила $G_I n_x$, имеет вид:

$$2\pi R N_1 = \pi R^2 p_{h_1} - G_I n_x,$$

откуда меридиональные напряжения равны:

$$\sigma_1 = \frac{\left(p_{h_1} - G_I n_x / \pi R^2\right) R}{2\delta}. \qquad (7.59)$$

Если пренебречь весом металла корпуса по сравнению с весом жидкости, то:

$$G_I = \pi R^2 h_1 \rho g. \qquad (7.60)$$

Подставляя в (7.59) вес из (7.60) и давление $p_{h_1} = p_H + \rho g n_x h_1$, где p_H — давление наддува в баке, получаем после преобразований:

$$\sigma_1 = p_H R / 2\delta, \qquad (7.61)$$

т. е. меридиональные напряжения постоянны между свободной поверхностью и узлами крепления стержней к баку. Тангенциальные напряжения находятся из уравнения Лапласа и равны:

$$\sigma_2 = \left(p_H + \rho g n_x h_1\right) R / \delta. \qquad (7.62)$$

Для определения меридиональных напряжений в сечении *II*—*II* составим уравнение равновесия части бака со стержнями, на которую действуют реакции стержней и массовая сила $G_{II} n_x$ (рис. 7.17, *а*). Имеем:

$$2\pi R N_1 = \pi R^2 p_{h_2} + 2N\cos\varphi - G_{II} n_x.$$

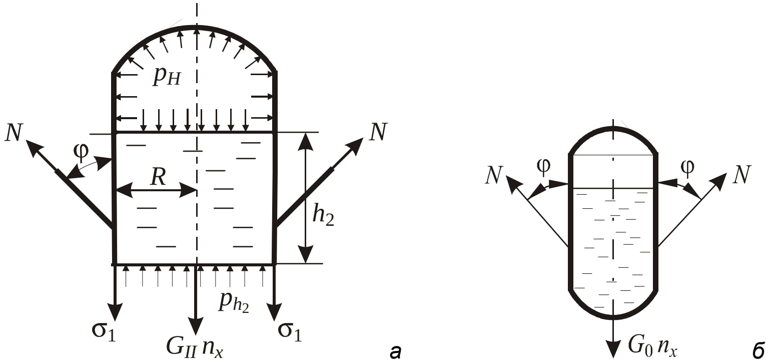


Рис. 7.17. К составлению уравнения равновесия во втором сечении

Но без учета веса металла $G_{II} = \pi R^2 h_2 \rho g$, а давление $p_{h_2} = p_H + \rho g n_x h_2$, и тогда уравнение равновесия принимает вид:

$$2\pi R N_1 = \pi R^2 p_H + 2N \cos\varphi. \tag{7.63}$$

Проекцию реакции стержней на ось симметрии определим из условия равновесия всего бака (рис. 7.17, *б*):

$$2N \cos\varphi = G_0 n_x, \tag{7.64}$$

где G_0 — полный вес жидкости в баке (весом металла пренебрегаем).

Если нижнее днище тоже полусферическое и с таким же радиусом, что и цилиндр, то:

$$G_0 = \left(\pi R^2 \left(H_1 + H_2 \right) + \frac{2}{3} \pi R^3 \right) \rho g, \tag{7.65}$$

а меридиональные напряжения, полученные из (7.63) после подстановки (7.64) и (7.65), определяются по формуле:

$$\sigma_1 = \left[p_H + \rho g n_x \left(H_1 + H_2 + \frac{2}{3} R \right) \right] R/2\delta, \tag{7.66}$$

из которой следует, что они постоянны и на участке бака, расположенном ниже стержней, они больше, чем на верхнем участке. Эпюры безмоментных напряжений в цилиндрической обечайке, определенных по формулам (7.61), (7.62) и (7.66), приведены на рис. 7.15. Ясно, что тангенциальные напряжения определяются по той же формуле, что и для участка бака, расположенного выше места крепления стержней. Полученными соотношениями можно пользоваться и в том случае, когда бак с жидкостью вложен внутрь корпуса летательного аппарата и соединяется с ним в специальных узлах крепления, имитированных в рассмотренной расчетной схеме двумя стержнями.

7.5.2. Полусферическое днище

Теперь определим меридиональные напряжения в нижнем днище полусферической формы цилиндрического бака, заполненного жидкостью (рис. 7.18, *а*). Способ крепления бака к соседним отсекам, с точки зрения напряжений в днище, значения не имеет за исключением тех случаев, когда узлы крепления находятся на самом днище.

Проведем сечение по днищу и составим уравнение равновесия в проекции на ось симметрии для части днища, расположенной ниже рассматриваемого сечения (рис. 7.18, *б*):

$$2\pi r N_1 \sin\vartheta = \pi r^2 p_h + G n_x,$$

откуда:

$$N_1 = \frac{\left(p_h + G n_x / \pi r^2\right) r}{2\sin\vartheta}. \tag{7.67}$$

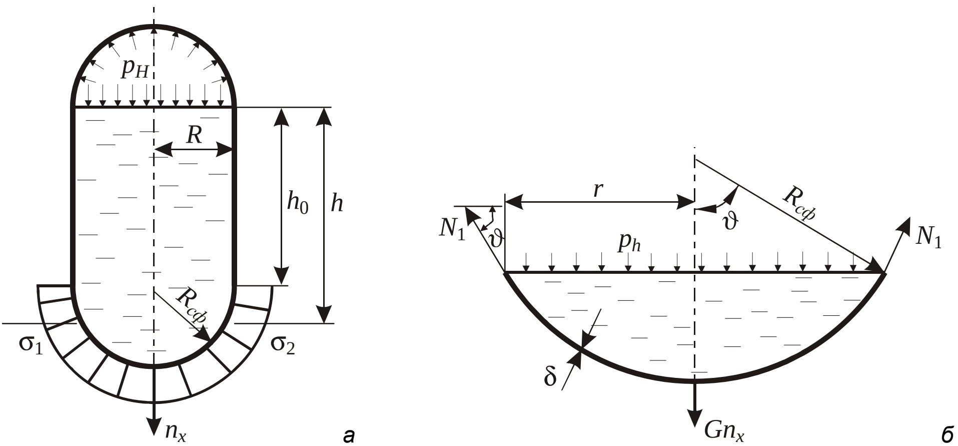


Рис. 7.18. К составлению уравнения равновесия нижней части полусферического днища

Вес полусферического сегмента равен:

$$G = \frac{1}{3}\pi R_{сф}^3 \rho g \left(2 - 3\cos\vartheta + \cos^3\vartheta\right). \tag{7.68}$$

Давление в сечении равно:

$$p_h = p_H + \rho g n_x h\,. \tag{7.69}$$

После подстановки выражений (7.68) и (7.69) в (7.67) получаем следующее выражение для меридиональных напряжений:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{\delta} = \frac{p_H R_{сф}}{2\delta} + \frac{\rho g n_x R_{сф}}{2\delta}\left(h + \frac{R_{сф}\left(2 - 3\cos\vartheta + \cos^3\vartheta\right)}{3\sin^2\vartheta}\right). \tag{7.70}$$

При $\vartheta = \dfrac{\pi}{2}$:

$$\sigma_1 = \frac{p_H R_{сф}}{2\delta} + \frac{\rho g n_x R_{сф}}{2\delta}\left(h_0 + \frac{2}{3}R_{сф}\right),$$

а при $\vartheta = 0$:

$$\sigma_1 = \frac{p_H R_{сф}}{2\delta} + \frac{\rho g n_x R_{сф}}{2\delta}\left(h_0 + R_{сф}\right), \tag{7.71}$$

т. к. предел второго слагаемого в (7.70) равен нулю после раскрытия неопределенности типа $0/0$ по правилу Лопиталя и с учетом того, что здесь $h = h_0 + R_{сф}$. Тангенциальные напряжения определим из уравнения Лапласа (7.21):

$$\sigma_2 = \frac{\left(p_H + \rho g n_x h\right) R_{сф}}{\delta} - \sigma_1,$$

или после подстановки σ_1 из (7.70) получаем:

$$\sigma_2 = \frac{p_H R_{сф}}{2\delta} + \frac{\rho g n_x R_{сф}}{2\delta}\left(h - \frac{R_{сф}\left(2 - 3\cos\vartheta + \cos^3\vartheta\right)}{3\sin^2\vartheta}\right). \tag{7.72}$$

В нижней точке днища при $\vartheta = 0$ тангенциальные напряжения равны меридиональным, т. е. $\sigma_2 = \sigma_1$.

В плоскости стыка днища с полусферой при $\vartheta = \dfrac{\pi}{2}$ тангенциальные напряжения равны:

$$\sigma_2 = \frac{p_H R_{сф}}{2\delta} + \frac{\rho g n_x R_{сф}}{2\delta}\left(h_0 - \frac{2}{3}R_{сф}\right).$$

Из полученного выражения следует, что при определенном сочетании параметров конструкции возможно возникновение отрицательных напряжений в днище. Граничное значение высоты столба жидкости определяется из условия равенства нулю напряжений σ_2 в плоскости стыка цилиндра с днищем, когда $\vartheta = \dfrac{\pi}{2}$. Тогда при:

$$0 \le h_0 < \frac{2}{3} R_{сф} - \frac{p_H}{\rho g n_x} \tag{7.73}$$

в днище возникают отрицательные тангенциальные напряжения.

Абсолютные значения меридиональных напряжений в полусферическом днище больше тангенциальных, и наибольшее их значение возникает в нижней точке днища, где они равны тангенциальным напряжениям (рис. 7.19). По этим напряжениям и определяется толщина стенки полусферического днища, заполненного жидкостью, но для контроля правильности расчетов следует проверять условие (7.73).

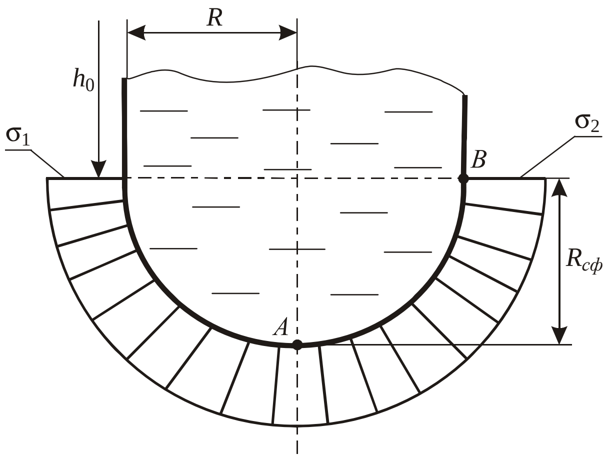


Рис. 7.19. Эпюра напряжений в полусферическом днище, заполненном жидкостью

7.5.3. Эллиптическое днище

Составляя уравнение равновесия части днища (рис. 7.20, *а*), придем к формуле (7.67), в которую необходимо подставить вес жидкости в эллиптическом сегменте, расположенном ниже рассматриваемого сечения (весом металла днища пренебрегаем).

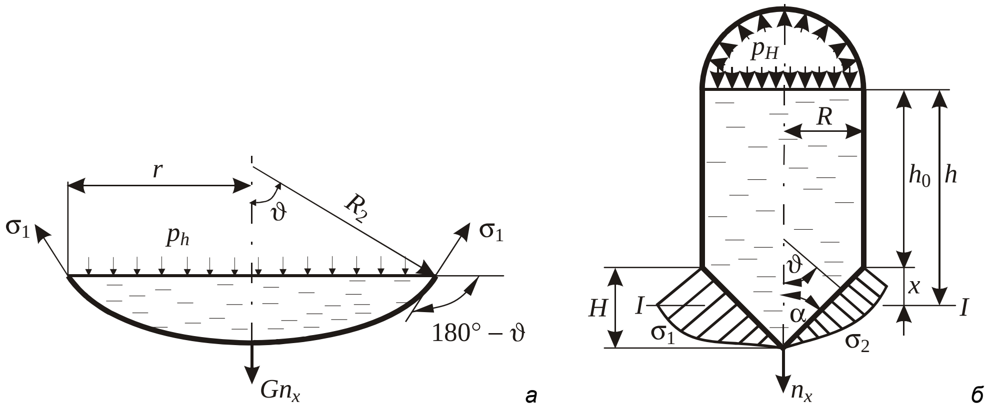


Рис. 7.20. К определению напряжений в нижней части эллиптического днища, заполненного жидкостью

Объем выделенного сегмента днища ниже рассматриваемого сечения равен:

$$V = \frac{1}{3}\pi a^2 \left(2b - 3x + \frac{x^3}{b^2} \right), \tag{7.74}$$

тогда:

$$\frac{Gn_x}{\pi r^2} = \frac{1}{3}\rho g n_x \frac{a^2}{r^2}\left(2b - 3x + \frac{x^3}{b^2} \right).$$

Но из уравнения эллипса имеем $r^2 / a^2 = 1 - x^2 / b^2$, поэтому:

$$\frac{Gn_x}{\pi r^2} = \rho g n_x \frac{\left(2b^2 - 3b^2 x + x^3 \right)}{3\left(b^2 - x^2 \right)}. \tag{7.75}$$

Так как $\operatorname{tg}\vartheta = -dx/dr$; $\sin\vartheta = \operatorname{tg}\vartheta \big/ \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\vartheta}$, то с помощью уравнения эллипса получим:

$$\sin\vartheta = \frac{b \cdot r}{\sqrt{a^4 + r^2\left(b^2 - a^2 \right)}}, \tag{7.76}$$

где:

$$r = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2}.$$

С учетом выражения (7.76) выражение для второго главного радиуса кривизны запишется так:

$$R_2 = r/\sin\vartheta = \sqrt{a^4 + r^2\left(b^2 - a^2\right)}\Big/ b\,.$$

Тогда для меридиональных напряжений получаем:

$$\sigma_1 = \frac{p_H R_2}{2\delta} + \frac{\rho g n_x R_2}{2\delta}\left[\left(h_0 + x\right) + \frac{2b^3 - 3b^2 x + x^3}{3\left(b^2 - x^2\right)}\right]. \qquad (7.77)$$

В плоскости стыка днища с цилиндром радиуса R при $x = 0$: $\vartheta = \pi/2$; $R_2 = R = a$, поэтому здесь:

$$\sigma_1 = \frac{p_H a}{2\delta} + \frac{\rho g n_x a}{2\delta}\left(h_0 + \frac{2}{3}b\right).$$

В нижней точке днища при $x = b$: $R_2 = a^2/b$, поэтому, раскрывая неопределенность типа $0/0$ для второго слагаемого в квадратной скобке выражения (7.77), получаем:

$$\sigma_1 = \frac{p_H a^2}{2\delta b} + \frac{\rho g n_x a^2}{2\delta b}\left(h_0 + b\right).$$

Тангенциальные напряжения определим из уравнения Лапласа (7.21):

$$\sigma_2 = R_2\left(p_h/\delta - \sigma_1/R_1\right),$$

или, после подстановки выражения для меридиональных напряжений из (7.77), имеем:

$$\sigma_2 = \frac{\left(p_H + \rho g n_x\left(h_0 + x\right)\right)R_2}{\delta}\left(1 - \frac{R_2}{2R_1}\right) - \frac{\rho g n_x R_2}{\delta}\cdot\frac{R_2}{2R_1}\cdot\frac{\left(2b^3 - 3b^2 x + x^3\right)}{3\left(b^2 - x^2\right)}. \qquad (7.78)$$

Первый главный радиус кривизны равен:

$$R_1 = \frac{\left(a^4 + r^2\left(b^2 - a^2\right)\right)^{3/2}}{a^4 b}.$$

Тогда отношение радиусов кривизны, используемое при вычислении напряжений в (7.78), можно записать в следующем виде:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{b^2 a^2}{b^4 + x^2\left(a^2 - b^2\right)}.$$

Исследуем полученное выражение для тангенциальных напряжений. В плоскости стыка днища с цилиндром при $x=0$, где $R_2=a$; $R_1=b^2/a$, получаем:

$$\sigma_2=\frac{(p_H+\rho g n_x h_0)a}{\delta}\left(1-\frac{a^2}{2b^2}\right)-\frac{\rho g n_x a}{\delta}\cdot\frac{a^2}{3b}. \tag{7.79}$$

Знак напряжений зависит от соотношения полуосей эллипса, а также от величины последнего отрицательного слагаемого. Если приравнять нулю напряжения σ_2 в выражении (7.79), то можно определить значение отношения полуосей эллипса, больше которого тангенциальные напряжения в основании днища будут отрицательными или равны нулю:

$$\frac{a}{b}=\sqrt{\frac{6p_0}{3p_0+2\rho g n_x b}}.$$

Здесь $p_0=p_H+\rho g n_x h_0$ — давление в основании днища.

В нижней точке днища при $x=b$, где $R_2=R_1=a^2/b$, из формулы (7.78) имеем:

$$\sigma_2=\frac{p_H a^2}{2\delta b}+\frac{\rho g n_x a^2}{2\delta b}(h_0+b),$$

т. е. напряжения здесь совпадают с меридиональными. Меридиональные напряжения в эллиптическом днище, заполненном жидкостью, всегда положительные, а тангенциальные напряжения вблизи стыка днища с цилиндром могут быть и отрицательными (рис. 7.20, *б*).

7.5.4. Коническое днище

Для определения меридиональных напряжений составим, как и в предыдущих случаях, уравнение равновесия части конического днища, расположенной ниже рассматриваемого сечения (рис. 7.21, *а*).

В итоге получится формула (7.67), а для того чтобы учесть особенности, связанные с формой днища, подставим в нее вес жидкости в выделенной части (весом металла пренебрегаем), а также давление p_h жидкости в рассматриваемом сечении.

Так как:

$$G=\frac{1}{3}\pi r^3 \operatorname{ctg}\alpha\,\rho,$$

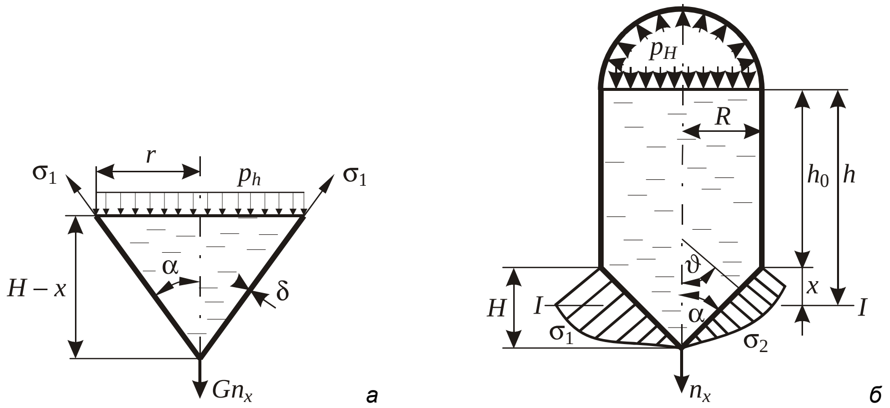


Рис. 7.21. К определению напряжений в конусе, заполненном жидкостью

то меридиональные напряжения определяются по формуле:

$$\sigma_1 = \frac{\left(p_H + \rho g n_x h + \frac{1}{3} r \operatorname{ctg}\alpha \, \rho g n_x\right) r}{2\delta \sin\left(90^\circ - \alpha\right)}.$$

Вводя дополнительные обозначения для высоты конуса $H = R\operatorname{ctg}\alpha$, расстояния от плоскости стыка его с цилиндром радиуса R до рассматриваемого сечения $x = h - h_0$, давления в плоскости стыка $p_0 = p_H + \rho g n_x h_0$, а также учитывая, что $r = \left(H - x\right)\operatorname{tg}\alpha$, получаем:

$$\sigma_1 = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2\cos\alpha}\left(p_0 + \frac{1}{3}\rho g n_x \left(H + 2x\right)\right)\left(H - x\right). \tag{7.80}$$

Меридиональные напряжения равны нулю в вершине конуса, когда $x = H$. Далее, вычисляя производную $d\sigma_1/dx$ и приравнивая ее к нулю, устанавливаем, что при:

$$x_1 = \frac{1}{4}\left(H - \frac{3p_0}{\rho g n_x}\right)$$

напряжения проходят через максимум, причем если $x_1 \ge 0$, т. е. $H \ge 3p_0/\left(\rho g n_x\right)$, то максимум находится в пределах днища, в противном случае экстремума напряжений σ_1 на днище не возникает.

Тангенциальные напряжения, определенные из уравнения Лапласа (7.21), равны:

$$\sigma_2 = \frac{p_h R_2}{\delta} = \frac{(p_0 + \rho g n_x x)(H - x)\operatorname{tg}\alpha}{\delta \cos\alpha}, \tag{7.81}$$

где $R_2 = (H - x)\operatorname{tg}\alpha / \cos\alpha$ — второй главный радиус кривизны конуса в рассматриваемом сечении.

Опять напряжения σ_2 равны нулю в вершине конуса, а точка максимума находится ближе к вершине, чем точка максимума меридиональных напряжений, и имеет координату:

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(H - \frac{p_0}{\rho g n_x}\right).$$

Максимальные тангенциальные напряжения находятся в пределах днища при $x_2 \geq 0$, если $H \geq \frac{p_0}{\rho g n_x}$. На рис. 7.21, *б* с помощью формул (7.80) и (7.81) построены эпюры меридиональных и тангенциальных напряжений в коническом днище, заполненном жидкостью.

7.5.5. Торосферическое днище

Как и в предыдущих случаях, меридиональные и тангенциальные напряжения в днище определяются по общим зависимостям (7.21) и (7.29), в которых форма днища проявляется при вычислении давления в сечении p_h и веса выделенной части днища G. Высота столба жидкости h в выражении для давления $p_h = p_H + \rho g n_x h$ зависит от участка днища, на котором она определяется. На торовом участке (рис. 7.22) она равна:

$$h = h_0 + a\cos\vartheta,$$

а на сферическом участке днища:

$$h = h_0 + a\cos\vartheta_0 + R_{сф}(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0).$$

Тогда расстояние x от основания днища до сечения, в котором определяются напряжения, равно $x = h - h_0$. Вес выделенной части жидкости в днище $G = \rho g V$, а способ вычисления объема зависит от того, какой участок днища рассматривается.

На сферическом участке днища при $0 \le \vartheta \le \vartheta_0$ радиусы кривизны одинаковые и равны радиусу сферы, т. е. $R_1 = R_2 = R_{сф}$, а вес жидкости определяется по формуле:

$$G = \frac{1}{3}\pi R_{сф}^3 \rho g \left(2 - 3\cos\vartheta + \cos^3\vartheta\right).$$

Тогда меридиональные и тангенциальные напряжения вычисляются по тем же формулам (7.70) и (7.72), что и в случае полусферического днища.

Меридиональные напряжения на сферической части днища равны в этом случае:

$$\sigma_1 = \frac{p_0 R_{сф}}{2\delta} + \frac{\rho g n_x R_{сф}}{2\delta}\left(x + \frac{1}{3}R_{сф}\frac{\left(2 - 3\cos\vartheta + \cos^3\vartheta\right)}{\sin^2\vartheta}\right), \tag{7.82}$$

а тангенциальные:

$$\sigma_2 = \frac{p_0 R_{сф}}{2\delta} + \frac{\rho g n_x R_{сф}}{2\delta}\left(x - \frac{1}{3}R_{сф}\frac{\left(2 - 3\cos\vartheta + \cos^3\vartheta\right)}{\sin^2\vartheta}\right). \tag{7.83}$$

На торовом участке днища, когда $\vartheta_0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$, первый главный радиус кривизны равен радиусу тора, т. е. $R_1 = a$. Второй главный радиус кривизны равен расстоянию от рассматриваемой точки на меридиане до оси симметрии, измеряемому вдоль радиуса тора:

$$R_2 = \frac{r}{\sin\vartheta} = \frac{b + a\sin\vartheta}{\sin\vartheta}, \tag{7.84}$$

а объем жидкости в выделенной части днища равен сумме объема жидкости во всей полусферической части:

$$V_{сф}\left(\vartheta_0\right) = \frac{1}{3}\pi R_{сф}^3\left(2 - 3\cos\vartheta_0 + \cos^3\vartheta_0\right)$$

и объема торового пояса части тора, находящейся между рассматриваемым сечением и сечением, в котором тор сопрягается со сферой. Этот объем равен разности между полным объемом торового пояса днища ($\vartheta_0 \le \vartheta \le \pi/2$):

$$V_m\left(\vartheta_0\right) = \pi a^2\left[\cos\vartheta_0\left(a + \frac{b^2}{a} + b\sin\vartheta_0 - \frac{a\cos^2\vartheta_0}{3}\right) + b\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_0\right)\right] \tag{7.85}$$

и части тора, расположенной между основанием днища (и тора) и рассматриваемым сечением. Формула для этого объема записывается так же, как и формула для полного объема торовой части (7.85), но вместо ϑ_0 в нее нужно подставить ϑ.

Угол стыка сферической и торовой частей днища определяется из геометрических соображений (рис. 7.22):

$$\sin\vartheta_0 = \frac{b}{R_{сф} - a}.$$

Тогда меридиональные напряжения на торовой части днища определятся по следующей формуле:

$$\sigma_1 = \frac{p_0 R_2}{2\delta} + \frac{\rho g n_x R_2}{2\delta}\left(x + \frac{V(\vartheta)}{\pi r^2}\right), \tag{7.86}$$

где объем выделенной части днища $V(\vartheta) = V_{сф} + V_m(\vartheta_0) - V_m(\vartheta)$, а второй главный радиус кривизны определяется по формуле (7.84). Кроме того, здесь $x = a\cos\vartheta$, а $r = b + a\sin\vartheta$.

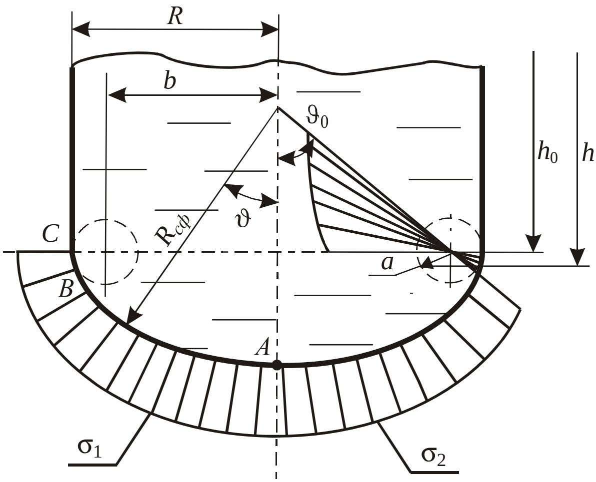


Рис. 7.22. Эпюры напряжений в торосферическом днище, заполненном жидкостью

Тангенциальные напряжения на торовой части днища равны:

$$\sigma_2 = \frac{p_0 R_2}{\delta}\left(1 - \frac{R_2}{2a}\right) + \frac{\rho g n_x R_2}{\delta}\left[x\left(1 - \frac{R_2}{2a}\right) - \frac{R_2}{2a}\frac{V(\vartheta)}{\pi r^2}\right]. \tag{7.87}$$

На рис. 7.22 построены эпюры напряжений в торосферическом днище, заполненном жидкостью. Из построенных эпюр можно видеть, что меридиональные напряжения всегда положительные, а тангенциальные напряжения положительные на сферическом участке днища и отрицательные на торовом.

Это является следствием геометрии днища, т. к. если отношение $\frac{R_2}{2a} > 1$, то все слагаемые в формуле (7.87) отрицательные.

Толщина стенки днища определяется по наибольшим эквивалентным напряжениям в сечении, где сферическая часть сопрягается с торовой частью днища.

Выводы

В этой главе были изучены следующие вопросы:

1. Рассмотрены условия существования безмоментного напряженного состояния. В местах нарушения этих условий возникают изгибные напряжении, которые суммируются с безмоментными напряжениями.
2. Получены формулы для расчета безмоментных меридиональных и тангенциальных напряжений в сферической, эллиптической, торовой, конической (цилиндрической) и торосферической оболочках, нагруженных постоянным внешним давлением.
3. Установлено, что в общем виде формулы для расчета напряжений в оболочках одинаковые, и для получения конкретных расчетных соотношений нужно подставить в них выражения для радиусов кривизны меридиана в рассматриваемом сечении днища.
4. Получены формулы для расчета безмоментных меридиональных и тангенциальных напряжений в сферическом, эллиптическом, коническом и торосферическом днищах, заполненных жидкостью, в которых внутреннее давление переменное и изменяется по линейному закону по высоте днища.
5. Установлено, что формулы для расчета напряжений в днищах можно записать в общем виде, а для получения расчетных соотношений, соответствующих конкретному днищу, нужно подставить в эти формулы выражения для радиусов кривизны меридиана в рассматриваемом сечении днища и объем жидкости в части днища, находящейся ниже рассматриваемого сечения.
6. В торосферических днищах, нагруженных как постоянным, так и переменным давлением, всегда возникает зона отрицательных тангенциальных напряжений в пределах торового участка днища.
7. В эллиптических днищах также возникает зона отрицательных тангенциальных напряжений при определенном соотношении полуосей эллипса.

Упражнения и вопросы

1. Сформулируйте условия существования безмоментного напряженного состояния в тонкой оболочке. Приведите примеры, когда в безмоментной оболочке возникают зоны изгиба.
2. Определите как изменился радиус шар-баллона, нагруженного внутренним давлением $p_0 = 40$ МПа, если радиус баллона $R_{сф} = 0{,}15$ м.
3. Определить безмоментные напряжения и смещения в направлении, перпендикулярном оси симметрии, в цилиндре и эллиптическом днище ($a/b = \sqrt{2}$) в плоскости их стыка, если модуль упругости $E = 0{,}7 \cdot 10^{11}$ Па; $R = 0{,}5$ м; $\mu = 0{,}3$; $\delta = 2 \cdot 10^{-3}$ м.
4. Корпус цилиндрического сосуда с днищами изготовлен из стали с пределом прочности $\sigma_b = 1{,}2 \cdot 10^9$ Па, модулем упругости $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па и коэффициентом Пуассона $\mu = 0{,}3$. Определить, на сколько процентов изменился его радиус $R = 5 \cdot 10^2$ м, если толщина стенки $\delta = 2 \cdot 10^{-3}$ м, а внутреннее давление равно $p_0 = 4$ МПа.
5. Для условий предыдущей задачи определить, на сколько изменится длина цилиндра $l = 2$ м, если передний торец его жестко закреплен.
6. Определите толщину верхней конической обечайки бака, если угол ее полураствора $\alpha = 45°$, давление наддува в баке $p_H = 5 \cdot 10^5$ Па, диаметр основания конуса $d = 1{,}2$ м.
7. Определите напряжения в перевернутом конусе, заполненном жидкостью, по безмоментной теории. Исследуйте полученную эпюру напряжений и установите, по какому сечению конуса следует определять его толщину стенки.
8. Докажите, что напряжения в торе, вращающемся вокруг оси симметрии, не зависят от толщины его стенки.

   Указания:

   - нагрузка на единицу поверхности равна $q = \rho\delta V^2 / r = \rho\delta\omega^2 r$;
   - найти нормальную (давление) и касательную к срединной поверхности проекции q, а меридиональное усилие определить из условия равновесия в проекции на ось симметрии.

9. Цилиндрический сосуд, нагруженный постоянным внутренним давлением, имеет днище, состоящее из сферического участка, переходящего по касательной в острый конус. Каким должно быть соотношение толщин

цилиндра δ, сферы $\delta_с$ и конуса $\delta_к$, чтобы радиальные перемещения в местах их соединения были одинаковыми?

10. При каком соотношении полуосей эллипса a и b толщины цилиндра и эллиптического днища, нагруженных постоянным внутренним давлением, будут одинаковыми?
11. Построить эпюру радиальных деформаций в торе, нагруженном внутренним давлением.
12. Определить соотношение между толщиной торового и полусферического участков торосферического днища, нагруженного постоянным внутренним давлением, из условия равенства перемещений и деформаций в месте их соединения.
13. Получите формулу для расчета толщины стенки конуса, заполненного жидкостью, воспользовавшись третьей теорией прочности.
14. Нужно ли проверять на местную устойчивость торосферическое днище, заполненное жидкостью?
15. Можно ли подобрать место крепления так, чтобы отсутствовало радиальное перемещение в опорном сечении полусферического днища, заполненного жидкостью?
16. Могут ли возникнуть отрицательные напряжения в полусферическом днище, заполненном жидкостью?
17. Получите формулу (7.85) для расчета объема торовой части торосферического днища, заполненного жидкостью.

Литература к главе 7

1. Балабух Л. И., Алфутов Н. А., Усюкин В. И. Строительная механика ракет. Учебник для машиностроительных спец. вузов. — М.: Высшая школа, 1984, 391 с.
2. Бидерман В. Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика. — М.: Машиностроение, 1977, 488 с.
3. Кан С. Н. Строительная механика оболочек. — М.: Машиностроение, 1966.
4. Образцов И. Ф., Булычев Л. А. и др. Строительная механика летательных аппаратов. Учебник для авиационных специальностей вузов. — М.: Машиностроение, 1986, 536 с.
5. Погорелов В. И. Теория тонких оболочек в приложениях к расчету корпусов летательных аппаратов. Учебное пособие. — СПб.: БГТУ, 1990, 162 с.
6. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник, т. 1, 2, 3. — М.: Машиностроение, 1968.

Глава 8

Изгиб цилиндрических оболочек

В этой главе изучаются краевые эффекты, возникающие в области соединения краев цилиндрической оболочки с днищами или шпангоутами. Рассматриваются особенности расчета изгибных напряжений в зонах изменения продольной температуры на цилиндре или при изменении его толщины.

В этой главе будут рассмотрены следующие темы:

- ❒ исходное уравнение и его решение;
- ❒ влияние внешней нагрузки;
- ❒ цилиндрическая оболочка, нагруженная по краям перерезывающей силой и моментом;
- ❒ краевой эффект при различных способах соединения цилиндра с днищами и фланцевым соединением;
- ❒ краевой эффект в области жесткой заделки цилиндра;
- ❒ расчет краевого эффекта в области продольного скачка температур и изменения толщины цилиндрической оболочки.

8.1. Исходные уравнения

Запишем систему уравнений, описывающую напряженно-деформированное состояние в тонкой цилиндрической оболочке, в цилиндрической системе координат, считая, что нагрузка симметрична относительно оси симметрии оболочки.

Для получения этой системы уравнений вычислим сначала коэффициенты Ламе, воспользовавшись формулами перехода от цилиндрической системы координат к декартовой (рис. 8.1). Имеем $x = \alpha$; $y = R\cos\beta$; $z = R\sin\beta$, поэтому после преобразований получаем: $h_1 = 1$; $h_2 = R$. Учитывая то, что первый главный радиус кривизны прямой $R_1 = \infty$, а второй главный радиус кривизны совпадает с радиусом цилиндра $R_2 = R$, получаем из (6.67)—(6.69) следующую систему уравнений:

Уравнения равновесия:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dN_1}{dx} + q_1 = 0;\\
&\frac{dT_{12}}{dx} + \frac{Q_2}{R} + q_2 = 0;\\
&\frac{dQ_1}{dx} - \frac{N_2}{R} + q_n = 0;\\
&\frac{dH}{dx} = Q_2; \qquad \frac{dM_1}{dx} = Q_1.
\end{aligned}\right\} \tag{8.1}$$

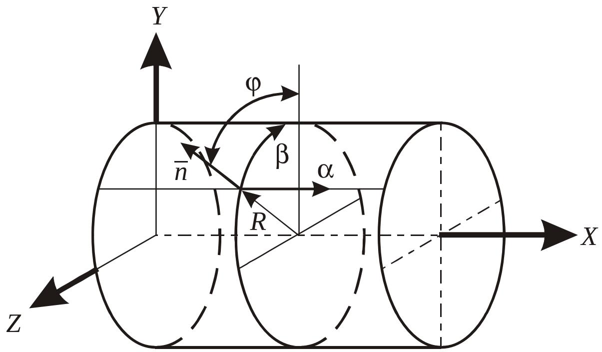


Рис. 8.1. Цилиндрическая система координат

Геометрические уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_1^0 = \frac{du_0}{dx}; \qquad \varepsilon_2^0 = \frac{w}{R}; \qquad \gamma_{12}^0 = \frac{dv_0}{dx};\\
&\kappa_1 = -\frac{d^2w}{dx^2}; \qquad \kappa_2 = 0; \qquad \kappa_{12} = \frac{1}{R}\frac{dv_0}{dx}.
\end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

Физические уравнения для однослойной изотропной оболочки:

$$\left.\begin{aligned}
&N_1 = \frac{E\delta}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_1^0 + \mu\varepsilon_2^0\right); \qquad N_2 = \frac{E\delta}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_2^0 + \mu\varepsilon_1^0\right);\\
&T_{12} = G\delta\gamma_{12}^0; \quad M_1 = D\kappa_1; \quad M_2 = \mu M_1; \quad H = D(1-\mu)\kappa_{12}.
\end{aligned}\right\} \tag{8.3}$$

Нетрудно заметить, что записанную систему уравнений можно разбить на две подсистемы, которые могут рассматриваться независимо друг от друга.

Рассмотрим подсистему уравнений, в которой отсутствуют неизвестные T_{12}, H, γ_{12}^0 и κ_{12}. Имеем:

$$\frac{dN_1}{dx} + q_1 = 0; \tag{8.4}$$

$$\frac{dQ_1}{dx} - \frac{N_2}{R} + q_n = 0; \tag{8.5}$$

$$\frac{dM_1}{dx} = Q_1; \tag{8.6}$$

$$\varepsilon_1^0 = \frac{du_0}{dx}; \tag{8.7}$$

$$\varepsilon_2^0 = \frac{w}{R}; \tag{8.8}$$

$$\kappa_1 = \frac{d^2 w}{dx^2}; \tag{8.9}$$

$$N_1 = \frac{E\delta}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_1^0 + \mu\varepsilon_2^0\right); \tag{8.10}$$

$$N_2 = \frac{E\delta}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_2^0 + \mu\varepsilon_1^0\right); \tag{8.11}$$

$$M_1 = D\kappa_1; \tag{8.12}$$

$$M_2 = \mu M_1. \tag{8.13}$$

Преобразуем систему уравнений (8.4)—(8.13), полагая, что величина погонного усилия N_1 известна, т. к. она может быть определена из уравнения (8.4).

Действительно, $N_1 = \int q_1 dx + C$, где C — константа интегрирования, а q_1 — проекция внешнего трения на ось *X*. Объединив (8.5) и (8.6), получим:

$$\frac{d^2 M_1}{dx^2} - \frac{N_2}{R} + q_n = 0,$$

или, с учетом (8.9) и (8.12),

$$-\frac{d^2}{dx^2} D \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{N_2}{R} + q_n = 0. \tag{8.14}$$

Выразим теперь N_2 через w. Для этого исключим сначала ε_1^0 из (8.11) с помощью выражения (8.10), в котором N_1 известно:

$$\varepsilon_1^0 = \frac{N_1\left(1-\mu^2\right)}{E\delta} - \mu\varepsilon_2^0; \quad N_2 = E\delta\left(\varepsilon_2^0 + \frac{\mu N_1}{E\delta}\right).$$

Подставляя сюда ε_2^0 из (8.8), получаем: $N_2 = \dfrac{E\delta w}{R} + \mu N_1$. Полагая, что толщина оболочки δ постоянна, перепишем уравнение (8.14) так:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{E\delta}{R^2 D} w = \left(q_n - \frac{\mu N_1}{R}\right)\frac{1}{D}.$$

Обозначим:

$$4\alpha^4 = \frac{E\delta}{R^2 D} = \frac{12\left(1-\mu^2\right)}{R^2\delta^2},$$

где $\alpha = \sqrt[4]{\dfrac{3\left(1-\mu^2\right)}{R^2\delta^2}}$ — коэффициент затухания.

Таким образом, задача свелась к решению следующего линейного неоднородного уравнения четвертого порядка:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\alpha^4 w = \frac{1}{D}\left(q_n - \frac{\mu N_1}{R}\right). \tag{8.15}$$

Общее решение этого уравнения записывается в виде:

$$w = e^{-\alpha x}\left(C_1 \cos\alpha x + C_2 \sin\alpha x\right) + e^{\alpha x}\left(C_3 \cos\alpha x + C_4 \sin\alpha x\right) + w_r, \tag{8.16}$$

где w_r — частное решение неоднородного уравнения, зависящее от вида правой части уравнения (8.15), т. е. от внешней нагрузки, а C_1, C_2, C_3, C_4 — константы интегрирования, которые определяются из граничных условий, зависящих от способа закрепления краев оболочки.

8.2. Влияние внешней нагрузки на характер напряжений

Общее решение (8.16) неоднородного уравнения (8.15) запишем в виде $w = w_0 + w_r$, где w_0 — общее решение однородного дифференциального уравнения, а w_r — частное решение неоднородного. Тогда выражение для изгибающего момента M_1 можно переписать так:

$$M_1 = -D\frac{d^2w}{dx^2} = -D\left(w_0'' + w_r''\right).$$

Из него следует, что внешняя нагрузка также может создать изгибающие напряжения.

Рассмотрим следующие частные случаи функционального вида правой части уравнения (8.15), обозначив ее для краткости как:

$$T(x) = \frac{1}{D}\left(q_n - \frac{\mu N_1}{R}\right).$$

Линейная зависимость для правой части уравнения (8.15) $T(x) = A + Bx$ имеет место, когда второе слагаемое в скобках постоянное, а давление q_n меняется по линейному закону. В этом случае частное решение следует принять тоже в виде линейной зависимости $w_r = a + bx$, в которой коэффициенты a и b находятся в результате подстановки w_r в (8.15). Так как $w_r' = b$; $w_r'' = 0$, т. е. $M_{1r} = 0$, то внешняя нагрузка изгибных напряжений не создает. Примером такого случая нагружения оболочки может служить наддутый давлением p_H цилиндрический бак с жидкостью (рис. 8.2), на стенки которого действует линейное из-за гидростатической добавки давление.

Квадратичная зависимость для правой части уравнения (8.15) выглядит так:

$$T(x) = A + Bx + Cx^2; \quad w_r = a + bx + cx^2.$$

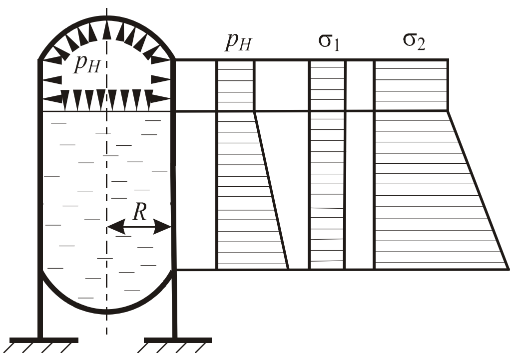


Рис. 8.2. Линейное давление, не создающее изгибающего момента

В этом случае $w'_r = b + 2cx$; $w''_r = 2c$; $M_{1r} = -2cD$, т. е. внешняя нагрузка создает изгибающий момент.

Таким образом, анализ простейших случаев показывает, что внешняя нагрузка принимает участие в создании изгибающих моментов, если характер изменения ее таков, что вторая производная от частного решения неоднородного дифференциального уравнения (8.15) не равна нулю.

Теперь перейдем к исследованию общего решения однородного уравнения (8.15).

8.3. Изгиб краевой перерезывающей силой и моментом

Решением этой модельной задачи удобно пользоваться при расчете краевых зон в области соединения цилиндра с различными элементами конструкций.

В данном случае распределенная нагрузка на оболочку не действует, правая часть уравнения (8.15) равна нулю, и поэтому необходимо решить следующее однородное уравнение:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\alpha^4 w = 0 .$$

Его общее решение имеет вид:

$$w_0 = e^{-\alpha x}\left(C_1 \cos\alpha x + C_2 \sin\alpha x\right) + e^{\alpha x}\left(C_3 \cos\alpha x + C_4 \sin\alpha x\right), \tag{8.17}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — константы интегрирования, определяемые из граничных условий. По условию задачи на краях оболочки действуют известные краевые перерезывающие силы и моменты (рис. 8.3), которые используются для определения констант интегрирования.

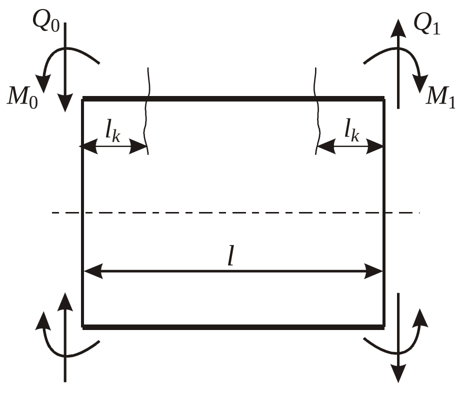


Рис. 8.3. Краевые перерезывающие силы и моменты, действующие на цилиндр

Однако если цилиндр достаточно длинный, то решение уравнения существенно упрощается, т. к. согласно принципу Сен-Венана влияние краевых усилий сказывается на малом расстоянии от точки их приложения. Обозначим это расстояние как l_k и будем рассматривать цилиндр, длина которого $l \geq 2l_k$ (рис. 8.3). Теперь в решении (8.17) можно ограничиться лишь затухающим слагаемым, и записать решение в виде (индекс 0 показывает, что это решение однородного уравнения):

$$w_0 = e^{-\alpha x}\left(C_1 \cos\alpha x + C_2 \sin\alpha x\right). \tag{8.18}$$

Для определения C_1 и C_2 воспользуемся следующими граничными условиями:

$$\text{при } x = 0 \quad M_0 = -Dw_0''; \tag{8.19}$$

$$\text{при } x = 0 \quad Q_0 = -Dw_0'''. \tag{8.20}$$

Выразим константы C_1 и C_2 через краевую погонную перерезывающую силу Q_0 и погонный момент M_0. Имеем:

$$w_0'(x) = -\alpha e^{-\alpha x}\left((C_1 - C_2)\cos\alpha x + (C_1 + C_2)\sin\alpha x\right); \tag{8.21}$$

$$w_0''(x) = 2\alpha^2 e^{-\alpha x}\left(C_1 \sin\alpha x - C_2 \cos\alpha x\right); \tag{8.22}$$

$$w_0'''(x) = -2\alpha^3 e^{-\alpha x}\left((C_1 - C_2)\sin\alpha x - (C_1 + C_2)\cos\alpha x\right). \tag{8.23}$$

Воспользовавшись граничными условиями (8.19) и (8.20), получаем:

$$M_0 = 2C_2\alpha^2 D; \quad Q_0 = -2\alpha^3 D\left(C_1 + C_2\right),$$

откуда:

$$C_1 = -\frac{Q_0 + \alpha M_0}{2\alpha^3 D}; \quad C_2 = \frac{M_0}{2\alpha^2 D}.$$

Подставляя константы интегрирования в выражения (8.18), (8.21)—(8.23), после преобразований получаем окончательно:

$$\left.\begin{aligned}
w_0 &= -\frac{1}{2\alpha^3 D}\left(\alpha M_0 \psi(\alpha x) + Q_0 \theta(\alpha x)\right);\\
w_0' &= \frac{1}{2\alpha^2 D}\left(2\alpha M_0 \theta(\alpha x) + Q_0 \varphi(\alpha x)\right);\\
w_0'' &= -\frac{1}{\alpha D}\left(\alpha M_0 \varphi(\alpha x) + Q_0 \zeta(\alpha x)\right);\\
w_0''' &= \frac{1}{D}\left(2\alpha M_0 \zeta(\alpha x) - Q_0 \psi(\alpha x)\right),
\end{aligned}\right\} \tag{8.24}$$

где введены следующие обозначения для балочных функций (табл. 8.1):

$$\left.\begin{aligned}\varphi(\alpha x)&=e^{-\alpha x}(\cos\alpha x+\sin\alpha x);\\ \psi(\alpha x)&=e^{-\alpha x}(\cos\alpha x-\sin\alpha x);\\ \theta(\alpha x)=e^{-\alpha x}\cos\alpha x;&\quad \zeta(\alpha x)=e^{-\alpha x}\sin\alpha x.\end{aligned}\right\}\qquad(8.25)$$

Таблица 8.1. *Значения балочных функций*

αx	$\varphi(\alpha x)$	$\psi(\alpha x)$	$\theta(\alpha x)$	$\zeta(\alpha x)$
0	1,0000	1,0000	1,0000	0,0000
0,1	0,9907	0,8100	0,9003	0,0903
0,2	0,9651	0,6398	0,8024	0,1627
0,3	0,9267	0,4888	0,7077	0,2189
0,4	0,8784	0,3564	0,6174	0,2610
0,5	0,8231	0,2415	0,5323	0,2908
0,6	0,7628	0,1431	0,4530	0,3099
0,7	0,6997	0,0599	0,3798	0,3199
0,8	0,6354	–0,0093	0,3131	0,3223
0,9	0,5712	–0,0657	0,2527	0,3185
1,0	0,5083	–0,1108	0,1988	0,3096
1,1	0,4476	–0,1457	0,1510	0,2967
1,2	0,3899	–0,1716	0,1091	0,2807
1,3	0,3355	–0,1897	0,0729	0,2626
1,4	0,2849	–0,2011	0,0419	0,2430
1,5	0,2384	–0,2068	0,0158	0,2226
1,6	0,1959	–0,2077	–0,0059	0,2018
1,7	0,1576	–0,2047	–0,0235	0,1812
1,8	0,1234	–0,1985	–0,0376	0,1610
1,9	0,0932	–0,1899	–0,0484	0,1415
2,0	0,0667	–0,1794	–0,0563	0,1230
2,1	0,0439	–0,1675	–0,0618	0,1057
2,2	0,0244	–0,1548	–0,0652	0,0895

Таблица 8.1 *(продолжение)*

αx	$\varphi(\alpha x)$	$\psi(\alpha x)$	$\theta(\alpha x)$	$\zeta(\alpha x)$
2,3	0,0080	–0,1416	–0,0668	0,0748
2,4	–0,0056	–0,1282	–0,0669	0,0613
2,5	–0,0166	–0,1149	–0,0658	0,0492
2,6	–0,0254	–0,1019	–0,0636	0,0383
2,7	–0,0320	–0,0895	–0,0608	0,0287
2,8	–0,0369	–0,0777	–0,0573	0,0204
2,9	–0,0403	–0,0666	–0,0534	0,0132
3,0	–0,0423	–0,0563	–0,0493	0,0071
3,1	–0,0431	–0,0469	–0,0450	0,0019
3,2	–0,0431	–0,0383	–0,0407	–0,0024
3,3	–0,0422	–0,0306	–0,0364	–0,0058
3,4	–0,0408	–0,0237	–0,0323	–0,0085
3,5	–0,0389	–0,0177	–0,0283	–0,0106
3,6	–0,0366	–0,0124	–0,0245	–0,0121
3,7	–0,0341	–0,0079	–0,0210	–0,0131
3,8	–0,0314	–0,0040	–0,0177	–0,0137
3,9	–0,0286	–0,0008	–0,0147	–0,0140
4,0	–0,0258	0,0019	–0,0120	–0,0139
4,1	–0,0231	0,0040	–0,0095	–0,0136
4,2	–0,0204	0,0057	–0,0074	–0,0131
4,3	–0,0179	0,0070	–0,0054	–0,0125
4,4	–0,0155	0,0079	–0,0038	–0,0117
4,5	–0,0132	0,0085	–0,0023	–0,0108
4,6	–0,0111	0,0089	–0,0011	–0,0100
4,7	–0,0092	0,0090	0,0001	–0,0091
4,8	–0,0075	0,0089	0,0007	–0,0082
4,9	–0,0059	0,0087	0,0014	–0,0073
5,0	–0,0046	0,0084	0,0019	–0,0065

Таблица 8.1 *(окончание)*

αx	$\varphi(\alpha x)$	$\psi(\alpha x)$	$\theta(\alpha x)$	$\zeta(\alpha x)$
5,1	–0,0033	0,0080	0,0023	–0,0057
5,2	–0,0023	0,0075	0,0026	–0,0049
5,3	–0,0014	0,0069	0,0028	–0,0042
5,4	–0,0006	0,0064	0,0029	–0,0035
5,5	0,0000	0,0058	0,0029	–0,0029
5,6	0,0006	0,0052	0,0029	–0,0023
5,7	0,0010	0,0046	0,0028	–0,0018
5,8	0,0013	0,0041	0,0027	–0,0014
5,9	0,0015	0,0036	0,0026	–0,0010
6,0	0,0017	0,0031	0,0024	–0,0007
6,1	0,0018	0,0026	0,0022	–0,0004
6,2	0,0019	0,0022	0,0020	–0,0002
6,3	0,0019	0,0018	0,0018	0,0001
6,4	0,0018	0,0015	0,0017	0,0003
6,5	0,0018	0,0012	0,0015	0,0004
6,6	0,0017	0,0009	0,0013	0,0005
6,7	0,0016	0,0006	0,0011	0,0006
6,8	0,0015	0,0004	0,0010	0,0006
6,9	0,0014	0,0002	0,0008	0,0006
7,0	0,0013	0,0001	0,0007	0,0006

Из табл. 8.1 можно установить, что балочные функции быстро затухают. Например, амплитудное значение функции $\zeta(\alpha x)$ уменьшается примерно в 23 раза уже на второй полуволне (рис 8.4), поэтому с погрешностью в 5% можно считать, что краевой эффект затухает на расстоянии $\alpha x = \pi$.

Тогда, принимая $\alpha l_k = \pi$ с учетом обозначения, введенного для α, получаем длину зоны краевого эффекта:

$$l_k = \frac{\pi}{\sqrt[4]{3\left(1-\mu^2\right)}}\sqrt{R\delta} = 2,45\sqrt{R\delta} \quad \text{при } \mu = 0,3,$$

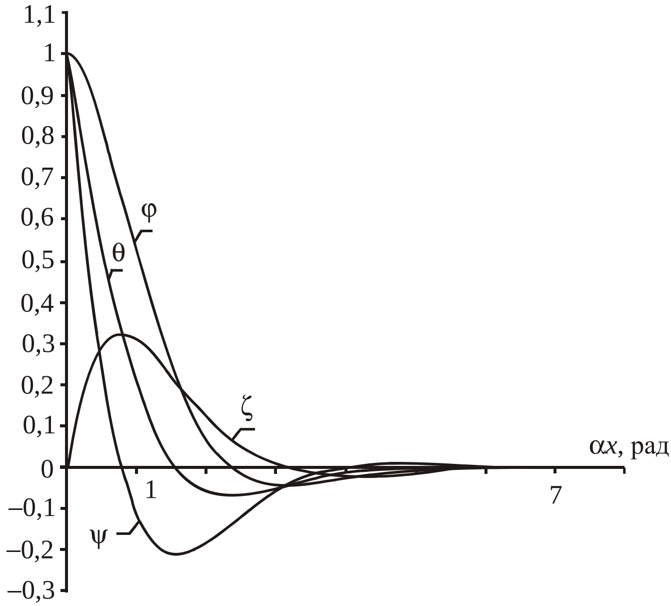


Рис. 8.4. Затухающие балочные функции

или:

$$\frac{l_k}{R} = 2,45\sqrt{\frac{\delta}{R}}\ .$$

Обычно это расстояние мало, и поэтому на большей части цилиндра напряженное состояние определяется внешней нагрузкой. Таким образом, подводя итог анализа решения уравнения (8.15), можно сделать следующие выводы:

1. Если внешняя нагрузка распределена линейно или постоянна на поверхности оболочки, то она не создает моментных напряжений. Моментные краевые зоны возникают только в местах крепления оболочки.
2. Краевые эффекты быстро затухают, и на большей части длины оболочки ее расчет можно вести по безмоментной теории.
3. Если края оболочки близки друг к другу, то общее решение необходимо принимать в виде (8.17). В этом случае длина цилиндра $l \le 2l_k$, а сам цилиндр называется коротким. Такой случай будет рассмотрен далее в *разд. 8.9*, посвященном расчету краевого эффекта в области изменения толщины оболочки.

8.4. Краевые напряжения около эллиптического днища

Сначала установим причину, по которой в плоскости стыка эллиптического днища с цилиндром (рис. 8.5) нарушаются условия существования безмоментного напряженного состояния, сформулированные в *разд. 7.1*.

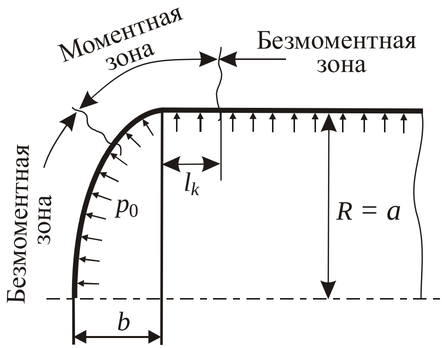


Рис. 8.5. Зона стыка цилиндра с эллиптическим днищем

Если воспользоваться безмоментной теорией, то безмоментные напряжения в цилиндре определяются по следующим формулам *(см. разд. 7.4.2)*:

$$\sigma_1 = \frac{p_0 R}{2\delta}; \quad \sigma_2 = \frac{p_0 R}{\delta},$$

а в эллиптическом днище *(см. разд. 7.4.4)*:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{p_0 R_2}{2\delta}; \\ \sigma_2 &= \frac{p_0 R_2}{\delta}\left(1 - \frac{R_2}{2R_1}\right). \end{aligned}\right\} \tag{8.26}$$

В плоскости стыка днища с цилиндром радиусы кривизны в эллиптическом днище равны соответственно $R_2 = R$; $R_1 = \dfrac{b^2}{R}$, и поэтому тангенциальные напряжения σ_2 в днище и цилиндре различные, т. к. в цилиндре $R_1 = 0$.

Различными будут и нормальные перемещения. Для цилиндра на основании формулы из (7.40) нормальное перемещение определяется как:

$$\left(w_ц\right)_p = \frac{p_0 R}{E\delta}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right). \tag{8.27}$$

Получим перемещение днища в этой плоскости, воспользовавшись геометрическим уравнением для тангенциальных деформаций в направлении параллельного круга и выражениями (8.26). Относительные деформации равны:

$$\varepsilon_2 = \frac{u\cos\vartheta}{r} + \frac{w}{R_2},$$

но в плоскости стыка $\vartheta = \dfrac{\pi}{2}$; $R_2 = R$, поэтому:

$$\left(w_\partial\right)_p = \varepsilon_2 R = \frac{R}{E}\left(\sigma_2 - \mu\sigma_1\right),$$

или после подстановки σ_1 и σ_2:

$$\left(w_\partial\right)_p = \frac{p_0 R^2}{E\delta}\left(1 - \frac{\mu}{2} - \frac{R^2}{2b^2}\right). \tag{8.28}$$

Таким образом, из сравнения выражений (8.27) и (8.28) следует, что по безмоментной теории цилиндр смещается в направлении нормали на большую величину, чем днище, поэтому в области стыка должны возникнуть дополнительные краевые усилия, компенсирующие эту разность смещений. Эти усилия и моменты и приводят к возникновению изгибных напряжений, которые накладываются на безмоментные напряжения.

Определим краевую перерезывающую силу Q_0 и краевой момент M_0 (рис. 8.6) из условия равенства перемещений и углов поворота в плоскости стыка цилиндра с эллиптическим днищем:

$$\left(w_ц\right)_p + \left(w_ц\right)_{Q_0} + \left(w_ц\right)_{M_0} = \left(w_\partial\right)_p + \left(w_\partial\right)_{Q_0} + \left(w_\partial\right)_{M_0};$$

$$\left(\vartheta_ц\right)_p + \left(\vartheta_ц\right)_{Q_0} + \left(\vartheta_ц\right)_{M_0} = \left(\vartheta_\partial\right)_p + \left(\vartheta_\partial\right)_{Q_0} + \left(\vartheta_\partial\right)_{M_0}.$$

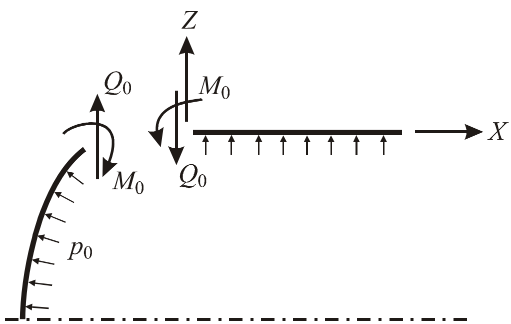


Рис. 8.6. Краевая перерезывающая сила и момент, компенсирующие разность перемещений днища и цилиндра в плоскости их стыка

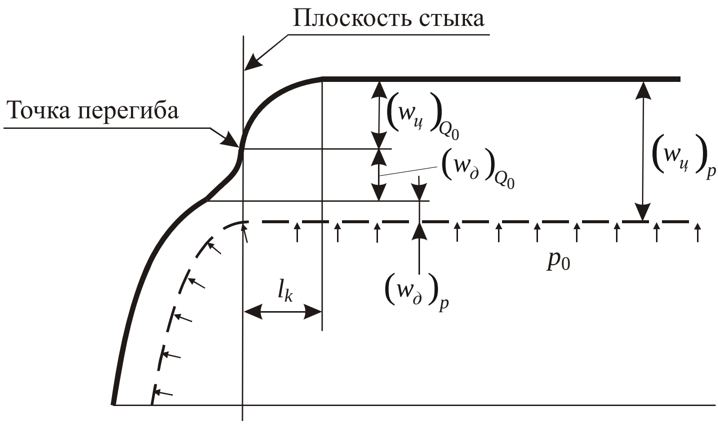


Рис. 8.7. Схема деформации днища и цилиндра с точкой перегиба в плоскости стыка

Чтобы получить аналитическое решение задачи, примем допущения, которые следуют из особенностей рассматриваемой конструкции:

1. Ограничимся случаем, когда толщина стенки δ и материал днища и цилиндра одинаковые.
2. Будем также считать, что сопряжение днища и цилиндра плавное и не имеет изломов.

На основании первого допущения считаем, что часть днища, примыкающая к цилиндру, также имеет форму цилиндра. Тогда краевой изгибающий момент $M_0 = 0$, т. к. в плоскости стыка $w_0''(0) = 0$ из-за точки перегиба на срединной поверхности (рис. 8.7).

Для определения Q_0 воспользуемся условием совместности перемещения днища и цилиндра в плоскости стыка:

$$\left(w_ц\right)_p + \left(w_ц\right)_{Q_0} = \left(w_д\right)_p + \left(w_д\right)_{Q_0}, \tag{8.29}$$

где:

$$\left.\begin{aligned}
\left(w_ц\right)_p &= \frac{p_0 R^2}{E\delta}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right);\\
\left(w_ц\right)_{Q_0} &= \left(w_0\right)_{Q_0} = -\frac{1}{2\alpha^3 D} Q_0;\\
\left(w_д\right)_p &= \frac{p_0 R^2}{E\delta}\left(1 - \frac{\mu}{2} - \frac{R^2}{2b^2}\right);\\
\left(w_д\right)_{Q_0} &= -\frac{1}{2\alpha^3 D}\left(-Q_0\right) = \frac{1}{2\alpha^3 D} Q_0.
\end{aligned}\right\} \tag{8.30}$$

Подставляя (8.30) в (8.29), получаем:

$$\frac{p_0R^2}{E\delta}\left(1-\frac{\mu}{2}\right)-\frac{1}{2\alpha^3D}Q_0=\frac{p_0R^2}{E\delta}\left(1-\frac{\mu}{2}-\frac{R^2}{2b^2}\right)+\frac{1}{2\alpha^3D}Q_0,$$

откуда искомая перерезывающая сила будет равна:

$$Q_0=\frac{p_0R^2}{E\delta}\alpha^3D\frac{R^2}{2b^2}.$$

По известным значениям M_0 и Q_0, которые возникают в плоскости стыка днища с цилиндром, вычислим теперь погонный изгибающий момент M_1 в любом сечении, расположенном на расстоянии x от плоскости стыка. Учитывая, что давление постоянное и не создает изгибающего момента, имеем:

$$M_1=-D\left(w_0''+w_r''\right)=-Dw_0'',$$

где на основании третьей формулы из (8.24) вторая производная от перемещения равна:

$$w_0''=-\frac{1}{\alpha D}Q_0\zeta\left(\alpha x\right).$$

Тогда:

$$M_1=\frac{Q_0}{\alpha}\xi\left(\alpha x\right)=\frac{p_0R^2}{E\delta}\alpha^2D\frac{R^2}{2b^2}\zeta\left(\alpha x\right), \tag{8.31}$$

а перемещение:

$$w_0=-\frac{1}{2\alpha^3D}Q_0\theta\left(\alpha x\right)=\frac{p_0R^2}{2E\delta}\cdot\frac{R^2}{2b^2}\theta\left(\alpha x\right). \tag{8.32}$$

Напряжения выражаются через погонные усилия и момент следующим образом:

$$\sigma_1=\frac{N_1}{\delta}\pm\frac{6M_1}{\delta^2};\quad \sigma_2=\frac{N_2}{\delta}\pm\mu\frac{6M_1}{\delta^2}, \tag{8.33}$$

где:

$$N_1=\int q_1dx+C;\quad N_2=\frac{E\delta w}{R}+\mu N_1, \tag{8.34}$$

$$w=w_0+w_r. \tag{8.35}$$

Так как трение на конструкцию не действует, и поэтому $q_1=0$, то осевое внутреннее усилие определяется только давлением, следовательно $N_1=\dfrac{p_0R}{2}$.

Правая часть неоднородного уравнения (8.15) постоянна и записывается в виде:

$$T(x) = \frac{1}{D}\left(p_0 - \frac{\mu N_1}{R}\right) = \frac{p_0}{D}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right).$$

Тогда частное решение этого неоднородного уравнения имеет вид:

$$w_r = \frac{p_0}{4\alpha^4 D}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right),$$

или в силу того, что:

$$\alpha^4 = \frac{3\left(1-\mu^2\right)}{R^2\delta^2}; \quad D = \frac{E\delta^3}{12\left(1-\mu^2\right)},$$

получаем:

$$w_r = \left(w_ц\right)_p = \frac{p_0 R^2}{E\delta}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right). \tag{8.36}$$

Подставляя (8.32) и (8.36) в (8.35), а затем полученное выражение для полного перемещения w в (8.34), имеем:

$$N_2 = \frac{E\delta}{R}\left[\frac{p_0 R^2}{E\delta}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) - \frac{p_0 R^2}{2E\delta}\cdot\frac{R^2}{2b^2}\theta(\alpha x)\right] + \mu\frac{p_0 R}{2},$$

или:

$$N_2 = p_0 R\left[1 - \frac{1}{4}\cdot\frac{R^2}{b^2}\theta(\alpha x)\right].$$

Тогда выражения для меридиональных и тангенциальных напряжений в цилиндре запишутся так:

$$\sigma_1 = \frac{p_0 R}{2\delta}\left[1 \pm \frac{12R}{E\delta^2}\alpha^2 D\frac{R^2}{2b^2}\zeta(\alpha x)\right];$$

$$\sigma_2 = \frac{p_0 R}{\delta}\left[1 - \frac{1}{4}\frac{R^2}{b^2}\theta(\alpha x) \pm \mu\frac{6R}{E\delta^2}\alpha^2 D\frac{R^2}{2b^2}\zeta(\alpha x)\right].$$

Но поскольку:

$$\frac{6R}{E\delta^2}\alpha^2 D = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{1-\mu^2}},$$

то:

$$\sigma_1 = \frac{p_0 R}{2\delta}\left[1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{1-\mu^2}}\frac{R^2}{b^2}\zeta(\alpha x)\right]; \qquad (8.37)$$

$$\sigma_2 = \frac{p_0 R}{\delta}\left[1 - \frac{1}{4}\frac{R^2}{b^2}\theta(\alpha x) \pm \mu\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{1-\mu^2}}\frac{R^2}{b^2}\zeta(\alpha x)\right]. \qquad (8.38)$$

При $x \to l_k$ выражения в квадратных скобках в этих формул быстро стремятся к единице, а напряжения — к безмоментным значениям.

После сложения безмоментных напряжений с изгибными, которые равны (сопряжение днища с цилиндром на основании второго допущения заменяется в пределах краевой зоны цилиндрическим участком), но противоположны по знаку изгибным напряжениям в цилиндре, напряжения в днище будут равны:

$$\sigma_1 = \frac{p_0 R}{2\delta}\left[1 \mp \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{1-\mu^2}}\frac{R^2}{b^2}\zeta(\alpha x)\right];$$

$$\sigma_2 = \frac{p_0 R}{\delta}\left[1 - \frac{R^2}{2b^2} + \frac{R^2}{4b^2}\theta(\alpha x) \mp \mu\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{1-\mu^2}}\frac{R^2}{b^2}\zeta(\alpha x)\right].$$

В этих формулах координата x отсчитывается от плоскости стыка в сторону днища, т. е. в направлении, противоположном направлению к цилиндру. Найдем координаты экстремумов напряжений σ_1 и σ_2 на цилиндре, продифференцировав их зависимости по αx, а затем приравняв производную нулю. Имеем:

$$\frac{d\sigma_1}{d(\alpha x)} = \pm\frac{p_0 R}{2\delta}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{1-\mu^2}}\cdot\frac{R^2}{b^2}\cdot\frac{d\zeta}{d(\alpha x)} = 0,$$

т. е. $-e^{-\alpha x}\sin\alpha x + e^{-\alpha x}\cos\alpha x = 0$, откуда $\operatorname{tg}\alpha x = 1$, или $\alpha x = \frac{\pi}{4}$. На наружной поверхности напряжения σ_1 принимают максимальные значения, а на внутренней — минимальные. Тогда:

$$\max\sigma_1 = \frac{p_0 R}{2\delta}\left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{1-\mu^2}}\cdot\frac{R^2}{b^2}\cdot 0{,}32\right),$$

а при $\mu = 0{,}3$:

$$\max \sigma_1 = \left(1 + 0,293 \frac{R^2}{b^2}\right) \frac{p_0 R}{2\delta}.$$

Из условия $\dfrac{d\sigma_2}{d(\alpha x)} = 0$ получаем:

$$-\frac{1}{4}\theta'(\alpha x) \pm \frac{\mu\sqrt{3}}{4\sqrt{1-\mu^2}}\zeta'(\alpha x) = 0.$$

Но так как $\theta'(\alpha x) = -\varphi(\alpha x)$; $\zeta'(\alpha x) = \psi(\alpha x)$, то:

$$\frac{1}{4}\varphi(\alpha x) \pm \frac{\mu\sqrt{3}}{4\sqrt{1-\mu^2}}\psi(\alpha x) = 0.$$

При $\mu = 0{,}3$ для наружной поверхности получаем $\alpha x = 1{,}85$, и т. к. $\theta(1{,}85) = -0,042$; $\zeta(1{,}85) = 0{,}15$, то:

$$\max \sigma_2 = \frac{p_0 R}{\delta}\left(1 + 0,031 \frac{R^2}{b^2}\right).$$

Полученные выражения для максимальных напряжений необходимо использовать при оценке допустимых напряжений в области стыка цилиндра с днищем. Что касается днища, то здесь максимальные напряжения возникают на внутренней поверхности:

$$\max \sigma_1 = \left(1 + 0{,}293 \frac{R^2}{b^2}\right) \frac{p_0 R}{2\delta};$$

$$\max \sigma_2 = \left(1 - \frac{R^2}{2b^2} + 0{,}018 \frac{R^2}{b^2}\right) \frac{p_0 R}{\delta}.$$

Из последнего выражения видно, что краевая составляющая напряжений на днище мала, и ею можно пренебречь. Напряжения σ_2 отрицательные при $b < \sqrt{0{,}48}\, R$, и этот случай наиболее опасен с точки зрения прочности днища, т. к. эквивалентные напряжения будут равны сумме абсолютных значений напряжений σ_1 и σ_2 по третьей теории прочности. На рис. 8.8 приведены эпюры суммарных напряжений, возникающих в краевой зоне на цилиндре, отнесенные к безмоментным напряжениям.

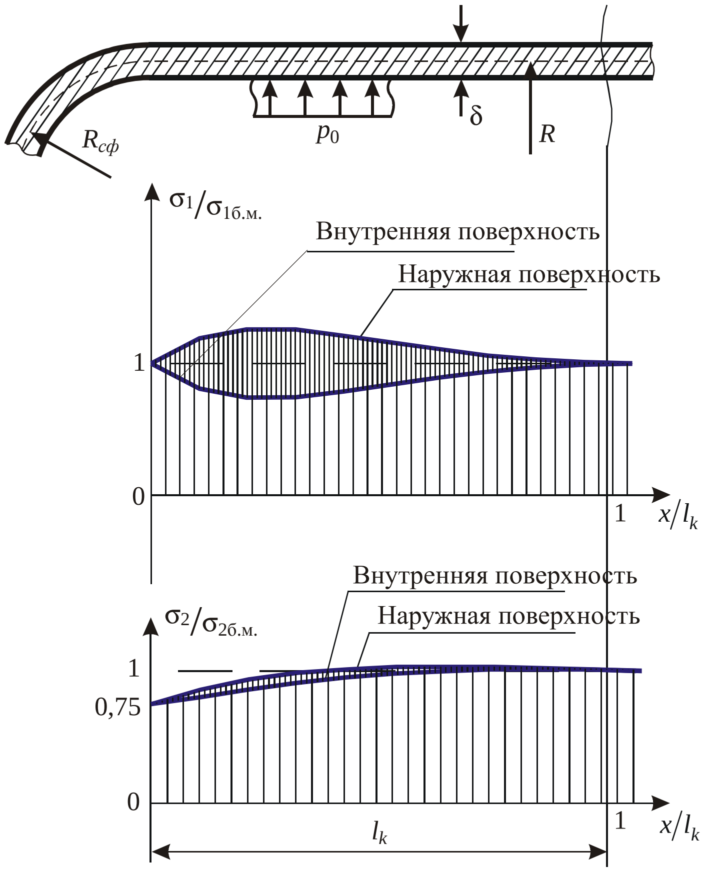


Рис. 8.8. Напряжения в краевой зоне цилиндра, соединенного с эллиптическим днищем

8.5. Краевой эффект в области жесткой заделки

Как и в предыдущем случае, будем рассматривать цилиндрическую оболочку, длина которой l больше двух расстояний l_k от места заделки до точки, где краевой эффект затухает (рис. 8.9).

Рассматриваемая расчетная схема может реализоваться в цилиндрической оболочке, подкрепленной шпангоутами, жесткость которых значительно больше жесткости оболочки. В этом случае перемещения и углы поворота на краю оболочки, т. е. при $x = 0$, равны нулю, и поэтому для определения Q_0 и M_0 необходимо записать следующие условия совместности:

$$\left.\begin{aligned} \left(w_ц\right)_p + \left(w_w\right)_{Q_0} + \left(w_ц\right)_{M_0} &= 0; \\ \left(\vartheta_ц\right)_p + \left(\vartheta_ц\right)_{Q_0} + \left(\vartheta_ц\right)_{M_0} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{8.39}$$

где:

$$\left(w_ц\right)_p = \frac{p_0 R^2}{E\delta}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right); \quad \left(w_ц\right)_{Q_0} = -\frac{1}{2\alpha^3 D} Q_0; \quad \left(w_ц\right)_{M_0} = -\frac{1}{2\alpha^2 D} M_0. \tag{8.40}$$

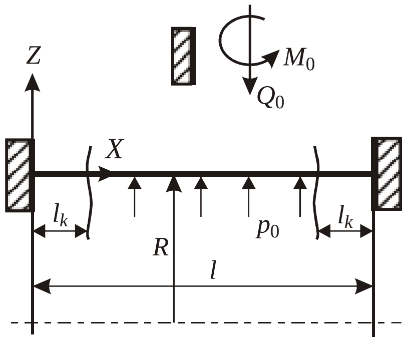


Рис. 8.9. Схема нагруженного давлением цилиндра с жестко заделанными краями

Угол поворота оболочки от внутреннего давления, равный производной от нормального перемещения, равен нулю, т. е. $\left(\vartheta_ц\right)_p = 0$, т. к. давление постоянно по длине оболочки, а углы поворота от перерезывающей силы и момента равны соответственно:

$$\left(\vartheta_ц\right)_{Q_0} = -\frac{1}{2\alpha^2 D} Q_0; \quad \left(\vartheta_ц\right)_{M_0} = -\frac{1}{\alpha^2 D} M_0. \tag{8.41}$$

Подставляя (8.40) и (8.41) в условия (8.39), получаем:

$$\frac{p_0 R^2}{E\delta}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) - \frac{1}{2\alpha^3 D} Q_0 - \frac{1}{2\alpha^2 D} M_0 = 0;$$

$$\frac{M_0}{\alpha D} + \frac{1}{2\alpha^2 D} Q_0 = 0,$$

откуда:

$$\left.\begin{aligned} Q_0 &= -2\alpha M_0; \\ M_0 &= -\frac{p_0 R^2}{E\delta}\left(1-\frac{\mu}{2}\right)2\alpha^2 D. \end{aligned}\right\}; \tag{8.42}$$

Проводя преобразования, окончательно получаем:

$$Q_0 = \frac{p_0}{\alpha}\left(1-\frac{\mu}{2}\right); \quad M_0 = -\frac{p_0}{2\alpha^2}\left(1-\frac{\mu}{2}\right).$$

Тогда перемещение, создаваемое краевыми усилиями, равно:

$$w_0 = -\frac{1}{2\alpha^3 D}\left(\alpha M_0 \psi(\alpha x) + Q_0 \theta(\alpha x)\right) = \frac{1}{2\alpha^2 D} M_0 \varphi(\alpha x),$$

или:

$$w_0 = -\frac{p_0 R^2}{E\delta}\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\varphi(\alpha x). \tag{8.43}$$

Аналогично получаем выражение для второй производной:

$$w_0'' = -\frac{1}{\alpha D}\left(\alpha M_0 \varphi(\alpha x) + Q_0 \zeta(\alpha x)\right) = -\frac{M_0}{D}\psi(\alpha x). \tag{8.44}$$

Если рассматриваемый участок оболочки представляет собой часть сосуда, закрытого днищами, то $N_1 = p_0 \dfrac{R}{2}$, и поэтому частное решение определяется по формуле:

$$w_r = \frac{p_0 R^2}{E\delta}\left(1-\frac{\mu}{2}\right). \tag{8.45}$$

В противном случае значение N_1 должно быть определено на основании данных о силах, действующих на оболочку в осевом направлении.

С учетом полученных выражений для перемещений и второй производной от перемещений запишем выражения для погонного изгибающего момента и тангенциального усилия в следующем виде:

$$M_1 = -Dw_0'' = M_0 \psi(\alpha x) = -\frac{p_0}{2\alpha^2}\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\psi(\alpha x); \tag{8.46}$$

$$N_2 = \frac{E\delta w}{R} + \mu N_1 = p_0 R\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\left(1-\varphi(\alpha x)\right) + \frac{\mu}{2} p_0 R. \tag{8.47}$$

Последнее выражение можно переписать так:

$$N_2 = p_0 R\left[1-\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\varphi(\alpha x)\right]. \tag{8.48}$$

Используя выражения (8.46) и (8.48), получаем после преобразований:

$$\sigma_1 = \frac{p_0 R}{2\delta}\left[1 \mp \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{1-\mu^2}}\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\psi(\alpha x)\right]; \tag{8.49}$$

$$\sigma_2 = \frac{p_0 R}{2\delta}\left[1-\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\varphi(\alpha x) \mp \frac{\mu\sqrt{2}}{\sqrt{1-\mu^2}}\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\psi(\alpha x)\right], \tag{8.50}$$

где верхний знак относится к наружной поверхности цилиндра, а нижний — ко внутренней.

Найдем также координату x, в которой напряжение σ_1 достигает максимума. Имеем:

$$\frac{d\sigma_1}{d(\alpha x)} = \frac{p_0 R 2\sqrt{3}}{2\delta\sqrt{1-\mu^2}}\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\psi'(\alpha x) = 0, \tag{8.51}$$

или:

$$\psi'(\alpha x) = -2e^{-\alpha x}\cos(\alpha x) = 0, \tag{8.52}$$

откуда $\cos\alpha x = 0$ и $\alpha x = \frac{\pi}{2}$. Аналогично для σ_2 получаем следующее уравнение:

$$-\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\varphi'(\alpha x) \mp \frac{\mu\sqrt{3}}{\sqrt{1-\mu^2}}\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\psi'(\alpha x) = 0, \tag{8.53}$$

решив которое найдем координату αx, в которой возникают максимальные тангенциальные напряжения. Однако краевые напряжения принимают наибольшие по абсолютной величине значения при $\alpha x = 0$. Причем их величина значительно превышает напряжения, определенные по безмоментной теории. При $\alpha x = 0$ функции $\psi(0) = \varphi(0) = 1$, поэтому, полагая $\mu = 0{,}3$, получаем:

$$\sigma_1 = \frac{p_0 R}{2\delta}(1 \mp 3{,}09); \quad \sigma_2 = \frac{p_0 R}{\delta}(0{,}15 \mp 0{,}461). \tag{8.54}$$

На внутренней поверхности оболочки напряжения равны соответственно $\sigma_1 = 2{,}05\dfrac{p_0 R}{\delta}$ и $\sigma_2 = 0{,}61\dfrac{p_0 R}{\delta}$, т. е. меридиональные напряжения более чем в три раза больше тангенциальных.

На рис. 8.10 приведены эпюры меридиональных и тангенциальных напряжений в зоне жесткой заделки цилиндрической оболочки, нагруженной внутренним давлением. Напряжения отнесены к соответствующим безмоментным напряжениям, поэтому на них хорошо видна область краевого эффекта и возрастание абсолютного значения напряжений в заделке оболочки.

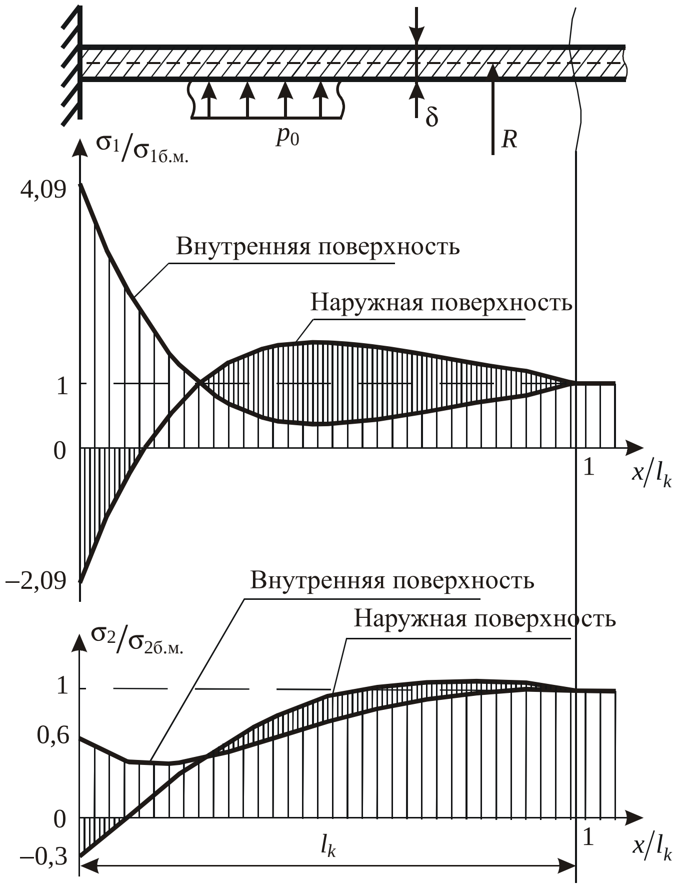


Рис. 8.10. Безразмерные краевые напряжения в области жесткой заделки цилиндра

8.6. Температурные напряжения в области продольного скачка температур

Примером скачкообразного изменения температуры вдоль образующей цилиндра может служить цилиндрический бак, заполненный жидкостью (рис. 8.11).

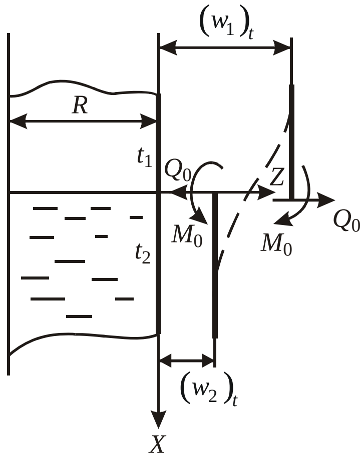


Рис. 8.11. Краевые усилия в области продольного скачка температур на цилиндре

Пусть на части бака, где жидкость отсутствует, температура стенки t_1, а ниже, где есть жидкость, — t_2. Сделаем следующие допущения:

1. Материал бака однородный.
2. Температура по толщине бака постоянна и изменяется скачком на свободной поверхности жидкости.
3. Толщина стенки в месте скачка температур постоянна.

Для определенности будем считать, что $t_1 > t_2$. Тогда перемещение в направлении нормали к цилиндру у верхней его части должно быть больше, чем у нижней. Разность этих перемещений компенсируется в плоскости свободной поверхности жидкости краевой перерезывающей силой и моментом. На рис. 8.11 пунктиром указана форма образующей цилиндра, которую она принимает вблизи рассматриваемой области.

Краевую силу Q_0 и момент M_0 определим из условия равенства перемещений и углов поворота верхнего и нижнего цилиндров в плоскости их стыка:

$$(w_1)_{Q_1} + (w_1)_{M_0} + (w_1)_t = (w_2)_{Q_0} + (w_2)_{M_0} + (w_2)_t; \tag{8.55}$$

$$\left(\vartheta_1\right)_{Q_0} + \left(\vartheta_1\right)_{M_0} + \left(\vartheta_1\right)_t = \left(\vartheta_2\right)_{Q_0} + \left(\vartheta_2\right)_{M_0} + \left(\vartheta_2\right)_t, \tag{8.56}$$

В рассматриваемом случае $\left(\vartheta_1\right)_t = \left(\vartheta_2\right)_t = 0$, т. к. при нагревании свободного цилиндра его торец не поворачивается. Кроме того, при выбранном направлении оси Z — нормали к срединной поверхности цилиндра — температурные перемещения равны соответственно:

$$\left(w_1\right)_t = \beta t_1 R; \quad \left(w_2\right)_t = \beta t_2 R, \tag{8.57}$$

где β — коэффициент линейного расширения материала, из которого изготовлен цилиндр. Кроме того:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(w_1\right)_{Q_0} = \frac{1}{2\alpha^3 D} Q_0; \quad \left(w_1\right)_{M_0} = -\frac{1}{2\alpha^2 D} M_0; \\
&\left(\vartheta_1\right)_{Q_0} = \frac{1}{2\alpha^2 D} Q_0; \quad \left(\vartheta_1\right)_{M_0} = -\frac{1}{\alpha D} M_0; \\
&\left(w_2\right)_{Q_0} = -\frac{1}{2\alpha^3 D} Q_0; \quad \left(w_2\right)_{M_0} = -\frac{1}{2\alpha^2 D} M_0; \\
&\left(\vartheta_2\right)_{Q_0} = \frac{1}{2\alpha^2 D} Q_0; \quad \left(\vartheta_2\right)_{M_0} = \frac{1}{\alpha D} M_0,
\end{aligned}\right\} \tag{8.58}$$

где положительными считаются углы, отсчитываемые против часовой стрелки. Подставим выражения (8.57) и (8.58) в условия (8.55) и (8.56):

$$\frac{1}{2\alpha^3 D} Q_0 - \frac{1}{2\alpha^2 D} M_0 + \beta t_1 R = -\frac{1}{2\alpha^3 D} Q_0 - \frac{1}{2\alpha^2 D} M_0 + \beta t_2 R;$$

$$\frac{1}{2\alpha^2 D} Q_0 - \frac{1}{\alpha D} M_0 = \frac{1}{2\alpha^2 D} Q_0 + \frac{1}{\alpha D} M_0$$

и получим:

$$Q_0 = \alpha^3 D \beta \left(t_2 - t_1\right); \tag{8.59}$$

$$M_0 = 0. \tag{8.60}$$

Теперь найдем выражения для напряжений. Для наружной и внутренней поверхностей цилиндра напряжения записываются в обычной форме:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{\delta} \pm \frac{6M_1}{\delta^2}; \tag{8.61}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{\delta} \pm \mu \frac{6M_1}{\delta^2}. \tag{8.62}$$

Если бак наддут давлением p_H, то $N_1 = \frac{p_H R}{2}$. Но здесь же для простоты положим, что $N_1 = 0$. В рассматриваемом случае исходное уравнение четвертого порядка отличается от полученного ранее (8.15) тем, что в правой части его появится слагаемое, учитывающее нагрев оболочки, и тогда:

$$T(x)=\frac{1}{D}\left(p_H-\frac{\mu N_1}{R}\right)+4\alpha^4\beta Rt\,, \tag{8.63}$$

т. к. теперь тангенциальное погонное усилие равно:

$$N_2=\frac{E\delta w}{R}+\mu N_1-E\delta\beta t\,. \tag{8.64}$$

Частное решение неоднородного уравнения, определяемое видом правой части (8.63) при $p_H=0$; $N_1=0$, имеет вид: $w_r=\beta Rt$, а полное перемещение оболочки равно:

$$w=w_0+w_r=-\frac{1}{2\alpha^3 D}\left[\alpha M_0\psi(\alpha x)+Q_0\theta(\alpha x)\right]+\beta Rt\,. \tag{8.65}$$

Подставляя (8.65) в (8.64) и используя (8.59) и (8.60), после преобразований получаем:

$$N_2=-\frac{1}{2}E\delta\beta(t_1-t_2)\theta(\alpha x)\,.$$

Так как $M_1=-D\dfrac{d^2w}{dx^2}$, а:

$$w_0''=-\frac{1}{\alpha D}\left[\alpha M_0\varphi(\alpha x)+Q_0\zeta(\alpha x)\right],$$

то выражение для погонного краевого момента после преобразований принимает вид:

$$M_1=\frac{\beta(t_2-t_1)}{4\sqrt{3(1-\mu^2)}}E\delta^2\zeta(\alpha x)\,.$$

Подставляя N_1, N_2 и M_1 в (8.61) и (8.62), получаем следующие выражения для напряжений:

$$\sigma_1=\pm\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{1-\mu^2}}E\beta(t_2-t_1)\zeta(\alpha x)\,; \tag{8.66}$$

$$\sigma_2=\frac{1}{2}E\beta(t_1-t_2)\left[\theta(\alpha x)\pm\frac{\mu\sqrt{3}}{\sqrt{1-\mu^2}}\zeta(\alpha x)\right], \tag{8.67}$$

где верхний знак относится к наружной поверхности цилиндра, а нижний — ко внутренней. Если бак наддут внутренним давлением, то выражения для напряжений несколько изменятся, т. к. появится меридиональное погонное усилие N_1, а в (8.65) для перемещения в направлении нормали к срединной поверхности появится дополнительное слагаемое, соответствующее частному решению исходного дифференциального уравнения.

8.7. Краевой эффект в области плоского днища

Рассмотрим случай, когда толщина плоского днища соизмерима с толщиной цилиндра так, что оно, как и оболочка, получает деформации и не может считаться абсолютно жестким. В последнем случае напряжения в цилиндре можно определить по формулам, соответствующим жесткой заделке края оболочки, которые приведены в *разд. 8.5*.

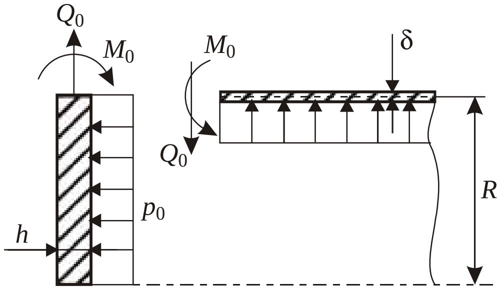


Рис. 8.12. Краевые усилия в области соединения плоского днища с цилиндром

На рис. 8.12 приведена схема нагружения оболочки и днища краевой перерезывающей силой Q_0, моментом M_0 и давлением p_0. Условия совместности перемещений и углов поворота днища и цилиндра в плоскости стыка в этом случае имеют вид:

$$\left(w_ц\right)_p + \left(w_ц\right)_{Q_0} + \left(w_ц\right)_{M_0} = w_д\,; \tag{8.68}$$

$$\left(\vartheta_ц\right)_{Q_0} + \left(\vartheta_ц\right)_{M_0} = \vartheta_д\,, \tag{8.69}$$

где:

$$\left(w_ц\right)_p = \frac{p_0 R^2}{E\delta}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right); \quad \left(w_ц\right)_{Q_0} = -\frac{1}{2\alpha^3 D} Q_0; \quad \left(w_ц\right)_{M_0} = -\frac{1}{2\alpha^2 D} M_0;$$

$$\left(\vartheta_{ц}\right)_{Q_0} = \frac{1}{2\alpha^2 D} Q_0; \quad \left(\vartheta_{ц}\right)_{M_0} = \frac{1}{\alpha D} M_0 .$$

Пренебрегая радиальной деформацией днища, т. е. полагая $w_{д} = 0$, угол поворота его края $\vartheta_{д}$ определим по формуле круглой пластинки, нагруженной давлением и краевым погонным моментом. Дифференцируя выражения для перемещений пластинки (5.83) и (5.92), а затем записывая их для контура пластинки и складывая, получаем:

$$\vartheta_{д} = -\frac{R}{D_1(1+\mu)} \left(\frac{p_0 R^2}{8} + M_0 \right), \tag{8.70}$$

где $D_1 = \dfrac{Eh^3}{12\left(1-\mu^2\right)}$ — цилиндрическая жесткость днища.

После подстановки приведенных соотношений для перемещений и углов поворота в условия (8.68), (8.69) получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{p_0 R^2}{E\delta}\left(1-\frac{\mu}{2}\right) - \frac{1}{2\alpha^3 D} Q_0 - \frac{1}{2\alpha^2 D} M_0 = 0;$$

$$\frac{1}{2\alpha^2 D} Q_0 + \frac{1}{\alpha D} M_0 = -\frac{R}{D_1(1+\mu)} \left(\frac{p_0 R^2}{8} + M_0 \right),$$

из которой находим краевую силу Q_0 и момент M_0:

$$Q_0 = -\alpha M_0 + \frac{p_0 R \delta \alpha}{2\sqrt{3\left(1-\mu^2\right)}} \left(1-\frac{\mu}{2}\right); \tag{8.71}$$

$$M_0 = -\frac{p_0 R^2 D \left[\dfrac{R}{8 D_1 (1+\mu)} + \dfrac{\alpha}{E\delta}\left(1-\dfrac{\mu}{2}\right) \right]}{\dfrac{1}{2\alpha} + \dfrac{RD}{D_1(1+\mu)}} . \tag{8.72}$$

Знак минус у момента показывает, что его необходимо было направить в противоположную сторону. При абсолютно жестком днище, когда $D_1 \to \infty$, вместо формул (8.71), (8.72) справедливы формулы (8.42), относящиеся к жесткой заделке края оболочки. Расчеты показывают, что учет податливости днища увеличивает значение краевого момента M_0 и, следовательно, значений краевых напряжений в этой области.

После подстановки в (8.71) и (8.72) выражений для коэффициента затухания α, жесткостей D, D_1 и преобразований получим:

$$M_0 = -\frac{1-\frac{\mu}{2}}{2\sqrt{3\left(1-\mu^2\right)}} p_0 R\delta\beta; \quad Q_0 = -\alpha M_0 \frac{1+\beta}{\beta},$$

где:

$$\beta = \frac{1+\dfrac{\sqrt[4]{\left[3\left(1-\mu^2\right)\right]^3}}{2(1+\mu)(1-\mu/2)}\left(\dfrac{\delta}{h}\right)^3\left(\dfrac{R}{\delta}\right)^{3/2}}{1+2\left(\dfrac{\delta}{h}\right)^3\sqrt{\dfrac{R}{\delta}}}.$$

При $\mu = 0{,}3$ имеем:

$$M_0 = -0{,}257\, p_0 R\delta\beta; \quad \beta = \frac{1+0{,}96\left(\dfrac{\delta}{h}\right)^3\left(\dfrac{R}{\delta}\right)^{3/2}}{1+2\left(\dfrac{\delta}{h}\right)^3\sqrt{\dfrac{R}{\delta}}}.$$

Теперь напряжения в цилиндре определим по обычным формулам:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{\delta} \pm \frac{6M_1}{\delta^2};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{\delta} \pm \mu\frac{6M_1}{\delta^2},$$

в которые необходимо подставить:

$$N_1 = \frac{p_0 R}{2}; \tag{8.73}$$

$$M_1 = -0{,}257\, p_0 R\delta\beta\left(\varphi(\alpha x) - \frac{1+\beta}{\beta}\zeta(\alpha x)\right); \tag{8.74}$$

$$N_2 = p_0 R\left[1+0{,}85\beta\left(\psi(\alpha x) - \frac{1+\beta}{\beta}\theta(\alpha x)\right)\right]. \tag{8.75}$$

Тогда выражения для напряжений можно записать в следующем виде:

$$\sigma_1 = \frac{p_0 R}{2\delta}\left[1 \mp 3{,}084\beta\left(\varphi(\alpha x) - \frac{1+\beta}{\beta}\zeta(\alpha x)\right)\right]; \tag{8.76}$$

$$\sigma_2 = \frac{p_0 R}{\delta}\left[1 + 0{,}85\beta\left(\varphi(\alpha x) - \frac{1+\beta}{\beta}\theta(\alpha x)\right) \mp \right.$$
$$\left. \mp 0{,}463\beta\left(\varphi(\alpha x) - \frac{1+\beta}{\beta}\zeta(\alpha x)\right)\right]. \tag{8.77}$$

На рис. 8.13 построены эпюры безразмерных напряжений в краевой зоне цилиндра с плоским днищем, который нагружен внутренним давлением.

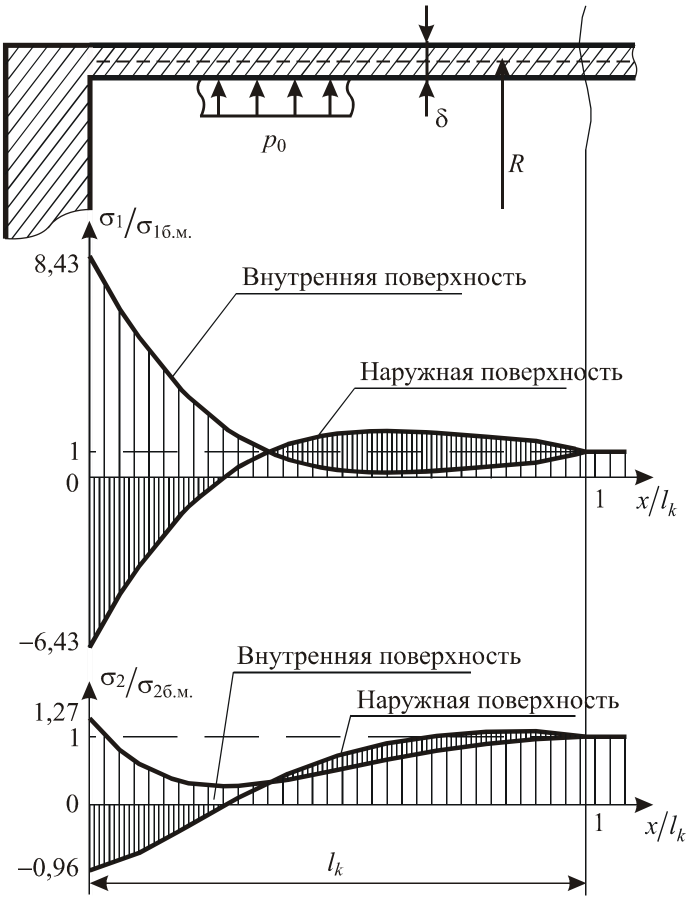


Рис. 8.13. Краевые напряжения в цилиндре около плоского днища

При $h \to \infty$ и $\beta \to 1$ плоское днище вырождается в жесткую заделку, а полученные формулы для напряжений совпадают с формулами (8.49) и (8.50), а при $x = 0$ с формулами (8.54). Из сравнения эпюр на рис. 8.10 и рис. 8.13

можно видеть, что снижение жесткости днища приводит к значительному увеличению краевых напряжений в соединении цилиндра с днищем.

Что касается самого днища, представляющего собой круглую пластинку, то погонный радиальный изгибающий момент в пластинке на произвольном расстоянии от ее центра можно определить по формуле (5.84), в которую нужно добавить краевой момент, и поэтому она перепишется в следующем виде:

$$M_r = \frac{p_0}{16D_1}(3+\mu)\left(R^2 - r^2\right) + M_0 .$$

Тогда радиальное напряжение на наружной и внутренней поверхностях днища равно $\sigma_r = \frac{6M_r}{h^2}$, причем наибольшие напряжения возникают в центре днища, когда радиальное расстояние $r = 0$.

8.8. Напряжения в области соединения оболочки с фланцем

На рис. 8.14, *а* приведена конструкция фланцевого соединения цилиндрической и полусферической оболочек. Из-за разной жесткости фланцев и оболочек в области соединения цилиндра с фланцем возникает краевая зона с изгибными напряжениями.

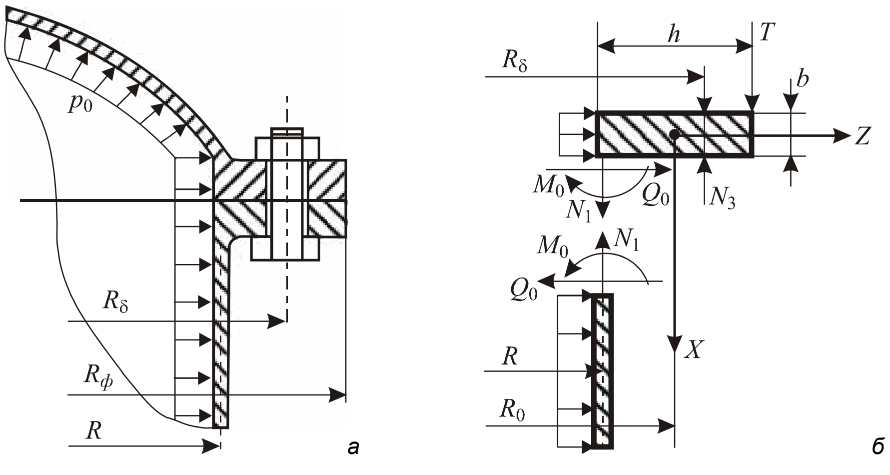


Рис. 8.14. Краевые усилия во фланцевом соединении

Отделим верхнюю оболочку от нижней по фланцевому соединению, а действие отброшенной части на выделенную заменим погонной силой T (рис. 8.14, *б*), которую определим из условия равновесия нижней оболочки:

$$2\pi R N_1 + 2\pi R_ф T = 2\pi R_\delta N_3, \tag{8.78}$$

где R_δ — радиус окружности, на которой установлены болты; N_3 — погонное усилие предварительной затяжки болтов. Из (8.78) имеем:

$$T = \frac{R_\delta N_3 - R N_1}{R_ф}.$$

Для рассматриваемого случая нагружения погонная сила $N_1 = \dfrac{p_0 R}{2}$, а усилие затяжки болтов равно:

$$N_3 = k N_1, \tag{8.79}$$

где коэффициент k на основании имеющихся в литературе данных можно принять равным 2,8. Тогда:

$$T = \left(\frac{k R_\delta - R}{R_ф}\right)\frac{p_0 R}{2}. \tag{8.80}$$

Для определения краевой перерезывающей Q_0 силы и момента M_0 отделим фланец от оболочки и составим условие совместности их перемещений и углов поворота. При этом будем считать, что по сравнению с оболочкой фланец настолько жесткий, что он только проворачивается вокруг своего центра масс, не изменяя формы сечения и не растягиваясь в тангенциальном направлении.

Условие совместности перемещений и углов поворота цилиндрической оболочки и фланца записываются следующим образом:

$$\left(w_ц\right)_{Q_0} + \left(w_ц\right)_{M_0} + \left(w_ц\right)_{p_0} = 0; \tag{8.81}$$

$$\left(\vartheta_ц\right)_{Q_0} + \left(\vartheta_ц\right)_{M_0} + \left(\vartheta_ц\right)_{p_0} = \vartheta_k, \tag{8.82}$$

где:

$$\left(w_ц\right)_{Q_0} = -\frac{1}{2\alpha^3 D} Q_0; \quad \left(w_ц\right)_{M_0} = -\frac{1}{2\alpha^2 D} M_0; \quad \left(w_ц\right)_{p_0} = \frac{p_0 R^2}{E\delta}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right);$$

$$\left(\vartheta_ц\right)_{Q_0} = \frac{1}{2\alpha^2 D} Q_0; \quad \left(\vartheta_ц\right)_{M_0} = \frac{1}{\alpha D} M_0; \quad \left(\vartheta_ц\right)_{p_0} = 0.$$

Здесь в качестве положительного направления для перемещений принято направление внешней нормали к оболочке, а для углов поворота фланца — вращение против часовой стрелки. Угол поворота фланца-кольца определим по следующей формуле [8.6]:

$$\vartheta_k = \frac{12 M_K R_0}{E b^3 \ln\left(\dfrac{R_\phi}{R}\right)}, \tag{8.83}$$

где b — ширина фланца; R_0 — радиус центра масс сечения фланца.

Погонный крутящий момент, действующий вокруг центра масс сечения при выбранном положительном направлении углов поворота, должен быть направлен против часовой стрелки и должен определяться по формуле:

$$M_k = N_1 \frac{h}{2} + N_3 \left(R_\delta - R_0\right) - M_0 - T\left(R_\phi - R_0\right) + Q_0 \frac{b}{2},$$

или с учетом формул (8.79) и (8.80):

$$M_k = a N_1 + Q_0 \frac{b}{2} - M_0, \tag{8.84}$$

где:

$$a = \frac{h}{2} + k\left(R_\delta - R_0\right) - \frac{k R_\delta - R_0}{R_\phi}\left(R_\phi - R_0\right).$$

Подставляя записанные выражения для перемещений и углов поворота в условия (8.81) и (8.82), получаем систему уравнений для определения Q_0 и M_0. Решая ее, получаем при $\mu = 0{,}3$:

$$M_0 = p_0 R \delta \beta; \quad Q_0 = \alpha M_0 \frac{(0{,}257 - \beta)}{\beta},$$

где:

$$\beta = \frac{k_1 (a/\delta) - 0{,}257 k_2}{2 + k_1 - k_2};$$

$$k_1 = 2{,}825 \frac{R_0}{R}\left(\frac{\delta}{b}\right)^3 \sqrt{\frac{R}{\delta}} \frac{1}{\ln\left(R_\phi / R\right)};$$

$$k_2 = 1 - 1{,}82 \frac{R_0}{R}\left(\frac{\delta}{b}\right)^2 \frac{1}{\ln\left(R_\phi / R\right)}.$$

Подставляя полученные выражения для Q_0 и M_0 в формулу для перемещений в (8.24), имеем:

$$w_0 = -\frac{p_0 R\delta\beta}{2\alpha^2 D}\left(\psi(\alpha x) + \frac{0,257-\beta}{\beta}\theta(\alpha x)\right).$$

Тогда тангенциальное погонное усилие равно:

$$N_2 = \frac{E\delta w}{R} + \mu\frac{p_0 R}{2} = p_0 R\left[1 - 3,3\beta\psi(\alpha x) + \frac{0,257-\beta}{\beta}\theta(\alpha x)\right].$$

Напряжения в оболочке определяются по формулам (8.33), в которые нужно подставить выражения для N_1, N_2 и M_1. После преобразований получим следующие выражения для расчета суммарных напряжений в краевой зоне цилиндра, соединенного с фланцем:

$$\sigma_1 = \frac{p_0 R}{2\delta}\left[1 \pm 12\beta\left(\varphi(\alpha x) + \frac{0,257-\beta}{\beta}\zeta(\alpha x)\right)\right]; \tag{8.85}$$

$$\begin{gathered}\sigma_2 = \frac{p_0 R}{\delta}\left[1 - 3,3\beta\left(\psi(\alpha x) + \frac{0,257-\beta}{\beta}\theta(\alpha x)\right) \pm\right. \\ \left.\pm 1,8\beta\left(\varphi(\alpha x) + \frac{0,257-\beta}{\beta}\zeta(\alpha x)\right)\right].\end{gathered} \tag{8.86}$$

Наибольшие по абсолютной величине напряжения возникают в том сечении, где фланец соединяется с цилиндром. Причем при увеличении жесткости фланца напряжения уменьшаются и стремятся к напряжениям в жесткой заделке цилиндра при $\beta = -0,257$. На рис. 8.15 построены эпюры безразмерных меридиональных и тангенциальных напряжений, возникающих в краевой зоне на цилиндре, в области фланцевого соединения.

Что касается самого фланца, то под действием погонного крутящего момента M_k он изгибается вокруг оси Z (см. рис. 8.14), а напряжения равны [8.6]:

$$\sigma_k = \frac{12 M_k R_0 x}{b^3 r \ln\left(R_ф / R\right)}.$$

Наибольшие напряжения возникают в углах фланца, где $r = R$; $x = \frac{b}{2}$, и равны:

$$\sigma_{max} = \pm\frac{6 M_k R_0}{b^2 R \ln\left(R_ф / R\right)}. \tag{8.87}$$

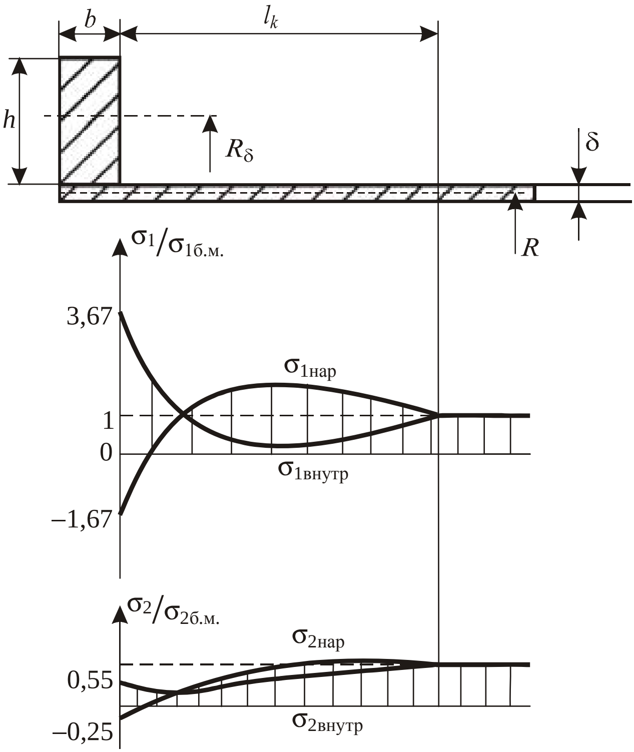


Рис. 8.15. Напряжения в краевой зоне цилиндра у фланцевого соединения

При малой высоте фланца h логарифм можно приближенно аппроксимировать так:

$$\ln\frac{R_ф}{R} = \ln\frac{(R_0 + h/2)}{(R_0 - h/2)} \approx \ln\left(1 + \frac{h}{R_0}\right) \approx \frac{h}{R_0},$$

и тогда $\sigma_{\max} = \pm\dfrac{6M_k R_0^2}{b^2 Rh}$, где верхний знак относится к углу фланца, обращенному к цилиндру.

8.9. Краевой эффект в области изменения толщины

Если цилиндрическая оболочка, нагруженная внутренним давлением, имеет утолщение, то вблизи скачка толщины возникает быстро затухающая область краевых напряжений, связанная с возникновением перерезывающей силы и момента (рис. 8.16).

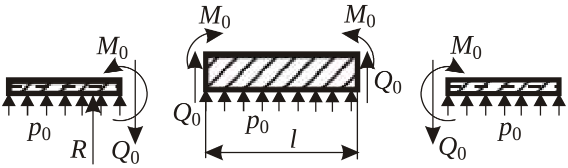


Рис. 8.16. Краевые усилия и моменты в области изменения толщины цилиндра

Утолщение цилиндра обычно используется на небольшой длине, поэтому участок необходимо рассматривать как короткую оболочку, нагруженную по краям перерезывающими силами и моментами. Так как толщина цилиндра слева и справа от утолщения одинакова, то краевые усилия по краям короткой оболочки будут совпадать, однако решение для перемещения $w(x)$ берется в общем виде (8.17) с четырьмя константами интегрирования. Для определения Q_0 и M_0 достаточно записать условие совместности перемещений и углов поворота на левом крае короткой оболочки:

$$\left(w_{ц}\right)_{p_0} + \left(w_{ц}\right)_{Q_0} + \left(w_{ц}\right)_{M_0} = \Delta_k ; \tag{8.88}$$

$$\left(\vartheta_{ц}\right)_{Q_0} + \left(\vartheta_{ц}\right)_{M_0} = \vartheta_k , \tag{8.89}$$

где в левой части стоят перемещение и угол поворота бесконечно длинной оболочки толщиной δ, а справа — величины, относящиеся к короткой оболочке толщиной δ_0. Положительные углы отсчитываются против часовой стрелки, а перемещения — от оси симметрии по направлению внешней нормали к оболочке.

Имеем следующие выражения для составляющих перемещений и углов поворота, входящих в условия (8.88) и (8.89):

$$\left(w_{ц}\right)_{p_0} = \frac{p_0 R^2}{E\delta}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right); \quad \left(w_{ц}\right)_{Q_0} = -\frac{1}{2\alpha^3 D} Q_0 ; \quad \left(w_{ц}\right)_{M_0} = \frac{1}{2\alpha^2 D} M_0 ;$$

$$\left(\vartheta_{ц}\right)_{Q_0} = -\frac{1}{2\alpha^2 D} Q_0 ; \quad \left(\vartheta_{ц}\right)_{M_0} = \frac{1}{\alpha D} M_0 ,$$

а для определения перемещения и угла поворота короткой оболочки воспользуемся решением, приведенным в [8.2]:

$$\Delta_k = \frac{1}{4\alpha_0^3 D_0 \left(V_3^2 - V_2 V_4\right)} \Big[\alpha_0 M_0 \left(4V_4^2 - (1 - V_1) V_3\right) + Q_0 \left(V_2 V_3 - (1 - V_1) V_4\right) +$$

$$+ \frac{p_0 R^2}{E\delta_0} (1 - \mu/2) \Big];$$

$$\vartheta_k = -\frac{1}{4\alpha_0^3 D_0 \left(V_3^2 - V_2 V_4\right)} \left[\alpha_0 M_0 \left(\left(1 - V_1\right) V_2 - 4 V_3 V_4\right) + Q_0 \left(\left(1 + V_1\right) V_3 - V_2^2\right)\right],$$

где $\alpha_0 = \dfrac{\sqrt[4]{3\left(1-\mu^2\right)}}{\sqrt{R\delta_0}}$ — коэффициент затухания короткой оболочки; $D_0 = \dfrac{E\delta_0^3}{12\left(1-\mu^2\right)}$ — ее цилиндрическая жесткость.

Функции А. Н. Крылова, вычисляемые на правом конце короткой оболочки, имеют следующий вид:

$$V_1 = \operatorname{ch}\left(\alpha_0 l\right) \cos\left(\alpha_0 l\right);$$

$$V_2 = \frac{1}{2}\left[\operatorname{ch}\left(\alpha_0 l\right) \sin\left(\alpha_0 l\right) + \operatorname{sh}\left(\alpha_0 l\right) \cos\left(\alpha_0 l\right)\right];$$

$$V_3 = \frac{1}{2} \operatorname{sh}\left(\alpha_0 l\right) \sin\left(\alpha_0 l\right);$$

$$V_3 = \frac{1}{4}\left[\operatorname{ch}\left(\alpha_0 l\right) \sin\left(\alpha_0 l\right) - \operatorname{sh}\left(\alpha_0 l\right) \cos\left(\alpha_0 l\right)\right],$$

где l — длина короткой оболочки.

После подстановки соответствующих выражений в условия (8.88) и (8.89) получим систему двух алгебраических уравнений, из которых определяются Q_0 и M_0.

Для длинных оболочек напряжения вычисляются так же, как и в рассмотренных ранее случаях, а расчет короткой оболочки проводится в том же порядке, что и длинной, но вместо N_2 и M_1 в формулы для напряжений необходимо подставить величины, полученные из решения для короткой оболочки.

Меридиональные напряжения в короткой оболочке равны $\sigma_1 = \dfrac{N_1}{\delta_0} \pm \dfrac{6M_1}{\delta_0^2}$,

где N_1 — меридиональное погонное усилие, определяемое из условия равновесия оболочки в осевом направлении (для сосуда, нагруженного только внутренним давлением, имеем $N_1 = \dfrac{p_0 R}{2}$); а $M_1\left(\alpha_0 x\right)$ — погонный изгибающий момент:

$$M_1\left(\alpha_0 x\right) = -\alpha_0^2 D_0 \left[4 A_1 V_3\left(\alpha_0 l\right) + 4 A_3 V_1\left(\alpha_0 x\right) - A_3 V_1\left(\alpha_0 x\right) - A_4 V_2\left(\alpha_0 x\right)\right],$$

где константы:

$$A_1=\frac{1}{4\alpha_0^2 D_0}\left(M_0 f_1(\alpha_0 l)+\frac{Q_0}{\alpha_0} f_3(\alpha_0 l)\right);$$

$$A_2=\frac{1}{4\alpha_0^2 D_0}\left(M_0 f_2(\alpha_0 l)+\frac{Q_0}{\alpha_0} f_4(\alpha_0 l)\right);$$

$$A_3=\frac{M_0}{\alpha_0^2 D_0}; \quad A_4=\frac{Q_0}{\alpha_0^3 D_0};$$

$$f_1(\alpha_0 l)=\frac{(1-V_1)V_3-4V_4^2}{V_3^2-V_2V_4};$$

$$f_2(\alpha_0 l)=\frac{(1-V_1)V_3-4V_3V_4}{V_3^2-V_2V_4};$$

$$f_3(\alpha_0 l)=\frac{(1-V_1)-V_3V_4}{V_3^2-V_2V_4};$$

$$f_4(\alpha_0 l)=\frac{V_2^2-(1+V_1)V_3}{V_3^2-V_2V_4}.$$

Тангенциальные напряжения в короткой оболочке равны:

$$\sigma_2=\frac{N_2}{\delta_0}\pm\mu\left(\frac{6M_1}{\delta^2}\right),$$

где $N_2=\dfrac{E\delta w}{R}+\mu N_1$ — тангенциальное погонное усилие.

Суммарное перемещение в короткой оболочке определяется как:

$$w(\alpha_0 x)=A_1V_1(\alpha_0 x)+A_2V_2(\alpha_0 x)+A_3V_3(\alpha_0 x)+A_4V_4(\alpha_0 x)+\frac{p_0R^2}{E\delta_0}\left(1-\frac{\mu}{2}\right).$$

Во всех приведенных соотношениях координата x в короткой оболочке отсчитывается от левого края к правому. Для длинных оболочек координата x отсчитывается от их края, причем для левой относительно утолщения — влево, а для правой — вправо.

Выводы

В этой главе были изучены следующие вопросы:

1. Преобразование уравнений теории оболочек к одному уравнению четвертого порядка для определения нормальных перемещений в цилиндре, нагруженном давлением.
2. Порядок расчета напряжений и деформаций в зонах изгиба цилиндрических оболочек, нагруженных внутренним давлением.
3. Исследовано влияние внешней нагрузки на характер напряжений в цилиндре и установлено, что постоянное и линейно изменяющееся вдоль образующей давление не приводит к изгибу оболочки.
4. Исследованы причины возникновения изгиба в зонах крепления краев оболочки и получена формула для определения длины зоны краевого эффекта.
5. Получены соотношения для расчета краевой погонной перерезывающей силы и изгибающего момента.
6. Изгибные напряжения в местах соединения цилиндра с днищами и шпангоутами.
7. Возникновение изгибных напряжений из-за продольного скачка температур на цилиндре и из-за изменения его толщины.

Упражнения и вопросы

1. Объясните, почему возникают изгибные напряжения в зоне соединения цилиндра с эллиптическим днищем в сосуде, нагруженном внутренним давлением.
2. Получите формулы для расчета краевых напряжений в цилиндре и полусферическом днище сосуда, нагруженного внутренним давлением.
3. Определите точку экстремума меридиональных напряжений на наружной поверхности цилиндра с жесткой заделкой краев.
4. Докажите, что на цилиндрической обечайке бака, заполненного жидкостью, внутреннее давление не создает изгибающий момент.
5. Определите длину зоны краевого эффекта в цилиндре с радиусом $R = 0{,}5$ м и толщиной стенки $\delta = 2 \cdot 10^{-3}$ м.
6. Постройте эпюры меридиональных и тангенциальных напряжений в области продольного скачка температур на цилиндре, если $t_1 = 80°$; $t_2 = 200°$; $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $\beta = 1{,}2 \cdot 10^{-4}$ 1/°С.

7. Исследуйте влияние жесткости плоского днища на значение краевых напряжений в соединении с цилиндром, изменяя значение коэффициента β. Определите нижнюю и верхнюю границу этого коэффициента. Соотношение толщин днища и цилиндра определять из соображений прочности.
8. Докажите, что при $\beta = -0{,}257$ напряжения в краевой зоне фланцевого соединения вычисляются по тем же формулам, что и в случае жесткой заделки цилиндрической оболочки.

Литература к главе 8

1. Бидерман В. Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика. — М.: Машиностроение, 1977, 488 с.
2. Бояршинов С. В. Основы строительной механики машин. — М.: Машиностроение, 1973, 456 с.
3. Канторович З. Б. Основы расчета химических машин и аппаратов. — М.: Машгиз, 1960, 744 с.
4. Погорелов В. И. Теория тонких оболочек в приложениях к расчету корпусов летательных аппаратов. Учебное пособие. — СПб.: БГТУ, 1990, 162 с.
5. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник, т. 1, 2, 3. — М.: Машиностроение, 1968.
6. Тимошенко С. П. Сопротивление материалов. т. 2. — М. Наука, 1965, 480 с.
7. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. — М.: ГИФМЛ, 1963, 635 с.

Глава 9

Краевой эффект в сферической оболочке

В этой главе изучаются краевые эффекты, возникающие в сферической оболочке. Выводятся уравнения краевого эффекта, которые используются для расчета изгибных напряжений в области жесткого и шарнирного закреплений краев сферической оболочки. Решается задача о краевом эффекте в зоне крепления сферического днища со шпангоутом и цилиндрической оболочкой. Рассматриваются краевые эффекты в области промежуточного сферического днища со шпангоутом внутри цилиндрической оболочки.

В этой главе будут рассмотрены следующие темы:

- уравнения теории оболочек в естественной системе координат;
- уравнение краевого эффекта;
- сфера, нагруженная на контуре перерезывающей силой и моментом;
- расчет напряжений в зоне краевого эффекта;
- сферическое днище с жестко заделанной кромкой;
- сферическое днище с шарнирно закрепленной кромкой;
- краевой эффект при наличии распорного шпангоута.

9.1. Исходные уравнения

Рассмотрим участок сферы, изображенный на рис. 9.1, с углом полураствора ϑ_0, нагруженный постоянным внутренним давлением p_0. Край оболочки нагружен погонной меридиональной и перерезывающей силами, а также моментом. Получим сначала уравнения, описывающие изгиб оболочки в области краевой зоны, воспользовавшись уравнениями теории тонких оболочек, полученными в *гл. 6*, которые запишем в естественной системе координат, связанной со срединной поверхностью.

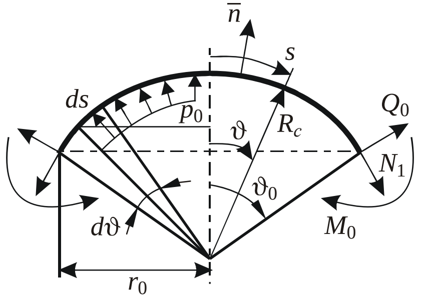


Рис. 9.1. Схема нагружения сферы краевыми усилиями и моментом

Для этой системы координат коэффициенты Ламе $h_1 = 1$ и $h_2 = r$, где $r = \dfrac{R_c}{\sin\vartheta}$ — радиус параллельного круга; R_c — радиус сферы; меридиональный угол ϑ измеряется от оси симметрии, а длина s отсчитывается от вершины сферы. С учетом того, что $\dfrac{dr}{ds} = \cos\vartheta$, а радиусы кривизны оболочки одинаковы и равны радиусу сферы R_c, исходные уравнения запишем в следующем виде:

1. Геометрические уравнения:

$$\varepsilon_1^0 = \frac{du_0}{ds} + \frac{w}{R_c}; \tag{9.1}$$

$$\varepsilon_2^0 = \frac{u_0}{r}\cos\vartheta + \frac{w_0}{R_c}; \tag{9.2}$$

$$\kappa_1 = \frac{d\vartheta_1}{ds}; \tag{9.3}$$

$$\kappa_2 = \frac{\cos\vartheta}{r}\vartheta_1. \tag{9.4}$$

Здесь ϑ_1 — угол поворота нормали к поверхности, а ϑ — угол между осью симметрии и радиусом сферы в рассматриваемой точке.

2. Уравнения равновесия:

$$\frac{1}{r}\left(\frac{dr_2N_1}{ds} - N_2\cos\vartheta\right) + \frac{Q_1}{R_c} = 0; \tag{9.5}$$

$$\frac{1}{r}\left(\frac{dQ_1r}{ds}\right) - \frac{N_1}{R_c} - \frac{N_2}{R_c} + p_0 = 0; \tag{9.6}$$

$$\frac{1}{r}\left(\frac{drM_1}{ds} - M_2\cos\vartheta\right) = Q_1. \tag{9.7}$$

3. Физические уравнения (однослойная изотропная оболочка):

$$N_1 = \frac{E\delta}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_1^0 - \mu\varepsilon_2^0\right); \tag{9.8}$$

$$N_2 = \frac{E\delta}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_2^0 - \mu\varepsilon_1^0\right); \tag{9.9}$$

$$M_1 = D\left(\kappa_1 + \mu\kappa_2\right); \tag{9.10}$$

$$M_2 = D\left(\kappa_2 + \mu\kappa_1\right). \tag{9.11}$$

Следуя Тимошенко С. П. [9.5], преобразуем приведенную систему уравнений относительно перерезывающей силы Q_1 и угла поворота нормали к срединной поверхности $\vartheta_1 = \frac{u_0}{R_c} - \frac{dw}{ds}$. Для этого сначала подставим выражения (9.3) и (9.4) для изменений кривизны в физические уравнения (9.10) и (9.11) для моментов, а затем подставим полученные выражения в уравнение равновесия моментов (9.7). После преобразований получим первое из искомых уравнений:

$$\frac{d^2\vartheta_1}{ds^2} + \frac{\cos\vartheta}{r}\frac{d\vartheta_1}{ds} - \frac{\vartheta_1}{r^2}\left(\cos^2\vartheta + \mu\sin^2\vartheta\right) = \frac{Q_1}{D}. \tag{9.12}$$

Для получения второго уравнения, связывающего перерезывающую силу и угол поворота нормали, выразим сначала погонные усилия N_1, N_2 через перерезывающую силу. Исключим N_2 из уравнений (9.5) и (9.6):

$$N_2 = \frac{1}{\cos\vartheta}\frac{drN_1}{ds} + Q_1\mathrm{tg}\vartheta = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{drQ_1}{ds} - N_1 + p_0R_c, \tag{9.13}$$

а затем умножим полученное равенство на $\cos\vartheta\sin\vartheta$:

$$\frac{drN_1}{ds}\sin\vartheta + N_1\cos\vartheta\sin\vartheta - \frac{drQ_1}{ds}\cos\vartheta + Q_1\sin^2\vartheta = p_0R_c\cos\vartheta\sin\vartheta.$$

Выполнив преобразования, получим:

$$\frac{drN_1\sin\vartheta}{ds} - \frac{drQ_1\cos\vartheta}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{p_0R_c^2\sin^2\vartheta}{2}\right).$$

После интегрирования находим выражение для меридионального погонного усилия:

$$N_1 = Q_1 \operatorname{ctg}\vartheta + \frac{p_0 R_c}{2}. \tag{9.14}$$

Тангенциальное погонное усилие получим из равенства (9.13), в которое подставим меридиональное погонное усилие из (9.14):

$$N_2 = \frac{r}{\sin\vartheta}\frac{dQ_1}{ds} + \frac{p_0 R_c}{2}. \tag{9.15}$$

Теперь свяжем эти усилия с углом поворота нормали, выразив их сначала через перемещения:

$$\varepsilon_1^0 = \frac{du_0}{ds} + \frac{w}{R_c} = \frac{1}{E\delta}\left(N_1 - \mu N_2\right); \tag{9.16}$$

$$\varepsilon_2^0 = \frac{u_0}{r}\cos\vartheta + \frac{w}{R_c} = \frac{1}{E\delta}\left(N_2 - \mu N_1\right), \tag{9.17}$$

а затем, вычитая, получим:

$$\frac{du_0}{ds} - \frac{u_0\cos\vartheta}{r} = \frac{1+\mu}{E\delta}\left(N_1 - N_2\right). \tag{9.18}$$

Дифференцируя (9.17), имеем:

$$\frac{du_0}{ds}\operatorname{ctg}\vartheta - \frac{u_0}{R_c\sin^2\vartheta} + \frac{dw}{ds} = \frac{R_c}{E\delta}\left(\frac{dN_2}{ds} - \mu\frac{dN_1}{ds}\right). \tag{9.19}$$

Исключая $\frac{du_0}{ds}$ из уравнений (9.18) и (9.19), находим:

$$\vartheta_1 = \frac{u_0}{R_c} - \frac{dw}{ds} = \frac{1}{E\delta}\left[\left(1+\mu\right)\left(N_1 - N_2\right)\operatorname{ctg}\vartheta - R_c\frac{dN_2}{ds} + \mu R_c\frac{dN_1}{ds}\right]. \tag{9.20}$$

Подставляя N_1 и N_2 из выражений (9.14), (9.15) в уравнение (9.20), получаем после преобразований:

$$R_c^2\frac{d^2Q_1}{ds^2} + R_c\frac{dQ_1}{ds}\operatorname{ctg}\vartheta - Q_1\left(\operatorname{ctg}^2\vartheta - \mu\right) = -E\delta\vartheta_1. \tag{9.21}$$

Уравнения (9.12) и (9.21) образуют систему из двух уравнений относительно неизвестных Q_1 и ϑ_1. Путем преобразований можно исключить Q_1 или ϑ_1 в этих уравнениях и прийти к одному уравнению типа Бесселя, которое решается с помощью разложения в ряд по функциям Бесселя. Однако опыт расчетов показал, что можно существенно упростить полученные уравнения и получить простые решения, которые вполне удовлетворяют требованиям практики.

9.2. Уравнение краевого эффекта

Упрощение уравнений (9.12) и (9.21) основано на том, что в них преобладающими являются члены со старшими производными. Чем больше угол полураствора днища и чем ближе угол ϑ_0 к $90°$, тем быстрее затухают изгибные деформации, и на небольшом расстоянии от края они уже практически полностью отсутствуют. Здесь возникает значительное окружное растяжение, и поэтому краевой эффект быстро затухает. В то же время, если оболочка пологая, когда $\vartheta_0 < 35°$, радиальные перемещения и соответствующие им окружные деформации растяжения около края малы, а деформации, вызванные изгибающим моментом, затухают медленно и распространяются на всю оболочку. По этой причине рассматриваемым методом можно пользоваться только тогда, когда угол $\vartheta_0 > 35°$. Пренебрегая тогда слагаемыми с ϑ_1 и $\dfrac{d\vartheta_1}{ds}$ в (9.12), а также Q_1 и $\dfrac{dQ_1}{ds}$ в (9.21), получим следующую систему уравнений:

$$\frac{d^2\vartheta_1}{ds^2} = \frac{Q_1}{D}; \tag{9.22}$$

$$\frac{d^2 Q_1}{ds^2} = -\frac{E\delta}{R_c^2}\vartheta_1 . \tag{9.23}$$

Исключая далее ϑ_1 в этих уравнениях, получаем следующее уравнение четвертого порядка:

$$\frac{d^4 Q_1}{ds^4} + \frac{E\delta}{R_c^2 D} Q_1 = 0 ,$$

или:

$$\frac{d^4 Q_1}{ds^4} + 4\beta^4 Q_1 = 0 , \tag{9.24}$$

где $\beta = \dfrac{\sqrt[4]{3\left(1-\mu^2\right)}}{\sqrt{R_c\delta}}$ — коэффициент затухания. Нетрудно видеть, что уравнение (9.24) имеет такой же вид, что и уравнение (8.15), полученное в *гл. 8*.

Решение уравнения (9.24) имеет вид:

$$Q_1 = e^{\beta s}\left(C_1\cos\beta s + C_2\sin\beta s\right) + e^{-\beta s}\left(C_3\cos\beta s + C_4\sin\beta s\right), \tag{9.25}$$

в котором C_1, C_2, C_3, C_4 — константы интегрирования.

Будем рассматривать сферу с непрерывной поверхностью и без отверстий, у которой влияние краевой зоны проявляется на расстоянии, меньшем, чем длина меридиана сферы. Тогда по мере удаления от вершины значение Q_1 должно быть возрастающим, а на вершине сферы равно нулю. Следовательно, из двух слагаемых в (9.24) можно ограничиться только возрастающим слагаемым и принять решение в виде:

$$Q_1 = e^{\beta s}\left(C_1\cos\beta s + C_2\sin\beta s\right). \tag{9.26}$$

Вычисляя производные от Q_1 по s, из (9.26) получаем после преобразований:

$$Q_1' = \beta e^{\beta s}\left[C_1\left(\cos\beta s - \sin\beta s\right) + C_2\left(\cos\beta s + \sin\beta s\right)\right]; \tag{9.27}$$

$$Q_1'' = -2\beta^2 e^{\beta s}\left(C_1\sin\beta s - C_2\cos\beta s\right); \tag{9.28}$$

$$Q_1''' = -2\beta^3 e^{\beta s}\left[C_1\left(\sin\beta s + \cos\beta s\right) - C_2\left(\cos\beta s - \sin\beta s\right)\right]. \tag{9.29}$$

Здесь важно отметить, что меридиональный угол ϑ и координата s отсчитываются от вершины сферы. Положительная перерезывающая сила Q_0 на контуре направлена по радиусу сферы от оси симметрии, как это указано на рис. 9.1, а положительный момент M_0 создает на наружной поверхности положительные напряжения. При решении практических задач удобнее выразить константы интегрирования через краевую перерезывающую силу Q_0 и момент M_0 в закреплении на контуре оболочки. Задача о нагружении сферы погонной перерезывающей силой и моментом имеет и самостоятельный практический интерес, поэтому рассмотрим ее отдельно.

9.3. Сфера, нагруженная на контуре перерезывающей силой и моментом

В этом случае краевые условия задаются при $s = l$, где l — длина меридиана сферы от вершины до ее кромки. Угол поворота нормали вычисляется из формулы (9.23):

$$\vartheta_1 = -\frac{R_c^2}{E\delta}\frac{d^2 Q_1}{ds^2}, \tag{9.30}$$

а изгибающий момент с помощью формул (9.10), (9.3) и (9.4) можно записать так:

$$M_1 = D\left(\frac{d\vartheta_1}{ds} + \mu\frac{\cos\vartheta}{r}\vartheta_1\right).$$

Но в записанном выражении второе слагаемое в скобках значительно меньше первого, поэтому изгибающий момент будем вычислять по формуле:

$$M_1 = D\frac{d\vartheta_1}{ds} = -\frac{R_c^2 D}{E\delta}\frac{d^3 Q_1}{ds^3}. \qquad (9.31)$$

Теперь граничные условия на кромке сферы при $s = l$ можно записать так:

$$Q_0 = e^{\beta l}(C_1\cos\beta l + C_2\sin\beta l);$$

$$M_0 = \frac{R_c^2 D}{E\delta}2\beta^3 e^{\beta l}\left[C_1(\sin\beta l + \cos\beta l) - C_2(\cos\beta l - \sin\beta l)\right].$$

Считая Q_0 и M_0 известными, находим константы C_1 и C_2 из полученной системы уравнений:

$$C_1 = \frac{1}{a^2}\left(Q_0\psi(\beta l) + 2\beta M_0\zeta(\beta l)\right); \quad C_2 = \frac{1}{a^2}\left(Q_0\varphi(\beta l) - 2\beta M_0\theta(\beta l)\right),$$

где введено обозначение $a = e^{\beta l}$. Подставляя константы в выражения для перерезывающей силы и ее производных в (9.26)—(9.29), после преобразований имеем:

$$Q_1 = Q_0\psi(\beta\eta) + 2\beta M_0\zeta(\beta\eta); \qquad (9.32)$$

$$Q_1' = 2\beta\left[Q_0\theta(\beta\eta) - \beta M_0\psi(\beta\eta)\right]; \qquad (9.33)$$

$$Q_1'' = 2\beta^2\left[Q_0\varphi(\beta\eta) - 2\beta M_0\theta(\beta\eta)\right]; \qquad (9.34)$$

$$Q_1''' = 4\beta^3\left[Q_0\zeta(\beta\eta) - \beta M_0\varphi(\beta\eta)\right], \qquad (9.35)$$

где аргумент в балочных функциях равен $\beta\eta = \beta(l - s)$, а сама таблица этих функций была приведена ранее в *гл.* 8 (см. табл. 8.1).

Подставляя (9.32) в (9.14), в котором опущено слагаемое с давлением, получаем следующее выражение для меридионального усилия:

$$N_1 = Q_1\mathrm{ctg}\vartheta = \left[Q_0\psi(\beta\eta) + 2\beta M_0\zeta(\beta\eta)\right]\mathrm{ctg}\vartheta. \qquad (9.36)$$

Аналогично из (9.15) с помощью (9.33) для тангенциального усилия имеем:

$$N_2 = \frac{r}{\sin\vartheta}\frac{dQ_1}{ds} = R_c Q_1' = 2\beta R_c\left[Q_0\theta(\beta\eta) - \beta M_0\psi(\beta\eta)\right]. \qquad (9.37)$$

Изгибающие моменты с помощью (9.31) и (9.35), (9.11) и (9.3), (9.4) с учетом малости слагаемых относительно старшей производной, записываются так:

$$M_1 = -\frac{R_c^2 D}{E\delta}\frac{d^3 Q_1}{ds^3} = M_0 \varphi(\beta\eta) - \frac{Q_0}{\beta}\zeta(\beta\eta)\,; \quad M_2 = \mu M_1 . \tag{9.38}$$

Угол поворота нормали к срединной поверхности с помощью (9.30) и (9.34) можно определить из следующего соотношения:

$$\vartheta_1 = -\frac{R_c^2}{E\delta}\frac{d^2 Q_1}{ds^2} = -\frac{2R_c^2\beta^2}{E\delta}\left[Q_0\varphi(\beta\eta) - 2\beta M_0\theta(\beta\eta)\right]. \tag{9.39}$$

Получим также формулу для расчета перемещения края оболочки H в направлении, перпендикулярном оси симметрии. Положительные направления векторов меридионального u_0 и нормального w перемещений показаны на рис. 9.2, а их проекция на радиус параллельного круга определяется так:

$$H = u_0 \cos\vartheta + w \sin\vartheta .$$

Но из геометрического уравнения (9.2) можно получить, что:

$$H = u_0 \cos\vartheta + w \sin\vartheta = \varepsilon_2 r ,$$

или после подстановки относительной деформации ε_2^0 из физических уравнений имеем:

$$H = \frac{R_c \sin\vartheta}{E\delta}\left(N_2 - \mu N_1\right).$$

Подставляя сюда выражения для погонных усилий N_1 и N_2 из (9.36), (9.37), получаем:

$$H = \frac{R_c \sin\vartheta}{E\delta}\left[Q_0\left(2\beta R_c\theta(\beta\eta) - \mu\psi(\beta\eta)\right) - \beta M_0\left(2\beta R_c\psi(\beta\eta) + 2\mu\zeta(\beta\eta)\right)\right]. \tag{9.40}$$

Найдем еще распорную силу, возникающую в зоне краевого эффекта, которая перпендикулярна оси симметрии. Ее положительное направление соответствует направлению от оси симметрии. Имеем (рис. 9.2):

$$Q_H = Q_1 \sin\vartheta + N_1 \cos\vartheta ,$$

но из уравнения равновесия (9.14) для рассматриваемого случая получаем (отсутствует внутреннее давление) $N_1 = Q_1 \mathrm{ctg}\vartheta$, поэтому:

$$Q_H = Q_1 \sin\vartheta + Q_1 \mathrm{ctg}\vartheta \cos\vartheta = \frac{Q_1}{\sin\vartheta} . \tag{9.41}$$

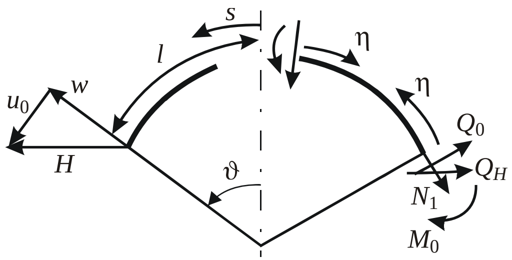


Рис. 9.2. Перемещения и усилия
в зоне краевого эффекта сферической оболочки

Отсюда перерезывающая сила, выраженная через распорную силу, равна:

$$Q_1 = Q_H \sin\vartheta, \tag{9.42}$$

причем они совпадают по знаку, т. к. $\sin\vartheta$ всегда положительный.

Полученные выражения можно упростить, если воспользоваться тем, что для тонкой оболочки отношение ее толщины к радиусу $\dfrac{\delta}{R_c}$ значительно меньше единицы, т. е. велико их обратное отношение. Тогда значительно больше единицы будет и произведение βR_c, т. к.:

$$\beta R_c = \frac{\sqrt[4]{3\left(1-\mu^2\right)}}{\sqrt{R_c\delta}} R_c = \sqrt[4]{3\left(1-\mu^2\right)}\sqrt{\frac{R_c}{\delta}}\ .$$

Поэтому существенными будут только те слагаемые, которые содержат произведение βR_c. Оставляя только слагаемые с βR_c в полученных выражениях, имеем окончательно следующие расчетные соотношения для оболочки, нагруженной по краю перерезывающей силой и моментом:

$$N_1 = 0; \tag{9.43}$$

$$N_2 = 2\beta R_c\left[Q_0\theta(\beta\eta) - \beta M_0\psi(\beta\eta)\right]; \tag{9.44}$$

$$M_1 = M_0\varphi(\beta\eta) - \frac{Q_0}{\beta}\zeta(\beta\eta); \tag{9.45}$$

$$M_2 = \mu M_1; \tag{9.46}$$

$$\vartheta_1 = -\frac{2R_c^2\beta^2}{E\delta}\left[Q_0\varphi(\beta\eta) - 2\beta M_0\theta(\beta\eta)\right]; \tag{9.47}$$

$$H=\frac{2\beta R_c^2\sin\vartheta}{E\delta}Q_0\theta(\beta\eta)-\frac{2\beta^2 R_c^2\sin\vartheta}{E\delta}M_0\psi(\beta\eta);\tag{9.48}$$

$$Q_0=Q_H\sin\vartheta_0\,.\tag{9.49}$$

Формулы получены для расчета краевых эффектов на крае сферы с координатой s, отсчитываемой от ее вершины, причем величина $\eta=l-s$ и всегда отрицательная. В практических задачах координату удобнее отсчитывать от зоны краевого эффекта (в данном случае от края оболочки) в сторону его затухания. Соответствующие формулы получаются из выражений (9.43)—(9.48), если изменить знак перед слагаемыми с перерезывающей силой Q_0 на противоположный и считать также, что положительная перерезывающая сила направлена в этом случае к центру сферы. Схема отсчета координат от зоны краевых эффектов и положительные направления перерезывающих сил и моментов показаны на рис. 9.2. Для удобства использования полученных соотношений их полный список приводится в следующем разделе.

9.4. Расчет напряжений в зоне краевого эффекта

Обобщим полученные результаты и запишем необходимые соотношения для расчета перемещений, усилий и напряжений в том случае, когда сфера нагружена постоянным внутренним давлением и на ее кромке возникают краевые эффекты.

Далее считается, что координата η отсчитывается от края оболочки в сторону убывания краевого эффекта, т. е. так, как показано на рис. 9.2.

В этом случае в формулах (9.44)—(9.48) знак перед Q_0 следует заменить на противоположный и учесть влияние внутреннего давления при расчете погонных усилий N_1, N_2 и радиального перемещения H. Получаем:

$$N_1=\frac{p_0R_c}{2};\tag{9.50}$$

$$N_2=\frac{p_0R_c}{2}-2\beta R_c\left[Q_0\theta(\beta\eta)+\beta M_0\psi(\beta\eta)\right];\tag{9.51}$$

$$M_1=M_0\varphi(\beta\eta)+\frac{Q_0}{\beta}\zeta(\beta\eta);\tag{9.52}$$

$$M_2=\mu M_1;\tag{9.53}$$

$$\vartheta_1 = \frac{2R_c^2\beta^2}{E\delta}\left[Q_0\varphi(\beta\eta) + 2\beta M_0\theta(\beta\eta)\right]; \qquad (9.54)$$

$$Q_1 = Q_0\psi(\beta\eta) - 2\beta M_0\zeta(\beta\eta); \qquad (9.55)$$

$$Q_H = \frac{Q_1}{\sin\vartheta}; \qquad (9.56)$$

$$H = \frac{p_0R_c^2}{2E\delta}(1-\mu)\sin\vartheta - \frac{2\beta R_c^2\sin\vartheta}{E\delta}Q_0\theta(\beta\eta) - \frac{2\beta^2R_c^2\sin\vartheta}{E\delta}M_0\psi(\beta\eta). \qquad (9.57)$$

Особо обратим внимание на способ получения знаков в формуле (9.55). Так как при изменении положительного направления перерезывающей силы направление изгибающего момента не изменяется, то чтобы слагаемое с ним создавало положительную составляющую перерезывающей силы, необходимо знак перед ним поменять на противоположный.

Напряжения в оболочке в зоне краевого эффекта определяются по обычным формулам моментной теории оболочек и имеют вид:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{\delta} \pm \frac{6M_1}{\delta^2}; \quad \sigma_1 = \frac{N_2}{\delta} \pm \mu\frac{6M_1}{\delta^2}, \qquad (9.58)$$

где верхний знак относится к наружной поверхности сферы, а нижний — к внутренней.

9.5. Сферическое днище с жестко заделанной кромкой

В рассматриваемом случае сферическая оболочка, изображенная на рис. 9.3, с толщиной δ, радиусом R_c и углом полураствора ϑ_0 нагружена внутренним давлением p_0. Кромки оболочки жестко заделаны.

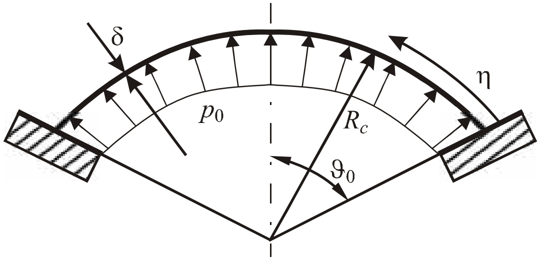


Рис. 9.3. Сферическое днище с жесткой заделкой краев

Напряжения в оболочке можно определить по формулам (9.58), которые после подстановки выражений (9.50) для N_1, (9.51) для N_2, (9.52) для M_1 можно переписать в следующем виде:

$$\sigma_1 = \frac{p_0 R_c}{2\delta} \pm \frac{6}{\delta^2}\left[M_0 \varphi(\beta\eta) + \frac{Q_0}{\beta}\zeta(\beta\eta)\right]; \tag{9.59}$$

$$\sigma_2 = \frac{p_0 R_c}{2\delta} - \frac{2\beta R_c}{\delta}\left[Q_0 \theta(\beta\eta) + \beta M_0 \psi(\beta\eta)\right] \pm \mu \frac{6}{\delta^2}\left[M_0 \varphi(\beta\eta) + \frac{Q_0}{\beta}\zeta(\beta\eta)\right]. \tag{9.60}$$

Здесь η — координата, отсчитываемая от края оболочки к ее вершине, как указано на рис. 9.3, а балочные функции вычисляются по формулам (8.25) из *гл. 8*, в которых вместо x следует подставлять η. Для определения перерезывающей силы Q_0 и момента M_0 необходимо воспользоваться следующими граничными условиями:

- т. к. в данном случае отсутствует горизонтальное перемещение на кромке сферы, то $H = 0$ при $\eta = 0$;
- угол поворота на кромке сферы равен нулю, и следовательно $\vartheta_1 = 0$ при $\eta = 0$.

Воспользовавшись первым граничным условием, из выражения (9.57) при $\eta = 0$ имеем:

$$H = \frac{p_0 R_c^2}{2E\delta}(1-\mu)\sin\vartheta_0 - \frac{2\beta R_c^2 \sin\vartheta_0}{E\delta} Q_0 - \frac{2\beta^2 R_c^2 \sin\vartheta_0}{E\delta} M_0 = 0,$$

или, после преобразований,

$$Q_0 + \beta M_0 = \frac{p_0}{4\beta}(1-\mu). \tag{9.61}$$

Теперь из второго граничного условия, используя уравнение (9.54), имеем при $\eta = 0$:

$$\vartheta_1 = \frac{2R_c^2 \beta^2}{E\delta}\left(Q_0 + 2\beta M_0\right) = 0,$$

откуда:

$$Q_0 = -2\beta M_0. \tag{9.62}$$

После подстановки полученного выражения в (9.61) получаем:

$$M_0 = -\frac{p_0}{4\beta^2}(1-\mu). \tag{9.63}$$

Подставляя (9.62) в выражения (9.59) и (9.60), получаем:

$$\sigma_1 = \frac{p_0 R_c}{2\delta} \pm \frac{6}{\delta^2} M_0 \left[\varphi(\beta\eta) - 2\zeta(\beta\eta) \right];$$

$$\sigma_2 = \frac{p_0 R_c}{2\delta} - \frac{2\beta^2 R_c}{\delta} M_0 \left[-2\theta(\beta\eta) + \psi(\beta\eta) \right] \pm \mu \frac{6}{\delta^2} M_0 \left[\varphi(\beta\eta) - 2\zeta(\beta\eta) \right].$$

Но $\varphi(\beta\eta) - 2\zeta(\beta\eta) = \psi(\beta\eta)$, а $-2\theta(\beta\eta) + \psi(\beta\eta) = -\varphi(\beta\eta)$, поэтому после подстановки M_0 из (9.63), имеем:

$$\sigma_1 = \frac{p_0 R_c}{2\delta} \mp \frac{6}{\delta^2} \frac{p_0}{4\beta^2} (1-\mu) \psi(\beta\eta);$$

$$\sigma_2 = \frac{p_0 R_c}{2\delta} - \frac{2\beta^2 R_c}{\delta} \frac{p_0}{4\beta^2} (1-\mu) \varphi(\beta\eta) \mp \mu \frac{6}{\delta^2} \frac{p_0}{4\beta^2} (1-\mu) \psi(\beta\eta),$$

или после подстановки $\beta = \dfrac{\sqrt[4]{3\left(1-\mu^2\right)}}{\sqrt{R_c \delta}}$:

$$\sigma_1 = \frac{p_0 R_c}{2\delta} \left[1 \mp \sqrt{\frac{3(1-\mu)}{1+\mu}} \psi(\beta\eta) \right]; \tag{9.64}$$

$$\sigma_2 = \frac{p_0 R_c}{2\delta} \left[1 - (1-\mu) \varphi(\beta\eta) \mp \mu \sqrt{\frac{3(1-\mu)}{1+\mu}} \psi(\beta\eta) \right]. \tag{9.65}$$

Слагаемые в квадратных скобках с балочными функциями быстро затухают по мере удаления от места закрепления оболочки.

9.6. Сферическое днище с шарнирно закрепленной кромкой

В этом случае на кромке отсутствует горизонтальное перемещение (рис. 9.4), но может возникнуть вращение, поэтому граничные условия формулируются так:

- горизонтальное перемещение кромки равно нулю;
- изгибающий момент в шарнирном закреплении равен нулю.

Горизонтальное перемещение кромки равно нулю, поэтому при $\eta = 0$ из (9.57) имеем:

$$Q_0 + \beta M_0 = \frac{p_0}{4\beta} (1-\mu). \tag{9.66}$$

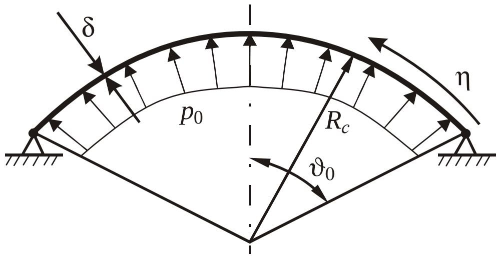


Рис. 9.4. Сферическое днище с шарнирным закреплением краев

Так как кромка закреплена шарнирно и допустимо ее вращение, то момент равен нулю, т. е. $M_0 = 0$. Тогда из (9.66) получаем:

$$Q_0 = \frac{p_0}{4\beta}(1-\mu), \tag{9.67}$$

а выражения (9.59) и (9.60) для напряжений принимают вид:

$$\sigma_1 = \frac{p_0 R_c}{2\delta} \pm \frac{6}{\delta^2}\frac{p_0}{4\beta^2}(1-\mu)\zeta(\beta\eta);$$

$$\sigma_2 = \frac{p_0 R_c}{2\delta} - \frac{2R_c}{\delta}\frac{p_0}{4}(1-\mu)\theta(\beta\eta) \pm \mu\frac{6}{\delta^2}\frac{p_0}{4\beta^2}(1-\mu)\zeta(\beta\eta),$$

или, после подстановки β,

$$\sigma_1 = \frac{p_0 R_c}{2\delta}\left[1 \pm \sqrt{\frac{3(1-\mu)}{1+\mu}}\zeta(\beta\eta)\right]; \tag{9.68}$$

$$\sigma_2 = \frac{p_0 R_c}{2\delta}\left[1-(1-\mu)\theta(\beta\eta) \pm \mu\sqrt{\frac{3(1-\mu)}{1+\mu}}\zeta(\beta\eta)\right]. \tag{9.69}$$

9.7. Краевой эффект при наличии распорного шпангоута

На рис. 9.5 изображена схема краевых сил и моментов, возникающих в области распорного шпангоута цилиндрического сосуда со сферическим днищем, который нагружен постоянным внутренним давлением.

Будем считать, что шпангоут воспринимает только радиальную нагрузку, а момент, действующий на него, равен нулю. Обозначим через N_0 безмоментную распорную силу, которая возникает в плоскости стыка из-за излома образующей сосуда. Тогда условия совместности перемещений и углов поворота днища, цилиндра и шпангоута запишутся так:

$$\left(w_ц\right)_p + \left(w_ц\right)_{Q_0} + \left(w_ц\right)_{M_0} = \left(w_д\right)_p + \left(w_д\right)_{Q_д} + \left(w_д\right)_{M_д} = w_ш; \tag{9.70}$$

$$\left(\vartheta_ц\right)_{Q_0} + \left(\vartheta_ц\right)_{M_0} = \left(\vartheta_д\right)_{Q_д} + \left(\vartheta_д\right)_{M_д}, \tag{9.71}$$

где:

$$\left(w_ц\right)_p = \frac{p_0 R^2}{E\delta}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right); \tag{9.72}$$

$$\left(w_ц\right)_{Q_0} = -\frac{1}{2\alpha^3 D} Q_0; \tag{9.73}$$

$$\left(w_ц\right)_{M_0} = \frac{1}{2\alpha^2 D} M_0; \tag{9.74}$$

$$\left(\vartheta_ц\right)_{Q_0} = -\frac{1}{2\alpha^2 D} Q_0; \tag{9.75}$$

$$\left(\vartheta_ц\right)_{M_0} = \frac{1}{\alpha D} M_0. \tag{9.76}$$

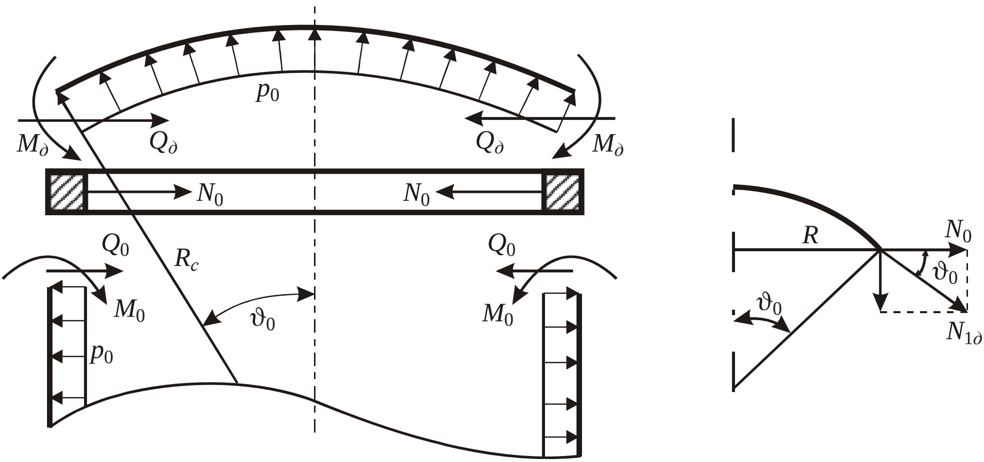


Рис. 9.5. Схема краевых сил и моментов в области распорного шпангоута

Перемещение шпангоута найдем из выражения для его относительных деформаций в тангенциальном направлении:

$$w_ш = \varepsilon_2 R = \frac{\sigma_ш}{E} R .$$

Но из уравнения равновесия четверти кольца, показанного на рис. 9.6, имеем $Q_ш R = \sigma_ш F_ш$, откуда $\sigma_ш = \dfrac{Q_ш R}{F_ш}$, а перемещение шпангоута равно:

$$w_ш = \frac{Q_ш R^2}{EF_ш}, \tag{9.77}$$

где $F_ш$ — площадь поперечного сечения шпангоута; $Q_ш = Q_д + Q_0 - N_{1д} \cos\vartheta_0$ — поперечная сила, действующая на шпангоут.

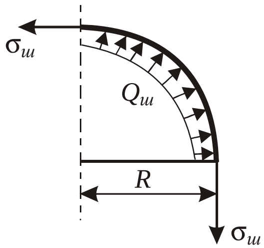


Рис. 9.6. К уравнению равновесия четверти шпангоута

Далее будем считать, что на шпангоут в поперечном направлении действует только безмоментная распорная сила $N_0 = N_{1д} \cos\vartheta_0$, поэтому:

$$w_ш = -\frac{N_0 R^2}{EF_ш}. \tag{9.78}$$

Радиальное перемещение днища от внутреннего давления равно проекции нормального перемещения сферы, определенного по безмоментной теории, что соответствует первому слагаемому в (9.57):

$$\left(w_д\right)_p = \frac{p_0 R_c^2}{2E\delta}(1-\mu)\sin\vartheta_0, \tag{9.79}$$

а для определения радиальных перемещений и углов поворота от краевых усилий и момента воспользуемся формулами (9.40) и (9.39), записанными при $\eta = 0$, а также соотношением (9.49), связывающим перерезывающую силу в сферической оболочке с составляющей распорной силы, возникающей из-за краевого эффекта:

$$\left(w_\partial\right)_{Q_\partial} = -\frac{1}{2\beta^3 D_1} Q_\partial \sin^2 \vartheta_0 ; \tag{9.80}$$

$$\left(w_\partial\right)_{M_\partial} = -\frac{1}{2\beta^2 D_1} M_\partial \sin \vartheta_0 ; \tag{9.81}$$

$$\left(\vartheta_\partial\right)_{Q_\partial} = -\frac{1}{2\beta^2 D_1} Q_\partial \sin \vartheta_0 ; \tag{9.82}$$

$$\left(\vartheta_\partial\right)_{M_\partial} = -\frac{1}{\beta D_1} M_\partial , \tag{9.83}$$

где $\beta = \dfrac{\sqrt[4]{3\left(1-\mu^2\right)}}{\sqrt{R_c \delta_1}}$ — коэффициент затухания для изотропной сферической оболочки; $D_1 = \dfrac{E\delta_1^3}{12\left(1-\mu^2\right)}$ — цилиндрическая жесткость днища.

Безмоментная составляющая N_0 распорной силы, воспринимаемой шпангоутом, определяется как проекция меридионального погонного усилия на направление, перпендикулярное оси симметрии. Подставив (9.72)—(9.83) в уравнения (9.70)—(9.71), получим три уравнения относительно неизвестных Q_0, M_0, Q_∂, M_∂.

Краевые моменты в цилиндре и днище одинаковые, т. к. шпангоут воспринимает только распорную силу, а его угол поворота равен нулю. Рассмотрим частный случай, для которого справедливы следующие условия [9.1]:

1. Площадь сечения шпангоута имеет порядок $R \cdot \delta$.
2. В выражениях для перемещений и углов поворота сферы можно пренебречь отношением $\dfrac{\delta}{R}$, малым по сравнению с единицей.
3. Толщина днища и цилиндра, а также свойства изотропного материала, из которого они изготовлены, одинаковые.
4. Радиус днища равен двум радиусам цилиндра, т. е. $R_c = 2R$ и $\vartheta_0 = 30°$.

В этом случае система уравнений принимает вид:

$$\frac{p_0 R^2}{E\delta}\left(1-\frac{\mu}{2}\right)-\frac{1}{2\alpha^3 D}Q_0-\frac{1}{2\alpha^2 D}M_0=-\frac{N_0 R^2}{EF_ш};$$

$$\frac{P_0 R^2}{2E\delta}(1-\mu)-\frac{1}{8\beta^3 D}Q_д-\frac{1}{4\beta^2 D}M_0=-\frac{N_0 R^2}{EF};$$

$$\left(\frac{1}{\alpha D}+\frac{1}{\beta D}\right)M_0+\frac{1}{2\alpha^2 D}Q_0+\frac{1}{4\beta^2 D}Q_0=0.$$

Решая полученную систему уравнений с учетом выражений для коэффициентов затухания β и α, получаем:

$$M_0=\frac{P_0 R\delta}{2\sqrt[4]{3\left(1-\mu^2\right)}}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{R\delta}{F}+1-\frac{\mu}{2}\left(3-\sqrt{2}\right)\right]; \tag{9.84}$$

$$Q_0=\frac{P_0 R}{\sqrt[4]{3\left(1-\mu^2\right)}}\sqrt{\frac{\delta}{R}}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{R\delta}{F}+1-\mu+\frac{\sqrt{2}}{4}\mu\right]; \tag{9.85}$$

$$Q_д=\frac{p_0 R}{\sqrt[4]{3\left(1-\mu^2\right)}}\sqrt{\frac{\delta}{2}}\left[\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{R\delta}{F}+\sqrt{2}-\frac{\mu}{4}\left(5\sqrt{2}-2\right)\right]. \tag{9.86}$$

Если площадь поперечного сечения шпангоута определить из условия равенства напряжений в нем тангенциальным напряжениям в цилиндре, т. е.:

$$\sigma_ш=\frac{N_0 R}{F_ш}=\frac{p_0 R^2\sqrt{3}}{2F_ш}=\frac{p_0 R}{\delta},$$

откуда $\dfrac{R\delta}{F_ш}=\dfrac{2}{3}$, и принять $\mu=0,3$, то формулы (9.84)—(9.86) можно переписать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} M_0&=-0,535\,p_0 R\delta;\\ Q_0&=1,405\,p_0 R\sqrt{\frac{\delta}{R}};\\ Q_д&=1,91\,p_0 R\sqrt{\frac{\delta}{R}}.\end{aligned}\right\} \tag{9.87}$$

Теперь определим напряжения в цилиндре. Выражения для погонных усилий и нормального перемещения, необходимые для вычисления напряжений, имеют вид:

$$N_1 = \frac{p_0 R}{2}; \tag{9.88}$$

$$N_2 = \frac{E\delta w}{R} + \mu N_1; \tag{9.89}$$

$$M_1 = M_0 \varphi(\alpha x) + \frac{Q_0}{\alpha} \zeta(\alpha x); \tag{9.90}$$

$$w = \frac{p_0 R^2}{E\delta}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) - \frac{1}{2\alpha^3 D}\left[\alpha M_0 \psi(\alpha x) + Q_0 \theta(\alpha x)\right]. \tag{9.91}$$

Подставляя (9.88) и (9.91) в (9.89), получим:

$$N_2 = \frac{E\delta}{R} w_0 + p_0 R,$$

или после подстановки выражений для коэффициента затухания и цилиндрической жесткости:

$$N_2 = p_0 R - \frac{2\sqrt{3\left(1-\mu^2\right)}}{\delta}\left[M_0 \psi(\alpha x) + \frac{Q_0}{\alpha}\theta(\alpha x)\right].$$

Используя (9.87), окончательно имеем:

$$N_2 = p_0 R\left[1 + 1{,}766\,\psi(\alpha x) - 3{,}608\,\theta(\alpha x)\right]. \tag{9.92}$$

Выражение для изгибающего момента:

$$M_1 = -Dw'' = \frac{1}{\alpha}\left[\alpha M_0 \varphi(\alpha x) + Q_0 \zeta(\alpha x)\right]$$

после подстановки выражений для краевой перерезывающей силы и момента принимает вид:

$$M_1 = -0{,}535\, p_0 R\delta \varphi(\alpha x) + 1{,}093\, p_0 R\delta \zeta(\alpha x), \tag{9.93}$$

а сами напряжения в цилиндрической оболочке определяются по формулам:

$$\sigma_1 = \frac{p_0 R}{2\delta}\left[1 \mp 6{,}54\,\varphi(\alpha x) \pm 13{,}1\,\zeta(\alpha x)\right];$$

$$\sigma_2 = \frac{p_0 R}{\delta}\left[1 + 1{,}766\,\psi(\alpha x) - 3{,}61\,\theta(\alpha x) \mp 0{,}96\,\varphi(\alpha x) \pm 1{,}97\,\zeta(\alpha x)\right].$$

Аналогично вычисляются напряжения в днище. Что касается напряжений в шпангоуте, то их можно определить по формуле:

$$\sigma_ш = \frac{p_0 R_c R}{2F_ш} \cos\vartheta_0 ,$$

и они отрицательные по знаку.

9.8. Краевой эффект в распорном узле промежуточного днища

Узел сопряжения цилиндрической оболочки и промежуточного днища (рис. 9.7) содержит шпангоут, жесткость которого значительно превышает жесткости оболочек.

Цилиндры нагружены внутренним давлением, а днище — разностью давлений. Запишем условия совместности перемещений и углов поворота оболочек и шпангоута (рис. 9.7).

- Стык 1-ого цилиндра со шпангоутом:

$$\left.\begin{aligned} w_{Q_0}^{(1)} + w_{M_0}^{(1)} + w_p^{(1)} = w_k^{(1)} + \vartheta_k x_1; \\ \vartheta_{Q_0}^{(1)} + \vartheta_{M_0}^{(1)} = \vartheta_k , \end{aligned}\right\} \tag{9.94}$$

где ϑ_k — угол поворота кольца-шпангоута; x_1 — расстояние от центра масс сечения шпангоута до стыка с 1-ым цилиндром. Здесь и далее положительные углы отсчитываются против часовой стрелки, а положительные перемещения направлены от оси симметрии перпендикулярно к ней:

$$w_{Q_0}^{(1)} = -\frac{1}{2\alpha_1^3 D_1} Q_0^{(1)}; \quad w_{M_0}^{(1)} = -\frac{1}{2\alpha_1^2 D_1} M_0^{(1)}; \quad w_p^{(1)} = \frac{p_1 R^2}{E\delta_1}\left(1 - \frac{\mu N_1^{(1)}}{p_1 R}\right);$$

$$\vartheta_{Q_0}^{(1)} = -\frac{1}{2\alpha_1^2 D_1} Q_0^{(1)}; \quad \vartheta_{Q_0}^{(1)} = -\frac{1}{\alpha_1 D_1} M_0^{(1)};$$

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt[4]{12\left(1-\mu^2\right)}}{\sqrt{R\delta_1}}; \quad D_1 = \frac{E\delta_1^3}{12\left(1-\mu^2\right)} .$$

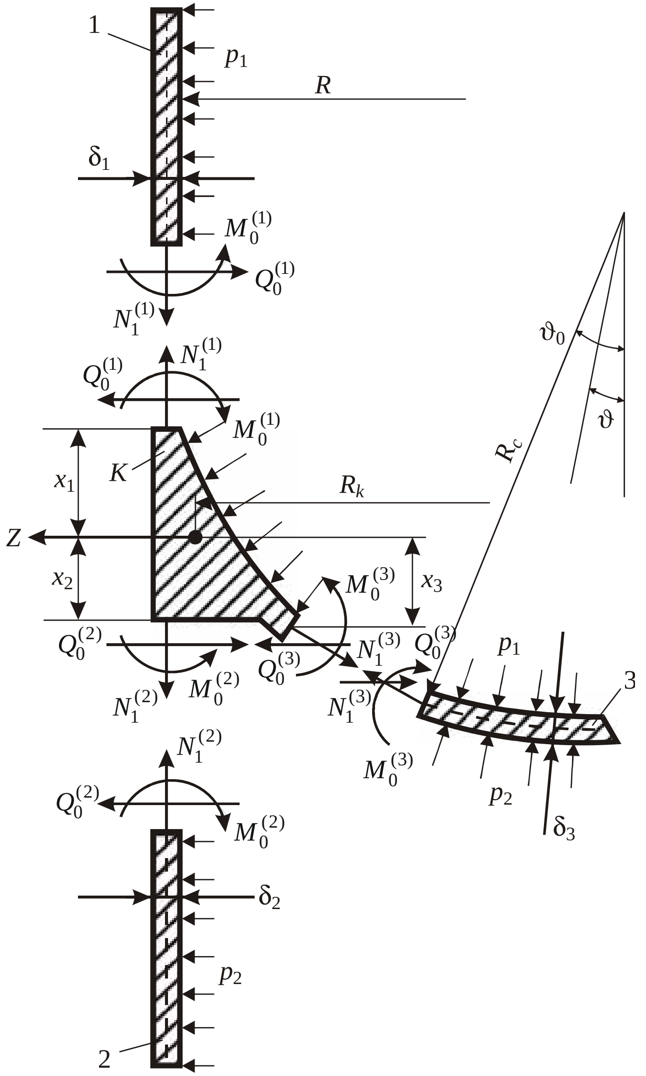


Рис. 9.7. Краевые силы и моменты в распорном узле промежуточного днища

- Условия совместности перемещений и углов поворота на стыке второго цилиндра со шпангоутом:

$$\left.\begin{aligned} w_{Q_0}^{(2)} + w_{M_0}^{(2)} + w_p^{(2)} &= w_k^{(2)} - \vartheta_k x_2; \\ \vartheta_{Q_0}^{(2)} + \vartheta_{M_0}^{(2)} &= \vartheta_k, \end{aligned}\right\} \tag{9.95}$$

где x_2 — расстояние от центра масс шпангоута до стыка со вторым цилиндром, а перемещения и углы поворота определяются по следующим формулам:

$$w_{Q_0}^{(2)} = -\frac{1}{2\alpha_2^3 D_2} Q_0^{(2)}; \quad w_{M_0}^{(2)} = -\frac{1}{2\alpha_2^2 D_2} M_0^{(2)}; \quad w_p^{(2)} = \frac{p_0 R^2}{E\delta_2}\left(1 - \frac{\mu N_1^{(2)}}{p_2 R}\right);$$

$$\vartheta_{Q_0}^{(2)} = -\frac{1}{2\alpha_2^2 D_2} Q_0^{(2)}; \quad \vartheta_{Q_0}^{(2)} = -\frac{1}{\alpha_2 D_2} M_0^{(2)};$$

$$\alpha_2 = \frac{\sqrt[4]{12\left(1-\mu^2\right)}}{\sqrt{R\delta_2}}; \quad D_2 = \frac{E\delta_2^3}{12\left(1-\mu^2\right)}.$$

- Условия совместности перемещений и углов поворота на стыке промежуточного днища со шпангоутом.

$$\left.\begin{aligned} w_{Q_0}^{(3)} + w_{M_0}^{(3)} + w_p^{(3)} &= w_k^{(3)} - \vartheta_k x_3; \\ \vartheta_{Q_0}^{(3)} + \vartheta_{M_0}^{(3)} &= \vartheta_k, \end{aligned}\right\} \tag{9.96}$$

где x_3 — расстояние от центра масс шпангоута до стыка шпангоута с днищем.

Перемещения и углы поворота днища определим с помощью формул (9.57) и (9.54), выделяя из них нужные слагаемые и используя обозначения этого раздела:

$$w_p^{(3)} = \frac{(p_1 - p_2)}{2E\delta_3} R_c^2 (1-\mu)\sin\vartheta_0;$$

$$w_{Q_0}^{(3)} = -\frac{1}{2\beta^3 D_3} Q_0^{(3)} \sin^2\vartheta_0; \quad w_{M_0}^{(3)} = -\frac{1}{2\beta^2 D_3} M_0^{(3)} \sin\vartheta_0;$$

$$\vartheta_{Q_0}^{(3)} = -\frac{1}{2\beta^2 D_3} Q_0^{(3)} \sin\vartheta_0; \quad \vartheta_{M_0}^{(3)} = -\frac{1}{\beta D_3} M_0^{(3)};$$

$$\beta = \frac{\sqrt[4]{3\left(1-\mu^2\right)}}{\sqrt{R_c\delta_3}}; \quad D = \frac{E\delta_3^2}{12\left(1-\mu^2\right)}.$$

В записанные условия (9.94)—(9.96) входит перемещение шпангоута w_k, которое определим по формуле (9.77), а угол поворота ϑ_k можно найти из условия равновесия моментов относительно центра масс [9.6]:

$$w_k = \frac{Q_k \cdot R_k^2}{E \cdot F_k}; \quad \vartheta_k = \frac{M_k \cdot R_k^2}{E \cdot J_k},$$

где Q_k и M_k — перерезывающая сила и момент, приложенные к шпангоуту; R_k, F_k — радиус центра масс и площадь сечения шпангоута; J_k — центральный момент инерции сечения шпангоута относительно оси Z (рис. 9.7).

Погонную силу Q_k и момент M_k относительно центра масс определим из уравнения равновесия шпангоута, считая положительными силы, направленные по оси Z, и моменты, направленные против часовой стрелки. Тогда:

$$Q_k = Q_0^{(1)} - Q_0^{(2)} + Q_0^{(3)} - N_1^{(3)} \cos\vartheta_0 + p_1(x_1 - x_2);$$

$$M_k = -M_0^{(1)} + M_0^{(2)} + M_0^{(3)} + Q_1^{(1)} x_1 + Q_0^{(2)} x_2 - Q_0^{(3)} x_3 -$$
$$- N_1^{(1)} z_1 + N_1^{(2)} z_1 + N_1^{(3)} (x_3 \cos\vartheta_0 - z_2 \sin\vartheta_0),$$

где z_1, z_2 — расстояния от центра масс шпангоута до стыка цилиндра и сферы, измеряемые по перпендикуляру к оси симметрии.

В последнем выражении не учтен момент от равнодействующей давления на участке шпангоута, который обычно мал настолько, что им можно пренебречь. Для определения неизвестных $Q_0^{(1)}$, $Q_0^{(2)}$, $Q_0^{(3)}$, $M_0^{(1)}$, $M_0^{(2)}$, $M_0^{(3)}$ имеем систему из шести уравнений (9.92), (9.94), в которую необходимо подставить выражения для соответствующих величин. Напряжения на наружной и внутренней поверхностях цилиндрических оболочек определим по обычным формулам, в которые следует подставить полученные после решения системы уравнений краевую силу и момент.

Меридиональные напряжения равны:

$$\sigma_1^{(i)} = \frac{N_1^{(i)}}{\delta_i} \pm \frac{6M_1^{(i)}}{\delta_i^2},$$

где $N_1^{(i)}$ — меридиональное погонное усилие, определяемое из условия равновесия части оболочки в проекции на ось симметрии; ось X отсчитывается от края оболочки (где i равно 1 — направление вверх, 2 — вниз).

Тангенциальные напряжения получаются:

$$\sigma_2^{(i)} = \frac{N_2^{(i)}}{\delta_i} \pm \mu \left(\frac{6M_1^{(i)}}{\delta_i^2} \right),$$

где:

$$N_2^{(i)} = -\frac{E\delta_i}{2\alpha_i^2 D_i R} \left[M_0^{(i)} \psi(\alpha_i x) + \frac{Q_0^{(i)}}{\alpha_i} \theta(\alpha_i x) \right] + p_i R \,.$$

Напряжения в сфере определим по формулам, аналогичным цилиндрической оболочке:

$$\sigma_1^{(3)} = \frac{N_1^{(3)}}{\delta_3} \pm \frac{6M_1^{(3)}}{\delta_3^2};$$

$$\sigma_2^{(3)} = \frac{N_2^{(3)}}{\delta_3} \pm \mu \frac{6M_1^{(3)}}{\delta_3^2},$$

в которых погонные усилия и момент равны соответственно [9.1]:

$$N_1^{(3)} = \frac{(p_1 - p_2) R_c}{2};$$

$$N_2^{(3)} = \frac{(p_1 - p_2) R_c}{2} - 2\beta R_c \left[Q_0^{(3)} \theta(\beta\eta) + \beta M_0^{(3)} \psi(\beta\eta) \right];$$

$$M_1^{(3)} = M_0^{(3)} \varphi(\beta\eta) + \frac{Q_0^{(3)}}{\beta} \zeta(\beta\eta);$$

$$\eta = l - s; \quad l = R_c \vartheta_0; \quad s = R_c \vartheta \,.$$

И, наконец, напряжения в шпангоуте равны:

$$\sigma_k^{(i)} = \frac{Q_k \cdot R_k}{F_k} \pm \frac{M_k \cdot R_k}{J_k} x_i; \quad i = 1, 2, 3,$$

где верхний знак относится к стыку с 1-ым цилиндром $(x_i = x_1)$, а нижний — к стыку 2-ого цилиндра $(x_i = x_2)$ и стыку со сферической оболочкой $(x_i = x_3)$.

Выводы

В этой главе были изучены следующие вопросы:

1. Получены уравнения теории тонких оболочек в естественной системе координат, связанной с меридианом и параллелью оболочки.
2. Получены уравнения для расчета зоны краевого эффекта.
3. Уравнения краевого эффекта применены для решения модельной задачи со сферой, нагруженной на контуре перерезывающей силой и моментом.
4. Получены соотношения для расчета напряжений в зоне краевого эффекта на сферической оболочке.
5. Рассмотрен краевой эффект в сферическом днище с жестко заделанной кромкой.
6. Рассмотрен краевой эффект в сферическом днище с шарнирно закрепленной кромкой.
7. Получены выражения для расчета напряжений в области распорного шпангоута.
8. Получены соотношения для расчета напряжений в области промежуточного днища цилиндрической оболочки.

Упражнения и вопросы

1. Запишите уравнения теории тонких оболочек в сферической системе координат. Сравните их с уравнениями в естественной системе координат.
2. Получите уравнения краевого эффекта, воспользовавшись сферической системой координат.
3. Получите решение модельной задачи о краевом эффекте в сфере относительно нормальных перемещений в направлении радиуса сферы.
4. Определите длину зоны краевого эффекта в сферической оболочке, если $R_c = 0{,}5$ м; $\delta = 2 \cdot 10^{-3}$ м; $\mu = 0{,}3$.
5. Как определить распорную силу в основании сферического днища? Оказывает ли влияние на ее значение краевой эффект? Приведите необходимые соотношения и объясните механизм ее возникновения.
6. Запишите выражения для краевых напряжений в области жесткой заделки сферы через нормальные перемещения, направленные по ее радиусу.

7. Постройте эпюру безразмерных краевых напряжений в области шарнирного закрепления сферы радиуса $R_c = 1$ м, толщиной $\delta = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ м и половиной сектора в $30°$. Краевые напряжения отнесите к соответствующим безмоментным напряжениям.
8. Влияют ли размеры распорного шпангоута на значения краевых напряжений в соединенных с ним оболочках? Будут они больше или меньше, чем напряжения в жестких заделках оболочки?
9. По какой формуле определяются напряжения в распорном шпангоуте, соединяющем цилиндрическую и сферическую оболочки?
10. Запишите через краевую перерезывающую силу выражения для напряжений в промежуточном сферическом днище в цилиндрической обечайке бака.

Литература к главе 9

1. Биргер В. Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика. — М.: Машиностроение, 1977, 488 с.
2. Бояршинов С. В. Основы строительной механики машин. — М.: Машиностроение, 1973, 456 с.
3. Гузь А. Н., Чернышенко И. С., Шныренко К. И. Сферические днища, ослабленные отверстиями. — Киев: Наукова думка, 1970, 324 с.
4. Образцов И. Ф. и др. Строительная механика летательных аппаратов. — М.: Машиностроение, 1986, 536 с.
5. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. — М.: ГИФМЛ, 1963, 635 с.
6. Погорелов В. И. Прочность и устойчивость тонкостенных конструкций. Учебное пособие. — СПб.: Балтийский государственный технический университет, 2005, 153 с.

Глава 10

Конструкции из пологих оболочек

В этой главе изучаются пологие оболочки, которые занимают промежуточное положение между безмоментными оболочками и оболочками, в которых возникают изгибные напряжения. Рассматриваются гипотезы теории пологих оболочек, которые позволяют существенно упростить исходную систему уравнений теории тонких оболочек и получать аналитические решения, важные для практических приложений. Уравнения теории пологих оболочек применяются для решения задач о расчете напряженно-деформированного состояния в цилиндрических, конических и сферических оболочках.

В этой главе будут рассмотрены следующие темы:

- ❒ уравнения тонких цилиндрических оболочек при несимметричной нагрузке;
- ❒ гипотезы теории пологих оболочек и уравнения, полученные на их основе;
- ❒ область использования уравнений и методы решения;
- ❒ горизонтальный цилиндр, заполненный жидкостью;
- ❒ особенности расчета пологих оболочек на локальную нагрузку;
- ❒ напряжения в области отверстий в цилиндрических и конических оболочках;
- ❒ сферические днища со свободным отверстием;
- ❒ компенсация ослабления отверстий в емкостях.

10.1. Основные понятия и определения

Пологие оболочки широко используются в авиастроении, машиностроении, судостроении и т. п.

> ***Пологой*** называют оболочку, у которой стрела подъема f не превышает одной пятой наименьшего линейного размера плана $l = \min(a, b)$, т. е. $\frac{f}{l} < 0,2$ (рис. 10.1).

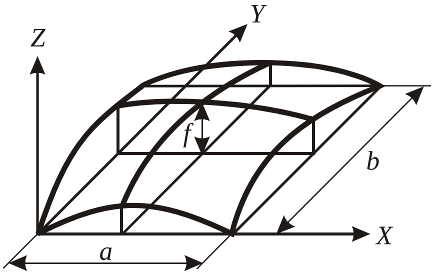


Рис. 10.1. Геометрия пологой оболочки

Как известно, цилиндрическая поверхность может быть развернута на плоскость так, что криволинейные координаты на ней будут совпадать с декартовыми, у которых оба коэффициента Ламе равны единице.

В этом случае геометрия плоскости и развернутой на нее оболочки полностью совпадают. Это дает возможность использовать уравнения теории пологих оболочек для расчета цилиндрических оболочек. Такой способ применяется для решения широкого круга задач, а соответствующие уравнения называют уравнениями технической теории цилиндрических оболочек. Они же используются и при исследовании задач устойчивости таких оболочек. Выпишем сначала уравнения цилиндрических оболочек при несимметричной нагрузке, а затем получим из них уравнения пологих цилиндрических оболочек.

10.2. Уравнения тонких цилиндрических оболочек при несимметричной нагрузке

Перепишем общую систему уравнений *(см. разд. 6.9)*, описывающую напряженно-деформированное состояние тонкой оболочки, в цилиндрической системе координат, полагая $\alpha = x$; $\beta = \varphi$. Тогда коэффициенты Ламе $h_1 = 1$; $h_2 = R$, где R — радиус срединной поверхности оболочки. После преобразований получим следующую систему уравнений:

- Уравнения равновесия:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial T_{12}}{\partial \varphi} + q_1 = 0\ ;$$

$$\frac{\partial T_{12}}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial N_2}{\partial \varphi}+\frac{Q_2}{R}+q_2=0\,;$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial Q_2}{\partial \varphi}-q_n=0\,;$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial M_2}{\partial \varphi}=0\,;$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial H}{\partial \varphi}=0\,.$$

❒ Геометрические уравнения:

$$\varepsilon_1^0=\frac{\partial u_0}{\partial x}\,;\quad \varepsilon_2^0=\frac{1}{R}\frac{\partial v_0}{\partial \varphi}+\frac{w}{R}\,;\quad \gamma_{12}^0=\frac{1}{R}\frac{\partial u_0}{\partial \varphi}+\frac{\partial v_0}{\partial x}\,;$$

$$\kappa_1=-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,;\quad \kappa_2=\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{v_0}{R}-\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right);\quad \kappa_{12}=-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi}+\frac{1}{R}\frac{\partial V_0}{\partial x}\,.$$

❒ Физические уравнения (однослойная изотропная оболочка):

$$N_1=\frac{E\delta}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_1^0+\mu\varepsilon_2^0\right)\,;\quad N_2=\frac{E\delta}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_2^0+\mu\varepsilon_1^0\right);\quad T_{12}=\frac{E\delta}{2(1+\mu)}\gamma_{12}^0\,;$$

$$M_1=D(\kappa_1+\mu\kappa_2);\quad M_2=D(\kappa_2+\mu\kappa_1);\quad H=D(1-\mu)\kappa_{12}\,.$$

Приведенная система уравнений довольно сложна. Получение решения для большинства задач представляет значительные трудности даже для оболочек такой простой геометрической формы, как цилиндр.

В связи с этим большой практический интерес представляет получение более простой системы уравнений. Такую возможность создает один из классов оболочек, так называемые *пологие оболочки*, которые широко используются в авиа-, судостроении и в строительной технике.

Уравнения пологих цилиндрических оболочек были получены известным специалистом по теории оболочек Л. Г. Доннелом в 1939 г., а теория пологих оболочек произвольных очертаний была разработана в 1944 г. В. З. Власовым.

Пологие оболочки, описываемые упрощенным вариантом уравнений теории тонких оболочек, занимают промежуточное положение между моментными и безмоментными оболочками.

10.3. Гипотезы теории пологих оболочек

Теория пологих оболочек строится на базе уравнений теории тонких оболочек, для которых справедливы гипотезы Лава—Кирхгоффа. Кроме указанных гипотез, для пологих оболочек дополнительно принимаются следующие гипотезы:

- ***геометрическая.*** Оболочка принимается настолько пологой, что геометрия ее срединной поверхности такая же, как и геометрия плоскости. Это означает, что кривизна координатных линий α и β настолько близка к нулю, что их можно приближенно считать прямыми линиями (см. рис. 10.1). Тогда выражение для квадрата элементарной длины дуги на поверхности пологой оболочки можно записать так:

$$ds^2 = h_1^2 d\alpha + h_2^2 d\beta^2 = dx^2 + dy^2;$$

- ***статическая.*** В уравнениях равновесия можно пренебречь моментными членами, содержащими в качестве коэффициентов слагаемые с радиусами кривизны или их производными;
- ***деформационная.*** В выражениях для κ_1, κ_2, κ_{12} можно отбросить слагаемые, содержащие перемещения u_0 и v_0, т. е. можно считать, что оболочка получает наибольшие перемещения в направлении нормали к срединной поверхности.

В некотором смысле пологая оболочка уподобляется пластинке, сохраняя при этом главные свои черты, связанные с кривизной ее срединной поверхности.

10.4. Уравнения пологих оболочек

Перепишем исходную систему уравнений, воспользовавшись гипотезами теории пологих оболочек, также полагая, что на оболочку действует только давление, а внешнее трение отсутствует, т. е. $q_1 = 0$ и $q_2 = 0$. Имеем:

- Уравнения равновесия:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}}{\partial y} = 0; \tag{10.1}$$

$$\frac{\partial T_{12}}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} = 0; \tag{10.2}$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} - \frac{N_2}{R} + q_n = 0; \tag{10.3}$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = Q_1; \tag{10.4}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y} = Q_2. \tag{10.5}$$

❒ Геометрические уравнения:

$$\begin{gathered}
\varepsilon_1^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}; \\
\varepsilon_2^0 = \frac{w}{R} + \frac{\partial v_0}{\partial y}; \\
\gamma_{12}^0 = \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y};
\end{gathered} \tag{10.6}$$

$$\kappa_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \kappa_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \kappa_{12} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Физические уравнения останутся без изменений, поэтому здесь не приводятся. Преобразуем сначала уравнения равновесия, для этого подставим уравнения (10.4) и (10.5) в уравнение (10.3):

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} - \frac{N_2}{R} + q_n = 0. \tag{10.7}$$

Уравнения (10.1) и (10.2) тождественно удовлетворяются, если ввести функцию $\Phi(x, y)$, для которой справедливы следующие условия:

$$N_1 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad N_2 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad T_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \tag{10.8}$$

Используя геометрические уравнения, перепишем выражения для погонных изгибающих моментов M_1, M_2 и крутящего момента H в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
M_1 &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right); \\
M_2 &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right); \\
H &= -D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.
\end{aligned}\right\} \tag{10.9}$$

Записанные соотношения и второе выражение из (10.8) позволяют преобразовать уравнение (10.7) к следующему виду:

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)=-\frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+q_n,$$

или:

$$D\nabla^4 w=-\frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+q_n. \tag{10.10}$$

Получим второе уравнение, связывающее перемещение w и функцию $\Phi(x,y)$, воспользовавшись оставшимися неиспользованными для преобразований физическими и геометрическими уравнениями.

Из физических уравнений имеем:

$$\varepsilon_1^0=\frac{1}{E\delta}\left(N_1-\mu N_2\right);$$

$$\varepsilon_2^0=\frac{1}{E\delta}\left(N_2-\mu N_1\right);$$

$$\gamma_{12}^0=\frac{2(1+\mu)}{E\delta}T_{12},$$

или с учетом (10.8) и (10.6) получаем:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}=\frac{1}{E\delta}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-\mu\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right);$$

$$\frac{w}{R}+\frac{\partial v_0}{\partial y}=\frac{1}{E\delta}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\mu\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right);$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial y}=-\frac{2(1+\mu)}{E\delta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}.$$

Исключим из полученных уравнений перемещения u_0, v_0 и с этой целью продифференцируем первое уравнение два раза по y, второе — два раза по x, а третье — по x и y, а затем вычтем третье уравнение из суммы первых двух. Получаем:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{1}{E\delta}\left(\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}+2\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}\right),$$

или:

$$\nabla^4\Phi = \frac{E\delta}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{10.11}$$

Применяя к (10.11) оператор $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, а к (10.10) ∇^4, получаем следующую систему из двух уравнений:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\nabla^4\Phi = \frac{E\delta}{R}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}; \tag{10.12}$$

$$D\nabla^8 w = -\frac{1}{R}\nabla^4\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \nabla^4 q_n. \tag{10.13}$$

Умножая (10.12) на $\frac{1}{R}$ и вычитая из него (10.13), получаем окончательно:

$$D\nabla^8 w + \frac{E\delta}{R^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \nabla^4 q_n. \tag{10.14}$$

Приведем здесь для справки выражения для различных степеней оператора "набла" в декартовой системе координат:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4};$$

$$\nabla^8 = \frac{\partial^8}{\partial x^8} + 4\frac{\partial^8}{\partial x^6 \partial y^2} + 6\frac{\partial^8}{\partial x^4 \partial y^4} + 4\frac{\partial^8}{\partial x^2 \partial y^6} + \frac{\partial^8}{\partial y^8}.$$

В записанных выражениях нетрудно увидеть аналогию с биномом Ньютона по коэффициентам при производных и их порядку по x и y. Таким образом, задача о расчете напряженно-деформированного состояния в пологой цилиндрической оболочке свелась к отысканию решения двух уравнений в частных производных.

По известным функциям w и Φ можно определить погонные усилия N_1, N_2, T_1 и погонные моменты M_1, M_2, H, а следовательно, и напряжения в оболочке. В частном случае, когда $R \to \infty$, получаем два независимых уравнения:

$$D\nabla^4 w = q_n; \tag{10.15}$$

$$\nabla^4\Phi = 0. \tag{10.16}$$

Каждое из них может решаться независимо от другого. Уравнение Софи Жермен (10.15) описывает изгиб пластинок, а бигармоническое (10.16) является разрешающим уравнением плоской задачи теории упругости, которое описывает напряженное состояние пластинки в ее плоскости. В теории пологих оболочек уравнения для w и Φ решаются совместно, что фактически сводится к учету взаимного влияния двух систем сил, описываемых уравнениями (10.11) и (10.13). Такое взаимное влияние возникает вследствие искривленности срединной поверхности оболочки и, как следует из уравнений (10.15) и (10.16), оно полностью отсутствует в пластинках.

10.5. Область использования уравнений и методы решения

Теория пологих оболочек находит применение для решения следующих практически важных задач:

- оболочки, нагруженные переменной внешней нагрузкой;
- напряженно-деформированное состояние в области локального нагружения;
- определение критических нагрузок в оболочках, работающих на устойчивость.

Для решения полученных уравнений используются те же методы, что и при решении двумерных задач теории упругости и теории тонких пластин. Так, при определении напряженно-деформированного состояния оболочек широко применяется разложение решений в ряды. В этом случае вместо уравнения (10.14) удобнее использовать систему из трех уравнений относительно перемещений в оболочке. Для этого выразим сначала погонные усилия через перемещения:

$$N_1 = \frac{E\delta}{\left(1-\mu^2\right)}\left(\varepsilon_1^0 + \mu\varepsilon_2^0\right) = \frac{E\delta}{\left(1-\mu^2\right)}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \mu\frac{w}{R} + \mu\frac{\partial v_0}{\partial y}\right); \tag{10.17}$$

$$N_2 = \frac{E\delta}{\left(1-\mu^2\right)}\left(\varepsilon_2^0 + \mu\varepsilon_1^0\right) = \frac{E\delta}{\left(1-\mu^2\right)}\left(\frac{w}{R} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \mu\frac{\partial u_0}{\partial x}\right); \tag{10.18}$$

$$T_{12} = \frac{E\delta}{2(1+\mu)}\gamma_{12}^0 = \frac{E\delta}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y}\right). \tag{10.19}$$

Затем подставим полученные выражения в уравнения равновесия (10.1) и (10.2), а для получения третьего уравнения подставим в (10.3) перерезывающие силы Q_1 и Q_2 из (10.4), (10.5) и тангенциальное погонное усилие N_2 из (10.18). После этого в полученное уравнение подставим погонные моменты M_1, M_2, H, выраженные через перемещения с помощью (10.9). В результате получим следующую систему трех уравнений относительно неизвестных перемещений u_0, v_0 и w:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{(1-\mu)}{2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+\frac{(1+\mu)}{2}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y}+\frac{\mu}{R}\frac{\partial w}{\partial x}=0\,; \tag{10.20}$$

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}+\frac{(1-\mu)}{2}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+\frac{(1+\mu)}{2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y}+\frac{\mu}{R}\frac{\partial w}{\partial y}=0\,; \tag{10.21}$$

$$\frac{\delta^2}{12}\nabla^4 w+\frac{w}{R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{\mu}{R}\frac{\partial u_0}{\partial x}=\frac{\left(1-\mu^2\right)}{E\delta}q_n\,. \tag{10.22}$$

В следующем разделе будет рассмотрен порядок применения этой системы уравнений к решению практических задач с помощью рядов.

Бóльшую точность при решении системы уравнений, чем разложение в ряды, можно получить, если воспользоваться методом сеток. Это один из наиболее универсальных и точных методов расчета, в котором используется общая система уравнений, а дифференциальные операторы заменяются разностными отношениями. Решение ищется не для всего тела, а для отдельных дискретных точек-узлов. Возможность использования метода сеток ограничивается, главным образом, быстродействием и объемом памяти современных ЭВМ. В этой связи одной из актуальных задач в методе сеток является задача получения экономичных и простых разностных схем.

Из приближенных методов следует упомянуть также вариационные методы. Общим для них является то, что вместо дифференциальных уравнений решаются некоторые интегральные условия, которые эквивалентны исходным уравнениям. Получение этих условий основано на классическом вариационном принципе, согласно которому действительная форма равновесия тела отличается от всех его возможных форм тем, что для нее полная энергия системы имеет минимальное значение. Вариационные методы позволяют получить приближенное решение для широкого круга задач теории оболочек. К этим методам относятся, например, методы Бубнова—Галеркина, Ритца, Власова и метод коллокаций. Для большинства приближенных методов характерно то, что условия сплошности Сен-Венана удовлетворяются в точности не всегда. Во всех случаях необходимо оговаривать область применимости приближенного метода, сравнивая его там, где это возможно, с результатами точного расчета или эксперимента.

Дальнейшим развитием вариационных методов является метод конечных элементов, который сочетает их простоту и универсальность с высокой точностью метода сеток, позволяя, кроме того, легко описывать геометрически сложные конфигурации. В этом методе вместо построения сетки с узлами тело расчленяется на отдельные элементы простой геометрической формы. Элементы сочленяются в узлах, в которых полностью удовлетворяются уравнения равновесия и уравнения неразрывности перемещений. Решение отыскивается для неизвестных функций в узлах элементов, а в точках, находящихся внутри элемента, искомые функции аппроксимируются подходящими аналитическими зависимостями, обычно многочленами. В последнее время метод конечных элементов нашел широкое распространение при решении разнообразных проектных задач.

10.6. Горизонтальный цилиндр, заполненный жидкостью

Рассмотрим пологую цилиндрическую оболочку с жидкостью, которая шарнирно опирается по торцам (рис. 10.2, *а*, *б*).

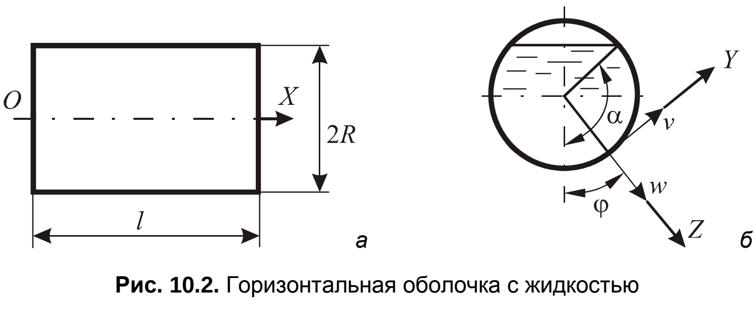


Рис. 10.2. Горизонтальная оболочка с жидкостью

В этом случае нормальные и тангенциальные перемещения, а также осевая деформация на торцах оболочки равны нулю, поэтому:

$$\text{при } x = 0, l: \quad v_0 = w = 0\,; \quad \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0.$$

Кроме того, должны соблюдаться условия симметрии перемещений при $y = 0$, причем продольное и нормальное перемещения — функции четные, а тангенциальное — нечетная функция.

Этим условиям удовлетворяют перемещения в виде следующих тригонометрических рядов:

$$u_0(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos\left(\frac{my}{R}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right); \tag{10.23}$$

$$v_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin\left(\frac{my}{R}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right); \tag{10.24}$$

$$w(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \cos\left(\frac{my}{R}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{10.25}$$

где l — длина цилиндра; $y = R\varphi$. В (10.24) m изменяется от 1, т. к. тангенциальное перемещение — нечетная функция по координате y. На оболочку действует внутреннее гидростатическое давление в жидкости, которое симметрично относительно радиальной плоскости $\varphi = 0$, а тангенциальные нагрузки (трение) отсутствуют, т. е. $q_1 = q_2 = 0$. Распределение давления представим следующими выражениями:

$$\left.\begin{aligned} &q_n = \rho g R(\cos\varphi - \cos\alpha), \quad \text{если} \quad \varphi < \alpha; \\ &q_n = 0, \quad \text{если} \quad \varphi > \alpha, \end{aligned}\right\} \tag{10.26}$$

где ρ — плотность жидкости; α — значение угла φ на свободной поверхности жидкости.

Представим давление в виде следующего ряда:

$$q_n = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \cos\left(\frac{my}{R}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \tag{10.27}$$

Для вычисления коэффициентов ряда умножим левую и правую части (10.27) на $\cos\left(\frac{ky}{R}\right)\sin\left(\frac{j\pi x}{l}\right)$ и проинтегрируем по x и y. В результате получим:

$$\int_0^l \int_0^R q_n(x, y) \cos\left(\frac{ky}{R}\right) \sin\left(\frac{j\pi x}{l}\right) dxdy =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^l \int_0^R p_{mn} \cos\left(\frac{my}{R}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{ky}{R}\right) \sin\left(\frac{j\pi x}{l}\right) dxdy.$$

Интегралы, стоящие в правой части, вычисляются с помощью свойства ортогональности круговых тригонометрических функций и после преобразований с учетом выражения (10.26) для давления получим окончательно:

$$p_{mn} = \frac{8\rho g R}{mn\pi^2\left(m^2-1\right)}\left(\cos\alpha\sin(m\alpha) - m\cos(m\alpha)\sin\alpha\right), \tag{10.28}$$

где $n = 1, 3, 5, \ldots$; $m = 2, 3, 4, \ldots$, причем:

$$p_{m,0} = \frac{4\rho g R}{n\pi^2}(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha); \quad p_{1,n} = \frac{2\rho g R}{n\pi^2}(2\alpha - \sin 2\alpha). \tag{10.29}$$

Для получения коэффициентов A_{mn}, B_{mn}, C_{mn} подставим выражения для перемещений (10.23)—(10.25) в уравнения (10.20)—(10.22). Получим после преобразований:

$$-A_{mn}\left[\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \frac{(1-\mu)}{2}\left(\frac{m}{R}\right)^2\right] + B_{mn}\frac{(1+\mu)}{2}\frac{n\pi}{l}\frac{m}{R} + C_{mn}\frac{\mu}{R}\frac{n\pi}{l} = 0; \tag{10.30}$$

$$A_{mn}\frac{(1+\mu)}{2}\frac{n\pi}{l}\frac{m}{R} - B_{mn}\left[\left(\frac{m}{R}\right)^2 + \frac{(1-\mu)}{2}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right] + C_{mn}\frac{m}{R^2} = 0; \tag{10.31}$$

$$A_{mn}\frac{n\pi}{l}\frac{m}{R} + B_{mn}\frac{m}{R^2} + C_{mn}\frac{1}{R^2} + C_{mn}\frac{h^2}{12}\left[\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{m}{R}\right)^2\right]^2 = \frac{\left(1-\mu^2\right)}{E\delta}p_{mn}. \tag{10.32}$$

Далее решаем полученную систему уравнений и определяем коэффициенты A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}. Затем по известным перемещениям, полученным в виде рядов с известными коэффициентами, определяем усилия N_1, N_2, M_1, M_2 и соответствующие им напряжения на наружной (верхний знак) и внутренней поверхностях оболочки по формулам:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{\delta} \pm \frac{6M_1}{\delta^2}; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{\delta} \pm \frac{6M_2}{\delta^2}.$$

10.7. Особенности расчета на локальную нагрузку

При расчете оболочки на локальную нагрузку необходимо принять сначала, что сосредоточенная сила действует по площадке с известными размерами (рис. 10.3).

Далее нужно определить коэффициенты в разложениях в ряд для перемещений, считая, что оболочка нагружена постоянным давлением в пределах выбранной площадки около точки приложения силы.

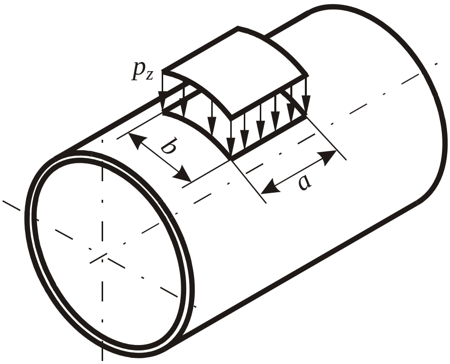


Рис 10.3. Оболочка при локальной нагрузке

Окончательные значения коэффициентов определяются предельным переходом по размерам этой площадки, которые устремляются к нулю. Заметим также, что если при решении задачи необходимо знать только напряжения, то в этом случае вместо трех уравнений (10.23)—(10.25) можно решать уравнения (10.12) и (10.13), но разлагая в ряд нормальное перемещение w и функцию Φ.

10.8. Напряжения в области отверстий

С помощью уравнений теории пологих оболочек решены важные для практики задачи о концентрации напряжений вблизи отверстий, вырезанных на поверхности оболочек. В оболочке с отверстием возникает новое напряженное состояние, однако дополнительные напряжения очень быстро затухают по мере удаления от контура отверстия. Обычно напряженное состояние в этой области представляется в виде суммы основного и возмущенного состояний. Основное напряженное состояние считается известным, и в дальнейшем будем считать его безмоментным, а возмущенное состояние определяется на основе уравнений теории пологих оболочек. Несмотря на громоздкие преобразования, удается получить аналитические решения, которые удобно использовать в практике проектирования конструкций. Рассмотрим некоторые из этих решений [10.3]—[10.5].

10.8.1. Цилиндрические оболочки

На рис. 10.4 приводится развертка цилиндрической оболочки на плоскость. Там же указаны декартовы координаты x, y и полярные r, φ, связанные с центром отверстия.

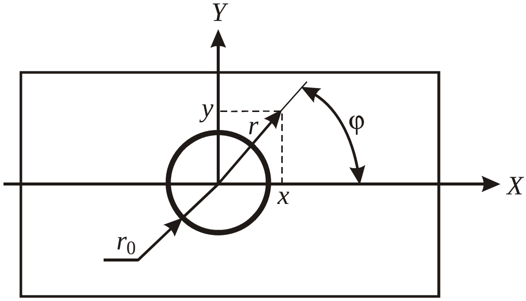


Рис. 10.4. Развертка цилиндрической поверхности на плоскость

Приводимые далее решения получены для малых отверстий, когда $0 \le \beta < 1$; где $\beta = \sqrt[4]{\dfrac{3\left(1-\mu^2\right)}{4R^2\delta^2}}\,r_0$; δ — толщина оболочки; r_0 — радиус отверстия на поверхности цилиндра [10.4].

Осевое растяжение силой *T*, приложенной по краям цилиндра

В этом случае безмоментные напряжения в цилиндре без отверстия в декартовой системе координат равны соответственно:

$$\sigma_1 = \frac{T_0}{\delta}; \quad \sigma_2 = 0,$$

а в полярной:

$$\sigma_r = \frac{T_0}{2\delta}\left(1+\cos 2\varphi\right); \quad \sigma_\varphi = \frac{T_0}{2\delta}\left(1-\cos 2\varphi\right); \quad \tau_{r\varphi} = -\frac{T_0}{2\delta}\sin 2\varphi.$$

Погонная сила равна $T_0 = \dfrac{T}{2\pi R}$.

Если на поверхности цилиндра имеется отверстие, то суммарные напряжения на его кромке определяются по формуле:

$$\sigma_\varphi = \sigma'_\varphi \mp \sigma''_\varphi, \tag{10.33}$$

в которой верхний знак относится к наружной поверхности, а нижний — к внутренней.

Мембранная составляющая напряжения равна:

$$\sigma'_{\varphi} = \frac{T_0}{\delta}\left(1 - 2\cos 2\varphi - \frac{\pi}{2}\beta^2 \cos 2\varphi\right),$$

а моментная:

$$\sigma''_{\varphi} = \frac{3}{8}\frac{T_0}{\delta}(1+\mu)\left[1 - \frac{1}{k_1}\left(\frac{2}{3} - 3k_1 + 4\ln\frac{\gamma\beta}{\sqrt{2}}\right)\cos 2\varphi - \frac{1}{k_2}\cos 4\varphi\right],$$

где $k_1 = \dfrac{3+\mu}{1-\mu}$; $\ln\gamma = 0{,}577216$ — постоянная Эйлера.

Угол φ отсчитывается по окружности отверстия от направления, совпадающего с осью цилиндра, против часовой стрелки (рис. 10.4).

Внутреннее давление в оболочке

В этом случае в формулу (10.33) необходимо подставить следующие выражения:

$$\sigma'_{\varphi} = p_0\left[\frac{3}{2} + \cos 2\varphi + \pi\beta^2\left(1 + \frac{5}{4}\cos 2\varphi\right)\right];$$

$$\sigma''_{\varphi} = -3p_0\frac{(1+\mu)}{4}\frac{r_0^2}{\delta^2}\left[4\left(1 + \ln\frac{\gamma\beta}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{12}\frac{(7+5\mu)}{(3+\mu)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{5}{k_1}\ln\frac{\gamma\beta}{\sqrt{2}} - \frac{1}{6}\frac{(13+23\mu)}{(3+\mu)}\right)\cos 2\varphi - \frac{\cos 4\varphi}{4k_1}\right],$$

где p_0 — внутреннее давление. Здесь принято, что отверстие закрыто крышкой, передающей на контур действие давления в виде перерезывающей силы, эквивалентной действию нагрузки на круговое отверстие.

Кручение оболочки со свободным отверстием

В этом случае имеем:

$$\sigma'_{\varphi} = -4\frac{\tau}{\delta}\left[\left(1 + \sqrt{3\left(1-\mu^2\right)}\right)\frac{\pi r_0^2}{8R\delta}\right]\sin 2\varphi;$$

$$\sigma''_\varphi = \frac{\tau}{\delta}\frac{(1+\mu)r_0^2}{4k_1R\delta}\left[2\left(3k_1 - 2 - 12\ln\frac{\gamma\beta}{\sqrt{2}}\right)\sin 2\varphi - 3\sin 4\varphi\right],$$

где $\tau = \dfrac{M_0}{2\pi R^2}$; M_0 — крутящий момент.

Контур отверстия нагружен погонным изгибающим моментом

Для этого способа нагружения получаем:

$$\sigma'_\varphi = \frac{3(1+\mu)r_0^2}{2R\delta^3}M\left[4\ln\frac{\gamma\beta}{\sqrt{2}} + \left(4\ln\frac{\gamma\beta}{\sqrt{2}} + 3\right)\cos 2\varphi\right];$$

$$\sigma''_\varphi = \frac{\pi r_0^2}{2\delta^2}M\left\{-\frac{2}{\pi r_0^2} + \frac{\beta^2}{r_0^2}\left[2\frac{(1+\mu)}{(1-\mu)} - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3+\mu} - \frac{3}{2}\frac{(1-\mu)}{(1+\mu)}\right)\cos 2\varphi\right]\right\},$$

где M — погонный изгибающий момент, действующий по краю отверстия на поверхности цилиндрической оболочки.

10.8.2. Конические оболочки

Как и в случае цилиндрических оболочек, основное напряженное состояние принимается безмоментным, а для расчета возмущенного состояния применяются уравнения теории пологих оболочек. На рис. 10.5 изображена развертка конуса и указаны основные геометрические размеры, используемые в дальнейшем.

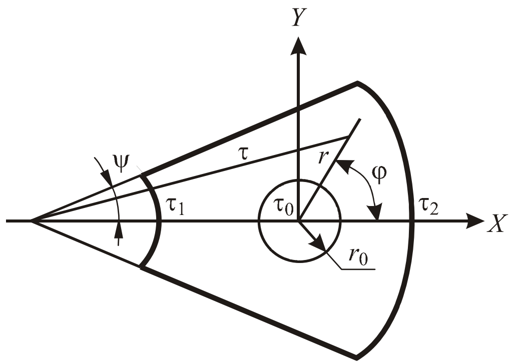


Рис. 10.5. Развертка конуса с отверстием

Декартова система координат x, y связана с центром отверстия, а полярная τ, ψ — с вершиной развертки, причем координатные линии $\tau = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$ совпадают с направлениями главных кривизн оболочки. Полярная система координат r, φ связана с центром отверстия. Переход от одной системы координат к другой осуществляется по формулам:

$$x = r\cos\varphi = \tau\cos\psi - \tau_0; \quad y = r\sin\varphi = \tau\sin\psi.$$

Решение уравнения пологих оболочек получено разложением в ряд по малому параметру $\dfrac{1}{\bar{\tau}_0}$, где $\bar{\tau}_0 = \dfrac{\tau_0}{r_0}$.

Кручение оболочки с отверстием

К торцам оболочки $\tau = \tau_1$ и $\tau = \tau_2$ приложены одинаковые, но противоположно направленные моменты $M_{кр}$. В области $\tau_1 \le \tau \le \tau_2$ они создают безмоментные сдвигающие усилия $T_{\tau\psi}$, которые можно определить из следующего условия равновесия:

$$T_{\tau\psi} = 2\pi\tau^2 \sin^2\alpha_k = M_{кр},$$

откуда $T_{\tau\psi} = \dfrac{\tau_0^2}{\tau^2} T_0$, где α_k — угол полураствора конуса; $T_0 = \dfrac{M_{кр}}{2\pi R_0^2 \cos^2\alpha_k}$; R_0 — второй главный радиус кривизны параллели конуса, проходящей через центр отверстия.

Суммарное напряжение на контуре отверстия (верхний знак относится к наружной поверхности) определяются по формуле (10.33) как сумма безмоментных и изгибных напряжений. В данном случае безмоментные напряжения равны:

$$\sigma'_\varphi = -\frac{T_0}{\delta}\left[\left(4 + 2\pi\beta^2\right)\sin 2\varphi - \frac{8}{\bar{\tau}_0}\sin 3\varphi + \frac{12}{\bar{\tau}_0^2}\sin 4\varphi\right],$$

а изгибные:

$$\sigma''_\varphi = \frac{T_0}{\delta}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{3(3+\mu)^2}}\beta^2\left[2\left(\frac{3(3+\mu)}{1-\mu} - 2 - 12\ln\tilde{\gamma}\right)\sin 2\varphi - 3\sin 4\varphi\right],$$

где $\beta = \sqrt[4]{\dfrac{3\left(1-\mu^2\right)}{4R^2\delta^2}}r_0$; $\tilde{\gamma} = \dfrac{\gamma\beta}{\sqrt{2}}$; $\ln\gamma = 0{,}577216$ — постоянная Эйлера.

Внутреннее давление в оболочке с малым отверстием

Под действием постоянного внутреннего давления p_0 в конической оболочке возникают безмоментные напряжения, определяемые по формулам:

$$\sigma_1 = \frac{p_0 \tau}{2\delta} \operatorname{tg} \alpha_k ; \quad \sigma_2 = \frac{p_0 \tau}{\delta} \operatorname{tg} \alpha_k .$$

Для вычисления мембранных и изгибных напряжений на контуре отверстия получены следующие формулы [10.3]:

$$\sigma'_\varphi = \frac{p_0 R_0}{\delta}\left[\frac{3}{2} + \cos 2\varphi + \pi\beta^2\left(1 + \frac{5}{4}\cos 2\varphi\right) + \frac{1}{\bar{\tau}_0}\left(\frac{3}{2}\cos\varphi - \frac{1}{2}\cos 3\varphi\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\bar{\tau}_0^2}\left(\frac{3}{8} - \frac{3}{4}\cos 2\varphi + \frac{3}{8}\cos 4\varphi - \frac{3}{32}\pi\beta^2\cos 2\varphi\right)\right];$$

$$\sigma''_\varphi = -6 p_0 R_0 \beta^2 \sqrt{\frac{1+\mu}{3(1-\mu)}}\left[4(1+\ln\tilde{\gamma}) - \frac{1}{4} - \left(\frac{7+5\mu}{12(3+\mu)} + \frac{5(1-\mu)}{(3+\mu)}\ln\tilde{\gamma} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{13+23\mu}{6(3+\mu)}\right)\cos 2\varphi - \frac{4(1-\mu)}{(3+\mu)}\cos 4\varphi\right].$$

Переменное внутреннее давление

Рассмотрим конический сосуд с жидкостью, вращающийся вокруг своей оси с угловой скоростью ω. В оболочке без отверстия возникают безмоментные напряжения:

$$\sigma_1 = \frac{1}{4} Q \tau^3 \sin^2\alpha_k \operatorname{tg}\alpha_k ; \quad \sigma_2 = Q\tau^3 \sin^2\alpha_k \operatorname{tg}\alpha_k ,$$

где $Q = \dfrac{\rho\omega^2}{2}$; ρ — плотность жидкости.

Закон распределения напряжений на краю отверстия имеет вид:

$$\sigma'_\varphi = \frac{Q R_0^3}{8\delta}\cos^2\alpha_k\left[2\left(5 - 6\cos^2\varphi\right) + \pi\beta^2\left(8 + 11\cos^2\varphi\right) + \frac{6}{\bar{\tau}_0}(\cos\varphi + 5\cos\varphi)\right].$$

Растяжение оболочки с малым отверстием

Безмоментные напряжения в усеченной конической оболочке, растянутой погонными усилиями, приложенными к торцам τ_1 и τ_2 оболочки, равны соответственно в меридиональном и тангенциальном направлениях: $\sigma_1 = \sigma_0 \dfrac{\tau_0}{\tau}$; $\sigma_2 = 0$, где $\sigma_0 = \dfrac{T_0}{\delta}$ — напряжения; T_0 — погонное усилие в сечении, проходящем через центр отверстия.

В этом случае:

$$\sigma'_\varphi = \frac{T_0}{\delta}\left\{1-\left(2+\frac{\pi\beta^2}{2}\right)\cos 2\varphi + \frac{1}{\overline{\tau}_0}\left(3\cos 3\varphi - \cos\varphi\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4\overline{\tau}_0^2}\left[1+6\cos 2\varphi - 15\cos 4\varphi + \frac{\pi\beta^2}{4}\left(4+7\cos 2\varphi\right)\right]\right\};$$

$$\sigma''_\varphi = 1{,}5\beta^2 \frac{T_0}{\delta}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{3(3+\mu)^2}}\left[\frac{3+\mu}{1-\mu} + \left(\frac{1}{3} + \frac{3(3+\mu)}{1-\mu} + 4\ln\frac{\gamma\beta}{\sqrt{2}}\right)\cos 2\varphi - \cos 4\varphi\right].$$

10.8.3. Сферические днища со свободным отверстием

Рассмотрим сферическое днище радиуса R_c, нагруженное постоянным внутренним давлением p_0. В вершине поверхность днища ослаблена круговым отверстием радиуса r_0. Если днище закреплено по основанию, то вдали от отверстия и основания напряжения определяются по безмоментной теории. Соответствующие меридиональные и тангенциальные напряжения одинаковые и определяются по формуле:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{p_0 R_c}{2\delta},$$

а радиальное перемещение:

$$w = \frac{p_0 R_c^2}{2E\delta}(1-\mu).$$

Как и ранее, напряженное состояние вблизи отверстия представляется в виде суммы основного безмоментного и возмущенного состояний [10.5]. Для определения возмущенного состояния используется теория пологих оболочек. Для получения решения около неподкрепленного отверстия считается, что отверстие закрыто крышкой такой конструкции, которая передает на оболочку только действие перерезывающей силы. Решение удобно представить через коэффициент концентрации напряжений, который равен отношению суммарных напряжений (безмоментных и возмущенных) к безмоментным напряжениям. Этот коэффициент выражается через функции Кельвина—Томпсона, для которых здесь используются следующие обозначения:

$$her(\beta) = \psi_3(\beta); \quad her'(\beta) = \psi_3'(\beta); \quad her''(\beta) = \psi_4(\beta) - \frac{1}{\beta}\psi_3'(\beta);$$

$$hei(\beta) = \psi_4(\beta); \quad hei'(\beta) = \psi_4'(\beta); \quad hei''(\beta) = -\psi_3(\beta) - \frac{1}{\beta}\psi_4'(\beta).$$

Коэффициент концентрации напряжений на контуре отверстия зависит только от коэффициента Пуассона μ и коэффициента $\beta = r_0 \sqrt[4]{\frac{12\left(1-\mu^2\right)}{R_c^2\delta^2}}$ и записывается в виде следующей зависимости:

$$K = 1 + \beta\frac{A \mp B}{C},$$

где верхний знак относится к наружной поверхности, а соответствующие выражения для A, B, C имеют вид:

$$A = \left[\beta her(\beta) - (1-\mu) hei'(\beta)\right] hei''(\beta) - \left[\beta hei(\beta) + (1-\mu) her'(\beta)\right] her''(\beta);$$

$$B = \sqrt{3\left(1-\mu^2\right)}\left[her(\beta)\cdot her'(\beta) + hei(\beta)\cdot hei'(\beta)\right];$$

$$C = \beta\left[hei(\beta)\cdot her'(\beta) - her(\beta)\cdot hei'(\beta)\right] + (1-\mu)\left[\left(her'(\beta)\right)^2 + \left(hei'(\beta)\right)^2\right].$$

В табл. 10.1 приведены значения коэффициента концентрации напряжений на контуре кругового отверстия в сферическом днище при $\mu = 0{,}3$ и различных значениях коэффициента β.

Таблица 10.1. *Коэффициент концентрации напряжений на кромке круглого отверстия*

β	0,9089	1,5363	2,8742	4,0648	6,6378	8,6227	13,8871
K	3,5023	4,5974	6,6965	8,4314	11,9510	14,7250	21,9600

Как видно из таблицы, напряжения у краев отверстия могут в несколько раз превышать безмоментные напряжения. Концентрация напряжений возрастает при увеличении коэффициента β, т. е. при увеличении радиуса отверстия.

Для компенсации ослабления днища и уменьшения концентрации напряжений отверстие окантовывается добавочным материалом. Способ выбора количества материала для окантовки одинаковый для оболочек любой конфигурации, поэтому рассмотрим этот вопрос отдельно.

10.9. Компенсация ослабления емкостей вблизи отверстий

Ослабление оболочки вблизи отверстия компенсируется добавочным материалом или увеличением толщины оболочки в этой зоне. В практике проектирования сосудов широкое распространение получил метод усиления вырезов, который хорошо согласуется с расчетными и экспериментальными данными. По этому методу металл, удаленный из оболочки, должен быть размещен в виде окантовывающего усиления, т. е. эффективная площадь окантовки в меридиональном сечении определяется из условия:

$$F_{эф} \geq r_0 \delta_{\min},$$

где $\delta_{\min}$ — толщина оболочки, определенная по формулам безмоментной теории оболочек; $r_0 \delta_{\min}$ — площадь сечения материала, удаляемого из отверстия. Если принять, что конструктивная толщина оболочки δ обычно больше толщины, определенной в результате расчета, то эффективная площадь подкрепления отверстия состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое определяет площадь прямоугольника высотой h_1 (рис. 10.6), а второе учитывает подкрепляющее действие за счет увеличения толщины оболочки.

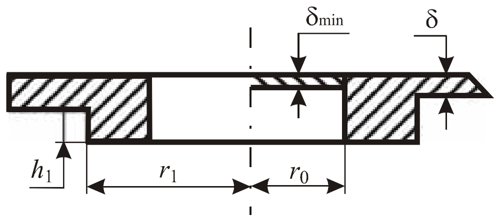


Рис. 10.6. Схема подкрепления отверстия в сосуде

Тогда эффективная площадь сечения подкрепления определяется из условия:

$$h_1 (r_1 - r_0) + r_0 (\delta - \delta_{\min}) \geq r_0 \delta_{\min}. \tag{10.34}$$

Рассмотрим порядок определения размеров окантовки на примере цилиндрической и сферической оболочек.

Определяем минимальную толщину оболочки по безмоментной теории:

для цилиндра $\delta_{\min} = \dfrac{p_0 R}{[\sigma]}$; для сферы $\delta_{\min} = \dfrac{p_0 R_c}{2[\sigma]}$.

Из конструкторско-технологических соображений назначаем толщину δ, бóльшую чем $\delta_{\min}$.

Задаемся высотой окантовки $h_1 \le 2\delta$.

Из условия (10.34) находим внешний радиус цилиндрической или сферической оболочек:

$$r_1 = r_0 \left(1 + \frac{2\delta_{\min} - \delta}{h_1} \right).$$

Если $\delta \ge 2\delta_{\min}$, то окантовка отверстия не требуется.

Выводы

В этой главе были изучены следующие вопросы:

1. Получены уравнения тонких оболочек при несимметричной нагрузке в цилиндрической системе координат.
2. Уравнения цилиндрических оболочек упрощены при помощи гипотез, и получены уравнения пологих оболочек.
3. Рассмотрены ограничения на область использования уравнений пологих оболочек, и проанализированы методы их решения.
4. Решена задача о напряженно-деформированном состоянии в горизонтальном цилиндре, заполненном жидкостью.
5. Рассмотрены особенности расчета напряжений в области отверстий и способы компенсации ослабления емкостей вблизи этих отверстий.

Упражнения и вопросы

1. При каком геометрическом условии оболочка может считаться пологой?
2. Сформулируйте гипотезы пологих оболочек и укажите, какие упрощения уравнений тонких оболочек они позволяют сделать.
3. Получите из уравнений теории пологих оболочек уравнение изгиба тонкой пластинки.

4. Запишите выражения для операторов ∇^2, ∇^4, ∇^6 и ∇^8.
5. Как из уравнений пологих оболочек получается уравнение плоской задачи теории упругости?
6. Приведите примеры конструкций, расчет которых можно проводить на основе теории пологих оболочек.
7. Получите решение уравнений пологих оболочек для случая точечного нагружения цилиндра локальной внешней силой, направленной по его радиусу.
8. Из каких составляющих складывается решение в области отверстий на пологой оболочке?
9. Постройте эпюру напряжений около отверстия в цилиндре, который нагружен внутренним давлением, а отверстие закрыто крышкой.
10. В каком случае окантовка отверстия в конической емкости не требуется?
11. Постройте эпюру напряжений около отверстия в конусе, который нагружен внутренним давлением.

Литература к главе 10

1. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. — М.: Наука, 1967, 984 с.
2. Власов В. З. Общая теория оболочек и ее применения в технике.— Л.: Гостехиздат, 1949.
3. Гузь А. Н., Луговой П. З., Шульга Н. А. Конические оболочки, ослабленные отверстиями. — Киев: Наукова думка, 1976, 162 с.
4. Гузь А. Н. и др. Цилиндрические оболочки, ослабленные отверстиями. — Киев: Наукова думка, 1974, 270 с.
5. Гузь А. Н., Чернышенко И. С., Шныренко К. И. Сферические днища, ослабленные отверстиями. — Киев: Наукова думка, 1970, 324 с.
6. Доннел Л. Г. Балки, пластины и оболочки. — М.: Наука, 1982, 568 с.
7. Колкунов Н. В. Основы расчета упругих оболочек. — М.: Высшая школа, 1972, 296 с.
8. Образцов И. Ф. и др. Строительная механика летательных аппаратов. — М.: Машиностроение, 1986, 536 с.
9. Самуль В. И. Основы теории упругости и пластичности. — М: Высшая школа, 1970, 288 с.

Глава 11

Многослойные оболочки

Эта глава не содержит подробных и исчерпывающих сведений по теории и методам расчета многослойных оболочек. В ней изложены только простые и удобные способы расчета таких оболочек с помощью безмоментной теории и приведения многослойной оболочки к эквивалентной однослойной.

В этой главе будут рассмотрены следующие темы:

- ❒ расчет двухслойной цилиндрической оболочки по безмоментной теории;
- ❒ расчет двухслойного конуса по безмоментной теории;
- ❒ энергия деформации многослойной оболочки;
- ❒ приведение изотропной многослойной оболочки с постоянными коэффициентами Пуассона к эквивалентной однослойной;
- ❒ приведение ортотропной многослойной оболочки, свойства которой симметричны относительно срединной поверхности, к эквивалентной однослойной.

11.1. Двухслойный цилиндр

Схема двухслойной цилиндрической оболочки с днищем изображена на рис. 11.1. В осевом направлении эта оболочка нагружена силой и равнодействующей внутреннего давления по поверхности днища.

Уравнение равновесия выделенной части (рис. 11.1) в проекции на ось симметрии запишется так:

$$2\pi R\left(N_1^{(1)}+N_1^{(2)}\right)=p_0\pi R^2-T\,, \tag{11.1}$$

а уравнение Лапласа для внутреннего слоя:

$$\frac{N_2^{(1)}}{R}=p_0-q_k\,, \tag{11.2}$$

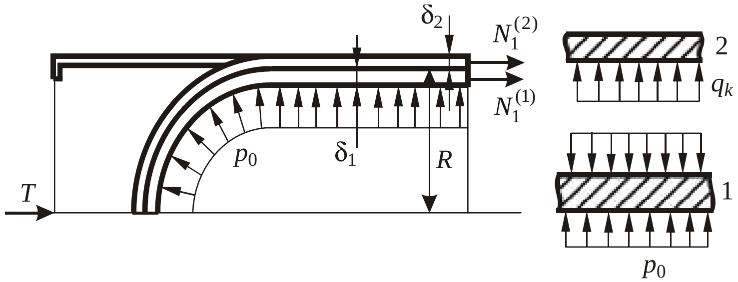


Рис. 11.1. К составлению уравнения равновесия двухслойного цилиндра

где q_k — контактное давление, а для наружного слоя:

$$\frac{N_2^{(2)}}{R} = q_k . \tag{11.3}$$

Складывая (11.2) и (11.3), получаем:

$$N_2^{(1)} + N_2^{(2)} = p_0 R . \tag{11.4}$$

Уравнений (11.1) и (11.4) недостаточно для определения напряжений в слоях, поэтому дополним их условиями совместности деформаций.

Будем считать, что слои деформируются как единое целое, а сдвиг между ними отсутствует [11.2]. Тогда относительные деформации будут одинаковыми в осевом направлении $\varepsilon_1^{(1)} = \varepsilon_1^{(2)}$ и в тангенциальном $\varepsilon_2^{(1)} = \varepsilon_2^{(2)}$.

Полагая, что внутренний слой изготовлен из ортотропного материала, а наружный — из изотропного, и, используя закон Гука, перепишем эти условия следующим образом:

$$\frac{1}{E_1^{(1)}\delta_1}\left(N_1^{(1)} - \mu_2 N_2^{(1)}\right) = \frac{1}{E^{(2)}\delta_2}\left(N_1^{(2)} - \mu N_2^{(2)}\right);$$

$$\frac{1}{E_2^{(1)}\delta_1}\left(N_2^{(1)} - \mu_1 N_1^{(1)}\right) = \frac{1}{E^{(2)}\delta_2}\left(N_2^{(2)} - \mu N_1^{(2)}\right).$$

Преобразовывая записанные условия, приходим к следующей системе уравнений:

$$\delta_1\sigma_1^{(1)} + \delta_2\sigma_1^{(2)} = \frac{p_0 R}{2}\left(1 - \frac{T}{\pi R^2 p_0}\right);$$

$$\delta_1\sigma_2^{(1)} + \delta_2\sigma_2^{(2)} = p_0 R ;$$

$$\frac{1}{E_1^{(1)}}\sigma_1^{(1)} - \frac{1}{E^{(2)}}\sigma_1^{(2)} - \frac{\mu_2}{E_1^{(1)}}\sigma_1^{(1)} + \frac{\mu}{E^{(2)}}\sigma_2^{(2)} = 0\,;$$

$$\frac{\mu_1}{E_2^{(1)}}\sigma_1^{(1)} + \frac{\mu}{E^{(2)}}\sigma_1^{(2)} + \frac{1}{E_2^{(1)}}\sigma_2^{(1)} - \frac{1}{E^{(2)}}\sigma_2^{(2)} = 0\,.$$

Решая систему уравнений, находим безмоментные напряжения в слоях оболочки.

11.2. Двухслойный конус

Теперь рассмотрим двухслойный конус, заполненный жидкостью (рис. 11.2), на внешней поверхности которого действует постоянное давление Δp_a. Кроме того, конус движется с ускорением, и на него действуют постоянные осевые перегрузки n_x.

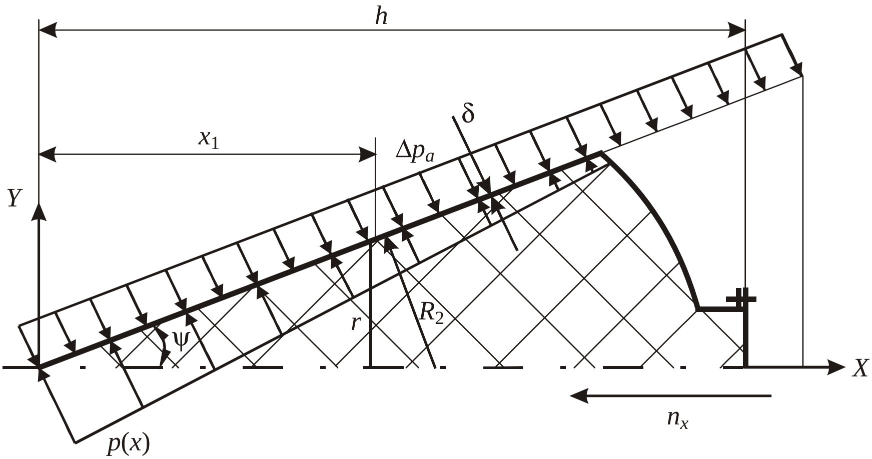


Рис. 11.2. Двухслойный конус, заполненный жидкостью

Определяя напряжения в слоях по безмоментной теории, сделаем также следующие допущения:

- сдвиг между слоями отсутствует;
- слои деформируются в виде единого пакета без появления зазоров между ними;
- радиусы кривизны слоев одинаковые.

Выделим нижнюю часть конуса (рис. 11.3) и составим для нее уравнение равновесия в проекции на ось симметрии:

$$2\pi r\cos\psi\left(\sigma_1^{(1)}\delta_1+\sigma_1^{(2)}\delta_2\right)=Gn_x+p(x)\pi\cdot r^2-\Delta p_a\pi\cdot r^2,$$

из которого получаем:

$$\sigma_1^{(1)}\delta_1+\sigma_1^{(2)}\delta_2=\frac{\left(\dfrac{Gn_x}{\pi r^2}-p(x)-\Delta p_a\right)}{2\cos\psi}\equiv A. \qquad (11.5)$$

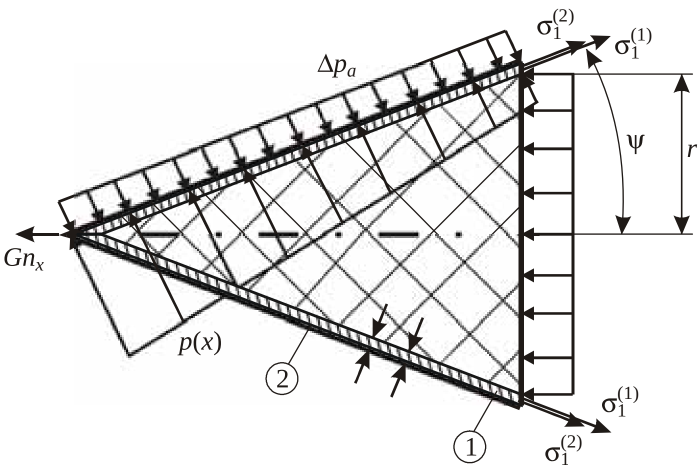


Рис. 11.3. К составлению уравнения равновесия части конуса

Так как в этом случае первый главный радиус кривизны $R_1=\infty$, то уравнение Лапласа, записанное через тангенциальное погонное усилие N_2, имеет вид:

$$\frac{N_2}{R_2}=f\left(p(x)-\Delta p_a\right)\equiv p_p. \qquad (11.6)$$

Но:

$$N_2=\int_\delta \sigma_2 dz=\int_{\delta_1}\sigma_2^{(1)}dz+\int_{\delta_2}\sigma_2^{(2)}dz=\sigma_2^{(1)}\delta_1+\sigma_2^{(2)}\delta_2,$$

поэтому из (11.6) имеем:

$$\sigma_2^{(1)}\delta_1+\sigma_2^{(2)}\delta_2=p_pR_2\equiv B. \qquad (11.7)$$

В двух уравнениях (11.5) и (11.7) четыре неизвестных напряжения, поэтому для получения двух дополнительных уравнений воспользуемся условиями деформации слоев.

На основании допущений $\varepsilon_1^{(1)} = \varepsilon_1^{(2)}$; $\varepsilon_2^{(1)} = \varepsilon_2^{(2)}$, поэтому, воспользовавшись законом Гука, имеем:

$$\frac{1}{E^{(1)}}\left(\sigma_1^{(1)} - \mu_1\sigma_2^{(1)}\right) = \frac{1}{E^{(2)}}\left(\sigma_1^{(2)} - \mu_2\sigma_2^{(2)}\right);$$

$$\frac{1}{E^{(1)}}\left(\sigma_2^{(1)} - \mu_1\sigma_1^{(1)}\right) = \frac{1}{E^{(2)}}\left(\sigma_2^{(2)} - \mu_2\sigma_1^{(2)}\right),$$

откуда:

$$\sigma_1^{(1)} - b\sigma_1^{(2)} - \sigma_2^{(1)} + a\sigma_2^{(2)} = 0; \tag{11.8}$$

$$-\mu_1\sigma_1^{(1)} + a\sigma_1^{(2)} + \sigma_1^{(1)} - b\sigma_2^{(2)} = 0, \tag{11.9}$$

где обозначено $a = \mu_2 \dfrac{E^{(1)}}{E^{(2)}}$; $b = \dfrac{E^{(1)}}{E^{(2)}}$.

Решение системы линейных алгебраических уравнений (11.6)—(11.9) можно получить путем простых алгебраических преобразований. Из (11.6) имеем:

$$\sigma_1^{(1)} = \frac{A - \sigma_1^{(2)}\delta_2}{\delta_1}, \tag{11.10}$$

а из (11.7):

$$\sigma_2^{(1)} = \frac{B - \sigma_2^{(2)}\delta_2}{\delta_1}. \tag{11.11}$$

Подставляя (11.10) и (11.11) в (11.8), получаем:

$$-\left(\frac{\delta_2}{\delta_1} + b\right)\sigma_1^{(2)} - \left(\mu_1\frac{\delta_2}{\delta_1} + a\right)\sigma_2^{(2)} = -\frac{A}{\delta_1} + \mu_2\frac{B}{\delta_1}, \tag{11.12}$$

а после подстановки в (11.9):

$$\left(\mu_2\frac{\delta_2}{\delta_1} + a\right)\sigma_1^{(2)} - \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} + b\right)\sigma_2^{(2)} = -\frac{B}{\delta_1} + \mu_2\frac{A}{\delta_1}. \tag{11.13}$$

Обозначая $a_1=\frac{\delta_2}{\delta_1}+b$; $b_2=\mu_2\frac{\delta_2}{\delta_1}+a$; $c_1=-\frac{A}{\delta_1}+\mu_1\frac{B}{\delta_1}$; $c_2=-\frac{B}{\delta_1}+\mu_2\frac{A}{\delta_1}$, перепишем (11.12) и (11.13) так:

$$-a_1\sigma_1^{(2)}+b_1\sigma_2^{(2)}=c_1;$$

$$b_1\sigma_1^{(2)}-a_1\sigma_2^{(2)}=c_2.$$

Решая полученную систему уравнений, имеем следующие выражения для меридиональных и тангенциальных напряжений во втором слое оболочки:

$$\sigma_1^{(2)}=\frac{c_1a_1+b_1c_2}{b_1^2-a_1^2};\quad \sigma_2^{(2)}=\frac{c_1b_1+c_2a_1}{b_1^2-a_1^2},$$

а соответствующие напряжения в первом слое $\sigma_1^{(1)}$ и $\sigma_2^{(1)}$ определятся теперь из формул (11.10) и (11.11).

Расчеты показывают, что слой с низким модулем упругости фактически не воспринимает внешнюю нагрузку.

По аналогичной схеме можно получить формулы для расчета напряжений и в многослойной стенке.

11.3. Многослойные оболочки, эквивалентные однослойным

В конструкциях различных сооружений широкое распространение получили оболочки, составленные из нескольких слоев, материал которых может иметь различные физико-механические свойства.

Расчет однослойных оболочек во многих случаях проводится без особых затруднений, и к настоящему времени накоплен обширный экспериментальный и теоретический материал, относящийся к оболочкам подобного класса.

В этой связи весьма заманчивой является попытка привести многослойную оболочку к эквивалентной однослойной и воспользоваться для расчета такой оболочки уже известными результатами. Такое приведение, очевидно, не всегда возможно, и поэтому важным является вопрос об условиях и способах получения эквивалентных однослойных оболочек [11.1]. Анализ этих условий особенно хорошо проводится с помощью выражения для потенциальной энергии упругой деформации.

11.3.1. Энергия деформации многослойной оболочки

В условиях двумерного напряженного состояния выражение для энергии деформации в единице объема имеет следующий вид:

$$u_0 = \frac{1}{2}\left(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \tau_{12}\gamma_{12}\right). \tag{11.14}$$

Для ортотропного слоя оболочки выражения для напряжений имеют вид:

$$\sigma_1 = \frac{E_1}{1-\mu_1\mu_2}\left(\varepsilon_1 + \mu_2\varepsilon_2\right); \tag{11.15}$$

$$\sigma_2 = \frac{E_2}{1-\mu_1\mu_2}\left(\varepsilon_2 + \mu_1\varepsilon_1\right); \tag{11.16}$$

$$\tau_{12} = G\gamma_{12}, \tag{11.17}$$

а для деформаций:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^0 + \kappa_1 z; \tag{11.18}$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2^0 + \kappa_2 z; \tag{11.19}$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{12}^0 + 2\kappa_{12} z. \tag{11.20}$$

Подставляя (11.15)—(11.17) в (11.14), получаем:

$$u_0 = \frac{1}{2}\left[\frac{E_1}{1-\mu_1\mu_2}\left(\varepsilon_1^2 + \mu_2\varepsilon_1\varepsilon_2\right) + \frac{E_2}{1-\mu_1\mu_2}\left(\varepsilon_2^2 + \mu_1\varepsilon_1\varepsilon_2\right) + G\gamma_{12}^2\right],$$

или с учетом того, что $E_1\mu_2 = E_2\mu_1$:

$$u_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{E_1}{1-\mu_1\mu_2}\varepsilon_1^2 + \frac{E_2}{1-\mu_1\mu_2}\varepsilon_2^2 + 2\frac{E_1\mu_2}{1-\mu_1\mu_2}\varepsilon_1\varepsilon_2 + G\gamma_{12}^2\right).$$

Подставляя сюда выражения (11.18)—(11.20) для деформаций, получаем:

$$\begin{aligned} u_0 = {}& \frac{1}{2}\left[\frac{E_1}{1-\mu_1\mu_2}\left(\varepsilon_1^0\right)^2 + \frac{E_2}{1-\mu_1\mu_2}\left(\varepsilon_2^0\right)^2 + 2\frac{E_1\mu_2}{1-\mu_1\mu_2}\varepsilon_1^0\varepsilon_2^0 + G\left(\gamma_{12}^0\right)^2\right] + \\ & + \left[\frac{E_1 z}{1-\mu_1\mu_2}\varepsilon_1^0\kappa_1 + \frac{E_2 z}{1-\mu_1\mu_2}\varepsilon_2^0\kappa_2 + \frac{E_1\mu_2 z}{1-\mu_1\mu_2}\left(\kappa_1\varepsilon_2^0 + \varepsilon_1^0\kappa_2\right) + 2Gz\gamma_{12}^0\kappa_{12}\right] + \\ & + \frac{1}{2}\left[\frac{E_1 z^2}{1-\mu_1\mu_2}\kappa_1^2 + \frac{E_2 z^2}{1-\mu_1\mu_2}\kappa_2^2 + 2\frac{E_1\mu_1\mu_2 z^2}{1-\mu_1\mu_2}\kappa_1\kappa_2 + 4G\kappa_{12}^2 z^2\right], \end{aligned} \tag{11.21}$$

или:

$$u_0 = u_{OB} + u_{OC} + u_{OD}\,,$$

где введены обозначения для соответствующих групп слагаемых в первой, второй и третьей квадратных скобках выражения (11.21).

Теперь, выбирая в качестве координатной срединную поверхность оболочки, проинтегрируем по толщине δ полученное выражение и получаем:

$$U_B = \frac{\delta}{2}\left[\frac{E_1}{1-\mu_1\mu_2}\varepsilon_1^{02} + \frac{E_2}{1-\mu_1\mu_2}\varepsilon_2^{02} + 2\frac{E_1\mu_2}{1-\mu_1\mu_2}\varepsilon_1^0\varepsilon_2^0 + G\gamma_{12}^{02}\right]; \qquad (11.22)$$

$$U_C = 0\,; \qquad (11.23)$$

$$U_D = \frac{1}{2}\left[D_1\kappa_1^2 + D_2\kappa_2^2 + 2\mu_2 D_1\kappa_1\kappa_2 + \frac{6\delta^3}{3}\kappa_{12}^2\right]. \qquad (11.24)$$

Анализируя выражение (11.21), можно сказать, что u_{OB} учитывает растяжение оболочки, u_{OD} — ее изгиб, u_{OC} — взаимное влияние растяжения и изгиба.

Таким образом, для одного слоя оболочки, как это следует из (11.21), взаимное влияние растяжения и изгиба отсутствует, если координатная поверхность совпадает со срединной поверхностью оболочки, и в этом случае энергия деформации на единицу площади поверхности оболочки равна:

$$U = U_B + U_D\,. \qquad (11.25)$$

Для многослойной оболочки в общем случае существует взаимное влияние растяжения и изгиба, и поэтому:

$$U = \sum_{i=1}^{N} U_{Bi} + \sum_{i=1}^{N} U_{Ci} + \sum_{i=1}^{N} U_{Di}\,, \qquad (11.26)$$

где N — число слоев оболочки, а индекс i указывает на то, что свойства слоев различны.

Выражение (11.25) показывает, что характерным для однослойной оболочки является отсутствие взаимного влияния растяжения и изгиба.

Поэтому для того, чтобы получить однослойную оболочку, эквивалентную многослойной, необходимо, прежде всего, избавиться в выражении (11.26) от второго слагаемого, т. е. принять условие:

$$\sum_{i=1}^{N} U_{Ci} = 0\,, \qquad (11.27)$$

которое выполняется в следующих случаях:

- ❒ однослойная оболочка;
- ❒ изотропная многослойная оболочка с одинаковыми коэффициентами Пуассона во всех слоях;
- ❒ многослойная оболочка, свойства которой симметричны относительно срединной поверхности.

Рассмотрим второй и третий случаи.

11.3.2. Изотропная многослойная оболочка с постоянными коэффициентами Пуассона

Выберем координатную поверхность многослойной оболочки так, чтобы удовлетворялось условие (11.27), которое с учетом второго слагаемого в (11.21), а также соотношения, связывающего модуль упругости и модуль сдвига $G = \frac{E}{1-\mu}$, сводится к выражению:

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\delta_i} E_i z dz = 0, \tag{11.28}$$

где z — расстояние от координатной поверхности до рассматриваемой точки оболочки; E_i — модуль упругости рассматриваемого слоя.

В этом случае слагаемые энергии деформации на единицу поверхности для эквивалентной однослойной оболочки записываются так:

$$U_B = \frac{1}{2} B_e \left[\left(\varepsilon_1^0\right)^2 + \left(\varepsilon_2^0\right)^2 + 2\mu\varepsilon_1^0\varepsilon_2^0 + \frac{1-\mu}{2}\left(\gamma_{12}^0\right)^2 \right]; \tag{11.29}$$

$$U_D = \frac{1}{2} D_e \left[\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\mu\kappa_1\kappa_2 + 2(1+\mu)\kappa_{12}^2 \right], \tag{11.30}$$

где:

$$B_e = \sum_{i=1}^{N} \int_{\delta_i} \frac{E_i}{1-\mu^2} dz; \quad D_e = \sum_{i=1}^{N} \int_{\delta_i} \frac{E_i}{1-\mu^2} z^2 dz, \tag{11.31}$$

но если считать, что оболочка однослойная, то для нее можно записать следующие выражения для жесткости на растяжение и цилиндрической жесткости:

$$B_e = \frac{E_e \delta_e}{1-\mu^2}; \quad D_e = \frac{E_e \delta_e^3}{12\left(1-\mu^2\right)}. \tag{11.32}$$

Приравнивая выражения для (11.31) и (11.32) и производя преобразования, получаем толщину и модуль упругости эквивалентной однослойной оболочки:

$$\delta_e = \sqrt{\frac{12D_e}{B_e}}\,; \quad E_e = \left(1-\mu^2\right)\sqrt{\frac{B_e^3}{12D_e}}\,, \tag{11.33}$$

где δ_e — толщина, а E_e — модуль упругости эквивалентной однослойной оболочки, которая имеет такие же деформации, как и исходная многослойная оболочка.

Проиллюстрируем изложенную теорию на конкретном примере двухслойной оболочки (рис. 11.4). Найдем сначала положение координатной поверхности с помощью условия (11.28):

$$\int\limits_{-z_0}^{-z_0+\delta_1} E_1 z dz + \int\limits_{-z_0+\delta_1}^{-z_0+\delta_1+\delta_2} E_2 z dz = 0\,, \tag{11.34}$$

откуда после интегрирования и преобразования получаем:

$$z_0 = \delta_1 + \frac{E_1\delta_2^2 - E\delta_1^2}{2\left(E_1\delta_1 + E_2\delta_2\right)}\,, \tag{11.35}$$

а из (11.31):

$$B_e = \frac{1}{1-\mu^2}\left(E_1\delta_1 + E_2\delta_2\right); D_e = \frac{1}{3\left(1-\mu^2\right)}\left[E_1\delta_1^3 + E_2\delta_2^3 - \frac{3}{4}\frac{\left(E_1\delta_1^2 - E_2\delta_2^2\right)}{\left(E_1\delta_1 + E_2\delta_2\right)}\right]. \tag{11.36}$$

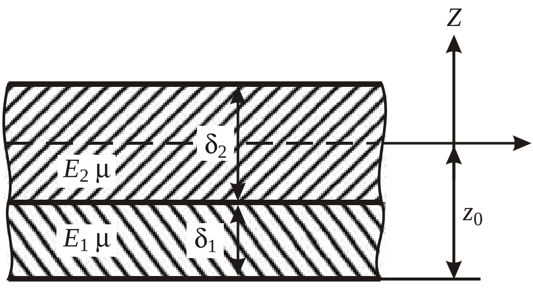


Рис. 11.4. Двухслойная оболочка, эквивалентная однослойной оболочке

Подставляя (11.36) в (11.33), находим параметры эквивалентной однослойной оболочки.

11.3.3. Многослойная ортотропная оболочка, свойства которой симметричны относительно срединной поверхности

В рассматриваемом случае срединная поверхность оболочки используется в качестве координатной, причем свойства слоев совершенно симметричны относительно нее.

Например, на рис. 11.5 изображена трехслойная оболочка, которая имеет два внешних одинаковых слоя, а срединная поверхность делит внутренний слой на две одинаковые части. Ясно, что в этом случае $U_C = 0$, и энергия деформации на единицу площади равна:

$$U = U_B + U_D\,, \tag{11.37}$$

где:

$$U_B = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{N} B_{1i}\left(\varepsilon_1^0\right)^2 + \sum_{i=1}^{N} B_{2i}\left(\varepsilon_2^0\right)^2 + 2\sum_{i=1}^{N} \mu_{2i} B_{1i}\varepsilon_1^0\varepsilon_2^0 + \sum_{i=1}^{N} B_{Gi}\left(\gamma_{12}^0\right)^2\right]; \tag{11.38}$$

$$U_D = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{N} D_{1i}\kappa_1^2 + \sum_{i=1}^{N} D_{2i}\kappa_2^2 + 2\sum_{i=1}^{N} \mu_{2i} D_{1i}\kappa_1\kappa_2 + 4\sum_{i=1}^{N} D_{Gi}\kappa_{11}^2\right]. \tag{11.39}$$

Рис. 11.5. Трехслойная ортотропная оболочка, эквивалентная однослойной оболочке

Но для эквивалентной однослойной оболочки можно записать:

$$U_B = \frac{1}{2}\left[B_{1e}\left(\varepsilon_1^0\right)^2 + B_{2e}\left(\varepsilon_2^0\right)^2 + 2\mu_{2B} B_{1e}\varepsilon_1^0\varepsilon_2^0 + B_{Ge}\kappa_{12}^2\right]; \tag{11.40}$$

$$U_D = \frac{1}{2}\left[D_{1e}\kappa_1^2 + D_{2e}\kappa_2^2 + 2\mu_{2D} D_{1e}\kappa_1\kappa_2 + 4D_{Ge}\kappa_{12}^2\right], \tag{11.41}$$

где:

$$B_{1e} = 2\sum_{i=1}^{N} \frac{E_{1i}\delta_i}{\left(1-\mu_{1i}\mu_{2i}\right)}; \quad B_{2e} = 2\sum_{i=1}^{N} \frac{E_{2i}\delta_i}{\left(1-\mu_{1i}\mu_{2i}\right)}; \quad B_{Ge} = 2\sum_{i=1}^{N} G_i\delta_i\,;$$

$$\mu_{2B} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} \mu_{2i} B_{1i}}{B_{1e}}; \quad \mu_{2D} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} \mu_{2i} B_{1i}}{D_{1e}};$$

$$D_{1e} = 2\sum_{i=1}^{N}\int_{\delta_i}\frac{E_{1i}z^2}{(1-\mu_{1i}\mu_{2i})}dz\,; \quad D_{2e} = 2\sum_{i=1}^{N}\frac{E_{2i}z^2}{(1-\mu_{1i}\mu_{2i})}dz\,; \quad D_{Ge} = 8\sum_{i=1}^{N}\int_{\delta_i}G_i z^2 dz\,.$$

Здесь принято, что N — число слоев, отсчитываемых от срединной поверхности в одну сторону, и при нечетном числе слоев интегрирование производится только по половине внутреннего слоя. Полная толщина эквивалентной однослойной оболочки равна сумме толщин слоев. Отметим также, что коэффициенты Пуассона однослойной оболочки при рассмотрении изгиба и растяжения различны.

Выводы

В этой главе были изучены следующие вопросы:

С помощью безмоментной теории оболочек получены соотношения для расчета напряжений и деформаций в двухслойном цилиндре и конусе, нагруженном внешним давлением.

Условия, при которых многослойная оболочка эквивалентна однослойной.

Энергия деформации многослойной оболочки.

Изотропная многослойная оболочка с постоянными коэффициентами Пуассона.

Многослойная ортотропная оболочка, свойства которой симметричны относительно срединной поверхности.

Упражнения и вопросы

1. Получите систему уравнений для определения напряжений в трехслойной стенке цилиндрического сосуда, у которого два внутренних слоя ортотропные, а наружный изотропный.
2. Составьте систему уравнений для определения напряжений, деформаций и перемещений в многослойном цилиндре с изотропными слоями.
3. Определить напряжения и коэффициент запаса прочности в ленте, охватывающей цилиндр с $R = 0{,}6$ м; $\delta = 2\cdot 10^{-3}$ м; $E = 2\cdot 10^{11}$ Па и внутренним давлением $p_0 = 4$ МПа. Лента изготовлена из дюралюминиевого сплава с $\sigma_b = 1{,}8\cdot 10^8$ Па; $E_1 = 7\cdot 10^{11}$ Па и имеет толщину $h = 5\cdot 10^{-3}$ м.
4. Постройте зависимость безразмерного относительно q_k контактного давления между слоями двухслойного цилиндра радиуса $R = 0{,}6$ м от внут-

реннего давления $p_0 = (1 \div 6)$ МПа, если внутренний слой имеет: $\delta = 2 \cdot 10^{-2}$ м; $E = 2 \cdot 10^{6}$ Па; $\mu = 0{,}5$, а наружный: $\delta = 2 \cdot 10^{-3}$ м; $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $\mu = 0{,}3$.

5. Для условий предыдущего примера получите эквивалентную однослойную оболочку, приняв, что слои имеют одинаковый коэффициент Пуассона, равный $\mu = 0{,}3$.
6. Для условий задания 3 определите эквивалентную однослойную оболочку, найдите напряжения в ней по безмоментной теории, а затем сравните их с напряжениями в слоях оболочки из этого задания.
7. Определите свойства однослойной цилиндрической оболочки $R = 0{,}6$ м, эквивалентной трехслойной оболочке, со следующими свойствами: наружный и внутренний слои имеют $\delta = 2 \cdot 10^{-3}$ м; $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $\mu = 0{,}3$, а между ними находится слой с $\delta = 2 \cdot 10^{-2}$ м; $E = 2 \cdot 10^{6}$ Па; $\mu = 0{,}5$.

Литература к главе 11

1. Алфутов Н. А., Зиновьев П. А., Попов Б. Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. — М.: Машиностроение, 1984, 264 с.
2. Гуров А. Ф., Севрук Д. Д., Сурнов Д. Н. Конструкция и расчет на прочность космических электро-ракетных двигателей. — М.: Машиностроение, 1970, 492 с.
3. Кобелев В. Н., Коварский Л. М., Тимофеев С. И. Расчет трехслойных конструкций. — М.: Машиностроение, 1984, 304 с.
4. Джонс Р. М., Клейн С. Эквивалентность между однослойными и некоторыми многослойными оболочками. Ракетная техника и космонавтика, № 12, 1968, с. 69—75.

Глава 12

Местная устойчивость элементов конструкций

Эта глава посвящена устойчивости простейших элементов конструкций в виде стержней, колец и пластинок. Из них и оболочек различных очертаний обычно формируется тонкостенная конструкция. Об устойчивости оболочек речь пойдет в следующей главе, которая посвящена общей устойчивости конструкций. Такое деление содержания по главам, конечно, условное, но в большинстве случаев основным несущим элементом тонкостенной конструкции является оболочка, а стержни, кольца и пластинки используются в качестве дополнительных элементов, и после того как они теряют устойчивость, вся конструкция может остаться геометрически неизменной, сохраняя исходную (т. е. до приложения нагрузки) геометрическую форму.

В этой главе будут изучены следующие темы:

- виды потери устойчивости;
- устойчивость стержней;
- уравнение изогнутой поверхности сжатой пластинки;
- устойчивость пластинок и подкрепленных панелей;
- кольцо, нагруженное внешним давлением;
- устойчивость сильфона при осевом сжатии.

12.1. Виды потери устойчивости

В механике различают три состояния системы — устойчивое, неустойчивое и безразличное. Начнем с общих определений этих состояний.

> Равновесное положение упругого тела считается ***устойчивым***, если получив малое отклонение от этого положения, тело возвращается в него после снятия возмущения.

Неустойчивым называется такое состояние тела, при котором любое малое отклонение от положения равновесия переводит тело в новое равновесное положение, из которого невозможен возврат в его исходное состояние.

Безразличным называют такое состояние тела, при котором любое его положение будет равновесным и возможен переход из одного равновесного состояния в любое другое.

Различают общую и местную (локальную) потерю устойчивости.

Под ***общей потерей устойчивости*** понимают возникновение новых равновесных форм, обусловленных изменением геометрической формы всей конструкции в целом.

На рис. 12.1 изображены примеры общей потери устойчивости изолированного стержня и длинной цилиндрической оболочки с легким заполнителем при их сжатии продольной силой P.

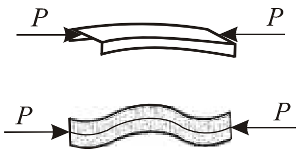


Рис. 12.1. Примеры общей потери устойчивости стержня и длинной оболочки с заполнителем

В примере, изображенном на рис. 12.1, стержень состоит из трех пластин. И если сам стержень в целом останется прямолинейным (останется прямолинейной его осевая линия), а изменит форму одна из его пластин, то в этом случае нужно говорить о местной потере устойчивости.

Местная потеря устойчивости характеризуется возникновением новых равновесных форм в пределах малого участка конструкции.

В случае местной потери устойчивости новая равновесная форма геометрически отличается от исходной, и главным фактором, определяющим эту форму, является изгиб. Как видно из рис. 12.2, местная потеря устойчивости проявляется в виде локально изогнутых участков-вмятин. Изменение геометрической формы конструкции, будь то местная или общая потеря устойчивости, и переход конструкции в новое равновесное состояние происходят при вполне определенном значении нагрузки, зависящем как от конфигурации конструкции, так и от значения внешней нагрузки.

Нагрузка, при которой начальная форма равновесия конструкции перестает быть устойчивой, называется ***критической***, а соответствующие ей напряжения — ***критическими***.

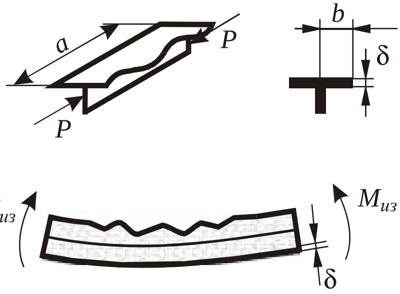


Рис. 12.2. Местная потеря устойчивости

12.2. Устойчивость стержней

В курсе сопротивления материалов выводится следующая формула Эйлера для критических напряжений потери устойчивости стержня, сжатого осевой силой:

$$\sigma_э = \frac{C\pi^2 E}{\lambda^2}, \tag{12.1}$$

где $\lambda = \dfrac{l}{r_{ин}}$ — гибкость стержня; l — его длина; $r_{ин} = \sqrt{\dfrac{I_{ин}}{F}}$ — радиус инерции поперечного сечения стержня; $I_{ин}$ — момент инерции; F — площадь поперечного сечения стержня.

Значение константы C зависит от способа закрепления концов стержня. На рис. 12.3, *а*—*г* изображены различные расчетные схемы способов закрепления стержня, которым соответствуют следующие значения константы C в формуле Эйлера (12.1):

1. $C = 0{,}25$ — свободный и жестко заделанный край (рис. 12.3, *а*).
2. $C = 1$ — оба края закреплены шарнирно (рис. 12.3, *б*).
3. $C = 2$ — жесткая заделка и шарнир (рис. 12.3, *в*).
4. $C = 4$ — защемленные края, но один из них установлен в подвижной опоре (рис. 12.3, *г*).

Формулой Эйлера (12.1) можно пользоваться, если критические напряжения не превышают предела пропорциональности. За пределом упругости рекомендуется пользоваться следующей формулой:

$$\sigma_{кр} = \sigma_b \frac{1+\nu}{1+\nu+\nu^2}, \tag{12.2}$$

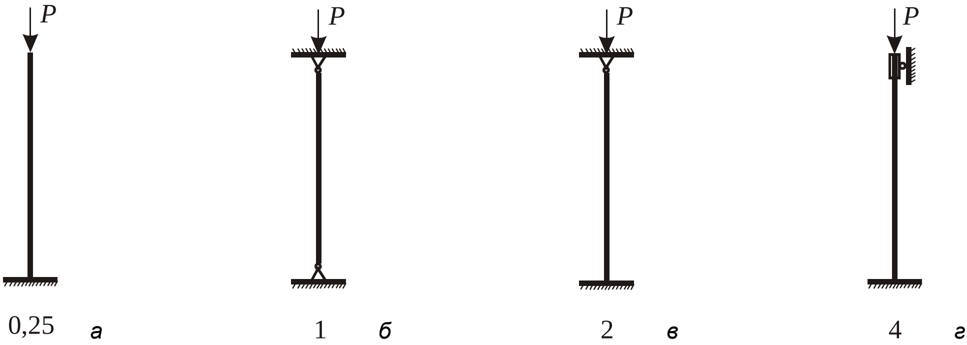


Рис. 12.3. Схемы закрепления концов стержня

где $\nu = \dfrac{\sigma_b}{\sigma_э}$; σ_b — предел прочности; $\sigma_э$ определяется по формуле Эйлера (12.1).

Если стержень находится на упругом основании, то тогда критические напряжения определяются по формуле:

$$\sigma_{кр} = 2\sigma_э\sqrt{\overline{r}}, \tag{12.3}$$

где $\overline{r} = \dfrac{C_1}{EI}\left(\dfrac{l}{\pi}\right)^4$; C_1 — коэффициент жесткости постели, определяемый по формуле для реакции основания на единицу длины стержня (погонной реакции) $q = C_1 v$; v — поперечное перемещение стержня.

Рассмотрим порядок определения этой жесткости на примере плоской сжатой панели, подкрепленной по краям двумя лонжеронами уголкового профиля, между которыми находится сжатый стрингер, опирающийся на элементы поперечного силового набора — нервюры (рис. 12.4, *а*), расположенные вдоль стрингера с шагом S. Рассматривая нервюру, как изгибаемую балку на двух опорах с шарнирным закреплением краев (рис. 12.4, *б*), имеем следующее выражение для реактивной силы:

$$R = \frac{48EI_1}{a^3}v, \tag{12.4}$$

где I_1 — момент инерции сечения нервюры; a — ее длина.

Тогда, если распределить эту реактивную силу R по стрингеру на расстояние S между нервюрами с целью получения погонной реакции основания q, то:

$$q = \frac{R}{S} = \frac{48EI_1}{Sa^3}v,$$

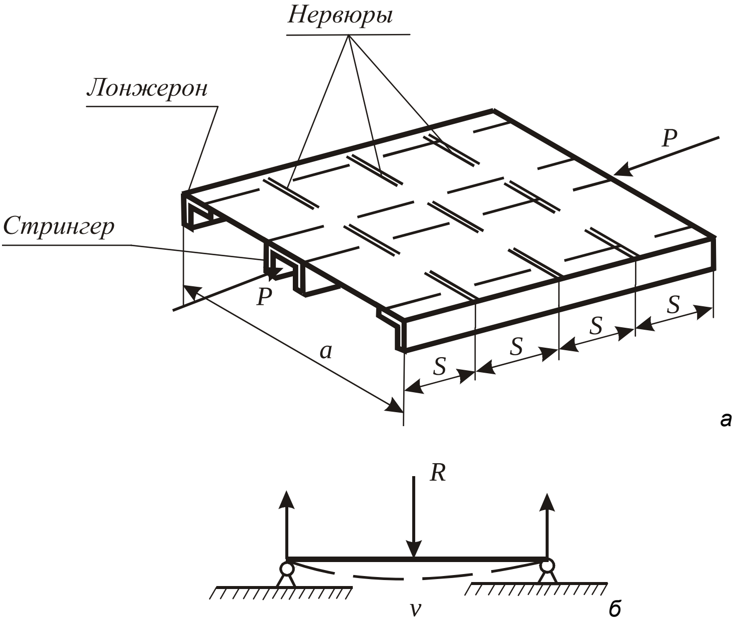


Рис. 12.4. Схема сжатой подкрепленной панели

а искомый коэффициент жесткости постели стрингера будет равен:

$$C_1 = \frac{q}{v} = \frac{48EI_1}{Sa^3}. \tag{12.5}$$

Приведенные ранее соотношения (12.1)—(12.3) получены для геометрически правильных стержней, ось которых остается прямолинейной вплоть до потери устойчивости. Однако если стержень имеет начальный прогиб в поперечном направлении, то сжимающая сила создает в нем дополнительные изгибные напряжения, величина которых зависит от отношения амплитуды начального прогиба к характерному размеру поперечного сечения. Для сжатого силой P стержня с шарнирным закреплением краев и амплитудным значением начального прогиба w_0 суммарные сжимающие напряжения (знак минус у напряжений опускаем) определяются по формуле [12.1]:

$$\sigma = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{F}{W}\frac{w_0}{\left(1 - P/P_{кр}\right)}\right),$$

где W — момент сопротивления сечения; $P_{кр}$ — критическая сила при осевом сжатии прямолинейного стержня.

Вместе с суммарными напряжениями по мере приближения значения сжимающей силы к ее критическому значению возрастает и поперечный изгиб стержня, который в этом случае определяется по формуле [12.1]:

$$w(x) \approx \frac{w_0}{\left(P_{кр}/P - 1\right)} \sin\frac{\pi x}{l},$$

из которой следует, что стержень выгибается по одной полуволне синусоиды.

Эти результаты, полученные теоретически, указывают на важность учета влияния начальных геометрических несовершенств на значения напряжений и прогибов в сжатых стержнях. Однако в практических расчетах следует пользоваться поправочными коэффициентами там, где они получены экспериментально, т. к. реальные стержни редко имеют начальную геометрическую форму в виде синусоиды.

12.3. Уравнение изогнутой срединной поверхности сжатой пластинки

Рассмотрим пластинку, сжатую силой, лежащей в срединной плоскости. До некоторого значения этой силы пластинка устойчива и принимает исходную форму после снятия поперечных изгибающих возмущений. Если внешняя сила такова, что пластинка остается изогнутой после снятия внешнего возмущения, то говорят, что она потеряла устойчивость. В этом случае пластинка изменила свою исходную геометрическую форму, и значение сжимающей силы, начиная с которой наблюдается потеря устойчивости, является *критическим*.

Потеря устойчивости пластинкой может происходить не только от сжимающих, но и от касательных усилий. Схемы пластинок, потерявших устойчивость при различных способах нагружения, приведены на рис. 12.5, *а—в*. Прогибы пластинки, так же как и стержня, сжатого вдоль оси, могут происходить в обе стороны, и никакая из сторон преимуществ в этом смысле не имеет.

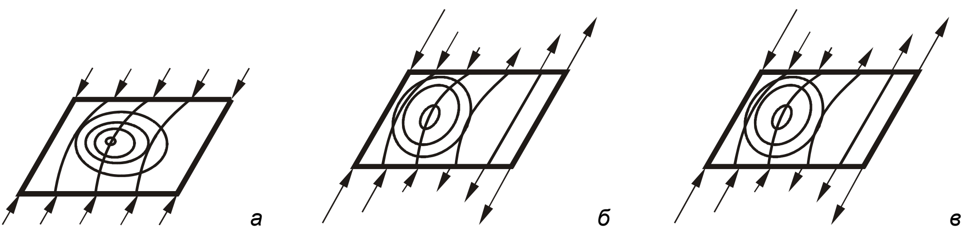


Рис. 12.5. Потеря устойчивости пластинкой при сжатии, изгибе и сдвиге

При анализе изгиба пластинки *(см. гл. 5)* считалось, что на нее действует только нагрузка, перпендикулярная срединной плоскости. Использование гипотез Кирхгофа привело к тому, что в задачах изгиба пластинок игнорируются нормальные и сдвигающие внутренние усилия, действующие на гранях выделенного из пластинки элемента.

В задачах устойчивости пластинок приходится иметь дело с этими усилиями, не равными нулю, т. к. внешние силы, изменяющие геометрическую форму пластинки, лежат в срединной плоскости.

Конечно, в реальных конструкциях изгиб пластинки часто сопровождается ее сжатием и растяжением, т. е. нагрузка, действующая на пластинку, комбинированная. В такой общей постановке задача о расчете напряженного состояния пластинки довольно сложна, и поэтому обычно изгиб пластинки и ее сжатие рассматривают отдельно и независимо друг от друга.

Получим уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки, на которую действуют силы, касательные к срединной плоскости. Ограничимся случаем, когда до потери устойчивости напряженное состояние в пластинке безмоментное. Тогда внутренние усилия и соответствующие им напряжения постоянны по толщине пластинки и определяются ее геометрией и внешними силами. На рис. 12.6 изображен бесконечно малый элемент срединной плоскости пластинки, по граням которого действуют сжимающие и сдвигающие внутренние погонные усилия. После потери устойчивости срединная плоскость пластинки значительно искривляется, а внутренние погонные усилия поворачиваются и создают проекции на ось Z, т. е. на нормаль к ней до потери устойчивости. Эти проекции и поддерживают геометрическую форму срединной поверхности пластинки искривленной, т. е. изогнутой.

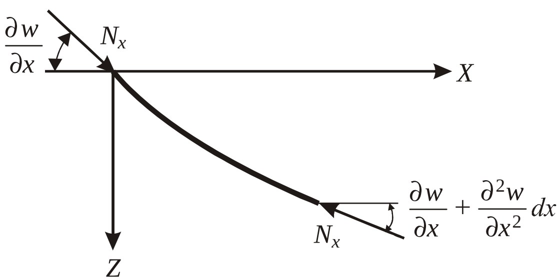


Рис. 12.6. Изогнутый элемент пластинки

Тогда в этом случае для описания изогнутой срединной поверхности можно использовать уравнение Софи Жермен (5.35), если вместо поперечной нагрузки q в нем будут фигурировать эти проекции, отнесенные к единице площади.

При выводе уравнения (5.35) считалось, что все напряжения и соответствующие им усилия и моменты положительные, а при сжатии пластинки они отрицательные. Чтобы учесть это при вычислении проекций на ось Z, направим внутренние усилия в отрицательную сторону, и тогда в уравнении будут фигурировать их абсолютные значения.

Рассматривая изгиб пластинки при сжимающей нагрузке, действующей в направлении оси X (рис. 12.7), найдем проекцию полной силы по оси Z от погонного внутреннего усилия N_x, полагая, что пластинка имеет малые углы поворота:

$$N_x \frac{\partial w}{\partial x} dy - N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) dy = -N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy .$$

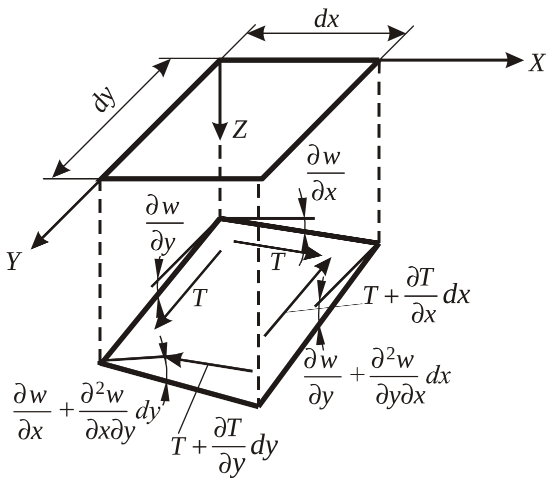


Рис. 12.7. Изгиб бесконечно малого элемента пластинки

Тогда соответствующая нагрузка на единицу площади равна:

$$-N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{12.6}$$

и аналогично от внутреннего усилия в направлении оси Y получаем:

$$-N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \tag{12.7}$$

Для определения нормальных проекций касательных усилий обратимся к рис. 12.6, на котором они также направлены в отрицательную сторону. Имеем для полной силы:

$$T\frac{\partial w}{\partial x}dx - T\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}dy\right)dx + T\frac{\partial w}{\partial y}dy - T\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}dx\right)dy + ... =$$

$$= -2T\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}dxdy.$$

Здесь многоточием обозначены слагаемые порядка, выше второго, которые отброшены.

Тогда нагрузка на единицу площади равна:

$$-2T\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \tag{12.8}$$

Теперь с учетом (12.6)—(12.8) уравнение Софи Жермен записывается в виде:

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) + N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2T\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0. \tag{12.9}$$

Полученное уравнение используется при решении задач устойчивости пластинок, начальное напряженное состояние в которых до потери устойчивости считается безмоментным.

12.4. Устойчивость бесконечно длинной пластинки, сжатой по короткой стороне

В рассматриваемом случае безмоментные внутренние усилия N_y и T равны нулю, поэтому уравнение (12.9) запишется так:

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) + N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \tag{12.10}$$

Схема нагружения пластинки и используемая система координат приведены на рис. 12.8. Кроме того, считаем, что края пластинки закреплены шарнирно, поэтому граничные условия имеют вид:

1. $x = 0$; $w = 0$.
2. $x = l$; $w = 0$, где l — длина полуволны по оси X.
3. $y = 0$; $y = b$; $w = 0$.

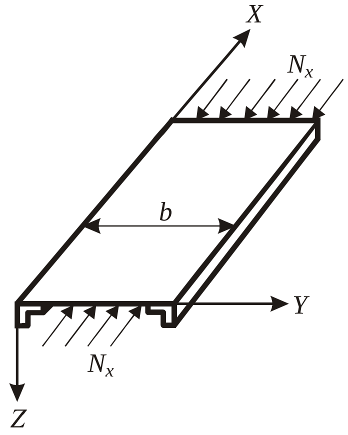


Рис. 12.8. Сжатие пластинки по короткой стороне

Второе граничное условие предполагает возникновение по оси X бесконечного числа полуволн, длина которых l неизвестна.

Обозначая через n число полуволн по оси Y, решение (12.10) запишем в следующем виде:

$$w = C\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{12.11}$$

Это выражение удовлетворяет граничным условиям. Подставляя в уравнение (12.10), описывающее изгиб пластинки после потери устойчивости, производные от w:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -C\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{b};$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = -C\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{b};$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -C\left(\frac{\pi}{b}\right)^4 \sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{b};$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = -C\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{b},$$

после преобразований с учетом (12.11) получаем:

$$Dw\left[\left(\frac{\pi}{l}\right)^4+2\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^4\right]=N_x\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 w\,,$$

откуда:

$$N_x=\frac{D\pi^2}{b^2}\left(\frac{b}{l}+\frac{n^2 l}{b}\right)^2. \qquad (12.12)$$

Наименьшее значение N_x получается при $n=1$, т. е. при одной полуволне в направлении оси Y.

Кроме того, найдем значение l, при котором сила N_x достигает минимума при $n=1$. Обозначая через $\eta=\frac{l}{b}$ и дифференцируя выражение:

$$N_x=\frac{D\pi^2}{b^2}\left(\frac{1}{\eta}+\eta\right)^2 \qquad (12.13)$$

по η, а затем приравнивая результат нулю, имеем:

$$\frac{\partial N_x}{\partial\eta}=2\frac{D\pi^2}{b^2}\frac{(1+\eta)}{\eta}\frac{\left(\eta^2-1\right)}{\eta^2}=0\,,$$

откуда $\eta=1$, т. е. $l=b$.

Тогда выражение для критической погонной силы, при которой пластинка потеряет устойчивость, запишется так:

$$N_{кр}=4\frac{D\pi^2}{b^2}\,, \qquad (12.14)$$

а соответствующие ей критические напряжения:

$$\sigma_{кр}=\frac{N_{кр}}{\delta}=4\frac{D\pi^2}{b^2\delta}\,, \qquad (12.15)$$

где δ — толщина пластинки.

Подставляя в (12.15) выражение для цилиндрической жесткости $D=\frac{E\delta^3}{12\left(1-\mu^2\right)}$, получаем:

$$\sigma_{кр}\cong 3{,}28\frac{E}{\left(1-\mu^2\right)}\left(\frac{\delta}{b}\right)^2, \qquad (12.16)$$

а при $\mu = 0{,}3$:

$$\sigma_{кр} \cong 3{,}6E\left(\frac{\delta}{b}\right)^2. \tag{12.17}$$

Таким образом, на пластинке, потерявшей устойчивость, образуются квадратные участки размером $b \times b$, причем в пределах каждого такого участка образуется по одной полуволне синусоиды в направлении осей X и Y (рис. 12.9).

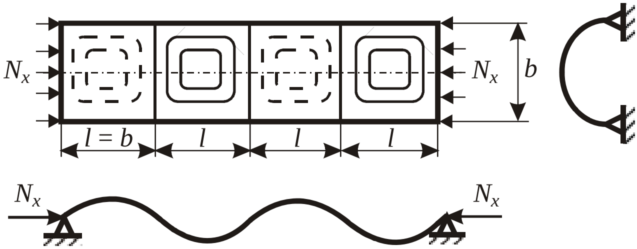


Рис. 12.9. Форма длинной пластинки, потерявшей устойчивость

12.5. Устойчивость прямоугольной пластинки

Порядок решения этой задачи мало отличается от решения задачи об устойчивости бесконечно длинной пластинки. Если длины сторон a и b пластинки сравнимы между собой, то выражение, описывающее изогнутую срединную поверхность пластинки, потерявшей устойчивость, необходимо принять в виде:

$$w = C \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{12.18}$$

где m — число полуволн, образующихся по оси X, а n — по оси Y.

Подставляя (12.18) в (12.10), получаем после преобразований:

$$N_x = \frac{D\pi^2}{b^2}\left(\frac{mb}{a} + \frac{n^2 a}{mb}\right)^2,$$

или после введения обозначения для отношения длин сторон пластинки $\eta = \dfrac{a}{b}$:

$$N_x = \frac{D\pi^2}{b^2}\left(\frac{m}{\eta} + \frac{n^2}{m}\eta\right)^2. \tag{12.19}$$

Полагая опять $n=1$, имеем:

$$N_x = \frac{D\pi^2}{b^2}\left(\frac{m}{\eta}+\frac{\eta}{m}\right)^2. \quad (12.20)$$

Но N_x зависит также и от m — числа полуволн в направлении оси *X*. Беря производную по m и приравнивая ее нулю, получаем $m=\eta=\frac{a}{b}$, и тогда:

$$N_{кр} = 4\frac{\pi^2 D}{b^2}. \quad (12.21)$$

Величина m может принимать только целые значения, поэтому полученная формула (12.21) справедлива только для пластинок с кратным отношением сторон. Если отношение сторон $\eta=\frac{a}{b}$ — не целое число, то для определения $N_{кр}$ необходимо воспользоваться формулой (12.20), которую перепишем в виде:

$$N_{кр} = k\frac{\pi^2 D}{b^2}, \quad (12.22)$$

где $k=\left(\frac{m}{\eta}+\frac{\eta}{m}\right)^2$.

На рис. 12.10 построены графики зависимости коэффициента k от отношения сторон пластинки $\eta=\frac{a}{b}$ при различных значениях m.

Нижние части построенных кривых между точками их пересечения определяют значение коэффициента k, соответствующее минимуму N_x. Что касается числа полуволн, то при $\eta<\sqrt{2}$ пластинки имеют по оси *X* одну полуволну, при $\sqrt{2}<\eta<\sqrt{6}$ — две, при $\sqrt{6}<\eta<\sqrt{12}$ — три и т. д.

В практических расчетах обычно при $\eta>0{,}7$ коэффициент k считают постоянным и равным 4. При этом ошибка, идущая в запас прочности, не превышает 13%.

Здесь было рассмотрено шарнирное закрепление краев пластинки, параллельных оси *X*, в направлении которой она сжата. Для других случаев закрепления кромок критическая погонная нагрузка определяется по той же формуле (12.22), но с другими значениями коэффициента *k*. Данные об этом коэффициенте [12.3] приведены в табл. 12.1.

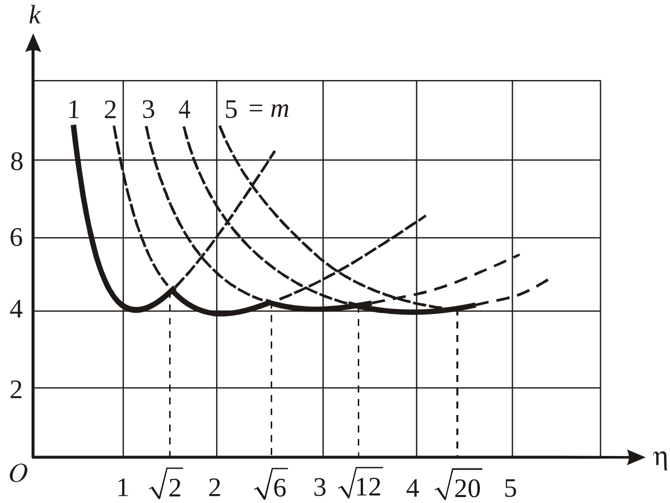


Рис. 12.10. Коэффициент устойчивости в зависимости от отношения сторон пластинки

Таблица 12.1. *Коэффициент закрепления пластинки*

№	Способ закрепления	**k** $\left(\frac{a}{b} > 0,7\right)$
1	Шарнирное по обоим краям	4,0
2	Заделка по обеим кромкам	6,97
3	Один край шарнирный, а другой свободный	0,425
4	Один край защемлен, а другой свободен	1,28

Из таблицы видно, что пластинки, имеющие свободный край, теряют устойчивость значительно раньше, чем пластинки с закрепленной кромкой. Формулы (12.21) и (12.22) определяют только величину критических погонных усилий, а их знак должен быть отрицательным, что было учтено при составлении уравнения (12.10), из которого получены указанные соотношения.

12.6. Устойчивость ортотропной и вафельной панели

Теперь рассмотрим длинную прямоугольную пластинку, у которой механические свойства отличаются в двух взаимно перпендикулярных направлениях. К таким пластинкам относятся ортотропные и вафельные пластинки. В первом случае ортотропия возникает из-за свойств самого материала, а во втором — из-за ребер, которые составляют единое целое с основанием пластинки толщиной δ, хотя материал и обладает изотропными свойствами с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона μ.

Если ребра взаимно перпендикулярны, а их размеры соизмеримы с толщиной пластинки, то можно перейти к расчетной схеме ортотропной пластинки.

Уравнение изогнутой срединной поверхности в этом случае получается из уравнений равновесия пологой оболочки (10.3)—(10.5), в которых исключается слагаемое с радиусом кривизны R. Ортотропия свойств учитывается с помощью формул из *разд. 6.6.2* для ортотропной пластинки и формул из *разд. 6.6.3* для вафельной пластинки. Далее следуя рассуждениям, приведенным в *разд. 12.3*, получаем в этом случае:

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + N_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 . \tag{12.23}$$

Для ортотропной пластинки изгибные жесткости D_1, D_2, жесткость на кручение D_k и приведенная жесткость D_3 определяются по следующим формулам:

$$D_1 = \frac{E_1 \delta^3}{12(1-\mu_1\mu_2)}; \quad D_2 = \frac{E_2 \delta^3}{12(1-\mu_1\mu_2)}; \quad D_k = \frac{G\delta^3}{12};$$
$$D_3 = D_1\mu_2 + 2D_k = D_2\mu_1 + 2D_k ,$$

где E_1, E_2 — модули упругости по двум взаимно перпендикулярным направлениям *X* и *Y*; μ_1 — коэффициент Пуассона, отвечающий поперечной деформации вдоль оси *Y*. Второй коэффициент Пуассона μ_2, соответствующий поперечной деформации по направлению оси *X*, связан с μ_1 соотношением:

$$E_1\mu_2 = E_2\mu_1 .$$

В случае вафельной пластинки (рис. 12.11) выражения для жесткостей записываются так:

$$D_1 = D + \frac{EJ_1}{l_1}; \quad D_2 = D + \frac{EJ_2}{l_2}; \quad D_3 = D = \frac{E\delta^3}{12\left(1-\mu^2\right)},$$

где J_1, J_2 — моменты инерции ребер относительно осей, проходящих через центр тяжести сечений; l_1 — расстояние между ребрами, направленными по оси *X*, а l_2 — по оси *Y*.

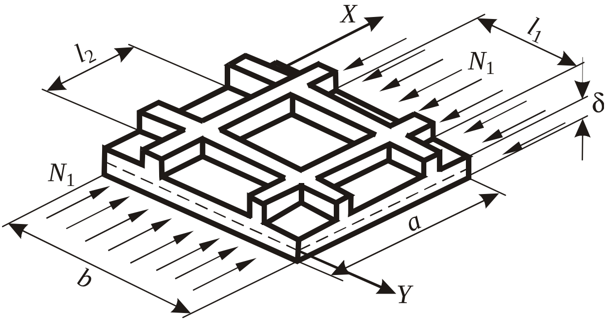


Рис. 12.11. Схема нагружения вафельной пластинки

Для шарнирно закрепленной по краям пластинки перемещение и момент равны нулю, поэтому граничные условия можно записать так:

1. $x = 0, a$; $w = 0$; $M_1 = 0$.

2. $y = 0, b$; $w = 0$; $M_2 = 0$.

Этим граничным условиям соответствует следующая функция, описывающая изогнутую срединную поверхность пластинки:

$$w(x, y) = A \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{12.24}$$

Подставляя решение (12.24) в уравнение (12.23), после преобразований получаем:

$$A\left(D_1\frac{\pi^4 m^4}{a^4} + 2D_3\frac{\pi^4 m^2 n^2}{a^2 b^2} + D_2\frac{\pi^4 n^4}{b^4} - N_1\frac{m^2\pi^2}{a^2}\right) = 0,$$

откуда:

$$N_1 = D_1\frac{\pi^2 m^2}{a^2} + 2D_3\frac{\pi^2 n^2}{b^2} + D_2\frac{\pi^2 n^4}{m^2}\frac{a^2}{b^4},$$

или, если ввести обозначение для отношения сторон пластинки $\eta = \dfrac{b}{a}$:

$$N_1 = \frac{\pi^2\sqrt{D_1 D_2}}{b^2}\left[\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}(m\eta)^2 + \frac{2D_3}{\sqrt{D_1 D_2}}n^2 + \sqrt{\frac{D_2}{D_1}}n^4\left(\frac{1}{m\eta}\right)^2\right].$$

Из полученного выражения видно, что по оси Y образуется одна полуволна, т. к. минимум N_1 по n возникает при $n = 1$. Тогда выражение для N_1 принимает вид:

$$N_1 = \frac{\pi^2 \sqrt{D_1 D_2}}{b^2}\left[\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}(m\eta)^2 + \frac{2D_3}{\sqrt{D_1 D_2}} + \sqrt{\frac{D_2}{D_1}}\left(\frac{1}{m\eta}\right)^2\right]. \qquad (12.25)$$

Теперь, исследуя полученное соотношение на минимум по m, находим критическое значение погонной силы, при котором подкрепленная панель потеряет устойчивость. На рис. 12.12 построены графики этой зависимости от числа полуволн и соотношения сторон пластинки. По этим графикам можно определить критическую силу и число полуволн при любом отношении сторон пластинки η.

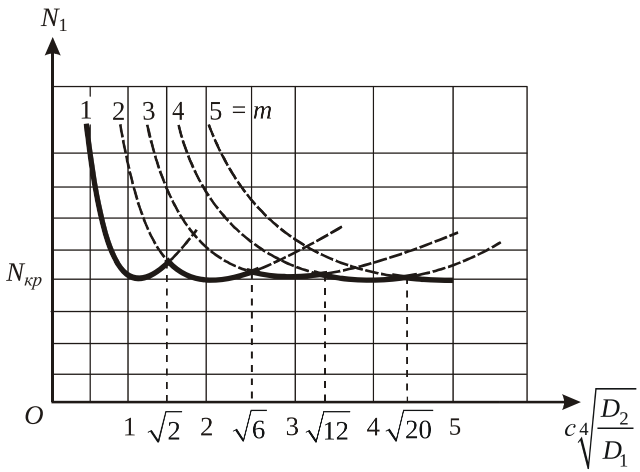


Рис. 12.12. К определению критической нагрузки ортотропной панели

На рис. 12.12 участки кривых, определяющих критические значения силы, показаны сплошными линиями. Для пластинок, у которых $\frac{1}{\eta}\sqrt[4]{\frac{D_2}{D_1}} < \sqrt{2}$, кривая $m = 1$ имеет минимальные значения N_1. Начиная от точки пересечения кривых $m = 1$ и $m = 2$, вторая кривая определяет наименьшие усилия, а пластинка выпучивается с образованием двух полуволн в продольном направлении. Так будет до пересечения кривых $m = 2$ и $m = 3$ и т. д. Переход от m-ой к (m + 1)-ой полуволне происходит тогда, когда их кривые имеют одинаковые ординаты, т. е. выполняется следующее равенство:

$$\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}(m\eta)^2+\frac{2D_3}{\sqrt{D_1D_2}}+\sqrt{\frac{D_2}{D_1}}\left(\frac{1}{m\eta}\right)^2=\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\left((m+1)\eta\right)^2+$$

$$+\frac{2D_3}{\sqrt{D_1D_2}}+\sqrt{\frac{D_2}{D_1}}\left(\frac{1}{(m+1)\eta}\right)^2,$$

из которого находим отношение сторон пластинки, при котором происходит переход к следующему числу полуволн:

$$\frac{1}{\eta_m}=c=\sqrt{m(m+1)}\sqrt[4]{\frac{E_1}{E_2}}\,. \tag{12.26}$$

Эта формула определяет связь между количеством полуволн, образующимся к моменту потери устойчивости, и отношением сторон пластинки:

$$\begin{aligned}
&m=1; \quad \text{если} \quad 0<c<\sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{D_1}{D_2}}\,;\\
&m=2; \quad \text{если} \quad \sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{D_1}{D_2}}<c<\sqrt{6}\sqrt[4]{\frac{D_1}{D_2}}\,;\\
&m=3; \quad \text{если} \quad \sqrt{6}\sqrt[4]{\frac{D_1}{D_2}}<c<\sqrt{12}\sqrt[4]{\frac{D_1}{D_2}}\,.
\end{aligned} \tag{12.27}$$

По известному отношению сторон пластинки $c=\dfrac{1}{\eta}=\dfrac{a}{b}$ и неравенствам (12.27) устанавливаем число полуволн m, которое подставляем в выражение (12.25) для погонного усилия, из которого и находим его величину. При отношении сторон, обеспечивающем выполнение неравенства $c\sqrt[4]{\dfrac{D_2}{D_1}}>3$, критическую нагрузку можно определять по формуле:

$$N_{кр}=\frac{2\pi^2\sqrt{D_1D_2}}{b^2}\left(1+\frac{D_3}{\sqrt{D_1D_2}}\right),$$

тогда соответствующие ей критические напряжения равны:

$$(\sigma_x)_{кр}=\frac{N_{кр}}{\delta}. \tag{12.28}$$

12.7. Кольцо, нагруженное внешним давлением

Рассмотрим кольцо радиуса R, сжатое по наружному контуру погонной нагрузкой q, представляющей собой интенсивность внешнего давления. При критическом значении этой нагрузки круговая форма кольца становится неустойчивой. Оно изгибается и принимает форму, показанную на рис. 12.13 штриховой линией. Здесь рассматривается потеря устойчивости кольца в своей плоскости, что типично для нормальных шпангоутов и бесконечно длинных труб.

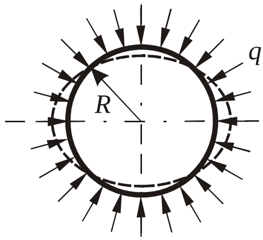


Рис. 12.13. Кольцо, сжатое радиальной нагрузкой

Интенсивность давления, при котором кольцо теряет устойчивость, можно определить по следующей формуле [12.3]:

$$q_{кр} = \frac{3EI}{R^3}, \tag{12.29}$$

где I — осевой момент инерции кольца.

Потеря устойчивости кольцом происходит с образованием двух полуволн по окружности, как это показано на рис. 12.13.

Нужно иметь в виду, что формулой (12.29) следует пользоваться только в тех случаях, когда внешняя нагрузка "гидростатическая", т. е. если она не изменяет своей величины и направления относительно нормали к контуру кольца.

В [12.2] приводятся практически важные примеры, когда это условие нарушается. Так, например, в случае распорного шпангоута бака, заполненного жидкостью, распорная сила, сжимающая шпангоут, перестает быть "гидростатической", и эта формула дает завышенные значения критической погонной нагрузки.

Если шпангоут подкреплен четным числом равноотстоящих опор, препятствующих его перемещениям, то изгиб происходит по $2n$ полуволнам и критическое значение интенсивности внешнего давления определяется следующим выражением:

$$q_{кр} = \frac{\left(n^2 - 1\right) EI}{R^3}, \tag{12.30}$$

где $n = 2, 4, 6, 8, \ldots$ — число опор (подкрепляющих стрингеров).

На рис. 12.14, *а* изображено кольцо, подкрепленное 8 опорами. Там же штриховой линией показана форма этого кольца в момент потери устойчивости. При дальнейшем увеличении нагрузки кольцо принимает форму, изображенную на рис. 12.14, *б*, продолжая воспринимать внешнюю нагрузку.

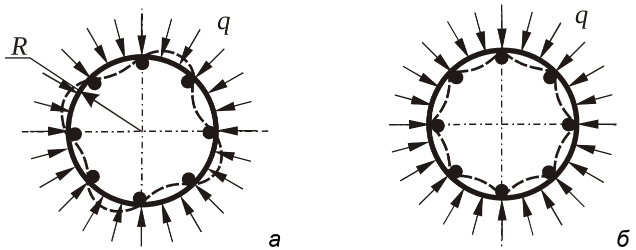


Рис. 12.14. Потеря устойчивости кольцом с подкреплениями

12.8. Устойчивость сильфона при осевом сжатии

При осевом сжатии сильфона первоначально прямолинейная форма его оси может перейти в криволинейную, что свидетельствует о потере устойчивости.

На рис. 12.15, *а* и *б* пунктирной линией изображены формы оси сильфона после потери устойчивости при двух типичных вариантах приложения внешней сжимающей силы. Этим вариантам соответствуют различные значения коэффициента приведения C в формуле для критической осевой сжимающей силы:

$$N_{кр} = C \frac{\pi^2 E h^3}{A_\varphi n l}. \tag{12.31}$$

В этой формуле $C = 0,5$ при одном свободном, а другом — жестко заделанном крае сильфона; $C = 2$ при обоих жестко заделанных краях; n — количество гофр; $A_\varphi = \dfrac{3\left(1-\mu^2\right)}{\pi}\left(\ln \overline{R} - \dfrac{\overline{R}^2 - 1}{\overline{R}^2 + 1}\right)$; $\overline{R} = \dfrac{R_н}{R_в}$ — отношение наружного радиуса гофра к внутреннему; h — толщина стенки гофра.

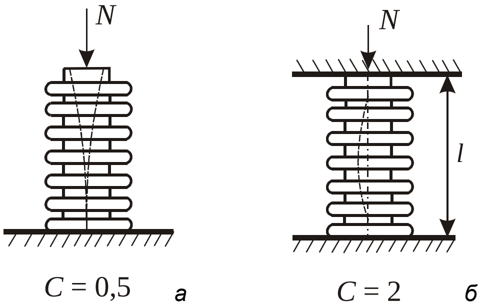


Рис. 12.15. Сильфон, сжатый осевой силой

Выводы

В этой главе были изучены следующие вопросы:

1. Рассмотрены различные типы потери устойчивости элементов конструкций.
2. Приведены формулы для расчета устойчивости сжатых стержней при различных способах закрепления их краев.
3. Получено уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки, используемое при определении критических нагрузок.
4. Получены расчетные соотношения для определения критических погонных усилий в сжатых пластинках и в подкрепленных панелях.
5. Рассмотрены особенности потери устойчивости кольца, нагруженного внешней погонной нагрузкой.
6. Приведена формула для расчета критической силы при осевом сжатии сильфона.

Упражнения и вопросы

1. Приведите примеры конструкций из пластинок и стержней, которые могут потерять местную устойчивость.
2. До какого напряжения применима формула Эйлера для критических напряжений потери устойчивости сжатого стержня? Получите выражение

для предельной гибкости стержня, считая, что свойства материала и предельное напряжение, до которого справедлива формула Эйлера, известны.

3. Вычислите предельную гибкость стержня для углеродистой стали 45, имеющей модуль упругости $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па и предел пропорциональности $\sigma_y = 270$ МПа.
4. Определите критические напряжения потери устойчивости стойки трубчатого сечения из хромомолибденовой стали с пределом упругости $\sigma_y = 540$ МПа, модулем упругости $E = 2{,}15 \cdot 10^{11}$ Па, длиной $l = 2{,}5$ м, наружным диаметром $D = 7{,}6 \cdot 10^{-2}$ м и внутренним диаметром $d = 6{,}4 \cdot 10^{-2}$ м.
5. Стальной стержень прямоугольного сечения $(2{,}5 \times 5) \cdot 10^{-2}$ м с жестко закрепленными концами сжимается вдоль оси симметрии. Определить наименьшую длину, при которой можно пользоваться формулой Эйлера, если $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па и предел пропорциональности $\sigma_y = 200$ МПа.
6. Определите критическое напряжение панели обшивки крыла самолета, шарнирно скрепленной с жесткими ребрами и сжатой вдоль длинных сторон по ее короткой стороне, если размеры панели: $a = 0{,}2$ м; $b = 0{,}12$ м; $\delta = 2 \cdot 10^{-3}$ м. Материал обшивки — дюралюминий с $E = 0{,}68 \cdot 10^{11}$ Па и $\mu = 0{,}27$. Измените способ крепления кромок пластинки с шарнирного закрепления на жесткую заделку и сравните полученные значения напряжений.
7. Определите суммарные напряжения в сжатом трубчатом стержне с радиусом $R = 0{,}025$ м, длиной $l = 0{,}5$ м и толщиной стенки $\delta = 0{,}005$ м, если амплитуда его начального прогиба w_0 составляет 5% от диаметра, а сжимающая сила равна половине критической силы, определенной по формуле Эйлера.
8. Определите критическую погонную нагрузку, при которой кольцо прямоугольного сечения $b = 2 \cdot 10^{-2}$ м; $h = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ м и радиусом $R = 0{,}5$ м потеряет устойчивость при сжатии по наружной поверхности.
9. Сколько полуволн образуется по короткой стороне пластинки, сжатой вдоль длинной стороны. Подтвердите свой ответ конкретным примером.
10. Как определить число полуволн и критическое погонное усилие прямоугольной ортотропной пластинки, сжатой по короткой стороне?
11. Определите критическую силу, при которой жестко заделанный по краям сильфон длиной $l = 0{,}2$ м, толщиной стенки $h = 1 \cdot 10^{-3}$ м, наружным ра-

диусом $R_н = 8 \cdot 10^{-2}$ м, внутренним $R_в = 6 \cdot 10^{-2}$ м, потеряет устойчивость, если модуль упругости материала $E = 0{,}68 \cdot 10^{11}$ Па. При определении количества гофр сильфона принять, что он имеет синусоидальную форму.

Литература к главе 12

1. Алфутов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. — М.: Машиностроение, 1978, 312 с.
2. Балабух Л. И., Алфутов Н. А., Усюкин В. И. Строительная механика ракет: Учебник для машиностроительных спец. вузов. — М: Высшая школа, 1984, 391 с.
3. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. — М.: Наука, 1967, 984 с.
4. Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. — М.: Наука, 1971, 574 с.

Глава 13

Устойчивость цилиндрических оболочек

Эта глава расширяет круг задач, рассмотренных в предыдущей главе, и посвящена устойчивости однослойных, многослойных и подкрепленных цилиндрических оболочек.

В этой главе будут рассмотрены следующие темы:

- физическая картина поведения оболочек при потере устойчивости;
- разрешающее уравнение при безмоментном докритическом состоянии;
- устойчивость однослойных оболочек, нагруженных осевой силой или внешним давлением;
- устойчивость многослойной оболочки при комбинированном нагружении осевой силой и внешним давлением;
- проектировочный расчет шпангоутной и вафельной оболочки.

13.1. Физическая картина потери устойчивости

Оболочка считается потерявшей устойчивость, если она изменила свою исходную геометрическую форму. Процесс потери устойчивости оболочкой хорошо иллюстрируется диаграммой зависимости прогиба, получаемого оболочкой от внешней нагрузки, изображенной на рис. 13.1. Для определенности рассмотрим случай цилиндрической оболочки, сжатой вдоль оси. Такая же диаграмма наблюдается и в случае оболочек другой формы и с иным способом нагружения.

Рассмотрим сначала случай идеально правильной оболочки, у которой отсутствуют начальные геометрические несовершенства в виде локальных вмятин, переменной толщины, овальности контура и т. п., а нагрузка приложена точно по оси симметрии, без каких-либо смещений и перекосов. Удобно наблюдать за поведением оболочки на перевернутой диаграмме, когда по оси ординат откладывается сила, а не прогиб в направлении, перпендикулярном оси симметрии цилиндра.

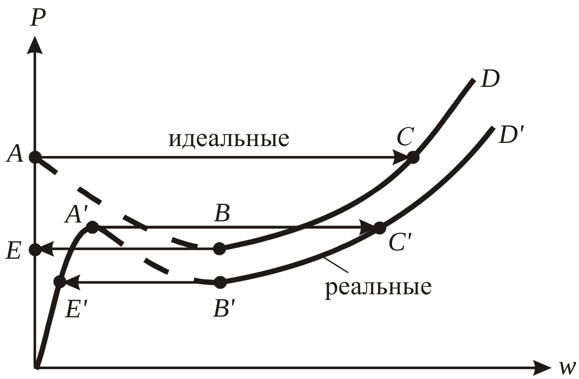


Рис. 13.1. Диаграмма потери устойчивости сжатой оболочки

Из диаграммы, построенной на рис. 13.1, видно, что увеличение силы от нуля до значения, соответствующего точке *A* на диаграмме, никак не сказывается на прогибе оболочки. Она остается цилиндрической формы даже в тех случаях, когда искусственно создаются поперечные возмущения в виде малых прогибов. После снятия возмущения оболочка опять возвращается к исходной форме, т. е. остается устойчивой.

Поведение оболочки кардинально меняется в точке *A*. Попытки увеличения осевой силы за точку *A*, а также малые возмущения приводят к тому, что оболочка получает большие прогибы, изменяя свою геометрическую форму. Теперь на поверхности цилиндра образуются чередующиеся в шахматном порядке выпуклости и вмятины с прогибами, соизмеримыми с толщиной оболочки. Потеря устойчивости оболочкой происходит с хлопком, что на диаграмме отмечено линией, соединяющей точки *A* и *C*.

На рис. 13.2, *а* и *б* показаны соответственно симметричная и несимметричная формы, которые получает оболочка после потери устойчивости. Увеличение внешней силы, действующей на оболочку, сопровождается ростом ее прогиба без изменения формы вплоть до разрушения. На диаграмме (рис. 13.1) это состояние соответствует линии *CD*. Если оболочка не доводится до разрушения, а наоборот, разгружается после потери устойчивости, то устойчивое состояние в виде шахматной формы сохраняется и при нагрузках, меньших, чем нагрузка в точке *A*. Такое состояние сохраняется на линии разгрузки *BC*, а в точке B форма оболочки опять изменяется с хлопком и становится цилиндрической. На диаграмме хлопок оболочки отмечен линией BE.

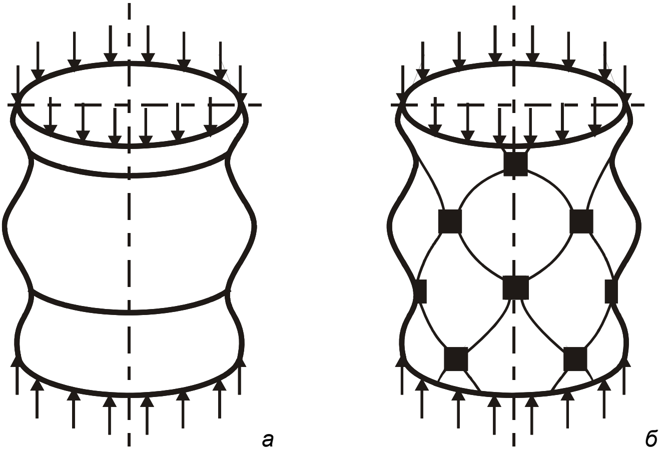


Рис. 13.2. Симметричная (*а*) и несимметричная (*б*) формы потери устойчивости оболочкой

Следует отметить, что описанная диаграмма не имеет симметричной относительно оси нагрузок части, т. к. оболочка прогибается в направлении центра кривизны, затрачивая на это меньшее количество энергии, чем на выпучивание в противоположенном направлении. Далее, точка B на диаграмме для реальных оболочек не имеет постоянного положения, перемещаясь даже в отрицательную область оси нагрузок. Отметим здесь, что сжимающая сила откладывается в положительном направлении оси ординат. Сила, соответствующая точке A на рис. 13.1, называется *первой критической нагрузкой*, а точке E — *второй критической нагрузкой*. Расчет конструкций обычно проводится по первой критической нагрузке. Такое решение принято специалистами после многочисленных дискуссий о том, по какой из критических нагрузок следует проектировать реальные конструкции.

Потеря устойчивости оболочкой рассмотрена на простейшем примере со сжимающей силой, однако наличие сжимающей нагрузки совсем не обязательно для потери устойчивости, т. к. это свойство самой оболочки, определяемое и ее исходной конфигурацией. Так, например, эллиптическое днище, нагруженное внутренним давлением, также может потерять устойчивость в области отрицательных тангенциальных напряжений.

В задачах устойчивости конструкций принято понимать под ***общей*** устойчивость всей конструкции в целом, а под ***местной*** — устойчивость отдельных ее частей или элементов.

Поэтому, если речь идет об эллиптическом днище, то здесь необходимо говорить о местной устойчивости.

Так, если весь отсек летательного аппарата, состоящий из обшивки и внутренних подкреплений, теряет устойчивость, то речь идет об общей устойчивости. Однако если отсек в целом сохраняет свою форму, а теряет устойчивость участок обшивки между подкреплениями или только какие-то элементы подкреплений, то следует говорить о местной потере устойчивости.

Описанная картина изменения прогиба оболочки соответствует теоретически правильной, или идеальной оболочке. Реальные оболочки всегда имеют начальные геометрические неправильности, которые приводят к тому, что описанная диаграмма несколько смещается вниз, причем значения верхней и нижней критических нагрузок значительно меньше, чем соответствующие значения для идеальной оболочки. В качестве иллюстрации на рис. 13.3 приводятся экспериментальные значения первой критической нагрузки, отнесенные к расчетным, для случая осевого сжатия цилиндра при различных отношениях его радиуса к толщине стенки.

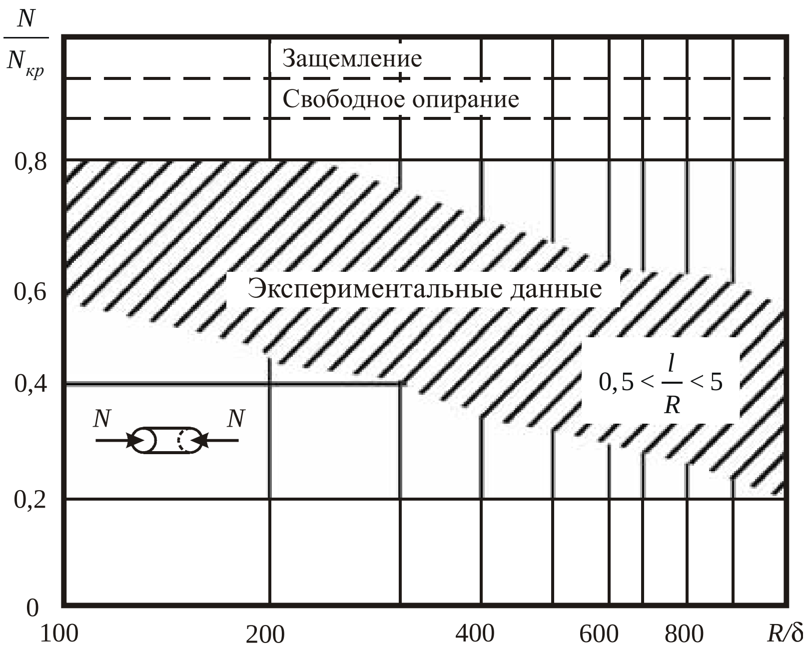


Рис. 13.3. Сравнение расчетных и экспериментальных критических нагрузок при осевом сжатии цилиндра

Экспериментальные значения, полученные различными авторами, находятся в заштрихованной области. Такой значительный разброс объясняется различной степенью геометрического несовершенства оболочек, испытанных в экспериментах.

Для определения критической нагрузки необходимо исследовать устойчивость исходной системы уравнений в окрестности *точки ветвления*, или, как ее называют, *точки бифуркации* внешней нагрузки. При этом необходимо иметь в виду, что до потери устойчивости оболочка может получить большие деформации. Это заставляет использовать нелинейные соотношения при записи общей системы уравнений теории оболочек, которая исследуется на устойчивость. Существуют также методы, позволяющие учитывать начальные геометрические несовершенства оболочек.

13.2. Разрешающее уравнение при безмоментном докритическом состоянии

Для получения уравнений устойчивости оболочек воспользуемся статическим критерием устойчивости, сформулированным Леонардом Эйлером в 1744 г. в своей работе, посвященной устойчивости стержней. Согласно этому критерию *критическим* называется наименьшее значение нагрузки, при котором кроме исходного положения равновесия система может иметь по крайней мере еще одно близкое к исходному положение равновесия. Определение критической нагрузки осуществляется по следующей схеме:

1. Рассматривается исходное, докритическое состояние оболочки и определяются докритические напряжения.
2. Далее считается, что на систему не действует внешняя нагрузка, но в ней существует найденное докритическое напряженное состояние.
3. Системе придаются малые возмущения, соответствующие возможной форме потери устойчивости, и записываются уравнения равновесия для возмущенного состояния. Эти уравнения являются линейными и однородными относительно дополнительных перемещений и всегда включают две группы членов: члены, соответствующие упругим силам, стремящимся ликвидировать возмущения, и параметрические члены, включающие докритические напряжения и соответствующие силам, стремящимся вывести систему из исходного состояния.
4. Находится такая комбинация докритических напряжений, при которой уравнения равновесия имеют ненулевое решение, удовлетворяющее заданным граничным условиям, т. е. существуют равновесные дополнительные

перемещения, соответствующие условиям закрепления системы. Как правило, такая комбинация не является единственной, и выбирается та конфигурация, которая соответствует минимальному значению внешней нагрузки. Это значение и является критической нагрузкой. Фактически отыскание критической нагрузки соответствует задаче об отыскании собственного значения краевой задачи для уравнений равновесия, записанных для возмущенного состояния.

Особенно просто решается задача устойчивости в том случае, когда начальное напряженное состояние безмоментное. Тогда, считая безмоментное решение известным, дадим оболочке малое возмущение в виде перемещений, которые создадут дополнительные деформации, внутренние усилия и моменты. В точке бифуркации оболочки (в точке ветвления) существуют два равновесных состояния, соответствующих одной и той же нагрузке. Одно из них безмоментное, а другое возмущенное. В соответствии со статическим критерием устойчивости запишем уравнение равновесия оболочки в возмущенном состоянии. При потере устойчивости оболочкой образуются сравнительно мелкие волны, так что в пределах каждой вмятины оболочку можно считать пологой, хотя и вся оболочка не является пологой. Воспользуемся уравнением равновесия пологой оболочки (10.14):

$$D\nabla^8 w + \frac{E\delta}{R^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \nabla^4 q_n ,$$

в котором под поперечной внешней нагрузкой q_n будем понимать условную нагрузку, статически эквивалентную воздействию безмоментных докритических усилий в возмущенном состоянии.

Так, если оболочка сжата в осевом направлении силой T, то осевое погонное усилие равно $N_1 = \dfrac{T}{2\pi R}$, которое по знаку отрицательное (далее для удобства записи расчетных соотношений знак минус будем опускать).

Рассматривая, аналогично тому, как это делалось в случае с пластинкой, искривленный элемент срединной поверхности длиной dx и шириной, равной единице, найдем проекцию безмоментного усилия на направление, перпендикулярное срединной поверхности. Получаем:

$$N_1\frac{\partial w}{\partial x} - N_1\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx\right) = -N_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx ,$$

а соответствующая поверхностная нагрузка после деления на площадь элемента $dx \cdot 1$ равна $-N_1\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

Аналогичным образом получается и нормальная проекция, создаваемая тангенциальным безмоментным внутренним усилием. Тогда основное разрешающее уравнение, которое используется при решении задач устойчивости, записывается так:

$$D\nabla^8 w + \frac{E\delta}{R}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + N_1\nabla^4\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_2\nabla^4\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0\,, \tag{13.1}$$

где N_2 — тангенциальное погонное усилие.

13.3. Устойчивость оболочки при осевом сжатии

В данном случае тангенциальное погонное усилие равно нулю, а исходное уравнение (13.1) запишется так:

$$D\nabla^8 w + \frac{E\delta}{R}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + N_1\nabla^4\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0\,. \tag{13.2}$$

Будем считать, что края оболочки закреплены шарнирно, и поэтому граничные условия имеют вид:

$$x = 0, l:\quad w = 0;\quad w'' = 0\,, \tag{13.3}$$

где l — длина оболочки.

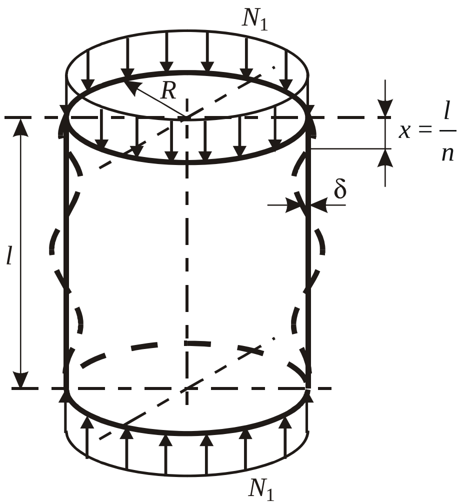


Рис. 13.4. Симметричная форма потери устойчивости оболочки при осевом сжатии

Рассмотрим случай, когда форма потери устойчивости осесимметричная, а уравнение (13.1) принимает вид:

$$D\frac{d^8 w}{dx^8} + N_1 \frac{d^6 w}{dx^6} + \frac{E\delta}{R^2}\frac{d^4 w}{dx^4} = 0\,. \qquad (13.4)$$

Граничным условиям (13.3) удовлетворяет решение:

$$w = A\sin\frac{n\pi x}{l}\,, \qquad (13.5)$$

где n — число полуволн изогнутой поверхности оболочки вдоль ее оси симметрии (рис. 13.4). Подставляя (13.5) в (13.4), получаем:

$$D\left(\frac{n\pi}{l}\right)^8 - N_1\left(\frac{n\pi}{l}\right)^6 + \frac{E\delta}{R^2}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 = 0\,,$$

откуда:

$$N_1 = D\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \frac{E\delta}{R^2}\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2,$$

или:

$$N_1 = D\lambda + \frac{E\delta}{R^2}\frac{1}{\lambda}\,, \qquad (13.6)$$

где $\lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$. Найдем минимальное значение N_1, которое зависит от числа полуволн n, и с этой целью исследуем выражение (13.6) на экстремум по λ. Имеем:

$$\frac{dN_1}{d\lambda} = D - \frac{E\delta}{R^2}\cdot\frac{1}{\lambda} = 0\,,$$

откуда:

$$\lambda = \sqrt{\frac{E\delta}{R^2 D}}\,, \qquad (13.7)$$

а число полуволн $n = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{E\delta}{R^2 D}}$. Подставляя (13.7) в (13.6), получаем:

$$N_{1кр} = \frac{2}{\sqrt{12\left(1-\mu^2\right)}}E\frac{\delta^2}{R}\,.$$

Так как $\sigma_{1кр} = \frac{N_{1кр}}{\delta}$, то $\sigma_{1кр} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} E \frac{\delta}{R}$, а при $\mu = 0{,}3$ имеем:

$$\sigma_{1кр} = 0{,}605 E \frac{\delta}{R}. \tag{13.8}$$

Сравнение экспериментальных значений $\sigma_{1кр}$ со значениями, полученными по формуле (13.8), показывает существенное отличие теоретического коэффициента 0,605 от значений, которые получаются в эксперименте. Попытка найти причину этого расхождения исследованием несимметричной формы потери устойчивости оболочкой, когда вместо (13.5) используется выражение:

$$w = A \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{my}{R},$$

где m — число полных волн по окружности, привела к той же формуле (13.8).

Подробные исследования различных авторов показали, что основной причиной расхождения между расчетными и экспериментальными значениями критической силы является особая чувствительность оболочек к начальным геометрическим несовершенствам, что хорошо иллюстрируется рис. 13.3. Учет этих несовершенств составляет некоторые трудности, т. к. заранее их предсказать, а следовательно, и описать математически не всегда представляется возможным.

Учитывая накопленный опыт проектирования, можно воспользоваться следующими практическими рекомендациями по использованию полученных формул для расчета критических напряжений.

13.3.1. Оболочки средней длины

В диапазоне длин цилиндрических оболочек $1{,}38\sqrt{\frac{\delta}{R}} \le \frac{l}{R} \le 0{,}57\sqrt{\frac{R}{\delta}}$ критические напряжения потери устойчивости определяются по формуле:

$$\sigma_{1кр} = kE \frac{\delta}{R}, \tag{13.9}$$

где значения коэффициента k, предложенные А. С. Вольмиром [13.2], берутся из табл. 13.1.

Таблица 13.1. *Значения коэффициента устойчивости*

$\frac{R}{\delta} \le$	250	500	750	1000	1500
k	0,18	0,14	0,12	0,1	0,09

Вайнгартен, Морган и Сейд рекомендуют следующую зависимость для определения этого коэффициента [13.3]:

$$k = 0{,}606 - 0{,}546\left[1 - \exp\left(\frac{1}{16}\sqrt{\frac{R}{\delta}}\right)\right] + 0{,}9\left(\frac{R}{l}\right)^2\left(\frac{\delta}{R}\right), \tag{13.10}$$

которой рекомендуется пользоваться в следующем диапазоне радиусов и длин оболочек: $10^2 \le \frac{R}{\delta} \le 4 \cdot 10^3$; $0{,}031 \le \frac{l}{R} \le 5$.

В. Т. Лизин и В. А. Пяткин предлагают следующую зависимость [13.4]:

$$k = \frac{1}{\pi}\sqrt[8]{\left(\frac{100\delta}{R}\right)^3}\,. \tag{13.11}$$

Для слабо конических оболочек, у которых угол полураствора не превышает $20°$, можно пользоваться формулами цилиндрических оболочек, подставляя в них вместо радиуса R второй главный радиус кривизны у основания конуса.

Что касается эмпирического значения коэффициента k, то его можно определять по формуле (13.10), в которой радиус цилиндра заменяется на второй главный радиус кривизны у меньшего основания конуса.

Для цилиндрических баков, нагруженных осевой силой и внутренним давлением, которое повышает критические напряжения потери устойчивости, можно воспользоваться следующей зависимостью [13.5]. Если внутреннее давление отсутствует, то:

$$k = 9\left(\frac{\delta}{R}\right)^{0,6} + 0{,}16\left(\frac{\delta}{R}\right)^{0,3}\left(\frac{l}{R}\right)^{1,3} \tag{13.12}$$

для $500 \le \frac{R}{\delta} \le 6 \cdot 10^3$ и $0{,}5 \le \frac{l}{R} \le 3$. Если $\frac{l}{R} > 3$, то $k = 0{,}227$.

При внутреннем давлении критические напряжения определяются по формуле:

$$\sigma_{1кр} = \left(k + k_p\right)E\frac{\delta}{R}, \tag{13.13}$$

где $k_p = 0{,}191\dfrac{p_0}{E}\left(\dfrac{R}{\delta}\right)^2$ — коэффициент, учитывающий внутреннее давление p_0. Если в результате расчета $k_p > 0{,}229$, то независимо от величины давления принимается $k_p = 0{,}229$.

13.3.2. Короткие оболочки

К *коротким* относят оболочки, у которых длина находится в диапазоне: $\dfrac{l}{R} < 1{,}38\sqrt{\dfrac{\delta}{R}}$.

В случае короткой оболочки, когда $\dfrac{l}{R} << 1$, второе слагаемое в правой части (13.6) можно отбросить, и тогда $N_1 = D\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2$. Минимальное значение этой силы достигается при одной полуволне:

$$N_{1кр} = D\left(\frac{\pi}{l}\right)^2,$$

а критическое напряжение равно:

$$\sigma_{1кр} = \frac{D\pi^2}{l^2\delta}, \tag{13.14}$$

т. е. в этом случае оболочка ведет себя как пластинка.

13.3.3. Длинные трубы

К длинным трубам относятся оболочки, для которых выполняется неравенство $\dfrac{l}{R} > 0{,}57\sqrt{\dfrac{R}{\delta}}$. Длинная труба ведет себя как стержень, а соответствующие критические напряжения определяются по формуле Эйлера для стержня, сжатого осевой силой. Тогда:

$$\sigma_{1кр} = \frac{\pi^2 ER^2}{2l^2}. \tag{13.15}$$

Здесь в формулу Эйлера подставлено выражение для радиуса инерции кольцевого сечения трубы. И в рассматриваемом случае необходимо говорить не о местной потере устойчивости оболочки в виде отдельных вмятин, а об общей потере устойчивости всей трубы.

13.4. Устойчивость оболочки, нагруженной внешним давлением

В рассматриваемом случае отсутствуют осевые силы, и поэтому исходное уравнение (13.1) запишется в виде:

$$D\nabla^8 w + \frac{E\delta}{R^2}\cdot\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + N_2\nabla^4\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0\,, \tag{13.16}$$

а граничные условия, соответствующие шарнирному закреплению краев цилиндра, как:

$$x = 0, l: \quad w = 0; \quad w'' = 0\,. \tag{13.17}$$

Собственное решение задачи (13.16), (13.17) при несимметричной форме потери устойчивости имеет вид:

$$w = A\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{my}{R}, \tag{13.18}$$

где n — число полуволн по оси x, а m — число полных волн по окружности.

Как и в случае осевого сжатия цилиндра, будем полагать, что начальное напряженное состояние безмоментное, и поэтому $N_2 = p_0 R$, где p_0 — постоянное внешнее давление, действующее на цилиндр. Подставляя (13.18) в (13.16), после преобразований получаем:

$$N_2 = \left(\frac{R}{m}\right)^2\left\{D\left[\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{m}{R}\right)^2\right]^2 + \frac{E\delta}{R^2}\frac{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4}{\left[\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{m}{R}\right)^2\right]^2}\right\}. \tag{13.19}$$

Отсюда видно, что при фиксированном m N_2 будет иметь минимальное значение, если $n = 1$, т. е. когда оболочка по осевой координате имеет одну полуволну (рис. 13.5). Разделив (13.19) на R и приняв $n = 1$, получим следующее выражение для давления:

$$p_0 = \frac{Dm^2}{R^3}\left[\left(\frac{\pi R}{lm}\right)^2 + 1\right] + \frac{E\delta}{Rm^2}\frac{\left(\frac{\pi R}{lm}\right)^4}{\left[1 + \left(\frac{\pi R}{lm}\right)^2\right]^2}\,. \tag{13.20}$$

Для оболочки с конкретными размерами это выражение необходимо исследовать на экстремум по числу полных волн m. Минимальное значение давления и будет соответствовать значению верхнего критического давления (точка A на рис. 13.1).

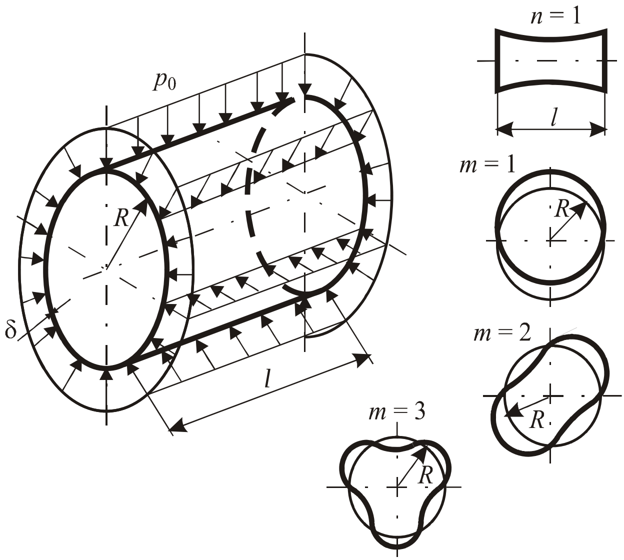


Рис. 13.5. Оболочка, нагруженная внешним давлением

Далее рассмотрим частные случаи, в которых удается упростить выражение (13.20) и получить простые аналитические соотношения для определения критического давления и числа полных волн по окружности цилиндра.

13.4.1. Оболочки средней длины

Для оболочек средней длины, когда $1{,}38\sqrt{\dfrac{\delta}{R}} \le \dfrac{1}{R} \le 0{,}57\sqrt{\dfrac{R}{\delta}}$, можно считать, что $\dfrac{\pi R}{ml} << 1$, и тогда:

$$p_0 = \frac{Dm^2}{R^3} + \frac{E\delta R^3}{m^6}\left(\frac{\pi}{l}\right)^4. \tag{13.21}$$

Взяв производную по m, получаем:

$$\frac{dp_0}{dm} = 2m\frac{D}{R^3} - 2\frac{E\delta R^3}{m^7}\left(\frac{\pi}{l}\right)^4,$$

а приравняв ее нулю, после преобразований имеем:

$$m = \sqrt[4]{6\pi^2\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{\frac{R}{l}}\sqrt[4]{R/\delta}.} \tag{13.22}$$

Если подставить (13.22) в (13.21), то критическое давление, соответствующее полученному полному числу волн по окружности цилиндра, определяется так:

$$p_{кр} = \frac{\pi\sqrt{6}}{9\left(1-\mu^2\right)^{3/4}} E\left(\frac{\delta}{R}\right)^{5/4}.$$

При $\mu = 0{,}3$ получаем формулу П. Ф. Папковича:

$$p_{кр} = 0{,}92\, E\,\frac{R}{l}\left(\frac{\delta}{R}\right)^{5/2}. \tag{13.23}$$

13.4.2. Длинные оболочки

В случае длинных оболочек $\frac{R}{l} >> 1$, и выражение (13.20) принимает следующий вид:

$$p_0 = \left(\frac{D}{R^3}\right)m^2.$$

Его минимум достигается при $m = 1$, поэтому:

$$p_{кр} = \frac{E}{12\left(1-\mu^2\right)}\left(\frac{\delta}{R}\right)^{5/2}.$$

Более точные решения позволяют получить формулу:

$$p_{кр} = \frac{E}{4\left(1-\mu^2\right)}\left(\frac{\delta}{R}\right)^{3}, \tag{13.24}$$

которой и необходимо пользоваться, т. к. она дает значения критического давления, хорошо совпадающего с экспериментальными данными.

13.4.3. Короткие оболочки

И, наконец, для очень короткой оболочки, как показывают эксперименты, типична потеря устойчивости при большом числе волн m, поэтому полагая в формуле (13.20) $m >> 1$, получаем:

$$p_0 = \frac{D}{R^3}\left[\left(\frac{\pi R}{l}\right)^2 \frac{1}{m} + m\right]^2 .$$

Минимальное значение p_0 получается при $m = \frac{\pi R}{l}$, а критическое давление равно:

$$p_{кр} = \frac{\pi^2}{3\left(1-\mu^2\right)} E \frac{\delta^3}{Rl^2}. \qquad (13.25)$$

Соответствующее критическое напряжение получается:

$$\sigma_{кр} = \frac{p_{кр} R}{8} = \frac{\pi^2}{3\left(1-\mu^2\right)} E \left(\frac{\delta}{l}\right)^2 .$$

При нагружении оболочки внешним давлением, так же как и в случае осевого сжатия, критическое давление, полученное расчетным путем, хотя и в меньшей степени, чем при осевом сжатии цилиндрической оболочки, отличается от экспериментального значения. Основной причиной такого расхождения являются начальные геометрические несовершенства реальных оболочек, которые в рассматриваемом решении не учитываются.

А. С. Вольмир [13.2] рекомендует следующую таблицу значений поправочных коэффициентов (табл. 13.2), которыми следует пользоваться при практическом проектировании оболочек, нагруженных внешним давлением.

Таблица 13.2. *Поправочные коэффициенты к критическому давлению*

R/δ	250	500	750	1000	1500
ν	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3
$0{,}92\nu$	0,644	0,552	0,46	0,368	0,186

В этой таблице через ν обозначен поправочный коэффициент, равный отношению экспериментального значения критического давления к расчетному.

13.5. Устойчивость многослойной оболочки, сжатой осевой силой и внешним давлением

Теперь усложним задачу и рассмотрим оболочку, которая состоит из нескольких ортотропных слоев с различными свойствами (рис. 13.6). Как и раньше, будем полагать, что начальное докритическое состояние безмоментное, а погонные усилия определяются по формулам безмоментной теории. Тогда $N_{1A} = \frac{T}{2\pi R}$, $N_{2A} = p_0 R$, где T — осевая сжимающая сила; p_0 — внешнее давление. Полагая также, что $y = R\varphi$ для возмущенного состояния цилиндрической оболочки, имеем следующие уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \delta N_1}{\partial x} + \frac{\partial \delta N_2}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \delta T_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \delta N_2}{\partial y} = 0; \tag{13.26}$$

$$\frac{\partial^2 \delta M_1}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \delta H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \delta M_2}{\partial y^2} - \frac{\delta N_2}{R} - N_{1A}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_{2A}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \tag{13.27}$$

Геометрические уравнения берем в линейной форме, т. к. начальное напряженнное состояние безмоментное:

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R}; \quad \gamma_{12} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}; \\ &\kappa_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \kappa_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \kappa_{12} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned}\right\} \tag{13.28}$$

а физические уравнения — в общем виде, соответствующем многослойной оболочке с ортотропными слоями, запишутся так:

$$\left.\begin{aligned} \delta N_1 &= B_{11}\varepsilon_1 + B_{12}\varepsilon_2 + A_{11}\kappa_1 + A_{12}\kappa_2; \\ \delta N_2 &= B_{21}\varepsilon_1 + B_{22}\varepsilon_2 + A_{21}\kappa_1 + A_{22}\kappa_2; \\ \delta M_1 &= A_{11}\varepsilon_1 + A_{12}\varepsilon_2 + D_{11}\kappa_1 + D_{12}\kappa_2; \\ \delta M_2 &= A_{21}\varepsilon_1 + A_{22}\varepsilon_2 + D_{21}\kappa_1 + D_{22}\kappa_2; \\ \delta T_{12} &= B_{33}\gamma_{12} + 2A_{33}\kappa_{12}. \end{aligned}\right\} \tag{13.29}$$

В приведенных выражениях величины без буквенных индексов по-прежнему соответствуют возмущенному состоянию оболочки, а индексом A в уравнении равновесия (13.27) отмечены погонные усилия, соответствующие докритическому безмоментному напряженному состоянию.

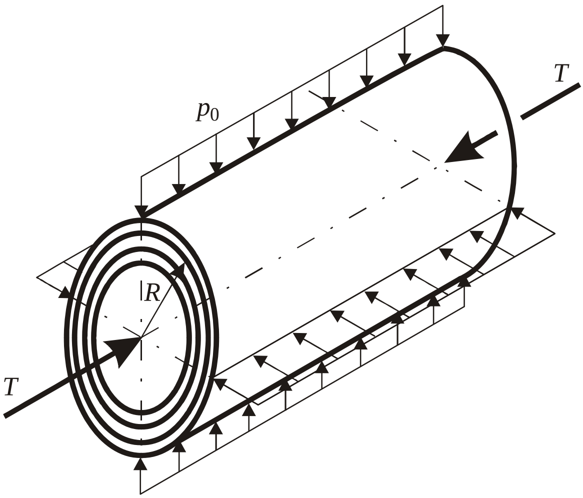


Рис. 13.6. Многослойная оболочка, сжатая осевой силой и давлением

Подставляя геометрические уравнения (13.28) в физические (13.29), получаем:

$$\delta N_1 = B_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + B_{12}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R}\right) - A_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - A_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2};$$

$$\delta N_2 = B_{21}\frac{\partial u}{\partial x} + B_{22}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R}\right) - A_{21}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - A_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2};$$

$$\delta T_{12} = B_{33}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) - 2A_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y};$$

$$\delta M_1 = A_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + A_{12}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R}\right) - D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2};$$

$$\delta M_2 = A_{21}\frac{\partial u}{\partial x} + A_{22}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R}\right) - D_{21}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2};$$

$$\delta H = A_{33}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) - 2D_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Теперь, подставляя полученные выражения в уравнения равновесия (13.26) и (13.27), придем к следующей системе из трех уравнений относительно возмущенных значений перемещений u, v, w:

$$B_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B_{12}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{1}{R}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\right)-A_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}-\left(A_{12}+2A_{33}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}+ \\ +B_{33}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0; \tag{13.30}$$

$$B_{33}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)-2A_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+B_{22}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial y}\right)+B_{21}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}- \\ -A_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}-A_{21}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}=0; \tag{13.31}$$

$$A_{11}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\left(A_{21}+A_{33}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}-B_{21}\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial x}+A_{22}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}+\left(A_{12}+2A_{33}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}- \\ -B_{22}\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial y}-D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-\left(D_{12}+4A_{33}+D_{21}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+ \\ +\left(\frac{A_{21}}{R}+\frac{A_{12}}{R}-N_{1A}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}++\left(2\frac{A_{22}}{R}-N_{2A}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{B_{22}}{R}w=0. \tag{13.32}$$

Граничные условия записанной системы уравнений также однородные и для шарнирного опирания краев цилиндра имеют вид:

$$\delta N_1=\delta M_1=v=w=0\,.$$

Собственные функции, описывающие перемещения при потере устойчивости и удовлетворяющие условиям шарнирного опирания краев цилиндра, записываются в виде:

$$u=\bar{u}\cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{my}{R}\,; \tag{13.33}$$

$$v=\bar{v}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{my}{R}\,; \tag{13.34}$$

$$w=\bar{w}\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{my}{R}\,. \tag{13.35}$$

где $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ — амплитудные значения перемещений при выпучивании. Подставляя (13.33)—(13.35) в уравнения (13.30)—(13.32), придем к системе трех алгебраических уравнений относительно неизвестных $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$. Так как эта система однородная, то определитель должен быть равен нулю, и в итоге получается следующее условие устойчивости оболочки:

$$N_{1A}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + N_{2A}\left(\frac{m}{R}\right)^2 = C_{33} + C_{23}\frac{C_{13}C_{12} - C_{11}C_{23}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2} + C_{13}\frac{C_{12}C_{23} - C_{13}C_{22}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}, \tag{13.36}$$

где:

$$C_{11} = B_{11}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + B_{33}\left(\frac{m}{R}\right)^2;$$

$$C_{12} = (B_{12} + B_{33})\frac{n\pi}{l}\cdot\frac{m}{R};$$

$$C_{13} = \frac{B_{12}}{R}\cdot\frac{n\pi}{l} + A_{11}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^3 + (A_{21} + 2A_{33})\frac{n\pi}{l}\left(\frac{m}{R}\right)^2;$$

$$C_{22} = B_{33}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + B_{22}\left(\frac{m}{R}\right)^2;$$

$$C_{23} = (A_{21} + 2A_{33})\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\cdot\frac{m}{R} + \frac{B_{22}}{R}\cdot\frac{m}{R} + A_{22}\left(\frac{m}{R}\right)^3;$$

$$C_{33} = D_{11}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 + (4D_{33} + D_{12})\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{m}{R}\right)^2 + D_{22}\left(\frac{m}{R}\right)^4 +$$

$$+ \frac{2A_{21}}{R}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \frac{2A_{22}}{R}\left(\frac{m}{R}\right)^2 + \frac{B_{22}}{R^2}.$$

Если отсутствует одна из внешних нагрузок, то в (13.36) ее следует принять равной нулю. Так, при осевом сжатии без внешнего давления $N_{2A} = 0$, а при отсутствии осевого сжатия $N_{1A} = 0$.

Полученные ранее формулы для критических напряжений при осевом сжатии, а также для критического внешнего давления являются частными случаями более общей зависимости (13.36), в которой необходимо отбросить одно из слагаемых с внутренним усилием и ввести физические константы, соответствующие однослойной изотропной оболочке.

Независимо от характера решаемой задачи критическая нагрузка находится с помощью выражения (13.36) путем отыскания минимума внутреннего усилия (собственного значения) по числам m и n. Вычисления без использования ЭВМ требуют больших усилий, поэтому целесообразно иметь простые зависимости, с помощью которых можно было бы просчитать множество вариантов.

Рассмотрим некоторые из опубликованных зависимостей подобного рода, являющихся частными случаями общей формулы (13.36).

13.5.1. Ортотропная подкрепленная оболочка при осевом сжатии

В отличие от изотропной оболочки, формулы для критических напряжений потери устойчивости при осесимметричной и несимметричной формах для ортотропной оболочки получаются разными. Так, при симметричной форме потери устойчивости в этом случае получается:

$$\sigma_{1кр} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\mu_1\mu_2)}}\sqrt{E_1E_2}\,\frac{\delta}{R}, \tag{13.37}$$

где E_1, E_2, μ_1, μ_2 — модули упругости и коэффициенты Пуассона в меридиональном (индекс 1) и тангенциальном направлениях (индекс 2). Преобразуем формулу (13.37) так, чтобы в нее входили цилиндрическая жесткость в осевом направлении $D_1 = \dfrac{E_1\delta^3}{12(1-\mu_1\mu_2)}$ и жесткость на растяжение в тангенциальном направлении $B_2 = E_2\delta$. Получаем:

$$\sigma_{1кр} = \frac{2}{R\delta}\sqrt{D_1B_2}\,. \tag{13.38}$$

Применим ее для отсека с работающей обшивкой, который представляет из себя тонкую оболочку, подкрепленную изнутри стрингерами и шпангоутами. Это может быть стрингерный или вафельный отсек (рис. 13.7).

В этом случае жесткости равны: $D_1 = D + \dfrac{E_cI_c}{l_c}$; $B_2 = B + \dfrac{E_шF_ш}{l_ш}$, где величины без индекса относятся к оболочке; $F_ш$, $l_ш$ — площадь сечения и расстояние между шпангоутами; I_c — момент инерции сечения стрингера относительно оси, проходящей через координатную поверхность, проведенную через середину обшивки; l_c — расстояние между стрингерами.

После подстановки жесткостей в формулу (13.38) ее можно преобразовать к следующему виду:

$$\sigma_{1кр} = 0,605 E \frac{\delta_{пр}}{R},$$

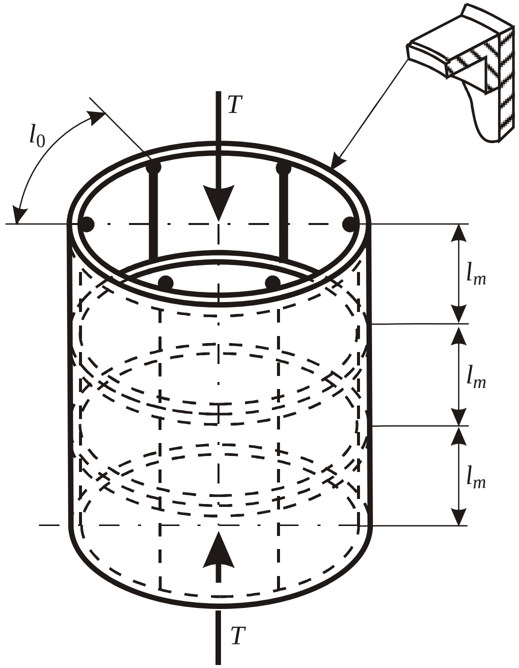


Рис. 13.7. Оболочка с внутренними подкреплениями

где $\delta_{пр}$ — приведенная толщина обшивки эквивалентной однослойной оболочки. По внешнему виду полученная формула совпадает с той, которая была получена для изотропной оболочки. В практических расчетах в ней необходимо заменить коэффициент 0,605 на значение, вычисляемое по следующей формуле:

$$k = (0,606 \div 0,546)\left[1 - \exp\left(-\frac{1}{16}\sqrt{\frac{R\delta}{\delta_{пр}^2}}\right)\right].$$

Теоретическая формула для критических напряжений при несимметричной форме потери устойчивости дает меньшие значения напряжений, однако ее использование не имеет особого смысла, т. к. приходится вводить эмпирический коэффициент, учитывающий влияние начальных геометрических несовершенств оболочки.

13.5.2. Ортотропная подкрепленная оболочка при равномерном внешнем давлении

В этом случае критическое давление потери устойчивости можно определять по следующей приближенной формуле, полученной для оболочек средней длины:

$$p_{кр} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \frac{E_2}{\left(1-\mu_1\mu_2\right)^{3/4}} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \frac{\pi R}{l} \left(\frac{\delta}{R}\right)^{5/2},$$

которую можно записать через жесткости следующим образом:

$$p_{кр} = 4\frac{\pi R}{l}\left(\frac{B_1}{R}\right)^{1/4}\left(\frac{D_2}{3R^3}\right)^{3/4}, \tag{13.39}$$

где B_1 — жесткость на растяжение в меридиональном (осевом) направлении; D_2 — цилиндрическая жесткость в тангенциальном направлении.

Для длинных оболочек при определении критического давления пользуются формулой, полученной для кольца, которая в случае ортотропной оболочки запишется так:

$$p_{кр} = \frac{3D_2}{R^3}. \tag{13.40}$$

Для учета влияния геометрических несовершенств оболочек можно пользоваться рекомендациями, приведенными ранее для гладких оболочек.

Рассмотрим примеры расчета жесткостей подкрепленных оболочек (рис. 13.8), которые используются в формулах (13.39) и (13.40).

Шпангоутная оболочка представляет собой обшивку, подкрепленную изнутри кольцами-шпангоутами. Для нее в формуле (13.39) имеем:

$$B_1 = E\delta; \quad D_2 = \frac{E\delta^3}{12\left(1-\mu^2\right)} + \frac{E_ш I_ш}{l_ш},$$

где $I_ш$ — момент инерции шпангоута относительно срединной поверхности обшивки; $l_ш$ — расстояние между шпангоутами. Здесь и далее материал обшивки и подкреплений считаем одинаковым. В случае вафельной оболочки, когда появляются продольные подкрепления, изменится жесткость на растяжение в продольном направлении:

$$B_1 = E\delta + \frac{EF_c}{l_c},$$

где F_c, l_c — площадь сечения и расстояние между стрингерами.

Если обшивка подкреплена изнутри поперечным гофром, то:

$$B_1 = E\delta; \quad D_2 = \frac{E\delta^3}{12\left(1-\mu^2\right)} + \frac{EI_г}{l_г},$$

где $I_г$ — момент инерции одной волны гофра относительно срединной поверхности оболочки; $l_г$ — расстояние между волнами гофра.

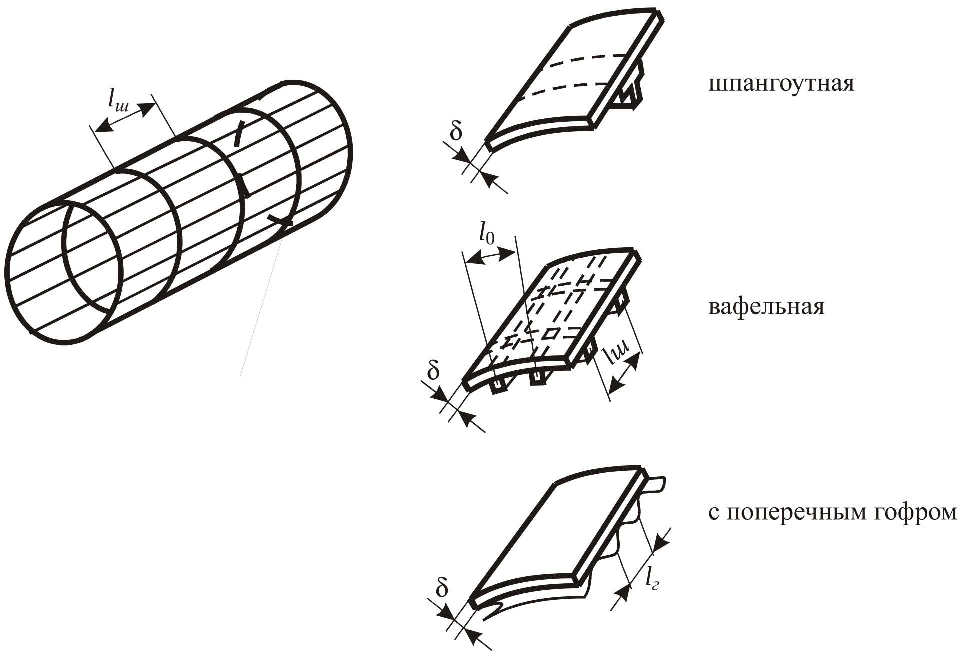


Рис. 13.8. Схема подкреплений в оболочках

13.5.3. Оболочки при осевом сжатии и внешнем давлении

Если воспользоваться общей формулой (13.36), то необходимо задать (или знать заранее) соотношение между осевым и тангенциальным внутренним усилиями, а затем отыскивать минимум по числу волн m и n. Поиск минимума довольно трудоемкий процесс, поэтому на стадии проектировочных расчетов целесообразно использовать приближенный способ определения критических нагрузок, предложенный известным татарским ученым-математиком Х. М. Муштари.

Если построить график зависимости критического давления от критических меридиональных напряжений, то он обязательно будет проходить через точку критического давления на оси ординат, соответствующего отсутствию осевого сжатия и определяемого по формуле П. Ф. Папковича (13.23) для оболочек средней длины. Ось абсцисс пересекается в точке, соответствующей критическим напряжениям в отсутствие внешнего давления. Можно показать, что график огибающей имеет выпуклость, направленную от начала координат (рис. 13.9). Тогда хорошей аппроксимацией этой кривой будет прямая линия, соединяющая характерные точки на осях координат, а соответствующее расчетное уравнение записывается как уравнение прямой в отрезках:

$$\frac{p}{p_{кр}}+\frac{\sigma_1}{\sigma_{1кр}}=1, \tag{13.41}$$

где $p_{кр}$ — критическое давление потери устойчивости в отсутствие осевого сжатия, определяемое по формуле (13.39) или (13.23) для изотропной оболочки; $\sigma_{1кр}$ — критическое напряжение потери устойчивости в осевом направлении, определяемое по формуле (13.37) или (13.9) для изотропной оболочки.

На рис. 13.9 заштрихована область неустойчивых состояний оболочки, когда левая часть выражения (13.41) больше единицы.

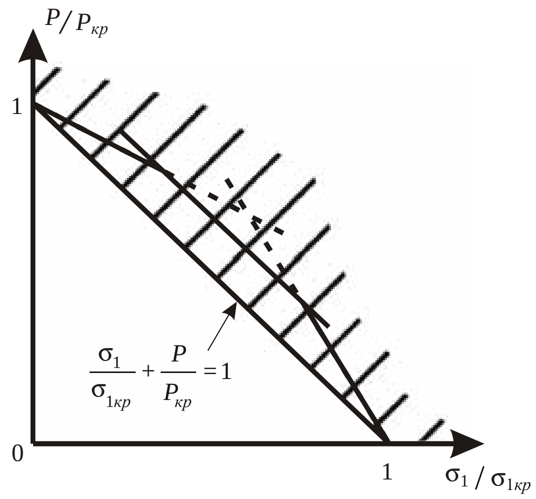


Рис. 13.9. Область устойчивости оболочки по Муштари

13.6. Проектирование отсеков, нагруженных внешним давлением

Для повышения несущей способности отсеков, нагруженных внешним давлением, их наддувают внутренним давлением или подкрепляют силовым набором. Простейшим способом подкрепления могут служить кольца-шпангоуты, которые делят гладкую оболочку на участки меньшей длины и теряют устойчивость при больших критических давлениях, чем вся гладкая оболочка. Это хорошо видно из формулы П. Ф. Папковича, позволяющей определить критическое давление потери устойчивости гладкой оболочки средней длины:

$$p_{кр} = 0{,}92\, E \frac{R}{l} \left(\frac{\delta}{R} \right)^{5/2}, \tag{13.42}$$

в которой длина l стоит в знаменателе, поэтому уменьшение длины оболочки увеличивает $p_{кр}$.

Рассмотрим сначала проектировочный расчет шпангоутного отсека.

13.6.1. Шпангоутный отсек

Отсек представляет собой гладкую оболочку толщиной δ, подкрепленную изнутри шпангоутами с площадью сечения $F_ш$, расположенными на одинаковом расстоянии l друг от друга. Отсек нагружен постоянным внешним давлением p. Проектными являются следующие размеры отсека:

- толщина δ;
- расстояние между шпангоутами l;
- площадь промежуточных шпангоутов $F_ш$.

Для определения этих размеров используются два условия работоспособности — общей и местной устойчивости отсека. В качестве третьего примем условие минимума массы отсека по расстоянию между шпангоутами (рис. 13.10).

Преобразуем сначала выражение для критического давления общей потери устойчивости отсека, воспользовавшись формулой (13.39):

$$p_{кр}^0 = 4 \frac{\pi R}{L} \left(\frac{B_1}{R} \right)^{1/4} \left(\frac{D_2}{3R^3} \right)^{3/4}, \tag{13.43}$$

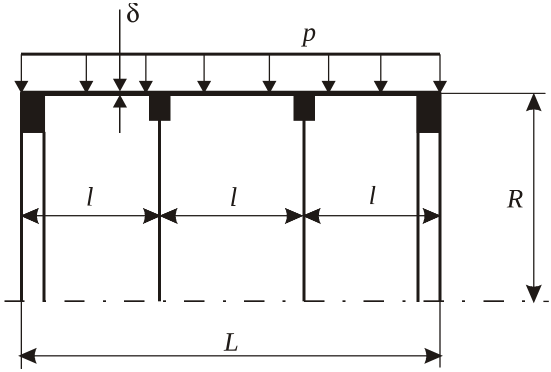


Рис. 13.10. Схема шпангоутного отсека

в котором $B_1 = E\delta$ — жесткость оболочки на растяжение в осевом направлении; $D_2 = D + \dfrac{EJ_ш}{l}$ — цилиндрическая жесткость в тангенциальном направлении; $J_ш$ — момент инерции шпангоута. Обозначая суммарный момент инерции шпангоута с примыкающей к нему обшивкой как $I_ш \cong J_ш + \dfrac{l\delta^3}{12\left(1-\mu^2\right)}$, а также вводя безразмерную жесткость шпангоута:

$$\xi = \frac{12\left(1-\mu^2\right)}{\delta^3 l} I_ш, \qquad (13.44)$$

перепишем (13.43) так:

$$p_{кр}^0 = 0{,}92\, E\, \frac{R}{L}\left(\frac{\delta}{R}\right)^{5/2} \xi^{3/4}. \qquad (13.45)$$

Критическое давление местной потери устойчивости участка оболочки между шпангоутами определяется по формуле (13.42). Приравнивая (13.42) и (13.45), находим связь между безразмерной жесткостью шпангоутов ξ и расстоянием между ними l:

$$\xi = n^{4/3}, \qquad (13.46)$$

где $n = \dfrac{L}{l}$ — количество участков, на которые шпангоуты делят оболочку.

Вместо (13.46) воспользуемся зависимостью, которая лучше согласуется с экспериментальными данными [13.4]:

$$\xi = 0{,}458 n^{5/3}, \tag{13.47}$$

ее и будем применять в дальнейшем.

Второе условие работоспособности можно использовать для определения толщины δ, однако здесь воспользуемся преобразованием, которое наряду с решением поставленной задачи позволит установить граничное значение нагрузки между гладким и шпангоутным отсеками. Обозначая за $\delta_{гл}$ толщину гладкой оболочки без подкреплений длиной L и считая, что гладкая и подкрепленная оболочки равноустойчивые, приравняем критические давления:

$$0{,}92 E \frac{R}{l} \left(\frac{\delta}{R} \right)^{5/2} = 0{,}92 E \frac{R}{L} \left(\frac{\delta_{гл}}{R} \right)^{5/2},$$

получим:

$$\delta = \frac{\delta_{гл}}{n^{0{,}4}}. \tag{13.48}$$

При этом $\delta_{гл}$ находится по известному внешнему давлению из формулы П. Ф. Папковича (13.42):

$$\delta_{гл} = R \left(\frac{p}{0{,}92 E} \right)^{0{,}4} \left(\frac{L}{R} \right)^{0{,}4}. \tag{13.49}$$

Выразим через n и ξ эквивалентную толщину шпангоутного отсека, воспользовавшись следующим выражением:

$$\delta_э = \delta + \frac{F_ш}{l}, \tag{13.50}$$

и с учетом (13.48) имеем:

$$\bar{\delta} = \frac{\delta_э}{\delta_{гл}} = \frac{1}{n^{0{,}4}} + \frac{F_ш}{l \delta_{гл}}. \tag{13.51}$$

Но:

$$I_ш = k F_ш^2, \tag{13.52}$$

где коэффициент k зависит от формы поперечного сечения шпангоута, поэтому:

$$F_ш = \sqrt{\frac{I_ш}{k}}. \tag{13.53}$$

Так как на основании (13.44) и (13.47) $I_ш = \frac{0,458\delta^3 l}{12\left(1-\mu^2\right)} n^{5/3}$, то с учетом (13.48) после преобразований имеем:

$$I_ш = \frac{\delta_{гл}^3 L}{22,5 n^{8/15}}. \qquad (13.54)$$

Подставляя (13.54) в (13.53) и полагая $n^{2/15} \approx 1$, получим:

$$F_ш \cong \frac{\chi\delta_{гл}}{n^{0,4}}\sqrt{L\delta_{гл}}, \qquad (13.55)$$

где коэффициент $\chi = \frac{1}{\sqrt{22,5k}}$.

Теперь (13.51) можно переписать так:

$$\bar{\delta} = \frac{1}{n^{0,4}} + \frac{\chi}{n^{0,4}}\frac{\sqrt{L\delta_{гл}}}{l}. \qquad (13.56)$$

Подставляя сюда выражение (13.50) для $\delta_{гл}$, получим окончательно:

$$\bar{\delta} = \frac{1}{n^{0,4}} + \lambda n^{0,6}, \qquad (13.57)$$

где коэффициент λ, зависящий от внешнего давления, модуля упругости и размеров отсека, равен:

$$\lambda = \chi\left(\frac{p}{0,92E}\right)^{0,2}\left(\frac{R}{L}\right)^{0,3}. \qquad (13.58)$$

Воспользуемся третьим из перечисленных ранее условий, взяв производную от δ вблизи точки минимума в зависимости от $\bar{\delta}$ и приравняв ее к нулю:

$$\frac{d\bar{\delta}}{dn} = \frac{\lambda n^{0,4} - 0,4\left(1+\lambda n\right)n^{-0,6}}{n^{0,8}} = 0, \qquad (13.59)$$

откуда находим, что отсек имеет наименьшую массу при:

$$n_{opt} = \frac{2}{3\lambda}, \qquad (13.60)$$

а соответствующая эквивалентная толщина отсека после подстановки (13.60) в (13.57) равна:

$$\bar{\delta}_{opt} = 1,96\lambda^{0,4}. \qquad (13.61)$$

Исследуем характер поведения $\bar{\delta}$ вблизи точки минимума в зависимости от n и с этой целью составим отношение:

$$\Delta = \frac{\bar{\delta}}{\bar{\delta}_{opt}} = \frac{(1+\lambda n)3n_{opt}^{0,4}}{5n^{0,4}} = \frac{\left(\dfrac{3+2n}{n_{opt}}\right)}{5\left(\dfrac{n}{n_{opt}}\right)^{0,4}}. \tag{13.62}$$

На рис. 13.11 построен график зависимости $\Delta\left(\dfrac{n}{n_{opt}}\right)$, из которого следует, что, начиная с $\dfrac{n}{n_{opt}} > (0,4 \div 0,5)$, отклонение количества пролетов от оптимального несущественно увеличивает массу отсека, поэтому окончательное число пролетов можно уменьшить в 2 раза по сравнению с оптимальным, и это практически не скажется на массе отсека.

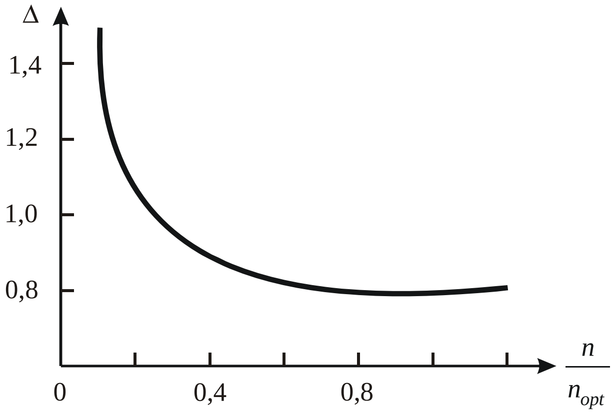


Рис. 13.11. Влияние числа пролетов на массу отсека

Для определения границы между гладким и шпангоутным отсеками подставим n_{opt} в выражение для $\bar{\delta}$ и получим:

$$\bar{\delta}_{opt} = 1,96\lambda^{0,4}. \tag{13.63}$$

Граница будет при $\bar{\delta}_{opt} = 1$, что соответствует $\lambda_0 = 0,186$. Поэтому при $\lambda < 0,186$ шпангоутный отсек имеет меньшую массу, чем гладкий, а при

$\lambda > 0{,}186$ наоборот. Дальнейший расчет отсека сводится к подбору размеров сечения шпангоута по известной площади сечения $F_ш$ и выбранной форме поперечного сечения.

13.6.2. Вафельный отсек

Вафельный отсек имеет продольные стрингеры и поперечные шпангоуты прямоугольного поперечного сечения, которые составляют единое целое с гладкой стенкой (рис. 13.12). Вафельный отсек получается удалением материала из гладкой оболочки с начальной толщиной $\delta_{исх}$, поэтому в качестве одного из проектных параметров удобно взять отношение исходной толщины оболочки к окончательной:

$$\psi = \frac{\delta_{исх}}{\delta}. \tag{13.64}$$

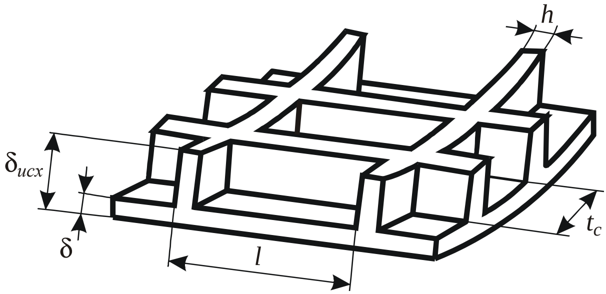


Рис. 13.12. Схема подкреплений в вафельном отсеке

Выразим через ψ формулу для критического давления общей потери устойчивости (13.45), в которой жесткость на растяжение в осевом направлении равна теперь:

$$B_1 = E\delta\left(1 + \frac{F_c}{l\delta}\right), \tag{13.65}$$

а изгибная жесткость в тангенциальном:

$$D_2 = D\left(1 + \frac{EJ_ш}{l\,D}\right). \tag{13.66}$$

Имеем:

$$\frac{F_c}{l\,\delta} = \frac{h\left(\delta_{исх} - \delta\right)}{l\,\delta} = \frac{h}{l}\left(\psi - 1\right); \tag{13.67}$$

$$\frac{EJ_{ш}}{lD}=\frac{h\left(\delta_{исх}-\delta\right)^{3}12\left(1-\mu^{2}\right)}{12l\delta^{3}}\cong\frac{h}{l}\left(\psi-1\right)^{3}. \quad (13.68)$$

Подставляя (13.65) и (13.66) в (13.43), с учетом (13.67) и (13.68) после преобразований получаем:

$$p_{кр}^{0}=0,92\,E\frac{R}{L}\left(\frac{\delta}{R}\right)^{5/2}\sqrt[4]{\left[1+\frac{h}{l}\left(\psi-1\right)\right]\left[1+\frac{h}{l}\left(\psi-1\right)^{3}\right]^{3}}. \quad (13.69)$$

Для определения размеров вафельной оболочки воспользуемся следующими условиями: общей устойчивости оболочки $p\le p_{кр}^{0}$; местной устойчивости участка оболочки между ребрами $\sigma_{2}\le\sigma_{кр}^{м}$; местной устойчивости ребра $\sigma_{2}\le\sigma_{кр}^{р}$; минимума массы.

На основании рекомендаций в [13.4] для обеспечения местной устойчивости ребра принимаем $\psi=\left(5\div6\right)$. Вместо массы отсека будем искать экстремум эквивалентной толщины стенки гладкого отсека:

$$\delta_{э}=\delta+2\frac{h}{l}\delta\left(\psi-1\right). \quad (13.70)$$

Преобразуем записанное выражение к виду, удобному для отыскания экстремума по одной из переменных. Пользуясь знаком равенства во всех условиях, из условия общей устойчивости отсека имеем:

$$\delta=R\left[\left(\frac{pL}{0,92\,ER}\right)\frac{1}{\sqrt[4]{\left(1+\eta\left(\psi-1\right)\right)\left(1+\eta\left(\psi-1\right)^{3}\right)^{3}}}\right]^{0,4}, \quad (13.71)$$

где $\eta=\dfrac{h}{l}$.

Но если оболочка гладкая и имеет толщину $\delta_{гл}$, то из условия ее устойчивости от внешнего давления имеем:

$$\delta_{гл}=R\left(\frac{pL}{0,92\,ER}\right)^{0,4}, \quad (13.72)$$

поэтому (13.71) можно переписать так:

$$\delta = \delta_{гл} \left[\frac{1}{\sqrt[4]{\big(1+\eta(\psi-1)\big)\Big(1+\eta(\psi-1)^3\Big)^3}} \right]^{0,4}, \tag{13.73}$$

и тогда безразмерная эквивалентная толщина отсека равна:

$$\bar{\delta} = \frac{\delta_э}{\delta_{гл}} = \frac{1+2\eta(\psi-1)}{\left[\sqrt[4]{\big(1+\eta(\psi-1)\big)\Big(1+\eta(\psi-1)^3\Big)^3}\right]^{0,4}}. \tag{13.74}$$

Считая ψ известным, находим η из условия минимума $\bar{\delta}$, т. е.:

$$\frac{d\bar{\delta}}{d\eta} = 0. \tag{13.75}$$

Решение этого уравнения удобно находить численно или графически, т. к. оптимум $\bar{\delta}$ по η довольно пологий. Теперь, зная $\delta_{гл}$, ψ, η_{opt}, находим толщину δ из (13.73), а для определения расстояния между ребрами воспользуемся условием местной устойчивости участка оболочки между ребрами $\sigma_2 = \sigma_{кр}^{м}$, или:

$$\frac{pR}{\delta} = 3{,}6\,E\left(\frac{\delta}{l}\right)^2, \tag{13.76}$$

из которого получаем $l = \delta\sqrt{\delta\dfrac{3{,}6\,E}{pR}}$. Теперь $h = \eta_{opt} l$; $\delta_{исх} = \psi\delta$, и все размеры отсека определены. Далее необходимо провести конструкторское проектирование отсека, после чего в рамках проверочного расчета нужно найти коэффициенты запаса устойчивости отсека и его элементов.

Выводы

В этой главе были изучены следующие вопросы:

1. Физическая картина поведения цилиндрической оболочки при общей потере устойчивости.
2. Получены уравнения для исследования задач устойчивости однослойных и многослойных оболочек при безмоментном докритическом состоянии.

3. Получены формулы для расчета устойчивости гладких цилиндрических оболочек при осевом сжатии и внешнем давлении.
4. Ортотропная подкрепленная оболочка при осевом сжатии.
5. Ортотропная подкрепленная оболочка при равномерном внешнем давлении.
6. Устойчивость оболочки при комбинированном нагружении.
7. Проектировочный расчет шпангоутного вафельного отсека, нагруженного внешним давлением.

Упражнения и вопросы

1. Постройте диаграмму потери устойчивости цилиндрической оболочки, нагруженной внешним давлением. Сравните ее с диаграммами потери устойчивости пластинок и стержней.
2. Изложите порядок исследования оболочек на устойчивость. Дайте определения общей и местной потерь устойчивости оболочки. Приведите примеры.
3. Найдите выражение для нормальной проекции, создаваемой тангенциальным безмоментным внутренним усилием, в уравнении для исследования устойчивости цилиндрических оболочек.
4. Получите формулу для расчета критических напряжений потери устойчивости при осевом сжатии цилиндрической оболочки, считая, что оболочка теряет устойчивость по несимметричной форме потери устойчивости.
5. Определите толщину стенки цилиндрической оболочки $R = 0,6$ м, длина равна радиусу, $E = 0,7 \cdot 10^{11}$ Па, $\mu = 0,3$ в трех случаях:
   - оболочка растянута осевой силой $T = 10^5$ Н;
   - оболочка сжата такой же силой;
   - оболочка нагружена внешним давлением, равным $p_0 = T/\pi R^2$.
6. Определите толщину стенок цилиндрической емкости $R = L = 20$ м, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\mu = 0,3$, помещенной в воде на глубину 100 м. Толщину цилиндрической части емкости определите из условий устойчивости, а толщину плоских днищ — по формуле для круглой пластинки с жестко заделанными краями ($\sigma_{0,2} = 1,2 \cdot 10^9$ Па).

7. Определите критические напряжения потери устойчивости при осевом сжатии цилиндра $R = L = 0{,}8$ м, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\mu = 0{,}3$ с тремя значениями коэффициента, учитывающего начальные геометрические несовершенства. Сравните полученные значения.
8. Постройте график зависимости критического давления потери устойчивости ортотропной цилиндрической оболочки $R = L = 0{,}6$ м, $E_1 = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\mu = 0{,}3$; $\delta = 4 \cdot 10^{-3}$ м в зависимости от отношения модулей упругости, изменяющегося в диапазоне: $E_2/E_1 = 0{,}2 \div 1{,}0$. Перестройте полученный график для критического давления, отнесенного к критическому давлению изотропной оболочки.
9. Определите количество шпангоутов, расстояние между ними и толщину стенки шпангоутной цилиндрической оболочки $R = L = 0{,}8$ м; $E_1 = 0{,}7 \cdot 10^{11}$ Па, $\mu = 0{,}27$, нагруженной внешним давлением $p_0 = 5 \cdot 10^5$ Па.
10. Определите проектные размеры вафельного отсека, нагруженного внешним давлением, для условий предыдущей задачи.

Литература к главе 13

1. Алфутов Н. А., Колесников К. С. Устойчивость движения и равновесия. Учебник для вузов / Под ред. К. С. Колесникова. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003, 256 с.
2. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. — М.: Наука, 1967, 984 с.
3. Вайнгартен, Морган, Сейд. Устойчивость упругих тонкостенных цилиндрических и конических оболочек при осевом сжатии // Ракетная техника и космонавтика. № 3 — 1965, 151—160 с.
4. Лизин В. Т., Пяткин В. А. Проектирование тонкостенных конструкций. — М.: Машиностроение, 2003, 448 с.
5. Космическая техника / Под ред. Г. Сейферта. — М.: Наука, 1964, 727 с.
6. Стейн. Последние достижения в исследовании выпучивания оболочек. Ракетная техника и космонавтика. № 12 — 1968, 122—130 с.
7. Погорелов А. В. Геометрическая теория устойчивости оболочек. — М.: Наука, 1966, 296 с.

Глава 14

Численные методы строительной механики

Эта глава знакомит читателя с численными методами расчета, которые наиболее часто используются в инженерной практике. Областью их применения являются те случаи, когда отсутствует аналитическое решение задачи. По своей сути эти методы приближенные и поэтому, конечно, не могут конкурировать с точными аналитическими решениями в тех случаях, когда эти решения известны. Но численные методы могут использовать точные решения для проверки достоверности полученных результатов.

Данная глава содержит классификацию численных методов, основанную на способах дискретизации исходных уравнений, и их описания на конкретных примерах конструкций, используемых на практике. Из численных методов расчета метод конечных элементов, который нашел широкое применение в практике проектирования инженерных конструкций и сооружений, выделен в отдельную *гл. 15*. В ней приводится подробное описание двух способов получения расчетных соотношений на примере тонких осесимметричных оболочек.

В этой главе будут рассмотрены следующие темы:

- классификация численных методов расчета;
- метод конечных разностей;
- энергетические функционалы механики твердого тела;
- вариационно-разностные методы;
- методы базисных функций.

14.1. Классификация методов

В предыдущих главах, наряду с изложением теории и уравнений, относящихся к рассматриваемому вопросу, приводились только аналитические решения этих уравнений в виде конечных формул или соотношений.

Конечно, несомненным достоинством аналитических формул является возможность анализа множества вариантов при различных входных проектных параметрах; кроме того, они позволяют получать легко обозримые результаты и не требуют значительных вычислительных ресурсов, что особенно важно на этапе проектирования конструкции.

Но, к сожалению, аналитические решения получены только для простейших и типовых элементов реальных конструкций.

Многие годы реальные конструкции заменялись простыми расчетными схемами, допускавшими получение аналитических решений. Примером такой расчетной схемы может служить балка, изображенная на рис. 1.4, которая моделирует поведение реального крыла летательного аппарата. В то же время потребности практики проектирования инженерных сооружений поставили вопрос о создании более универсальных и практически реализуемых методов, которые позволяли бы получать достоверное решение для сколь угодно геометрически сложной формы конструкции.

Вполне естественно, что возникла идея попытаться построить решение задачи не при помощи одной или нескольких функций, которые полностью исчерпали бы это решение, а при помощи дискретного множества чисел, которые описывали бы поведение конструкции в отдельных ее точках.

Сами эти числа в дискретных точках являются или искомыми величинами, или параметрами, которые используются для построения функций, описывающих поле перемещений, напряжений или деформаций в конструкции. Так возникли "методы дискретизации", или "численные методы", которые явились плодом совместных усилий математиков и инженеров.

Несмотря на то, что многие из этих методов созданы давно и предпринимались попытки массовых "ручных" вычислений — на логарифмических линейках, арифмометрах и калькуляторах, можно считать, что широкое внедрение их в расчетную практику произошло после появления электронно-вычислительных машин, или компьютеров, как их принято теперь называть.

Примечание

Название "ЭВМ" появилось исторически первым, т. к. сначала компьютеры создавались для выполнения вычислений. Англоязычный термин "компьютер" появился у нас позже, хотя он переводится как "вычислитель", но, по-видимому, прижился после того, как ЭВМ стали применяться не только для вычислений, но и для обработки текстов, хранения различных данных, управления процессами и т. п.

Методы дискретизации можно разделить по следующим признакам:

1. Тип исходных математических соотношений:
   - дифференциальные уравнения, описывающие поведение моделируемой среды;

- вариационные принципы, записанные в интегральной форме и эквивалентные дифференциальным уравнениям.

2. Метод дискретизации исходных соотношений:

- метод конечных разностей;
- метод взвешенных невязок.

Комбинация перечисленных методов дискретизации дает четыре категории методов, приведенных в табл. 14.1.

Общая характеристика методов, приведенных в этой таблице, их достоинства и недостатки и являются предметом дальнейшего содержания главы. Следует упомянуть также, что кроме перечисленных в таблице методов, используются и комбинации дискретных и аналитических методов — метод полос, метод редукционных коэффициентов и т. п.

Таблица 14.1. *Классификация численных методов*

Дискретизация	**Исходные соотношения**	**Метод дискретизации**
1. Разностные отношения	1. Дифференциальные уравнения	Классический метод конечных разностей
	2. Вариационные принципы	Вариационно-разностные методы
2. Базисные функции	1. Дифференциальные уравнения	Метод Бубнова—Галеркина, наименьших квадратов, моментов, коллокаций по точкам и подобластям
	2. Вариационные принципы	Метод Ритца, конечных элементов

Методы, использующие базисные функции, составляют обширный класс методов под общим названием *методы взвешенных невязок*. Они обладают бóльшей общностью, чем прямой метод конечных разностей [14.4], и, более того, для построения расчетных схем на их основе можно воспользоваться теми процедурами, которые применяются в методе конечных элементов.

Так, в каждом конкретном случае с помощью метода взвешенных невязок можно прийти к таким же соотношениям, что и в методе конечных разностей, но получение их более трудоемко, и поэтому общий метод получения расчетных соотношений в виде конечных разностей не рекомендуется к использованию [14.4], [14.8].

14.2. Метод конечных разностей

К методу конечных разностей (МКР) относят те способы дискретизации, в которых производные в исходных уравнениях заменяются разностными отношениями. Причем если уравнения записаны в дифференциальной форме, то МКР называют классическим методом конечных разностей (иногда методом сеток). Если для получения дискретных соотношений используются вариационные принципы, то в этом случае методы называют вариационно-разностными.

14.2.1. Основные достоинства и недостатки

Меток сеток [14.5], [14.7], который широко применялся для дискретизации уравнений механики сплошных сред и механики твердого тела, в частности, еще до появления метода конечных элементов, обладает следующими достоинствами:

1. Универсальность методологии построения разностных уравнений.
2. Быстрота получения разностных соотношений.
3. Сведение дифференциальных уравнений к системе алгебраических уравнений ленточной структуры, которые решаются по хорошо отлаженным математическим процедурам.
4. Хорошо разработанный аппарат анализа погрешностей аппроксимации и устойчивости вычислительных схем.
5. Простота программ на сеточных областях, границы которых параллельны осям координат или совпадают с ними.
6. Наличие хорошо проверенных программ для выполнения матричных операций.

Из числа наиболее заметных недостатков метода конечных разностей можно назвать следующие его особенности, которые стимулировали появление других методов дискретизации исходных уравнений, в частности, метода конечных элементов:

1. Необходимость модификации разностной схемы на криволинейных границах.
2. Необходимость использования узлов разностной сетки за границами области интегрирования.
3. Модификация разностной схемы на границах области, способ которой зависит от типа граничных условий.

4. Если задаются естественные граничные условия, то матрица системы алгебраических уравнений становится несимметричной.

Рассмотрим особенности применения МКР на примере решения задачи об изгибе прямоугольной пластины, нагруженной постоянным внешним давлением.

14.2.2. Изгиб прямоугольной пластины

Рассмотрим тонкую прямоугольную пластину, изображенную на рис. 5.5. Пластина нагружена постоянным давлением p_0, действующим в положительном направлении оси *Z*, которая на рис. 5.5 направлена так, чтобы получилась правая система координат. Прогиб пластины $w(x, y)$ по оси *Z* можно определить с помощью уравнения Софи Жермен (5.35), которое запишем в развернутом виде через производные, воспользовавшись соответствующим выражением для бигармонического оператора:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_0}{D}. \tag{14.1}$$

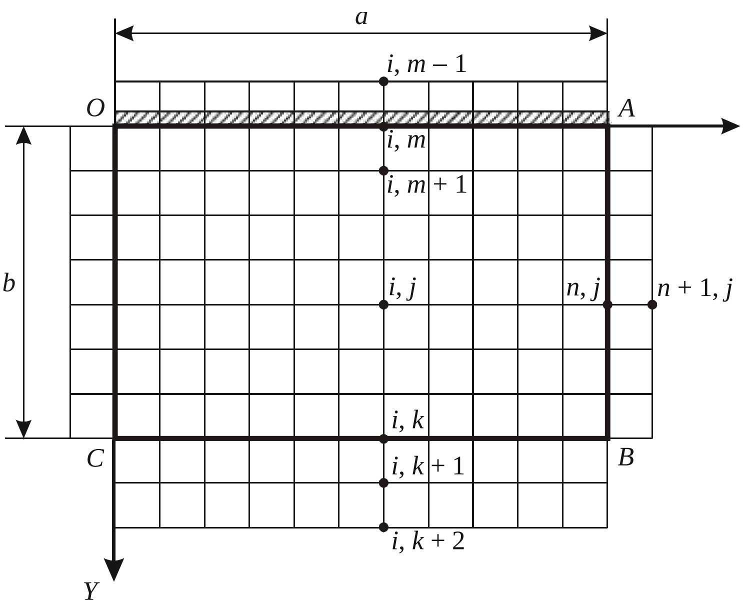


Рис. 14.1. Разностная сетка на срединной плоскости прямоугольной пластинки

Построим на срединной плоскости пластинки прямоугольную разностную сетку с шагами $\lambda = \Delta x$ и $h = \Delta y$ по осям X и Y соответственно (рис. 14.1). Узлы этой сетки обозначим по оси X индексом i, а по оси Y — индексом j. Тогда перемещение пластинки в узле (i, j) будем обозначать $w_{i,j}$.

Запишем производные в уравнении (14.1) через разностные отношения [14.5], воспользовавшись принятыми обозначениями для узловых перемещений:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \approx \frac{1}{\lambda^4}\left(w_{i-2,j} - 4w_{i-1,j} + 6w_{i,j} - 4w_{i+1,j} + w_{i+2,j}\right); \tag{14.2}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \approx \frac{1}{h^4}\left(w_{i,j-2} - 4w_{i,j-1} + 6w_{i,j} - 4w_{i,j+1} + w_{i,j+2}\right); \tag{14.3}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \approx \frac{1}{\lambda^2 h^2}\Big(&w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j+1} + w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j-1} - \\ &-2w_{i+1,j} - 2w_{i-1,j} - 2w_{i,j+1} - 2w_{i,j-1} + 4w_{i,j}\Big).\end{aligned} \tag{14.4}$$

Подставляя (14.2)—(14.4) в уравнение (14.1), получаем искомое разностное соотношение для внутреннего узла (i, j) (не совпадающего с границей) разностной сетки. Это соотношение удобно записать в следующем компактном виде [14.5]:

		e		
	2	$-4-4e'$	2	
e	$-4-4e'$	$8+6e+6e'$	$-4-4e'$	e
	2	$-4-4e'$	2	
		e'		

$$w - \frac{p_0 \lambda^2 h^2}{D} = 0, \tag{14.5}$$

в котором использованы обозначения: $e = \dfrac{h^2}{\lambda^2}$; $e' = \dfrac{\lambda^2}{h^2}$. Под w в этой записи подразумевается перемещение в соответствующем узле, номер которого определяется сопоставлением таблицы в (14.5) с шаблоном, приведенным на рис. 14.2. Полученные перемещения, помноженные на коэффициенты из таблицы, складываются и вместе с последним свободным слагаемым в (14.5) образуют одно линейное алгебраическое уравнение.

		$i, j-2$		
	$i-1, j-1$	$i, j-1$	$i+1, j-1$	
$i-2, j$	$i-1, j$	i, j	$i+1, j$	$i+2, j$
	$i-1, j+1$	$i, j+1$	$i+1, j+1$	
		$i, j+2$		

Рис. 14.2. Шаблон узлов, используемый при построении разностной схемы

Такое уравнение записывается для всех внутренних и приграничных узлов разностной сетки около жесткой заделки и шарнирного закрепления, т. е. около сторон OA, OC и AB пластинки (см. рис. 5.5). На этих сторонах перемещение известно и равно нулю, а для определения перемещения в приграничном узле требуется еще одно перемещение в узле, находящемся за границей области, которое определяется из второго граничного условия. Так, в жесткой заделке на стороне OA равен нулю угол поворота, поэтому если воспользоваться центральной разностью для вычисления производной, то:

$$\frac{\partial w}{\partial y} \approx \frac{w_{i,m+1} - w_{i,m-1}}{2h} = 0 ,$$

откуда:

$$w_{i,m-1} = w_{i,m+1} , \tag{14.6}$$

где индексом $(m+1)$ обозначен приграничный узел, а $(m-1)$ — узел вне границы.

На границе перемещение равно нулю, поэтому:

$$w_{i,m} = 0 .$$

При шарнирном опирании на сторонах OC и AB, кроме нулевого перемещения (индексом n обозначен узел на шарнирной границе):

$$w_{n,j} = 0 , \tag{14.7}$$

равен нулю и изгибающий момент, т. е. в этом узле по формуле (5.45) имеем:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{n,j} = 0 .$$

Но перемещение вдоль шарнирных границ *OC* и *AB* постоянное и равно нулю, поэтому вторая производная по y тоже равна нулю, и тогда условие равенства нулю момента M_x на этих границах сводится к равенству нулю второй производной по x:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{n,j} \approx \frac{w_{n+1,j} - 2w_{n,j} + w_{n-1,j}}{2h} = 0,$$

откуда:

$$w_{n+1,j} = -w_{n-1,j}\,. \tag{14.8}$$

На свободном крае *CB* (рис. 5.5) перемещение неизвестно и должно быть определено из уравнения (14.5), в которое нужно подставить перемещения в двух узлах, расположенных за границей пластинки. Перемещения в этих узлах определим из условий равенства нулю момента M_y по формуле (5.46):

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{i,k} = 0 \tag{14.9}$$

и приведенной погонной перерезывающей силы $Q_y^* = 0$ *(см. разд. 5.8)*:

$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right)_{i,k} = 0\,. \tag{14.10}$$

Записывая (14.9) в разностном виде после преобразований, получаем формулу для вычисления перемещения в узле, находящемся за свободной границей, выраженное через перемещения в соседних узлах:

$$w_{i,k+1} = (2 + 2\mu e)\,w_{i,k} - \mu e w_{i-1,k} - \mu e w_{i+1,k} - w_{i,k-1},$$

или в табличной форме (см. шаблон на рис. 14.2):

$$w_{i,k+1} = \begin{array}{|c|c|c|} \cline{2-2} \multicolumn{1}{c|}{} & -1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline -\nu_3 & 2+2\nu_3 & -\nu_3 \\ \hline \end{array}\; w, \tag{14.11}$$

где $\nu_3 = \mu e$; $e = h^2/\lambda^2$.

Условие (14.10) сначала запишем в виде разностных отношений для вторых производных:

$$\frac{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{i,k+1} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{i,k}}{h} + (2-\mu)\frac{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{i,k+1} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{i,k}}{h} = 0, \tag{14.12}$$

а потом, выражая вторые производные через центральные разности в соответствующих узлах разностной сетки, после преобразований получаем:

$$w_{i,k+2} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}
\cline{3-3}
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & 1 & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{2-4}
\multicolumn{1}{c|}{} & 2\nu_4 & -4-4\nu_4 & 2\nu_4 & \multicolumn{1}{c}{} \\
\hline
\nu_3\nu_4 & -4e'-4\nu_3\nu_4 & 4+8e'+6\nu_3\nu_4 & -4e'-4\nu_3\nu_4 & \nu_3\nu_4 \\
\hline
\end{array}\; w, \qquad (14.13)$$

где $\nu_3 = \mu e'$; $\nu_4 = (2-\mu)e'$; $e' = \lambda^2 / h^2$.

Приближенные значения изгибающих моментов M_x, M_y и крутящего момента M_{xy} определим по формулам (5.45)—(5.47), которые в разностной форме записываются так:

$$M_x \approx \frac{D}{\lambda^2} \begin{array}{|c|c|c|}
\cline{2-2}
\multicolumn{1}{c|}{} & -\nu_3 & \multicolumn{1}{c}{} \\
\hline
-1 & 2+2\nu_3 & -1 \\
\hline
\multicolumn{1}{c|}{} & -\nu_3 & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{2-2}
\end{array}\; w; \qquad (14.14)$$

$$M_y \approx \frac{D}{h^2} \begin{array}{|c|c|c|}
\cline{2-2}
\multicolumn{1}{c|}{} & -1 & \multicolumn{1}{c}{} \\
\hline
-\nu_1 & 2+2\nu_1 & -\nu_1 \\
\hline
\multicolumn{1}{c|}{} & -1 & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{2-2}
\end{array}\; w; \qquad (14.15)$$

$$M_{xy} \approx \frac{D(1-\mu)}{4\lambda h} \begin{array}{|c|c|c|}
\hline
1 & & -1 \\
\hline
 & & \\
\hline
-1 & & 1 \\
\hline
\end{array}\; w. \qquad (14.16)$$

Здесь средняя клетка всегда относится к узлу, в котором определяется момент, а соседние клетки связаны с ним по шаблону, приведенному на рис. 14.2.

По известным моментам напряжения в узле пластинки определяются по формулам (5.48)—(5.50).

14.3. Вариационные принципы

Из вариационных принципов механики твердого тела рассмотрим только те из них, которые наиболее часто используются для приближенного решения линейных задач, рассматриваемых в книге.

Исключение составляет принцип виртуальных перемещений, который применяется также для решения геометрически и физически нелинейных задач.

14.3.1. Дифференциальная и вариационная формулировки задачи

Большинство задач механики твердого тела имеют две равнозначные математические формулировки — дифференциальную и вариационную [14.3], [14.4], [14.8], [14.9], [14.12].

При дифференциальной формулировке необходимо решить дифференциальное уравнение или систему дифференциальных уравнений при заданных граничных и начальных условиях.

Эти уравнения могут быть гиперболического, параболического или эллиптического типа. Не останавливаясь на деталях формулировки для каждого типа уравнений, отметим, что уравнения динамики конструкций можно свести к уравнениям гиперболического типа, а уравнения теплопроводности могут быть как параболического, так и эллиптического типа.

Задачи статики линейно упругого тела, которым и посвящена эта книга, описываются уравнениями эллиптического типа, дифференциальную формулировку которых в операторном виде можно записать так:

$$\left.\begin{aligned} Lu &= f(x); \\ lu\big|_s &= g(x), \end{aligned}\right\} \qquad (14.17)$$

где Lu и lu — операторы дифференциальной задачи и граничных условий соответственно.

То есть L — перечень операций над функцией $u(x)$, которые переводят ее в функцию $f(x)$. В качестве примера оператора L приведем бигармонический оператор (14.1), который в операторном виде запишется так:

$$L = \frac{\partial^4(\ )}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4(\ )}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4(\ )}{\partial y^4}. \qquad (14.18)$$

Когда оператор L применяется к функции $u(x)$, то ее следует подставить в (14.18) вместо скобок. В уравнении (14.1) роль функции $u(x)$ выполняет перемещение $w(x, y)$.

К уравнениям эллиптического типа добавляются условия на границе области интегрирования S, количество и тип которых зависят от наивысшего порядка дифференциального оператора. Так, для бигармонического оператора необходимо задать четыре условия на границе $S = S_u \cup S_\sigma$ области Ω, в которой он определен (рис. 14.3).

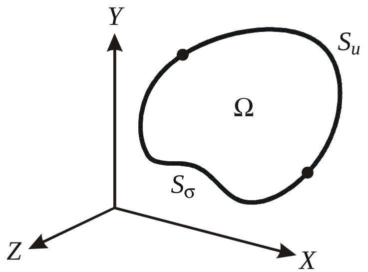


Рис. 14.3. Область определения дифференциального оператора

Эти условия бывают двух типов [14.9]:

1. Главные (геометрические) граничные условия $g_u(x)$ на участке границы S_u области Ω. Обычно они задаются на перемещения и их производные.
2. Естественные граничные условия (динамические) $g_\sigma(x)$ на участке границы S_σ области Ω.

Различие между главными граничными условиями и естественными заключается в том, что первые всегда сохраняются, а естественные условия меняются при предельном переходе от приближенного решения к точному.

При вариационной формулировке задачи отыскивается функция (или функции) $u(x)$, которая доставляет экстремум или стационарное значение функционалу или системе функционалов, имеющих такие же граничные условия, что и дифференциальная задача.

Дифференциальная и вариационная формулировки задачи совершенно эквивалентны, т. к. функции, которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям и их граничным условиям, обеспечивают также экстремум или делают функционалы стационарными.

> ***Функционалом*** называют переменную величину-функцию, в которой роль независимого переменного выполняют функции. Если функционал определен, то каждой функции из допустимого класса поставлено в соответствие некоторое число — значение функционала.

В общем виде функционал записывается так:

$$I(u) = \int_{\Omega} F(x, u, u', u'', \dots, u^{(n)}) d\Omega, \tag{14.19}$$

где x, $u(x)$ — векторы независимой переменной и функции соответственно; Ω — n-мерная область интегрирования.

Допустимыми функциями $u(x)$ будут те, которые определены со всеми своими производными до порядка n включительно. Как и в дифференциальном исчислении, где отыскивается минимум функции по независимым переменным, здесь также можно отыскивать минимум функционала по функциям $u(x)$, которые выступают в качестве независимых переменных.

Оказывается, если выбрать соответствующим образом функционал, то функции, которые обеспечивают его минимум, являются решением дифференциальной задачи.

Таким образом, каждая из этих постановок — дифференциальная или вариационная — приводит к желаемому результату, т. к. определяются функции, которые описывают поведение сплошной среды.

Эквивалентность этих формулировок показывается в курсах вариационного исчисления. И очень часто вариационная формулировка задачи оказывается проще и удобнее, с точки зрения получения приближенного решения, которое находится численными методами, и обладает следующими достоинствами:

1. Порядок производных в функционале ниже, чем в дифференциальном операторе, что позволяет отыскивать решение в более широком классе функций.
2. Можно найти минимум, а затем максимум функционала, определяя его верхнюю и нижнюю границы.
3. Вариационная формулировка позволяет описать граничные условия на границах сложной геометрической формы как естественные граничные условия.
4. С математической точки зрения вариационная формулировка позволяет доказать существование решения.

Однако постановка задачи в дифференциальной форме обычно известна, а выражение для функционала, минимум которого необходимо отыскивать, не всегда удается найти.

При некоторых ограничениях на дифференциальный оператор L искомый функционал записывается сразу без особых затруднений [14.9]. Оператор L должен быть:

- линейным, т. е. $L(\alpha u) = \alpha L(u)$, где α постоянная, и $L(u+w) = Lu + Lw$;
- самосопряженным, т. е. $(Lu, w) = (u, Lw)$, где скалярное произведение $(Lu, w) = \int\limits_{\Omega} (Lu) w d\Omega$;
- положительным, т. е. $(Lu, u) \geq 0$, и $(Lu, u) = 0$ только при $u = 0$.

Здесь буквами u и w обозначены функции $u(x)$ и $w(x)$, которые не обязательно должны совпадать с перемещениями. Случай перемещений для функции $w(x)$ рассмотрен в *гл. 15* при решении задачи об изгибе цилиндрической оболочки методом конечных элементов *(см. разд. 15.1)*.

На основании теоремы о функционале энергии [14.9] исходная дифференциальная задача (14.17) с нулевыми граничными условиями, удовлетворяющая перечисленным ранее требованиям, эквивалентна задаче об отыскании минимума следующего энергетического функционала:

$$I(u) = \int\limits_{\Omega} \left[(Lu)u - 2fu \right] d\Omega, \tag{14.20}$$

или, что то же самое, но записанное в компактном виде:

$$I(u) = (Lu, u) - 2fu. \tag{14.21}$$

Этот функционал называют энергетическим не случайно, т. к. в большинстве физических задач выражение типа (14.21) соответствует выражению для энергии.

Примечание

При отыскании минимума функционала $I(u)$ важно иметь в виду, что функции $u(x)$ должны удовлетворять тем же граничным условиям, что и функции в исходной дифференциальной задаче.

Для иллюстрации описанных положений получим функционал для уравнения четвертого порядка, которое встречалось нам при решении задач об изгибе цилиндрических оболочек в *гл. 7*:

$$Lu = \frac{d^2}{dx^2} p(x) \frac{d^2 u}{dx^2} + q(x) u = f(x). \tag{14.22}$$

Поставим к нему нулевые граничные условия, что соответствует жесткой заделке краев оболочки длиной l:

$$\text{при } x = 0: \quad w = 0; \quad w' = 0. \tag{14.23}$$

$$\text{при } x = l: \quad w = 0; \quad w' = 0. \tag{14.24}$$

Убедимся в том, что оператор Lu удовлетворяет всем условиям, позволяющим использовать теорему о функционале энергии, который в рассматриваемом случае запишется так:

$$I(u) = \int_0^l \Big[(pu'')''u + qu^2 - 2\,fu \Big] dx. \tag{14.25}$$

Интегрируя два раза по частям первое слагаемое в подынтегральном выражении и используя краевые условия (14.23) и (14.24), получаем:

$$I(u) = \int_0^l \left(pu''^2 + qu^2 - 2\,fu \right) dx. \tag{14.26}$$

Таким образом, необходимо отыскать минимум функционала в классе функций, удовлетворяющих краевым условиям (14.23) и (14.24).

Важно отметить, что при этом нет надобности заботиться о существовании производных выше второго порядка, в то же время при решении дифференциальной задачи необходимо, чтобы существовали производные вплоть до четвертого порядка включительно. Это первое существенное преимущество такой постановки задачи.

О втором преимуществе уже частично упоминалось — это возможность простого учета граничных условий для сложных областей. Особенно заметно это преимущество проявляется в методе конечных элементов.

Однако вариационная постановка задачи имеет не только преимущества, есть у нее и недостатки. В первую очередь это связано с граничными условиями. Оказывается, что для каждой задачи нужно выделять главные и естественные граничные условия. Пробные функции $u(x)$, которые доставляют минимум функционалу, должны обязательно содержать в себе главные краевые условия и не обязательно естественные, т. к. эти условия удовлетворяются в среднем в процессе поиска минимума. Практическая проверка класса условий сводится к обратному переходу от вариационной задачи к дифференциальной и последующему сравнению полученной задачи с исходной.

Проиллюстрируем эти особенности вариационной формулировки задачи на рассматриваемом примере.

Предположим, что существует функция $u_0(x)$, обеспечивающая минимум функционалу (14.26).

Обозначим через ε произвольное вещественное число, а через $\eta(x)$ — произвольную функцию, дифференцируемую два раза, но не удовлетворяющую граничным условиям, и положим $u(x) = u_0(x) + \varepsilon\eta(x)$.

Зафиксируем функцию $\eta(x)$, и тогда функционал станет только функцией независимой переменной ε, т. е.:

$$I(u_0 + \varepsilon\eta) = \int_0^l \left(p u_0''^2 + q u_0^2 - 2 f u_0 \right) dx + 2\varepsilon \int_0^l \left(p u_0'' \eta'' + q u_0 - f\eta \right) dx +$$
$$+ \varepsilon^2 \int_0^l \left(p \eta''^2 + q\eta^2 \right) dx.$$

Минимум этого функционала достигается при $\varepsilon = 0$, но тогда необходимо, чтобы выполнялось следующее условие:

$$\frac{d}{d\varepsilon} I(u_0 + \varepsilon\eta) = 0,$$

или:

$$\int_0^l \left(p u_0'' \eta'' + q u_0 - f\eta \right) dx = 0.$$

Интегрируя первое слагаемое два раза по частям, получаем:

$$\int_0^l \left[(p u_0'')'' + q u_0 - f \right] \eta dx + (p u_0'')\eta' \Big|_0^l - (p u_0'')'\eta \Big|_0^l = 0,$$

откуда в силу произвольности функции $\eta(x)$, получаем

$$(p u_0'')'' + q u_0 = f; \tag{14.27}$$

$$\left. \begin{aligned} (p u_0'')\eta' \Big|_0^l &= 0; \\ (p u_0'')'\eta \Big|_0^l &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{14.28}$$

Таким образом, если на пробную функцию $u_0(x)$, а, следовательно, и на $\eta(x)$ не наложены никакие граничные условия, то задача об отыскании минимума функционала эквивалентна задаче (14.27) с естественными краевыми условиями (14.28), среди которых нет ни одного условия, соответствующего

(14.23) и (14.24). В связи с этим при выборе пробных функций $u(x)$ необходимо, чтобы в них уже содержались граничные условия, которые в данном случае все главные.

Получение функционала и его анализ в рассмотренном случае не вызывает затруднений, но в более сложных уравнениях и системах уравнений это не так просто. Как уже отмечалось ранее, это является одним из существенных недостатков вариационных методов решения задачи.

В задачах статики линейно-упругого тела энергетический функционал известен, и может быть записан в разной форме при помощи вариационных принципов механики, которые позволяют учесть особенности рассматриваемого напряженно-деформируемого состояния твердого тела.

Остановимся на некоторых наиболее часто используемых при численном решении задач механики твердого деформируемого тела вариационных принципах.

14.3.2. Принцип виртуальных перемещений

Рассмотрим нагруженное тело, находящееся в состоянии равновесия под действием внутренних и внешних объемных и поверхностных сил. Формулировку принципа виртуальных (иногда говорят "возможных") перемещений проведем на примере уравнений теории упругости в декартовой системе координат и обозначений, использованных в *гл. 2*.

> ***Виртуальными*** (***возможными***) перемещениями называются такие перемещения, которые допускаются наложенными на систему связями.

В вариационном исчислении при определении экстремума функционала роль приращения функции играет ее вариация. Разницу между ними легко проследить на рис. 14.4.

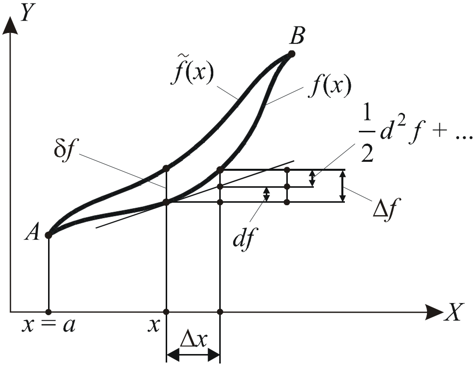


Рис. 14.4. Вариация и приращение функции

Так, вариация функции $\delta f = \tilde{f}(x) - f(x)$ — это изменение значения функции при постоянной независимой переменной x. Это изменение происходит оттого, что вместо функции $f(x)$ в функционал подставляется функция $\tilde{f}(x)$. Так как функционал $I(f)$ зависит от функции $f(x)$, то при изменении (вариации) функции он получает приращение:

$$\Delta I = I(f + \delta f) - I(f),$$

или если рассматривать функционал на однопараметрическом семействе кривых, когда его можно считать функцией, то:

$$\Delta I = \delta I + \frac{1}{2}\delta^2 I + \ldots$$

Число δI называется первой вариацией функционала $I(f)$ и является главной частью приращения ΔI, а число $\delta^2 I$ называется второй вариацией функционала (рис. 14.5).

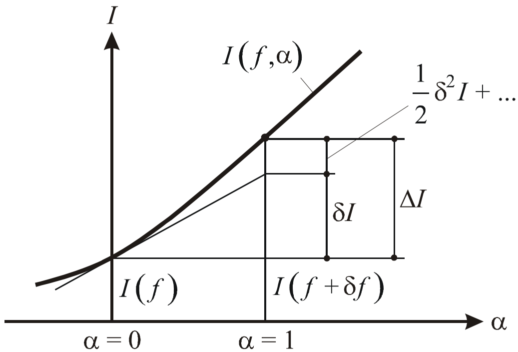


Рис. 14.5. Первая и вторая вариации функционала

Функционал, как функция переменного параметра α, достигает точки экстремума, если $\partial I/\partial\alpha = 0$, т. е. когда его первая вариация равна нулю:

$$\delta I = 0. \tag{14.29}$$

Причем при $\delta^2 I > 0$ это будет минимум, а при $\delta^2 I < 0$ — максимум, как и в случае обычных функций (см. рис. 14.5).

Теперь после этих вводных замечаний сформулируем **принцип виртуальных перемещений**:

> Если начальное напряженно-деформированное состояние тела является равновесным, то **первая вариация работы внешних сил** δA **равна вариации работы внутренних сил** δE, выполненной на виртуальных перемещениях.

Если поменять в приведенном определении причину и следствие местами, то принцип виртуальных перемещений можно сформулировать иначе:

Если суммарная работа всех сил при любом возможном бесконечно малом перемещении равна нулю, то система находится в равновесии.

В математической форме это можно записать так:

$$\delta E = \delta A, \tag{14.30}$$

или в развернутом виде (см. обозначения в *гл. 2*):

$$\begin{gathered}\int\limits_V \left(\sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon_y + \sigma_z \delta\varepsilon_z + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy} + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy} + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz} + \tau_{zx}\delta\gamma_{zx}\right) dxdydz = \\ = \int\limits_V \left(G_x \Delta u + G_y \Delta v + G_z \Delta w\right) dxdydz + \int\limits_{S_\sigma} \left(F_{nx}\Delta u + F_{ny}\Delta u + F_{nz}\Delta u\right) dS,\end{gathered} \tag{14.31}$$

где $\delta\varepsilon$ и $\delta\gamma$ — приращения деформаций на виртуальных перемещениях.

В дальнейшем массовыми силами по сравнению с поверхностными будем пренебрегать, поэтому первый интеграл в правой части (14.31) будет равен нулю.

Равенство (14.30) и его развернутая запись (14.31) уже записаны в виде, необходимом для применения численных методов расчета, т. к. является условием экстремума энергетического функционала:

$$I = E - A. \tag{14.32}$$

Эквивалентность принципа виртуальных перемещений (14.31) и дифференциальных уравнений равновесия (2.11)—(2.13) вместе с граничными условиями (2.4) можно доказать [14.10], если перейти от объемных интегралов в (14.19) к поверхностным с помощью формулы Гаусса—Остроградского.

14.3.3. Принцип минимума полной потенциальной энергии

Рассмотрим частный случай формулировки принципа возможных перемещений, когда материал линейно-упругий, а процесс деформирования тела происходит при постоянной температуре (изотермический процесс) или без обмена энергией с окружающей средой (адиабатический процесс).

В этом случае работа, выполненная внешними статическими силами, равна изменению внутренней энергии, которая называется энергией деформации, т. к. определяется количеством деформации, полученной телом.

Упругая система называется ***консервативной***, если после снятия нагрузки она возвращается в исходное состояние и при этом не совершается никакой внешней работы над другими телами или системами. Иными словами, в консервативной механической системе действует закон сохранения механической энергии.

Определим работу, которая совершается в процессе деформации консервативной системы. Для этого рассмотрим элементарный параллелепипед с длинами граней dx, dy, dz (рис. 14.6).

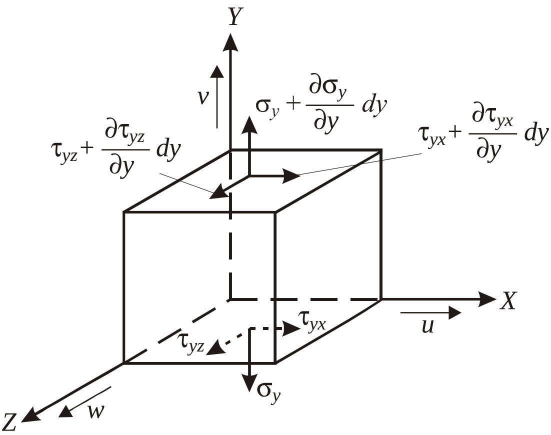


Рис. 14.6. Напряжения на гранях элементарного параллелепипеда

Будем считать, что напряжения и перемещения u, v, w на двух противоположных гранях различны. Тогда сила $\sigma_y dxdz$ совершает на перемещении v работу, величина которой определяется площадью треугольника OAB на рис. 14.7 и равна:

$$-\frac{1}{2}\left(\sigma_y v\right)dxdz\,. \tag{14.33}$$

В то же время работа, совершаемая нормальными силами, действующими на противоположной грани, равна:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\left(\sigma_y+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}dy\right)dxdz\cdot\left(v+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)\approx\\ \approx\frac{1}{2}\left(\sigma_y v+v\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}dy+\sigma_y\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)dxdz,\end{gathered}\tag{14.34}$$

где отброшено слагаемое четвертого порядка малости.

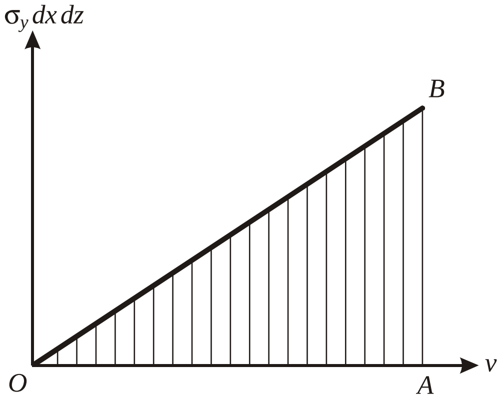


Рис. 14.7. К вычислению работы внутренней силы

Полная работа, совершаемая нормальными силами, действующими на этих гранях, получится в результате сложения (14.33) и (14.34), т. е.:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma_y v\right)dxdydz\,. \tag{14.35}$$

Аналогично вычисляются выражения для работы, совершаемой по этим граням касательными силами. После суммирования получаем следующее выражение для полной работы, совершаемой по граням с нормалями Y и $-Y$:

$$du_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\tau_{yx}u + \sigma_y v + \tau_{yz}w\right)dxdydz\,. \tag{14.36}$$

Рассуждая аналогично, получим работу, совершаемую в направлении оси X:

$$du_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_x u + \tau_{xy}v + \tau_{xz}w\right)dxdydz \tag{14.37}$$

и в направлении оси Z:

$$du_3 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\tau_{zx}u + \tau_{zy}v + \sigma_z w\right)dxdydz\,. \tag{14.38}$$

Пренебрегая объемными силами, определим полную работу, совершаемую над параллелепипедом, которая равна сумме работ, определяемых выражениями (14.36)—(14.38). Проведя дифференцирование и перегруппировав слагаемые в полученном выражении, имеем:

$$du_0 = du_1 + du_2 + du_3 = \frac{1}{2}\left[\sigma_x\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y\frac{\partial v}{\partial y} + \sigma_z\frac{\partial w}{\partial z} + \tau_{xy}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \right.$$

$$+\tau_{yz}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\tau_{zx}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)+u\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)+$$

$$+v\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right)+w\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\right)\Bigg]dxdydz\,. \qquad (14.39)$$

Далее, используя уравнения равновесия (2.14) и геометрические уравнения линейной теории упругости (2.39)—(2.44), получаем из (14.39) следующее выражение для полной работы, совершенной над параллелепипедом:

$$du_0=\frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+\tau_{xy}\gamma_{xy}+\tau_{yz}\gamma_{yz}+\tau_{zx}\gamma_{zx}\right)dxdydz\,. \qquad (14.40)$$

Обозначая через:

$$u_0=\frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+\tau_{xy}\gamma_{xy}+\tau_{yz}\gamma_{yz}+\tau_{zx}\gamma_{zx}\right) \qquad (14.41)$$

суммарную работу, приходящуюся на единицу объема, или энергию деформации в единице объема, покажем, что:

$$\sigma_x=\frac{\partial u_0}{\partial \varepsilon_x};\quad \sigma_y=\frac{\partial u_0}{\partial \varepsilon_y};\quad \sigma_z=\frac{\partial u_0}{\partial \varepsilon_z};\quad \tau_{xy}=\frac{\partial u_0}{\partial \gamma_{xy}}$$

и т. д.

Вычислим, например, первую из этих производных. После дифференцирования (14.41) имеем:

$$\frac{\partial u_0}{\partial \varepsilon_x}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x}\varepsilon_x+\sigma_x+\frac{\partial \sigma_y}{\partial \varepsilon_x}\varepsilon_y+\frac{\partial \sigma_z}{\partial \varepsilon_x}\varepsilon_z\right). \qquad (14.42)$$

Но из физических уравнений линейной теории упругости (2.59) получаем следующие выражения для производных:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x}=\frac{E}{1-\mu^2};\quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial \varepsilon_x}=\frac{\partial \sigma_z}{\partial \varepsilon_x}=\frac{\mu E}{1-\mu^2}\,.$$

Подставляя их в (14.42), получаем:

$$\frac{\partial u_0}{\partial \varepsilon_x}=\frac{1}{2}\left[\sigma_x+\frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y+\mu\varepsilon_z\right)\right]=\sigma_x\,.$$

Теперь определим работу, совершаемую внутренними и внешними силами над телом, объем которого равен V. На тело действует краевая поверхностная нагрузка $\bar{F}dS_\sigma$ с проекциями $F_{nx}dS_\sigma$, $F_{ny}dS_\sigma$, $F_{nz}dS_\sigma$. Кроме этих сил, работу над частицами тела совершают внутренние силы. Эта работа по величине равна работе, совершаемой против сил взаимодействия между частицами, т. е. u_0 при единичном объеме, но противоположна по знаку.

Тогда полная работа, совершенная над телом, равна (напомним, что объемными силами здесь пренебрегаем):

$$A = -\int_V u_0 dV + \int_{S_\sigma} \left(F_{nx}u + F_{ny}v + F_{nz}w\right) dS ,$$

а потенциальная энергия деформации тела, которая равна величине работы A и противоположна ей по знаку, с учетом (14.41) запишется так:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_V \left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}\right) dV - \\ - \int_{S_\sigma} \left(F_{nx}u + F_{ny}v + F_{nz}w\right) dS. \quad (14.43)$$

Перепишем полученное выражение в матричном виде, используя следующие обозначения для вектор-столбцов:

$$[\varepsilon] = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix}; \quad [\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix}; \quad [f] = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}; \quad [q] = \begin{pmatrix} F_{nx} \\ F_{ny} \\ F_{nz} \end{pmatrix}. \quad (14.44)$$

Тогда:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_V [\varepsilon]^T [\sigma] dV - \int_{S_\sigma} [f]^T [q] dS . \quad (14.45)$$

Выразим напряжения $[\sigma]$ через деформации $[\varepsilon]$ в полученном выражении для потенциальной энергии тела, воспользовавшись физическими уравнениями (2.59) для изотропного тела, переписав их в матричном виде:

$$[\sigma] = [E][\varepsilon], \quad (14.46)$$

где использовано следующее обозначение для матрицы упругих констант:

$$[E]=\begin{pmatrix} \frac{E}{1-\mu^2} & \frac{\mu E}{1-\mu^2} & \frac{\mu E}{1-\mu^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu E}{1-\mu^2} & \frac{E}{1-\mu^2} & \frac{\mu E}{1-\mu^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu E}{1-\mu^2} & \frac{\mu E}{1-\mu^2} & \frac{E}{1-\mu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{pmatrix}. \tag{14.47}$$

Подставляя (14.46) в (14.45), получаем:

$$\Pi=\frac{1}{2}\int_V [\varepsilon]^T [E][\varepsilon]dV-\int_{S_\sigma}[f]^T [q]dS\,, \tag{14.48}$$

где транспонированные вектор-столбцы представляют собой векторы-строчки, например:

$$[\varepsilon]^T=\begin{pmatrix}\varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z & \gamma_{xy} & \gamma_{yz} & \gamma_{zx}\end{pmatrix}.$$

В выражениях (14.45) и (14.48) поверхностный интеграл вычисляется по той части поверхности S_σ, на которой задана поверхностная нагрузка. Знак минус перед вторым интегралом указывает на то, что потенциальная энергия по знаку противоположна работе внешних сил.

Теперь сформулируем **принцип минимума полной потенциальной энергии**, который гласит, что:

> **Среди всех допустимых конфигураций тела, которые удовлетворяют его внутренней сплошности и кинематическим граничным условиям, те конфигурации, которые удовлетворяют также и уравнениям равновесия, дают полной потенциальной энергии стационарное значение. Если она минимальная, то равновесие, кроме того, будет устойчивым.**

В математической записи этот принцип имеет вид:

$$\delta\Pi=0\,. \tag{14.49}$$

Для установления характера полученного экстремума необходимо исследовать знак второй вариации $\delta^2\Pi$.

14.3.4. Принцип возможных изменений напряженного состояния

Рассматривая геометрически линейное тело, сформулируем вариационный принцип, являющийся дополнительным к принципу виртуальных перемещений, который эквивалентен уравнениям равновесия. Формулируется он следующим образом:

> **Если деформация системы согласуется со всеми внутренними и внешними связями, то сумма работ, производимых возможными изменениями всех внешних и внутренних сил на действительных перемещениях тела, равна нулю.**

Для получения математической записи этого принципа умножим геометрические уравнения линейной теории упругости (2.39)—(2.44) на виртуальные напряжения и выполним интегрирование по объему тела, а затем запишем следующее тождество:

$$\int\limits_V \left[\left(\varepsilon_x - \frac{\partial u}{\partial x}\right)\delta\sigma_x + \left(\varepsilon_y - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\delta\sigma_y + \left(\varepsilon_z - \frac{\partial w}{\partial z}\right)\delta\sigma_z + \left(\gamma_{xy} - \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)\delta\gamma_{xy} + \right.$$
$$\left. + \left(\gamma_{yz} - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)\delta\gamma_{yz} + \left(\gamma_{zx} - \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)\delta\gamma_{zx}\right] dV = 0. \tag{14.50}$$

Далее проинтегрируем по частям слагаемые, которые содержат производные от перемещений u, v, w. Мы хотим, чтобы виртуальные напряжения удовлетворяли уравнениям равновесия (2.14) и формулам Коши (2.4), связывающим напряжения с нагрузкой на поверхности тела. Поле напряжений внутри тела и на его поверхности, удовлетворяющее условиям равновесия, называется "статически допустимым". Тогда после интегрирования по частям получаем:

$$\int\limits_V \left(\varepsilon_x\delta\sigma_x + \varepsilon_y\delta\sigma_y + \ldots + \gamma_{xy}\delta\tau_{xy} + \ldots\right) dV =$$
$$= \int\limits_S \left(u\delta F_{nx} + v\delta F_{ny} + w\delta F_{nz}\right) dS. \tag{14.51}$$

Это и есть математическая формулировка **принципа виртуальных напряжений**. Он справедлив для материала с любыми физико-механическими свойствами, но поведение тела при деформировании должно подчиняться геометрически линейным уравнениям теории упругости. В выражении (14.51) деформации и перемещения действительные, а виртуальные напряжения и внешние поверхностные нагрузки произвольные, но они должны быть статически допустимыми. Кроме того, внешние поверхностные силы остаются без изменений.

При использовании принципа возможных перемещений следует обеспечить условие сплошности тела, а принцип возможных изменений напряженного состояния требует предварительного выполнения уравнений равновесия внутри и на поверхности тела.

14.3.5. Принцип минимума полной дополнительной энергии

Представим поле напряжений в теле как сумму основных напряжений σ_p, удовлетворяющих уравнениям равновесия (2.14) и граничным условиям Коши (2.4) на поверхности границы S_σ и корректирующей самоуравновешенной системы статически допустимых напряжений σ_c, которые удовлетворяют нулевым граничным условиям на S_σ, т. е.:

$$[\sigma]=\left[\sigma_p\right]+[\sigma_c]. \tag{14.52}$$

Обозначая через $\delta[\sigma_c]$ систему виртуальных напряжений и имея в виду, что виртуальная нагрузка $\delta[q]=0$ на поверхности тела S_σ, перепишем выражение (14.51) так:

$$\int\limits_V [\varepsilon]^T [\sigma_c] dV = \int\limits_{S_u} [f_c]^T [q] ds. \tag{14.53}$$

Для того чтобы интегрировать (14.53) как условие стационарности функционала, зависящего от σ_c, введем новую функцию u_{0c}, которую назовем плотностью дополнительной энергии, вариация которой равна:

$$\delta u_{0c}=[\varepsilon]^T\delta[\sigma]=\varepsilon_x\delta\sigma_x+\varepsilon_y\delta\sigma_y+\varepsilon_z\delta\sigma_z+\gamma_{xy}\delta\tau_{xy}+\gamma_{yz}\delta\tau_{yz}+\gamma_{zx}\delta\tau_{zx}. \tag{14.54}$$

Такое определение функции u_{0c} позволяет воспользоваться следующей альтернативной формой записи выражений, связывающих деформации с напряжениями:

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_x=\frac{\partial u_{0c}}{\partial\sigma_x};\quad \varepsilon_y=\frac{\partial u_{0c}}{\partial\sigma_y};\quad \varepsilon_z=\frac{\partial u_{0c}}{\partial\sigma_z};\\
&\gamma_{xy}=\frac{\partial u_{0c}}{\partial\tau_{xy}};\quad \gamma_{yz}=\frac{\partial u_{0c}}{\partial\tau_{yz}};\quad \gamma_{zx}=\frac{\partial u_{0c}}{\partial\tau_{zx}}.
\end{aligned}\right\} \tag{14.55}$$

Так как для линейно упругого материала, подчиняющегося закону Гука, $[\varepsilon]=[E]^{-1}[\sigma]$, а плотность дополнительной энергии является квадратичной функцией, то:

$$u_{0c}=\frac{1}{2}[\sigma]^T[E]^{-1}[\sigma]. \tag{14.56}$$

Для иллюстрации смысла дополнительной энергии на рис. 14.8 построена кривая зависимости напряжений от деформаций. Область под кривой на рисунке — это плотность потенциальной энергии, а заштрихованная область выше кривой — плотность дополнительной энергии u_{0c}.

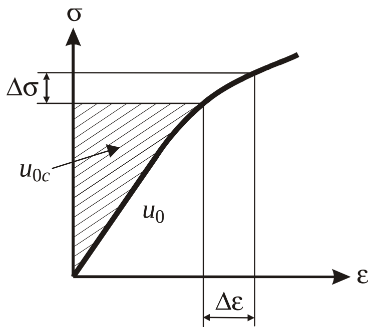


Рис. 14.8. Потенциальная и дополнительная энергии

Тогда сумма этих энергий равна (рис. 14.8):

$$u_0+u_{0c}=[\sigma]^T[\varepsilon], \tag{14.57}$$

откуда:

$$u_{0c}=[\sigma]^T[\varepsilon]-u_0=[\sigma]^T[\varepsilon]-\frac{1}{2}[\sigma]^T[\varepsilon]=\frac{1}{2}[\sigma]^T[E]^{-1}[\sigma], \tag{14.58}$$

или:

$$u_{0c}(\sigma)=\frac{1}{2E}\Big[\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2-2\mu\left(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x\right)+$$
$$+2(1+\mu)\left(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2\right)\Big].$$

Полная дополнительная энергия тела получается интегрированием ее плотности $u_{0c}(\sigma)$ по объему тела:

$$U_c=\int_V u_{0c}\,dV\ .$$

Теперь можно сформулировать **принцип минимума дополнительной потенциальной энергии** так:

> **Из всех статически возможных систем напряжений, сводящихся на поверхности тела к заданным нагрузкам, в действительности в упругой системе возникают лишь те из них, которые сообщают экстремальное (минимальное) значение дополнительной потенциальной энергии.**

В математической записи это выглядит так:

$$\delta I_c(\sigma) = 0 \tag{14.59}$$

при выполнении уравнений равновесия (2.14) в объеме V и условий Коши (2.4), заданных на части его поверхности S_σ.

В тех случаях, когда на границе тела не заданы перемещения ($[f] = 0$), или не меняются внешние силы $[q]$ на $\delta[f]$ (т. е. $\delta[q] = 0$), выражение (14.59) упрощается и принимает вид:

$$\delta U_c = 0\,. \tag{14.60}$$

Можно показать, что для всякого напряженного состояния $[\tilde{\sigma}]$, отличного от действительного напряженного состояния $[\sigma]$, дополнительная потенциальная энергия будет больше, т. е.:

$$I_c(\tilde{\sigma}) \geq I_c(\sigma)\,.$$

Поэтому определяемый из (14.59) экстремум будет абсолютным минимумом.

Вычисление вариации функционала δI_c методами вариационного исчисления приводит к уравнениям совместности деформаций, записанным через напряжения.

14.4. Вариационно-разностные методы

Этот вариант метода конечных разностей появился относительно недавно, и его связывают с пионерской работой Р. Мак-Нейла [14.14]. Особенность этих методов состоит в том, что для получения значений неизвестных напряжений и деформаций в дискретных расчетных точках области используются энергетические функционалы, в которых производные, входящие в интегралы, аппроксимируются разностными отношениями.

Сначала остановимся на основных идеях вариационно-разностных методов, а затем рассмотрим конкретный пример, иллюстрирующий порядок и особенности их практического использования.

14.4.1. Этапы построения расчетной схемы

Рассмотрим двумерную область Ω, ограниченную замкнутым контуром S (рис. 14.9) и покрытую сеткой узлов, в которых определяются неизвестные напряжения и деформации. Узлы строятся не только внутри области, но и на ее границе.

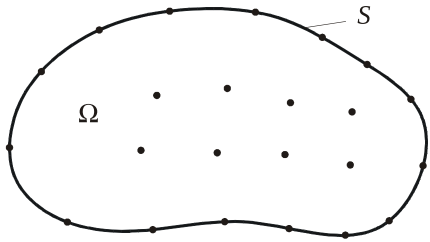


Рис. 14.9. Размещение узлов в области интегрирования

Получение приближенных соотношений этим методом можно представить в виде следующей последовательности шагов:

1. Строится сетка узлов внутри рассматриваемой области, включая ее границу (рис. 14.9).
2. Записываются в разностном виде выражения для перемещений и деформаций через их значения в соседних узлах области. Эти выражения подставляются в функционал, соответствующий решаемой задаче, например, в (14.48).
3. Область Ω делится на подобласти Ω_m так, чтобы их границы не проходили через узлы (рис. 14.10).
4. Интегралы по области заменяются на сумму интегралов по подобластям Ω_m.
5. Интегралы по подобластям Ω_m вычисляются численно. В большинстве случаев используется одноточечная квадратура Гаусса. Точка внутри области Ω_m, используемая при вычислении интеграла, не обязательно совпадает с узлом, поэтому приходится пользоваться интерполяционными формулами.
6. Вычисляется экстремум функционала по искомым неизвестным (перемещениям или напряжениям), и в результате получается система линейных алгебраических уравнений, решение которой позволяет определить напряженно-деформированное состояние в узловых точках области Ω.

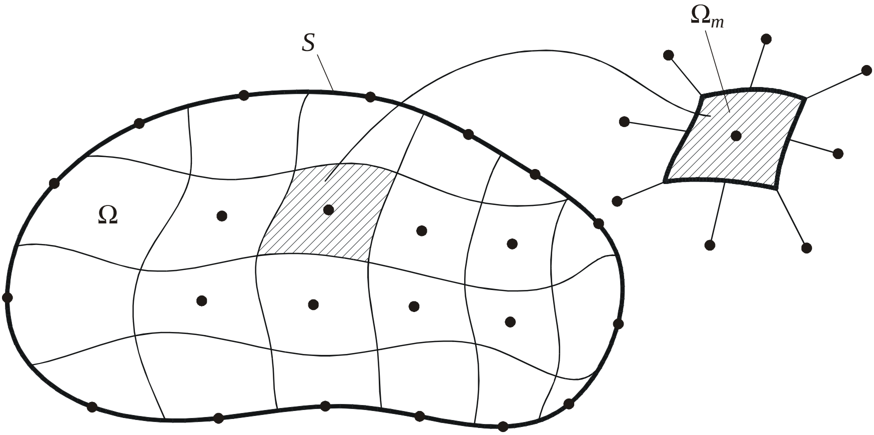


Рис. 14.10. Разбиение области интегрирования на подобласти

Основные недостатки этого метода связаны с определением подобластей Ω_m, окружающих узлы разностной сетки.

В случае линейных областей, как это бывает при расчете брусьев и оболочек [14.13], [14.14], эти трудности легко преодолеваются и позволяют легко получить искомую систему линейных алгебраических уравнений с матрицей ленточной структуры.

Рассмотрим практическую реализацию метода на примере обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

14.4.2. Пример использования вариационно-разностного метода

Рассмотрим решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + f(x) = 0 \tag{14.61}$$

на отрезке $x \in [0, 1]$ с нулевыми граничными условиями: $u(0) = u(1) = 0$.

Нетрудно видеть, что оператор второй производной линейный, самосопряженный и положительный, поэтому исходная дифференциальная задача эквивалентна задаче об отыскании минимума следующего функционала *(см. разд. 14.3.1)*:

$$I(u) = \int_0^1 \left[u'^2(x) - 2f(x)u(x) \right] dx. \tag{14.62}$$

Построим на отрезке $x \in [0, 1]$ равномерную сетку с шагом $h = 1/(N+1)$ и с координатами узлов $x_i = ih$ ($i = 1, 2, \ldots, N$).

На отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ имеем:

$$u'(x) \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{h}; \quad \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} u'^2(x)\,dx \approx \frac{(u_i - u_{i-1})^2}{h};$$

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)u(x)\,dx \approx h\frac{(f_{i-1}u_{i-1} + f_i u_i)}{2}.$$

Выполнив суммирование, получаем следующее приближенное выражение для функционала (14.62):

$$I(u) \approx \sum_{i=1}^{N+1}\left[\frac{(u_i - u_{i-1})^2}{h} - h(f_{i-1}u_{i-1} + f_i u_i)\right], \tag{14.63}$$

при записи которого учтены граничные условия $u(x_0) = u(x_{N+1}) = 0$.

Дифференцируя (14.63) по u_i и приравнивая результат нулю, придем к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных значений функций $u(x_i)$ в узлах разностной сетки:

$$\frac{2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}}{h} - hf_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{14.64}$$

В разностной форме исходное дифференциальное уравнение (14.61) запишется так:

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + f_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{14.65}$$

Сравнивая выражения (14.64) и (14.65) убеждаемся, что метод сеток и вариационно-разностный метод решения дифференциального уравнения (14.61) приводят к разным алгебраическим соотношениям.

14.5. Базисные функции

В методе конечных разностей для заданного набора узловых точек строятся разностные отношения дифференциальных операторов, которые входят в дифференциальные уравнения или в интегральные условия (вариационно-разностные методы).

Отличие метода базисных функций от метода конечных разностей состоит в том, что приближенное решение отыскивается в виде ряда по системе линейно-независимых функций $\varphi_i(x)$:

$$u(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_i(x), \tag{14.66}$$

где $\varphi_i(x)$ — известные базисные (пробные) функции; a_i — обобщенные координаты-коэффициенты, определяемые в результате решения задачи; a_0 — слагаемое, введенное в разложение для того, чтобы удовлетворить неоднородным граничным условиям.

Эти функции, кроме линейной независимости, должны удовлетворять еще и условиям полноты, обеспечивающим сходимость приближенного решения задачи к точному при увеличении количества базисных функций.

> ***Система линейно независимых функций*** называется ***полной***, если при возрастании их количества N, т. е. при $N \to \infty$, система этих функций сколь угодно точно аппроксимирует заданную функцию и ее значения на границе.

При решении задач методом базисных функций вначале выбираются базисные функции, а затем определяются коэффициенты в разложении (14.66) так, чтобы оно удовлетворяло исходным уравнениям и граничным условиям.

В качестве примера рассмотрим порядок выбора базисных функций для следующей дифференциальной задачи на отрезке $x \in [0, 1]$:

$$Lu = -u'' + u = f(x); \tag{14.67}$$

$$\left.\begin{aligned} u(0) + u'(0) &= 1; \\ u(1) + u'(1) &= -4. \end{aligned}\right\} \tag{14.68}$$

Зададимся на отрезке $[0, 1]$ некоторой системой дважды непрерывно дифференцируемых линейно-независимых базисных функций $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, N$, удовлетворяющих граничным условиям (14.68). Воспользовавшись методом неопределенных коэффициентов, построим базисные функции из степенных функций $1, x, x^2, \dots, x^N$, которые линейно независимы на числовой оси и, следовательно, на рассматриваемом отрезке $[0, 1]$.

Если принять в (14.66) $\varphi_1(x) = A = \text{const}$, то условия (14.68) приводят к несовместной системе уравнений, т. к. из них получается два решения $A = 1$ и $A = -4$.

Пусть $\varphi_1(x) = A + Bx$, тогда $\varphi_1'(x) = B$ и граничные условия приводят к уравнениям:

$$A + B = 1;$$
$$A + 2B = -4,$$

из которых находим: $A = 6$; $B = -5$, а соответствующая базисная функция равна $\varphi_1(x) = 6 - 5x$.

Но эта функция не удовлетворяет однородным граничным условиям (14.68), когда правые части вместо чисел содержат нули, поэтому она тоже не подходит в качестве базисной функции.

Для определения новой базисной функции возьмем полином второго порядка $\varphi_1(x) = A + Bx + Cx^2$. Тогда $\varphi_1'(x) = B + 2Cx$ и после подстановки в граничные условия (14.68) получаем такую систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов A, B, C:

$$A + B = 1;$$
$$A + 2B + 3C = -4,$$

которая имеет бесчисленное множество решений, т. к. ее определитель равен нулю. Полагая $C = 1/3$ и рассматривая однородную систему уравнений относительно оставшихся коэффициентов, получаем: $A = 1$; $B = -1$.

Тогда в качестве базисной функции принимаем:

$$\varphi_1(x) = 1 - x + \frac{1}{3}x^2. \tag{14.69}$$

Рассуждая аналогично, получаем:

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi_2(x) = 1 - x + \dfrac{1}{4}x^3; & \varphi_3(x) = 1 - x + \dfrac{1}{5}x^4; \\ \varphi_4(x) = 1 - x + \dfrac{1}{6}x^5; & \varphi_5(x) = 1 - x + \dfrac{1}{7}x^6. \end{array}\right\} \tag{14.70}$$

Искомое приближенное решение дифференциальной задачи (14.67), (14.68) можно записать в виде следующей комбинации базисных функций (14.69) и (14.70):

$$u(x) = \sum_{i=1}^{5} a_i \varphi_i(x). \tag{14.71}$$

Для определения неизвестных коэффициентов a_i используется исходная дифференциальная или вариационная формулировка задачи.

В первом случае мы приходим к методу взвешенных невязок, а во втором — к прямым методам решения дифференциальных уравнений, которые основаны на использовании вариационных принципов, о которых шла речь ранее в *разд. 14.3*.

Методом неопределенных коэффициентов можно строить базисные функции, основанные на других, кроме полиномов, системах линейно независимых функций, таких, например, как:

$$e^{\alpha_1 x},\ e^{\alpha_2 x},\ e^{\alpha_3 x},\ ...,\ e^{\alpha_N x};$$

$$e^{\alpha x},\ xe^{\alpha x},\ x^2 e^{\alpha x},\ ...,\ x^N e^{\alpha x};$$

$$1,\ \cos(x),\ \sin(x),\ ...,\ \sin(Nx).$$

В качестве пробных функций можно также использовать собственные функции, являющиеся решением однородного дифференциального уравнения с однородными граничными условиями.

В последние годы широкое распространение получил метод конечных элементов, в котором проблемы выбора базисных функций и удовлетворения граничных условий решаются простым и естественным путем.

Основная идея метода состоит в том, что область интегрирования Ω разбивается на ряд элементов, которые можно рассматривать как отдельные ее части. В пределах этих частей неизвестные функции аппроксимируются базисными функциями простейшего вида, например, полиномами, коэффициенты которых выражаются через неизвестные значения искомых переменных в узловых точках границ элемента.

Выбор в качестве базисных функций кусочных полиномов, отличных от нуля только в непосредственной окрестности одного узла, позволяет снять сложные вопросы построения систем функций, требующих расширения их числа путем включения следующих членов ряда и удовлетворения кинематическим граничным условиям во всей рассматриваемой области. В методе конечных элементов для повышения точности расчета количество пробных функций не меняется, а производится только измельчение конечного элемента. Эти особенности метода конечных элементов позволяют существенно упростить алгоритмы расчета и обеспечить удовлетворение граничных условий.

Однако следует отметить, что метод взвешенных невязок является более общим и универсальным по сравнению с вариационными методами, т. к. позволяет решать и те дифференциальные задачи, для которых отсутствуют их вариационные формулировки.

14.6. Методы взвешенных невязок

Методы взвешенных невязок основываются на сведении к минимальному значению функции невязок для приближенного решения, представленного в виде разложения по базисным функциям. Различные способы отыскания минимума функции невязок и определяют множество вариантов этого метода.

Обычно методы взвешенных невязок используются в тех случаях, когда для исходной дифференциальной задачи отсутствует соответствующий ей функционал, хотя это не исключает возможности применения таких методов и в тех случаях, когда такой функционал имеется.

14.6.1. Исходные соотношения

Функция невязок R определяется после подстановки приближенного решения (14.66) в дифференциальный оператор (14.17):

$$R = Lu - f\left(x\right) \neq 0 . \tag{14.72}$$

Если базисные функции в разложении $u\left(x\right)$ не удовлетворяют всем граничным условиям, то строятся еще две функции невязок:

1. Погрешность нарушения главных граничных условий на участке границы S_u:

$$R_1 = \left(lu - g_u\right)\Big|_{S_u} \neq 0 . \tag{14.73}$$

2. Погрешность нарушения естественных граничных условий на участке границы S_σ:

$$R_2 = \left(lu - g_\sigma\right)\Big|_{S_\sigma} \neq 0 . \tag{14.74}$$

В методе невязок задача состоит в том, чтобы подобрать коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_N$ в приближенном разложении (14.66) по базисным функциям так, чтобы осредненные значения R_1, R_2, R_3 стали сколь угодно малыми в рассматриваемой области Ω и на ее границах S_u и S_σ.

Усреднение функций невязок выполняется при помощи системы линейно независимых функций:

$$\psi_1\left(x\right), \psi_2\left(x\right), \dots, \psi_k\left(x\right),$$

обычно удовлетворяющих однородным граничным условиям.

Из этих функций образуется весовая функция:

$$W(x) = \beta_1\psi_1 + \beta_2\psi_2 + \beta_3\psi_3 + ... + \beta_k\psi_k, \qquad (14.75)$$

в которой $\beta_1, \beta_2, \beta_3, ..., \beta_k$ — произвольные коэффициенты.

Если приближенное решение $u(x)$ точно удовлетворяет граничным условиям, т. е. $R_1 = 0$; $R_2 = 0$, и только $R \approx 0$, то из функции невязок R и весовой функции W составляется скалярное произведение, которое приравнивается нулю, т. е.:

$$\int_\Omega RWd\Omega = \int_\Omega (Lu - f)Wd\Omega . \qquad (14.76)$$

Выполняя почленное умножение W на R и учитывая то, что коэффициенты β_i произвольные, получим следующую систему условий:

$$\int_\Omega R\psi_i d\Omega = 0, \quad i = 1, 2, ..., k . \qquad (14.77)$$

Взвешенные невязки можно использовать и в том случае, когда кроме исходного уравнения приближенно удовлетворяются и естественные граничные условия, т. е. $R \neq 0$; $R_2 \neq 0$, а главные (существенные) граничные условия удовлетворяются точно и $R_1 = 0$.

В этом случае для обеих функций невязок R, R_2 и весовой функции W можно записать следующее равенство:

$$\int_\Omega (Lu - f)Wd\Omega = \int_{S_\sigma} (lu - g_\sigma)WdS . \qquad (14.78)$$

Выполним интегрирование по частям дифференциального оператора в левой части (14.78) столько раз, чтобы получить два оператора над u и W меньшего порядка, которые обозначим Du и D^*W:

$$\int_\Omega Lu \cdot Wd\Omega = -\int_\Omega Du \cdot D^*Wd\Omega + \int_{S_\sigma} lu \cdot WdS . \qquad (14.79)$$

Полагая далее, что операторы $D = D^*$, т. е. оператор D является самосопряженным, получим из (14.78) с учетом (14.79):

$$\int_\Omega Du \cdot DWd\Omega + \int_\Omega fWd\Omega = \int_{S_\sigma} g_\sigma WdS . \qquad (14.80)$$

Важно отметить, что в полученном выражении порядок производных под знаком интеграла ниже порядка производных в (14.78), что накладывает менее жесткие требования на непрерывность функций и их производных для u и W.

Таким образом, для определения функции $u(x)$ сформулированы три задачи: дифференциальная (14.17), "сильная" (14.78) и "слабая" (14.80) формы формулировки одной и той же краевой задачи.

ПРИМЕЧАНИЕ

Соотношение (14.78) можно проинтегрировать по частям еще несколько раз, перенеся оператор L на весовую функцию $W(x)$, который после этого умножается на функцию $u(x)$. В этом случае более жесткие требования предъявляются к весовой функции $W(x)$.

Так как главные краевые условия определяются выбором базисных функций, то теперь приближенное решение запишем так:

$$u(x)=\sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_i(x). \tag{14.81}$$

Считая, что базисные функции $\varphi_i(x)$ и линейно независимые функции $\psi_k(x)$, из которых строится весовая функция, гладкие вместе с производными, определяемыми дифференциальными операторами под знаком интеграла, составим систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов a_i в (14.81).

Подставляя (14.81) в выражение (14.80) для слабой формулировки задачи и записывая уравнение последовательно для каждой из весовых функций $\psi_k(x)$, получаем систему линейных уравнений относительно коэффициентов a_i:

$$[K][a]=[F] \tag{14.82}$$

с элементами

$$k_{im}=\int_{\Omega} D\varphi_i D\psi_m d\Omega+\int_{\Omega}\varphi_i\psi_m d\Omega; \quad f_i=\int_{S_\sigma} g_\sigma \psi_i dS, \tag{14.83}$$

которые определяются в результате численного интегрирования методом Гаусса.

14.6.2. Метод Бубнова—Галеркина

Этот метод решения дифференциальных уравнений разработан И. Г. Бубновым (1872—1919), конструктором военных судов и основоположником строительной механики корабельных конструкций. Иногда этот метод называют методом академика Б. Г. Галеркина (1871—1945), отечественного механика и математика, который после И. Г. Бубнова внес весомый вклад в дальнейшее развитие и практическое использование этого метода.

Впервые метод был описан И. Г. Бубновым в работе [14.1] и монографии [14.2]. В этом методе в качестве весовых и базисных функций используются одни и те же функции, что порождает симметричную матрицу коэффициентов в системе линейных алгебраических уравнений, к которым сводится решение исходной дифференциальной задачи.

Для иллюстрации метода рассмотрим задачу об изгибе прямоугольной пластины с размером a по оси X и размером b по оси Y (см. рис. 5.5), нагруженную постоянным внешним давлением p_0 в положительном направлении оси Z, которая решалась в *разд. 14.2.2* методом конечных разностей.

Сформулируем исходную дифференциальную задачу.

Уравнение изгиба пластины (5.35) выглядит так:

$$D\nabla^4 w = p_0 . \tag{14.84}$$

Граничные условия, соответствующие рис. 5.5, задаются следующим образом:

1. На стороне *OA* при $y = 0$:

$$w = 0 ; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 . \tag{14.85}$$

2. На стороне *OC* ($x = 0$) и *AB* ($x = a$):

$$w = 0 ; \quad M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0 . \tag{14.86}$$

3. На стороне *BC* при $y = b$:

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0 ; \quad Q_y^* = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right) = 0. \tag{14.87}$$

Прогиб пластины представим в виде разложения (14.81) по базисным функциям, предложенным в [14.11]:

$$\varphi_i(x, y) = y^{i+1} \sin(i\pi x/a) . \tag{14.88}$$

Выбранные базисные функции удовлетворяют нулевым граничным условиям в жесткой заделке ($y = 0$) и на шарнирных краях пластинки ($x = 0$; $x = a$), поэтому они будут главными граничными условиями.

Граничные условия (14.87) естественные, т. к. они не могут быть удовлетворены при выбранных базисных функциях (14.88). Они будут удовлетворяться приближенно и поэтому при формулировке метода взвешенных невязок следует исходить из соотношения (14.78), которое в рассматриваемом случае запишется так:

$$\int_0^b\int_0^a\left[D\nabla^4 w(x,y)-p_0\right]\varphi_i\left(x,y\right)dxdy-D\int_0^a\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}dx\bigg|_{y=b}-$$
$$-D\int_0^a\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\left(2-\mu\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right)\varphi_i dx\bigg|_{y=b}=0. \qquad (14.89)$$

После подстановки в это соотношение ряда типа (14.81) в виде разложения перемещения по базисным функциям (14.88):

$$w\left(x,y\right)=\sum_{i=1}^{N}a_i y^{i+1}\sin\left(i\pi x/a\right)$$

получим систему линейных алгебраических уравнений типа (14.82), которая решается относительно неизвестных коэффициентов a_i .

Следует еще раз отметить, что матрица этой системы уравнений симметричная, что является одним из важнейших достоинств метода Бубнова—Галеркина наряду с тем, что он позволяет решать дифференциальные уравнения и их системы даже и в тех случаях, когда они не имеют соответствующей вариационной формулировки.

14.6.3. Метод коллокации

Кроме метода Бубнова—Галеркина в расчетной практике находят распространение и другие методы взвешенных невязок. Особенности этих методов рассмотрим на примере изгиба балки длиной $l=4$ [14.6], нагруженной линейной распределенной нагрузкой (рис. 14.11) $q=x/l$.

Дифференциальное уравнение изгиба балки имеет вид:

$$B\frac{d^4 v}{dx^4}-\frac{x}{l}=0, \qquad (14.90)$$

а граничные условия будут такими:

$$x=0,l:\quad v=0;\quad \frac{d^2 v}{dx^2}=0, \qquad (14.91)$$

т. к. прогиб и изгибающий момент на краях балки равны нулю.

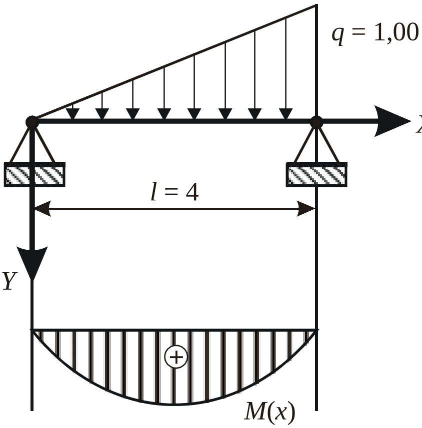


Рис. 14.11. Балка, нагруженная распределенной нагрузкой

Приближенное решение задачи ищем в виде разложения по базисным функциям (14.66):

$$v = \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_i(x), \tag{14.92}$$

где $\varphi_i(x) = \sin(i\pi x/l)$ — базисные функции, удовлетворяющие четырем граничным условия (14.91), поэтому эти условия являются главными граничными условиями. Обозначая $\alpha_i = i\pi/l$ и дифференцируя (14.92) четыре раза по x, получаем:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} \approx \sum_{i=1}^{N} a_i \alpha_i^4 \sin \alpha_i x. \tag{14.93}$$

Подставляя (14.93) в уравнение (14.90), получаем следующее выражение для функции невязок:

$$R = B\sum_{i=1}^{N} a_i \alpha_i^4 \sin \alpha_i x - \frac{x}{l} = 0, \tag{14.94}$$

После этих предварительных преобразований перейдем собственно к самому методу коллокаций.

В методе точечной коллокации в качестве весовой функции в скалярном произведении (14.76) принимается функция Дирака $\delta(x - x_i)$, и оно записывается так:

$$\int_0^l \left[B\sum_{i=1}^{N} a_i \alpha_i^4 \sin \alpha_i x - \frac{x}{l} \right] \delta(x - x_i)\, dx = 0. \tag{14.95}$$

Функция Дирака обладает следующими двумя важными свойствами:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_i)\,dx = \int\limits_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} \delta(x - x_i)\,dx = 1$, где ε — произвольное малое положительное число.

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_i)\,dx = \int\limits_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} f(x)\delta(x - x_i)\,dx = f(x_i)$.

Тогда скалярное произведение (14.95) принимает такой вид:

$$B\sum_{j=1}^{N} a_j\alpha_j^4 \sin\alpha_j x_i = \frac{x_i}{l}. \tag{14.96}$$

Записывая (14.96) для каждого значения x_i ($i = 1, 2, ..., N$), приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных a_i, $i = 1, 2, ..., N$. Этот способ вычисления коэффициентов в разложении по базисным функциям называется *методом точечной коллокации*.

Так, в рассматриваемом примере при $N = 2$; $x_1 = l/3$; $x_2 = 2l/3$ получаем следующую систему двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &0{,}86603B\left(a_1\alpha_1^4 + a_2\alpha_2^4\right) = 1/3; \\ &0{,}86603B\left(a_1\alpha_1^4 - a_2\alpha_2^4\right) = 2/3, \end{aligned}\right\} \tag{14.97}$$

из которой несложно получить: $a_1 = 1{,}5173/B$; $a_2 = -0{,}0316/B$.

Для повышения точности решения приходится увеличивать количество точек коллокации x_i. И если их больше, чем неизвестных коэффициентов a_i, то в этом случае достаточно минимизировать сумму квадратов разностей между левыми и правыми частями уравнений (14.96).

Другим вариантом рассматриваемого метода является коллокация по подобласти, когда вместо функции Дирака весовая функция выбирается по следующему правилу:

$$\varphi_i = \begin{cases} 1, & x_i < x < x_{i+1}; \\ 0, & x < x_i,\ \ x > x_{i+1}, \end{cases} \tag{14.98}$$

что равносильно требованию равенства интеграла от погрешности по каждой из N подобластей, на которые разбита основная область. Иногда коллокацию по подобластям называют методом Бицено—Коха [14.6]

14.6.4. Метод наименьших квадратов

Основные этапы решения задачи по методу наименьших квадратов рассмотрим на примере изгиба балки из предыдущего раздела.

Базисные функции и функции невязки будут записываться так же, как и в методе коллокации. Отличие будет в способе вычисления неизвестных коэффициентов в разложении (14.92). Теперь в скалярном произведении (14.76) весовая функция заменяется самой функцией невязки, а соответствующее выражение принимает вид:

$$I\left(a_1,\, a_2,\, \dots,\, a_N\right) = \int_0^l \left(B\sum_{i=1}^{N} a_i \alpha_i^4 \sin\alpha_i x - \frac{x}{l} \right)^2 dx = 0\,. \qquad (14.99)$$

Далее, дифференцируя функционал $I\left(a_i\right)$ по a_i и приравнивая результат нулю, приходим к системе уравнений следующего вида:

$$B^2 \sum_{i=1}^{N} a_i \int_0^l \alpha_i^4 \alpha_m^4 \sin\alpha_i x \sin\alpha_m x dx = \int_0^l \frac{x}{l} \alpha_m^4 \sin\alpha_m x dx\,, \quad m = 1,\, 2,\, \dots,\, N\,. \quad (14.100)$$

При составлении системы уравнений из (14.100) будут использованы следующие интегралы:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^l \sin^2\alpha_i x dx = l/2 \;\; (i \neq m); \quad \int_0^l \sin\alpha_i x \sin\alpha_m x dx = 0 \;\; (i \neq m); \\ &\int_0^l \sin\alpha_i x dx = 2/\alpha_i \;\; (i = 1,\, 3,\, 5,\, \dots); \quad \int_0^l (x/l) \sin\alpha_i x dx = (-1)^{i+1} / \alpha_i\,. \end{aligned}\right\} \quad (14.101)$$

Метод наименьших квадратов подробно исследован в книге [14.9]. В некоторых случаях он совпадает с методом Бубнова—Галеркина.

14.6.5. Метод моментов

В методе моментов ошибка дискретизации сводится к нулю по всей области, а в качестве весовых функций используется система:

$$\psi_i = x^{i-1}\,, \quad i = 1,\, 2,\, \dots,\, N\,.$$

Согласно этому методу площадь под кривой погрешности R и ее N моментов должны быть равны нулю.

Для задачи об изгибе балки, рассмотренной в предыдущих разделах, этот метод приводит к следующим соотношениям:

$$\int_0^l Rx^{i-1}dx = \int_0^l \left[B\sum_{k=1}^{N} a_k \alpha_k^4 \sin\alpha_k x - \frac{x}{l} \right] x^{i-1}dx = 0 \tag{14.102}$$

образующих систему линейных алгебраических уравнений для определения N коэффициентов a_i.

В заключение этой главы рассмотрим метод базисных функций, в котором в качестве функционала используется полученный с помощью принципа минимума полной потенциальной энергии.

14.7. Метод Ритца для расчета прямоугольной пластины

Рассмотрим прямоугольную пластинку, жестко закрепленную по контуру и нагруженную постоянным внешним давлением p_0.

Для определения напряжений в пластинке необходимо сначала решить уравнение Софи Жермен (5.35), в котором правую (постоянную) часть будем обозначать через q:

$$\nabla^4 w = \frac{p_0}{D} \equiv q \tag{14.103}$$

с граничными условиями:

$$w_s = 0\,; \quad \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_s = 0\,, \tag{14.104}$$

которые означают, что на контуре s пластинки перемещения и углы поворота (производные от перемещений по направлению нормали к контуру) равны нулю. Длины сторон пластинки обозначим через $2a$ и $2b$ по осям X и Y соответственно, а начало декартовой системы координат поместим в центре ее срединной поверхности.

Для прямоугольной пластинки точное решение уравнения (14.103) получить не удается, поэтому используются различные приближенные методы решения, такие, например, как метод Навье, в котором решение представляется в виде тригонометрического ряда, метод сеток или методы взвешенных невязок в различной форме.

В этом разделе воспользуемся энергетическим методом, который позволяет получить простое аналитическое выражение для перемещений пластинки.

В *разд. 14.3.1* было показано, что решение задачи (14.103)—(14.104) эквивалентно задаче об отыскании минимума такого функционала энергии, записанного через перемещения:

$$I(w) = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left[\left(\nabla^2 w\right)^2 - 2qw\right]dxdy\,. \tag{14.105}$$

Для отыскания минимума функционала воспользуемся энергетическим методом немецкого математика В. Ритца, который был предложен им в 1908 г. Теоретическое обоснование метода было дано советским математиком Н. М. Крыловым в 1918 г. Выберем в качестве базисных функций полиномы вида:

$$w = \left(x^2 - a^2\right)^2\left(y^2 - b^2\right)^2\left(a_1 + a_2x^2 + a_3y^2 + \ldots\right). \tag{14.106}$$

Выбранные базисные функции удовлетворяют граничным условиям (14.104) на контуре пластинки. Для простоты ограничимся одним членом ряда в (14.106), полагая:

$$w \approx C\left(x^2 - a^2\right)^2\left(y^2 - b^2\right)^2, \tag{14.107}$$

где C — неизвестная константа, которую необходимо подобрать так, чтобы обеспечить минимум функционала $I(w)$. Для удобства вычисления функционала $I(w)$ введем новые безразмерные независимые переменные $\xi = x/a$ и $\eta = y/b$ вместо x и y. Тогда:

$$w = Ca^4b^4\left(\xi^2 - 1\right)^2\left(\eta^2 - 1\right)^2; \tag{14.108}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{a}\frac{\partial w}{\partial \xi};$$

$$\nabla^2 w = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 4Ca^4b^4\left(3\xi^2 - 1\right)\left(\eta^2 - 1\right)^2;$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = 4Ca^4b^4\left(\xi^2 - 1\right)^2\left(3\eta^2 - 1\right).$$

Подынтегральное выражение в (14.105) равно:

$$\varphi(\xi,\eta) = \left(\nabla^2 w\right)^2 - 2qw =$$

$$= 16C^2 a^4 b^4 \Big[b^4 \left(3\xi^2 - 1\right)^2 \left(\eta^2 - 1\right)^4 + a^4 \left(3\eta^2 - 1\right)^2 \left(\xi^2 - 1\right)^4 +$$

$$+ 2b^2 a^2 \left(3\xi^2 - 1\right)\left(\eta^2 - 1\right)^2 \left(\xi^2 - 1\right)^2 \left(3\eta^2 - 1\right) \Big] - 2qCa^4 b^4 \left(\xi^2 - 1\right)^2 \left(\eta^2 - 1\right)^2 .$$

Далее, подставляя $\varphi(\xi,\eta)$ в интеграл (14.105), а затем беря производную по C и приравнивая ее к нулю, т. е. $\frac{\partial I}{\partial C} = 0$, получаем:

$$C = \frac{49}{128\left(7a^4 + 7b^4 + 4a^2 b^2\right)} \frac{p_0}{D} . \qquad (14.109)$$

Тогда:

$$w = \frac{49\, p_0}{128D\left[7(a^4 + b^4) + 4a^2 b^2\right]} \left(x^2 - a^2\right)^2 \left(y^2 - b^2\right)^2 . \qquad (14.110)$$

Формула (14.110) позволяет определить прогибы в любой точке пластинки с координатами x и y, погонные моменты по формулам (5.45), (5.46) и соответствующие им напряжения по формулам (5.48), (5.49).

Выводы

В этой главе были изучены следующие вопросы:

1. Классификация численных методов по типу исходных математических соотношений и способам их дискретизации.
2. Расчет прямоугольной пластинки методом конечных разностей.
3. Принцип виртуальных перемещений.
4. Принцип минимума полной и дополнительной потенциальной энергии.
5. Принцип возможного изменения напряженного состояния.
6. Численный алгоритм вариационно-разностных методов.
7. Особенности выбора и построения базисных функций.
8. Главные и естественные граничные условия и влияние их на выбор исходных соотношений метода взвешенных невязок.

9. Применение метода Бубнова—Галеркина для расчета изгиба пластинки.
10. Метод точечной коллокации и коллокации по подобластям.
11. Метод наименьших квадратов и метод моментов.
12. Вариационный метод Ритца.

Упражнения и вопросы

1. В чем отличие метода конечных разностей от вариационно-разностных методов?
2. Постройте разностную схему для расчета цилиндрической оболочки, нагруженной внутренним давлением, с одним жестко закрепленным краем, а другим — шарнирным.
3. Получите расчетные соотношения для определения перемещений в цилиндрической оболочке с жестко закрепленными краями, которая нагружена постоянным внутренним давлением.
4. Запишите математическую формулировку принципа возможных перемещений для тонкой осесимметричной оболочки.
5. Напишите выражение для полной потенциальной энергии тонкой пластинки через внутренние усилия и моменты.
6. Чем отличается дополнительная энергия от потенциальной энергии упругой деформации? Поясните это различие графически.
7. Чем отличается метод базисных функций от метода конечных элементов?
8. Постройте четыре базисных функции для уравнения четвертого порядка, описывающего изгиб цилиндрической оболочки с жестко закрепленными краями.
9. Воспользовавшись методом Бубнова—Галеркина, получите систему линейных алгебраических уравнений для расчета изгиба (перемещений) балки с шарнирно закрепленными краями, которая нагружена постоянной распределенной нагрузкой.
10. Сформулируйте, как метод коллокаций, решение задачи об изгибе эллиптической пластинки с защемленным контуром, полученное в *разд. 5.8*.
11. Получите систему уравнений для определения первых двух коэффициентов в разложении решения по базисным функциям, воспользовавшись методом наименьших квадратов для задачи об изгибе балки в *разд. 14.6.4*.

Сравните ее с системой уравнений, полученной методом точечной коллокации в *разд. 14.6.3*.

12. Получите систему уравнений для определения первых двух коэффициентов в разложении решения по базисным функциям, воспользовавшись методом моментов для задачи об изгибе балки в *разд. 14.6.5*.
13. Запишите выражение для полной потенциальной энергии балки из *разд. 14.6.2* и получите решение задачи об ее изгибе, воспользовавшись методом Ритца.
14. Получите аналитические соотношения для расчета напряжений в прямоугольной пластинке с жесткой заделкой, которая нагружена постоянным давлением, воспользовавшись решением для перемещений, полученным в *разд. 14.7*.

Литература к главе 14

1. Бубнов И. Г. Отзыв о работе проф. С. П. Тимошенко "Об устойчивости упругих систем", Сборник Санкт-Петербургского института инженеров путей сообщения, вып. 81. — СПб., 1913, с. 33—36.
2. Бубнов И. Г. Строительная механика корабля, часть II. — СПб.: Типография морского министерства, 1914.
3. Бреббия К., Телес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. — М.: Мир, 1987, 518 с.
4. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. — М.: Мир, 1986, 318 с.
5. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. — М.: Гостехиздат, 1949.
6. Караманский Т. Д. Численные методы в строительной механике. — М.: Стройиздат, 1981, 436 с.
7. Кармишин А. В., Лясковец В. А., Мяченков В. И., Фролов А. Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. — М.: Машиностроение, 1975, 376 с.
8. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. — М.: Мир, 1986, 318 с.
9. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. — М.: Наука, 1970, 512 с.

10. Образцов И. Ф, Булычев Л. А., Васильев В. В. и др. Строительная механика летательных аппаратов. Учебник для авиационных специальностей вузов. — М.: Машиностроение, 1986, 536 с.
11. Постнов В. А. Численные методы расчета судовых конструкций. — Л.: Судостроение, 1977, 279 с.
12. Finlayson B. A. The Method of Weighted Residuals and Variational Principles. Academic Press, N.Y., 1972.
13. Jonhson D. E. A Difference-Based Variational Method for Shells. Int. J. Solids Structures, v. 6, 1970, pp. 699—724.
14. MacNeal R. H. An Asymmetric Finite Difference Network, Quart. Appl. Math., v. 11, 1953, pp. 295—310.

Глава 15

Метод конечных элементов

В этой главе рассматриваются два способа получения расчетных соотношений для определения напряженно-деформированного состояния в тонких оболочках по методу конечных элементов. Первый способ, в котором функционал отыскивается с помощью преобразованного уравнения равновесия тонкой оболочки, иллюстрируется на примере цилиндра с жестко закрепленными краями. Во втором способе в качестве функционала используется потенциальная энергия оболочки, ее края могут быть закреплены произвольно, а конечный элемент имеет форму усеченного конуса.

В этой главе будут рассмотрены следующие темы:

- энергетический функционал цилиндрической оболочки;
- пробные функции и запись функционала для цилиндрического конечного элемента;
- условие минимума функционала всей цилиндрической оболочки;
- аппроксимация перемещений, деформаций и напряжений в коническом элементе осесимметричной оболочки;
- потенциальная энергия конструкции из осесимметричных оболочек;
- условия равновесия конструкции;
- особенности расчета перемещений и напряжений в оболочках.

15.1. Метод конечных элементов для расчета изгиба цилиндрических оболочек

Метод конечных элементов относится к прямым методам решения задач о напряженно-деформированном состоянии оболочек. Вместо решения исходной системы уравнений, состоящей из уравнений равновесия, геометрических и физических уравнений, в этих методах решается задача об отыскании минимума функционала, который имеет такое же решение, что и исходная система уравнений, но удовлетворяет при этом заданным граничным условиям *(см. разд. 6.12)*. Такая постановка задачи является классической для вариационного исчисления, и при известном функционале ее приближенное решение обычно сводится к техническим трудностям, которые в большинстве случаев легко преодолеваются с помощью хорошо разработанных процедур. Такие функционалы хорошо известны в задачах теории оболочек. Однако многообразие их вариантов связано с тем, что каждый из них в наибольшей степени удовлетворяет тому или иному классу нагрузок и граничных условий. Хотя они и эквивалентны, но записываются по-разному, да и получаются из разных энергетических принципов.

В этом разделе энергетический функционал получается интегрированием обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка (8.15), полученного в *гл. 8* при решении задач изгиба цилиндрических оболочек.

Кроме того, считается, что цилиндрическая оболочка может иметь переменную толщину стенки, может быть жестко закреплена на краях и нагружена переменным внешним или внутренним давлением. Эти особенности составленной расчетной схемы позволяют решать более широкий круг задач, чем задачи, рассмотренные в *гл. 8*.

15.1.1. Энергетический функционал

Система уравнений тонких оболочек для цилиндра сводится к одному обыкновенному дифференциальному уравнению 4-ого порядка следующего вида *(см. гл. 8)*:

$$Lw = \frac{d^2}{dx^2} D \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{E\delta}{R^2} w = q_n - \frac{\mu N_1}{R}, \tag{15.1}$$

где δ — толщина оболочки; R — ее радиус; E — модуль упругости; μ — коэффициент Пуассона; $D = \dfrac{E\delta^3}{12\left(1-\mu^2\right)}$ — цилиндрическая жесткость; q_n — внешнее давление; w — перемещение в направлении нормали к оси симметрии; N_1 — осевое погонное усилие.

При жестком закреплении граничные условия на краях оболочки записываются в следующем виде:

$$x = 0: \quad w = w_0; \quad w' = w_0'; \tag{15.2}$$

$$x = l: \quad w = w_l; \quad w' = w'_l, \tag{15.3}$$

где l — длина оболочки.

Рассмотрим случай нулевых граничных условий, который соответствует жесткой заделке краев цилиндра и наиболее часто встречается в практических приложениях, когда $w_0 = w_l = 0$; $w'_0 = w'_l = 0$.

На основании теоремы о функционале энергии [15.2] исходная дифференциальная задача (15.1)—(15.3) с нулевыми граничными условиями эквивалентна задаче об отыскании минимума функционала:

$$I(w) = \int_0^l \left(Pw''^2 + qw^2 - 2fw \right) dx, \tag{15.4}$$

т. к. дифференциальный оператор (15.1) линейный, самосопряженный и положительно определенный *(см. разд. 14.3.1)*.

В выражении (15.4) приняты следующие обозначения:

$$P(x) = \frac{E(x)\left(\delta(x)\right)^3}{12\left(1-\mu^2\right)}; \tag{15.5}$$

$$q(x) = \frac{E(x)\delta(x)}{R^2}; \tag{15.6}$$

$$f(x) = q_n(x) - \frac{\mu N_1}{R}. \tag{15.7}$$

Функционал (15.4) называют энергетическим, т. к. на основании второй формулы Бетти из теории упругости [15.3] скалярное произведение $\left(Lw, w\right) = 2\int\limits_V u_0 dV$, где $u_0 = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_1\sigma_1 + \varepsilon_2\sigma_2\right)$ — упругий потенциал деформируемого тела. Он является квадратичной формой относительно составляющих деформаций, которая положительно определена. Таким образом, приходим к другой эквивалентной записи функционала через потенциальную энергию:

$$I(w) = (Lw, w) - 2(f, w) = 2\int\limits_V u_0 dV - \int\limits_S wpdS.$$

Эта запись соответствует принципу минимума потенциальной энергии, который гласит, что из всех допустимых конфигураций тела, которые удовлетворяют его внутренней сплошности и кинематическим граничным условиям, дают потенциальной энергии стационарное (экстремальное) значение лишь те конфигурации, которые удовлетворяют также и уравнениям равновесия. Если она минимальная, то равновесие будет и устойчивым (*см. разд. 14.3.3*). Потенциальная энергия деформации тела равна величине работы, совершенной над ним, но противоположна по знаку. Считая, что трение отсутствует и оболочка нагружена только давлением, выражение для потенциальной энергии запишем так:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_V \left(\varepsilon_1\sigma_1 + \varepsilon_2\sigma_2\right) dV - \int_S pwdS\,, \tag{15.8}$$

где p — давление. Первое слагаемое относится к потенциальной энергии упругой деформации, а второе — к потенциалу внешних поверхностных сил, который численно равен работе внешних сил. Так как $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^0 + \kappa_1 z$; $\varepsilon_2 = \varepsilon_2^0 + \kappa_2 z$, то:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_S \left(\varepsilon_1^0 N_1 + \kappa_1 M_1 + \varepsilon_2^0 N_2 + \kappa_2 M_2\right) dS - \int_S wpdS\,, \tag{15.9}$$

где трение принято равным нулю.

Для решения задачи необходимо отыскать такую функцию $w(x)$, которая обеспечивала бы минимум функционала (15.4) или то же самое (15.9), т. к. они различаются на константу.

В методе конечных элементов оболочка разбивается по длине на несколько, не обязательно одинаковых участков-элементов, в пределах которых строится функция, аппроксимирующая $w(x)$. Будем называть эту функцию пробной-ϑ^h.

15.1.2. Пробные функции

Так как в функционале (15.4) присутствует 2-ая производная от w по x, то для обеспечения ее непрерывности пробную функцию следует взять в виде многочлена третьего порядка:

$$\vartheta^h = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3\,, \tag{15.10}$$

где $\xi = \dfrac{x}{h}$; h — длина элемента; x — локальная осевая координата, отсчитываемая от начала элемента.

Перепишем (15.10) в матричном виде:

$$\vartheta^h = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} = A^T X \ . \tag{15.11}$$

Отсюда вторая производная по ξ равна $\left(\vartheta^h\right)'' = 2a_2 + 6a_3\xi$, или в матричном виде:

$$\left(\vartheta^h\right)'' = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 6\xi \end{pmatrix} = A^T Y \ . \tag{15.12}$$

15.1.3. Функционал элемента

Получим приближенное выражение для функционала (15.4) на длине h, т. е. в пределах одного элемента:

$$I_0\left(\vartheta^h\right) = \int_0^h \left[P_h \left((x) \left(\vartheta^h\right)''_x \right)^2 + q_h \left(\vartheta^h\right)^2 - 2 f_h \vartheta^h \right] dx \ .$$

Для того чтобы избежать численного интегрирования, положим, что функции P_h и q_h постоянны в пределах элемента. Тогда записанное выражение принимает следующий вид:

$$I_0\left(\vartheta^h\right) = P_h h \int_0^1 \left(\left(\vartheta^h\right)''_x \right)^2 d\xi + q_h h \int_0^1 \left(\vartheta^h\right)^2 d\xi - 2h \int_0^l f_h \vartheta^h d\xi \ .$$

Переходя к матричным обозначениям с помощью формулы (15.11), имеем:

$$\left(\vartheta^h\right)^2 = A^T X A^T X = A^T X X A \, ,$$

но т. к. $\left(\vartheta^h\right)$ — скаляр, записанный в матричном виде, то $A^T X = \left(A^T X\right)^T = X^T A$, и поэтому:

$$\int_0^1 \left(\vartheta^h\right)^2 d\xi = A^T \int_0^1 X X^T d\xi A = A^T N_0 A \, ,$$

где матрица N_0 получается после непосредственного вычисления определенного интеграла и имеет вид:

$$N_0 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

Далее, воспользовавшись формулой (15.12), получаем:

$$\left(\vartheta^h\right)''_x = \frac{1}{h^2}\left(\vartheta^h\right)'' = A^T YY^T A,$$

следовательно:

$$\int_0^1 \left(\left(\vartheta^h\right)''_x\right)^2 d\xi = \frac{1}{h^4} A \int_0^1 YY^T d\xi A = \frac{1}{h^4} A^T N_1 A,$$

где:

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Полагая:

$$f_h = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} = B^T X,$$

а также учитывая выражение (15.11) для ϑ^h, получаем:

$$\int_0^1 f_h \vartheta^h d\xi = B^T \int_0^1 XX^T d\xi A = B^T N_0 A.$$

Тогда функционал для одного элемента можно записать в виде:

$$I_0\left(\vartheta^h\right) = \frac{P_h}{h^4} A^T N_1 A + q_h h A^T N_0 A - 2hB^T N_0 A. \tag{15.13}$$

Выразим теперь матрицу A коэффициентов полинома, апроксимирующего искомую функцию, через узловые перемещения и углы поворота.

В левом узле элемента при $\xi = 0$ получаем $\vartheta^h = \vartheta_0$; $\left(\vartheta^h\right)' = \vartheta_0'$, а в правом, т. е. при $\xi = 1$, — $\vartheta^h = \vartheta_1$; $\left(\vartheta^h\right)' = \vartheta_1'$. Используя эти условия и выражение (15.11), после преобразований получим:

$$A = H\vartheta_e, \tag{15.14}$$

где:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & 0 \\ -3 & -2h & 3 & -h \\ 2 & h & -2 & h \end{pmatrix}; \quad \vartheta_e = \begin{pmatrix} \vartheta_0 \\ \vartheta_0' \\ \vartheta_1 \\ \vartheta_1' \end{pmatrix}.$$

Если выразить элементы матрицы B через значения функции f_h в узлах:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = H_f f_e,$$

то функционал принимает вид:

$$I_e\left(\vartheta^h\right) = \vartheta_e^T K_2 \vartheta_e + \vartheta_e^T K_0 \vartheta_e - 2 f_e^T K_f \vartheta_e, \tag{15.15}$$

где введены следующие обозначения:

$$K_2 = \frac{P_h}{h^3} H^T N_1 H = \frac{P_h}{h^3} \begin{pmatrix} 12 & 6h & -12 & 6h \\ 6h & 4h^2 & -6h & 2h^2 \\ -12 & -6h & 12 & -6h \\ 6h & 2h^2 & -6h & 4h^2 \end{pmatrix};$$

$$K_0 = q_h h H^T N_0 H = \frac{q_h h}{420} \begin{pmatrix} 156 & 22h & 54 & -13h \\ 22h & 4h^2 & 13h & -3h^2 \\ 54 & 13h & 156 & -22h \\ -13h & -3h^2 & -22h & 4h^2 \end{pmatrix};$$

$$K_f = hH_f{}^T N_0 H = h\begin{pmatrix} \frac{7}{20} & \frac{1}{20}h & \frac{3}{20} & \frac{-1}{30}h \\ \frac{9}{20} & \frac{1}{30}h & \frac{7}{20} & -\frac{1}{20}h \end{pmatrix}.$$

Теперь просуммируем выражения типа (15.15) по всем элементам и найдем минимум функционала всей оболочки.

15.1.4. Минимум функционала оболочки

Для всей оболочки, разбитой на N элементов, имеем вместо формулы (15.15):

$$I\left(\vartheta^h\right) = \sum_1^N I_e\left(\vartheta^h\right). \qquad (15.16)$$

При суммировании функционалов для элементов в выражении (15.16) будут встречаться одни и те же узловые неизвестные, относящиеся к двум соседним элементам, соединенным в узле. Обозначим векторы узловых неизвестных и правых частей следующим образом:

$$Q = \begin{pmatrix} \vartheta_0 \\ \vartheta_0' \\ \vartheta_1 \\ \vartheta_1' \\ \ldots \\ \vartheta_{N_y}' \end{pmatrix}; \quad R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \ldots \\ r_{N_y} \end{pmatrix};$$

где $N_y = N + 1$ — число узлов; N — количество элементов. Количество узловых неизвестных в два раза больше количества узлов, т. е. $I_k = 2N_y$. Взяв частные производные по каждой неизвестной:

$$\frac{\partial I\left(\vartheta^h\right)}{\partial \vartheta_0} = 0; \quad \frac{\partial I\left(\vartheta^h\right)}{\partial \vartheta_1} = 0; \quad \ldots \quad ; \quad \frac{\partial I\left(\vartheta^h\right)}{\partial \vartheta_{N_y}'} = 0,$$

придем к системе линейных алгебраических уравнений вида:

$$KQ = R, \qquad (15.17)$$

к которой следует добавить граничные условия, определяющие перемещения и углы поворота на краях оболочки. Решив эту систему, определим узловые неизвестные. Теперь получим выражения для напряжений в пределах одного элемента.

15.1.5. Расчет перемещений и напряжений

Суммарные меридиональные напряжения для внешней и внутренней поверхностей оболочки определяются по формуле, полученной ранее в *гл. 8*:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{\delta} \pm \frac{6M_1}{\delta^2},$$

а тангенциальные напряжения равны:

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{\delta} \pm \mu \frac{6M_1}{\delta^2}.$$

Погонное усилие N_1 определяется из уравнения равновесия части оболочки, а $N_2 = \mu N_1 + \frac{E\delta w}{R}$, где $w(x)$ — перемещение цилиндра в направлении радиуса. Погонные изгибающие моменты равны:

$$M_1 = \frac{E\delta^3}{12\left(1-\mu^2\right)} \frac{d^2 w}{dx^2}; \quad M_2 = \mu M_1.$$

Для вычисления перемещений $w(x)$ и второй производной $w''(x)$ в пределах элемента (координата x отсчитывается от его начала) пробную функцию (15.10) с учетом (15.14) можно записать в виде:

$$w(x) = \eta_1 w_0 + \eta_2 h w_0' + \eta_3 h w_1 + \eta_4 h w_1'',$$

где h — длина элемента, индексом 0 обозначены перемещения и угол поворота в левом узле, а индексом 1 — в правом.

Базисные функции η_1, η_2, η_3, η_4 в методе конечных элементов принято называть функциями формы. В записанном выражении они имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3; \\ \eta_2 &= \xi - 2\xi^2 + \xi^3; \\ \eta_3 &= 3\xi^2 - 2\xi^3; \\ \eta_4 &= \xi^3 - \xi^2, \end{aligned}\right\} \tag{15.18}$$

а их вторые производные по $\xi = \frac{x}{h}$ равны:

$$\left.\begin{aligned} \eta_1'' &= -6 + 12\xi; \\ \eta_2'' &= -4 + 6\xi; \\ \eta_3'' &= 6 - 12\xi; \\ \eta_4'' &= -2 + 6\xi. \end{aligned}\right\} \tag{15.19}$$

Тогда вторая производная от перемещения $w(x)$ равна:

$$w''(x) = \frac{1}{h^2}\left(w_0\eta_1'' + w_0' h\eta_2'' + w_1\eta_3'' + w_1' h\eta_4''\right).$$

Задавая значение ξ между 0 и 1, можно определить $w(x)$ и $w''(x)$ внутри элемента.

Следует отметить, что перемещения и углы поворота в узлах непрерывны, а вторая производная терпит разрыв первого рода, поэтому напряжения в узле, определенные по двум соседним элементам, будут иметь различное значение, т. к. в формулу для изгибающего момента входит вторая производная от перемещения.

Действительно, рассмотрим два элемента с номером i и $(i+1)$. Тогда в общем узле для левого элемента ($\xi = 1$, т. к. для него это правый узел) имеем:

$$w_i(h_i) = w_{1,i}; \quad w_i'(h_i) = w_{1,i}',$$

$$w_i''(h_i) = \frac{1}{h_i^2}\left(6w_{0,i} + 2h_i w_{0,i}' - 2w_{1,i} + 4h_i w_{1,i}\right),$$

а для правого $(\xi = 0)$:

$$w_{i+1}(0) = w_{0,i+1}; \quad w_{i+1}'(0) = w_{0,i+1}';$$

$$w_{i+1}''(0) = \frac{1}{h_{i+1}^2}\left(-6w_{0,i+1} - 4h_{i+1}w_{0,i+1}' + 6w_{1,i+1} - 2w_{1,i+1}'h_{i+1}\right).$$

Но в этом узле перемещения и углы поворота определены после решения системы линейных алгебраических уравнений, поэтому:

$$w = w_{1,i} = w_{0,i+1}; \quad w' = w_{1,i}' = w_{0,i+1}',$$

а вторые производные:

$$w_i'' = \frac{1}{h^2}\left(6w_{0,i} + 2h_i w_{0,i}' - 2w_{1,i} + 4h_i w_{1,i}'\right);$$

$$w_{i+1}'' = \frac{1}{h_{i+1}^2}\left(-6w_{0,i+1} - 4h_{i+1}w_{0,i+1}' + 6w_{1,i+1} - 2w_{1,i+1}'h_{i+1}\right)$$

в этом узле различны. Из-за разрыва напряжений в узлах их обычно определяют при $\xi = 0{,}5$, т. е. в середине элемента.

15.2. Метод конечных элементов для осесимметричных оболочек

В методе конечных элементов оболочечная конструкция осесимметричной формы разбивается на конечные элементы, соединенные между собой по узловым окружностям. Простейшим конечным элементом является усеченный конус, с помощью которого можно аппроксимировать любую сколь угодно сложную конфигурацию ветвящихся оболочек.

На рис. 15.1 в качестве примера приведена оболочка, разбитая на конические конечные элементы. Точки на меридиональном сечении оболочки соответствуют узловым окружностям, по которым стыкуются элементы. Угол наклона образующей элемента к оси симметрии может изменяться от 0° до 360°. Рассмотрим последовательные этапы формулировки задачи по методу конечных элементов. Но, в отличие от рассмотренного ранее в *разд. 15.1* случая, теперь воспользуемся выражением для потенциальной энергии конструкции.

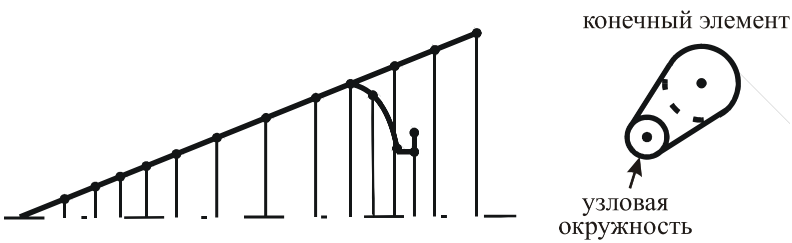


Рис. 15.1. Осесимметричная оболочка,
разбитая на конические конечные элементы

15.2.1. Аппроксимация перемещений

Рассмотрим конический элемент с заданными на узловых окружностях меридиональном перемещении u_i, нормальном перемещении w_i и угле поворота β_i (рис. 15.2).

Тогда перемещения и угол поворота внутри элемента можно аппроксимировать какими-нибудь простейшими функциями.

ПРИМЕЧАНИЕ

В отличие от обозначений, применявшихся ранее в *разд. 15.1*, здесь и далее будем использовать одинаковые обозначения для исходных функций и для их аппроксимаций — пробных функций.

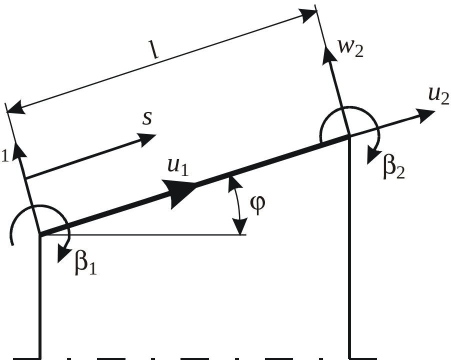


Рис. 15.2. Конический элемент осесимметричной оболочки

Удобнее всего это сделать с помощью полиномов, порядок которых определяется требованиями к непрерывности производных от перемещений в записи выражения для потенциальной энергии элемента. В рассматриваемом варианте конечного элемента в виде конической оболочки воспользуемся следующими полиномами:

$$u = a_1 + a_2 s\,; \tag{15.20}$$

$$w = a_3 + a_4 s + a_5 s^2 + a_6 s^3\,; \tag{15.21}$$

$$\beta = \frac{dw}{ds} = a_4 + 2a_5 s + 3a_6 s^2\,. \tag{15.22}$$

Количество коэффициентов a_i в точности соответствует количеству перемещений и углов поворота в узловых окружностях элементов. Выразим через них коэффициенты этих полиномов.

Имеем при $s = 0$:

$$u_1 = a_1; \quad w_1 = a_3; \quad \beta_1 = a_4, \tag{15.23}$$

а при $s = l$:

$$u_2 = a_1 + a_2 l\,; \quad w_2 = a_3 + a_4 l + a_5 l^2 + a_6 l^3; \;\; \beta_2 = a_4 + 2a_5 l + 3a_6 l^2. \tag{15.24}$$

Решая систему линейных алгебраических уравнений (15.23) и (15.24), получаем:

$$a_1 = u_1; \quad a_2 = \frac{1}{l}(u_2 - u_1)\,; \quad a_3 = w_1; \quad a_4 = \beta_1;$$

$$a_5 = \frac{1}{l^2}\big(3(w_2 - w_1) - 2\beta_1 l - \beta_2 l\big); \quad a_6 = \frac{1}{l^3}\big(l\beta_2 - 2(w_2 - w_1) + \beta_1 l\big).$$

Подставляя полученные выражения для коэффициентов в (15.20) и (15.21), получаем:

$$u = u_2 + \left(1 - \eta\right) u_1; \tag{15.25}$$

$$w = w_1 N_1\left(\eta\right) + \beta_1 l N_2\left(\eta\right) + w_2 N_3\left(\eta\right) + \beta_2 l N_4\left(\eta\right), \tag{15.26}$$

где $\eta = \dfrac{s}{l}$ и:

$$\left.\begin{aligned} N_1\left(\eta\right) &= 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3; \\ N_2\left(\eta\right) &= \eta - 2\eta^2 + \eta^3; \\ N_3\left(\eta\right) &= 3\eta^2 - 2\eta^2; \\ N_4\left(\eta\right) &= -2\eta^2 + \eta^3. \end{aligned}\right\} \tag{15.27}$$

Полиномы N_1, N_2, N_3, N_4 называются *полиномами Эрмита*, а в методе конечных элементов — *функциями формы*. Они использовались нами и ранее в предыдущем разделе (см. выражение (15.18)).

В матричном виде выражения (15.25) и (15.26) можно переписать так:

$$\left[f\right] = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \left|\begin{array}{c:c:c:c:c:c} 1-\eta & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & N_1 & lN_2 & 0 & N_3 & lN_4 \end{array}\right| \begin{pmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \beta_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \tag{15.28}$$

где столбец узловых перемещений элемента равен:

$$\left[d\right] = \left(u_1 \quad w_1 \quad \beta_1 \quad u_2 \quad w_2 \quad \beta_2\right)^T.$$

15.2.2. Аппроксимация деформаций

Воспользовавшись уравнениями теории тонких оболочек, полученными в *гл. 6*, геометрические уравнения для конической оболочки запишем в следующем виде:

$$\varepsilon_1^0 = \frac{du_0}{ds}; \tag{15.29}$$

$$\varepsilon_2^0 = \frac{u_0 \sin\varphi + w_0 \cos\varphi}{r}; \tag{15.30}$$

$$\kappa_1 = -\frac{d^2 w_0}{ds^2}; \tag{15.31}$$

$$\kappa_2 = -\frac{\sin\varphi}{r}\frac{dw_0}{ds}, \tag{15.32}$$

где индексом 0 обозначены величины, относящиеся к срединной поверхности. Подставляя (15.29)—(15.32) в выражения (15.25) и (15.26) для перемещений, получаем:

$$\varepsilon_1^0 = \frac{du}{d\eta}\frac{d\eta}{ds} = \frac{1}{l}\left(u_2 - u_1\right); \tag{15.33}$$

$$\varepsilon_2^0 = \frac{1}{r}\left\{\left[\eta u_2 + \left(1-\eta\right)u_1\right]\sin\varphi + \left[w_1 N_1 + \beta_1 l N_2 + w_2 N_3 + \beta_2 l N_4\right]\cos\varphi\right\}; \tag{15.34}$$

$$\kappa_1 = -\frac{1}{l^2}\left(w_1 \frac{d^2 N_1}{d\eta^2} + \beta_1 l \frac{d^2 N_2}{d\eta^2} + w_2 \frac{d^2 N_3}{d\eta^2} + \beta_2 l \frac{d^2 N_4}{d\eta^2} \right); \tag{15.35}$$

$$\kappa_2 = -\frac{\sin\varphi}{rl}\left(w_1 \frac{dN_1}{d\eta} + \beta_1 l \frac{dN_2}{d\eta} + w_2 \frac{dN_3}{d\eta} + \beta_2 l \frac{dN_1}{d\eta} \right), \tag{15.36}$$

где соответствующие производные равны:

$$\left.\begin{array}{ll}
\dfrac{dN_1}{d\eta} = -6\eta + 6\eta^2; & \dfrac{d^2 N_1}{d\eta^2} = -6 + 12\eta; \\
\dfrac{dN_2}{d\eta} = 1 - 4\eta + 3\eta^2; & \dfrac{d^2 N_2}{d\eta^2} = -4 + 6\eta; \\
\dfrac{dN_3}{d\eta} = 6\eta - 6\eta^2; & \dfrac{d^2 N_3}{d\eta^2} = 6 - 12\eta; \\
\dfrac{dN_4}{d\eta} = -4\eta + 3\eta^2; & \dfrac{d^2 N_4}{d\eta^2} = -4 + 6\eta.
\end{array}\right\} \tag{15.37}$$

Вводя в столбец деформаций:

$$[\varepsilon] = \left(\varepsilon_1^0 \quad \varepsilon_2^0 \quad \chi_1 \quad \chi_2\right)^T,$$

а также в столбец узловых перемещений элемента:

$$[d] = \left(u_1 \quad w_1 \quad \beta_1 \quad u_2 \quad w_2 \quad \beta_2\right)^T$$

геометрические уравнения (15.33)—(15.35), с учетом (15.37) можно переписать в матричном виде так:

$$[\varepsilon]=[B][d], \tag{15.38}$$

где прямоугольная матрица равна:

$$[B]=\left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c}
-\dfrac{1}{l} & 0 & 0 & \dfrac{1}{l} & 0 & 0 \\ \hdashline
\dfrac{(1-\eta)\sin\varphi}{r} & \dfrac{\left(1-3\eta^2+2\eta^3\right)\cos\varphi}{r} & \dfrac{l\left(\eta-2\eta^2+\eta^3\right)\cos\varphi}{r} & \dfrac{\eta\sin\varphi}{r} & \dfrac{\left(3\eta^2-2\eta^3\right)\cos\varphi}{r} & \dfrac{l\left(\eta^3-\eta^2\right)\cos\varphi}{r} \\ \hdashline
0 & \dfrac{6-12\eta}{l^2} & \dfrac{4-6\eta}{l} & 0 & \dfrac{12\eta-6}{l^2} & \dfrac{2-6\eta}{l} \\ \hdashline
0 & \dfrac{\left(6\eta-6\eta^2\right)\sin\varphi}{lr} & \left(-1+4\eta-3\eta^2\right)\dfrac{\sin\eta}{r} & 0 & \dfrac{6\left(\eta^2-\eta\right)\sin\varphi}{rl} & \left(2\eta-3\eta^2\right)\dfrac{\sin\varphi}{r}
\end{array}\right] \tag{15.39}$$

Матрица B зависит от безразмерной координаты η, измеряемой вдоль образующей элемента.

15.2.3. Аппроксимация напряжений

На наружной (знак плюс) и внутренней поверхностях оболочки нормальные напряжения определяются по формулам, полученным в *гл. 6*:

$$\sigma_1=\frac{N_1}{\delta}\pm\frac{6M_1}{\delta^2}; \tag{15.40}$$

$$\sigma_2=\frac{N_2}{\delta}\pm\frac{6M_2}{\delta^2}, \tag{15.41}$$

в которых погонные усилия и моменты в изотропной оболочке определяются по формулам:

$$N_1=\frac{E\delta}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_1^0+\mu\varepsilon_2^0\right); \tag{15.42}$$

$$N_2=\frac{E\delta}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_2^0+\mu\varepsilon_1^0\right); \tag{15.43}$$

$$M_1=-D\left(\kappa_1+\mu\kappa_2\right); \tag{15.44}$$

$$M_2=-D\left(\kappa_2+\mu\kappa_1\right), \tag{15.45}$$

а их, в свою очередь, в матричном виде можно записать так:

$$[\Sigma]=\begin{pmatrix}N_1\\N_2\\M_1\\M_2\end{pmatrix}=\left|\begin{array}{c:c:c:c}\dfrac{E\delta}{1-\mu^2} & \dfrac{\mu E\delta}{1-\mu^2} & 0 & 0\\ \hdashline \mu\dfrac{E\delta}{1-\mu^2} & \dfrac{E\delta}{1-\mu^2} & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & -\dfrac{E\delta^3}{12\left(1-\mu^2\right)} & -\dfrac{\mu E\delta^3}{12\left(1-\mu^2\right)}\\ \hdashline 0 & 0 & -\dfrac{\mu E\delta^3}{12\left(1-\mu^2\right)} & -\dfrac{E\delta^3}{12\left(1-\mu^2\right)}\end{array}\right|\begin{pmatrix}\varepsilon_1^0\\ \varepsilon_2^0\\ \kappa_1\\ \kappa_2\end{pmatrix}, \tag{15.46}$$

или в сокращенной записи:

$$[\Sigma]=[D][\varepsilon], \tag{15.47}$$

где матрица упругих констант:

$$[D]=\begin{pmatrix}1 & \mu & 0 & 0\\ \mu & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\dfrac{\delta^2}{12} & -\dfrac{\mu\delta^2}{12}\\ 0 & 0 & -\dfrac{\mu\delta^2}{12} & -\dfrac{\delta^2}{12}\end{pmatrix}. \tag{15.48}$$

Подставляя в (15.48) матричное выражение деформаций (15.38), получим:

$$[\Sigma]=[D][B][d]. \tag{15.49}$$

Таким образом, перемещения, деформации и внутренние усилия в элементе с помощью (15.33), (15.38), (15.46) могут быть выражены через узловые перемещения и углы поворота.

Для определения узловых значений перемещений и углов поворота воспользуемся условиями равновесия тела, записанными в виде условия минимума его потенциальной энергии.

15.2.4. Потенциальная энергия конструкции

Решение системы уравнений в частных производных не является единственным способом определения напряженно-деформированного состояния оболочки *(см. разд. 14.3.1)*.

В вариационном исчислении показывается, что вместо решения системы дифференциальных уравнений можно решать задачу об отыскании минимума функционала на функциях, являющихся решением этих уравнений. Методы решения задач, основанные на отыскании минимума функционала, называются *прямыми*.

Для оболочки, нагруженной консервативными внешними силами, в качестве функционала в данном случае принимается полная потенциальная энергия механической системы, состоящей из оболочки и приложенных к ней сил, т. е. $\Pi = U + \Pi_\sigma$, где U — потенциальная энергия упругой деформации оболочки; Π_σ — потенциал внешних сил.

Ранее в *разд. 14.3* было показано, что потенциальная энергия упругой деформации тела определяется по следующей формуле:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \left(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3 + \tau_{12}\gamma_{12} + \tau_{23}\gamma_{23} + \tau_{31}\gamma_{31}\right) dV ,$$

где V — объем тела. С учетом гипотез Лава—Кирхгоффа это выражение в рассматриваемом случае упрощается и принимает вид:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \left(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \tau_{12}\gamma_{12}\right) dV .$$

Но $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^0 + z\kappa_1$; $\varepsilon_2 = \varepsilon_2^0 + z\kappa_2$; $\gamma_{12} = \gamma_{12}^0 + 2z\kappa_{12}$, поэтому после подстановки деформаций и интегрирования по толщине оболочки получим:

$$U = \frac{1}{2}\int_S \left(N_1\varepsilon_1^0 + N_2\varepsilon_2^0 + T_{12}\gamma_{12}^0 + M_1\kappa_1 + M_2\kappa_2 + 2M_{12}\kappa_{12}\right) h_1 h_2 \, d\alpha \, d\beta ,$$

где S — поверхность оболочки.

Если на оболочку действуют поверхностные нагрузки, не изменяющие своей величины и направления, то потенциал внешней нагрузки определяется по формуле:

$$\Pi_\sigma = -\int_{S_1} \left(q_1 u_0 + q_2 v_0 + q_n u_w\right) dS .$$

Знак минус указывает на то, что направление поверхностной нагрузки выбрано совпадающим с направлением перемещений, поэтому с ростом перемещений потенциал внешней нагрузки уменьшается. Объединяя выражения для потенциальной энергии упругой деформации и потенциала внешних сил, получаем следующую запись для потенциальной энергии оболочки:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_S \left(N_1\varepsilon_1^0 + N_2\varepsilon_2^0 + T_{12}\gamma_{12}^0 + M_1\kappa_1 + M_2\kappa_2 + 2H\kappa_{12} \right) dS -$$

$$-\int_{S_1} \left(q_1 u_0 + q_2 v_0 + q_n w_0 \right) dS.$$

В рассматриваемом случае полученное выражение для потенциальной энергии конструкции, составленной из оболочек, упрощается и принимает вид:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_S \left(\varepsilon_1^0 N_1 + \varepsilon_2^0 N_2 + \kappa_1 M_1 + \kappa_2 M_2 \right) ds - \int_S \left(\tau u + p w \right) ds, \tag{15.50}$$

где S — полная поверхность оболочек; p, τ — давление и трение, действующие на оболочки.

В матричном виде (15.50) записывается так:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_S [\varepsilon]^T [\Sigma] ds - \int_S [f]^T [q] ds, \tag{15.51}$$

где $[q] = \begin{pmatrix} \tau \\ p \end{pmatrix}$. Учитывая (15.47), имеем:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_S [\varepsilon]^T [D][\varepsilon] ds - \int_S [f]^T [q] ds. \tag{15.52}$$

Так как аппроксимируются перемещения внутри одного элемента, то потенциальную энергию конструкции можно представить в виде суммы потенциальных энергий N элементов, на которые разбита эта конструкция:

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_N \int_{S_e} [\varepsilon]^T [D][\varepsilon] ds - \sum_N \int_{S_e} [f]^T [q] ds. \tag{15.53}$$

Выразим потенциальную энергию одного элемента через его узловые перемещения и углы поворота. Имея в виду, что:

$$[\varepsilon]^T = [d]^T [B]^T; \quad [\varepsilon] = [B][d]; \quad [\Sigma] = [D][\varepsilon] = [D][B][d]; \quad [f] = [N][d];$$
$$[f]^T = [d]^T [N]^T,$$

получаем следующее матричное выражение для потенциальной энергии одного элемента:

$$\Pi_e = \frac{1}{2}[d]^T \int_{S_e} [B]^T [D][B] ds [d] - [d]^T \int_{S_e} [N]^T [q] ds. \tag{15.54}$$

Введем матрицу жесткости $\left[k_e\right]$ и матрицу внешних усилий $\left[r\right]$ элемента в локальной системе координат, связанной с элементом:

$$\left[k_e\right]=\int\limits_{S_e}\left[B\right]^T\left[D\right]\left[B\right]ds\,; \qquad (15.55)$$

$$\left[r\right]=\int\limits_{S_e}\left[N\right]^T\left[q\right]ds\,. \qquad (15.56)$$

Тогда (15.54) можно записать так:

$$\Pi_e=\frac{1}{2}\left[d\right]^T\left[k_e\right]\left[d\right]-\left[d\right]^T\left[r\right]. \qquad (15.57)$$

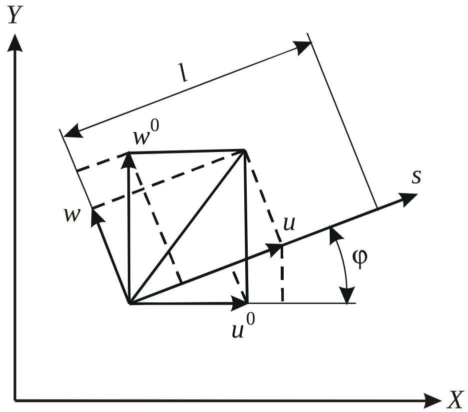


Рис. 15.3. Локальная и глобальная системы координат

Наряду с локальными системами координат, связанными с элементами, введем единую глобальную систему координат, в которой и будем определять неизвестные перемещения на узловых окружностях. Ось X направим по оси симметрии конструкции, а ось Y — перпендикулярно оси симметрии. Перемещения и углы поворота на узловой окружности в глобальных координатах будем обозначать с верхним индексом 0. Они связаны с локальными перемещениями u и w по формулам (рис. 15.3):

$$u=u^0\cos\varphi+w^0\sin\varphi; \quad w=-u^0\sin\varphi+w^0\cos\varphi\,,$$

или в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} u \\ w \\ \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^0 \\ w^0 \\ \beta \end{pmatrix}. \qquad (15.58)$$

Обозначая:

$$[\Lambda]=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{15.59}$$

запишем в матричном виде связь между узловыми перемещениями в глобальной и локальной системами координат:

$$[d]=[T]\left[d^0\right], \tag{15.60}$$

где $\left[d^0\right]=\begin{pmatrix}u_1^0 & w_1^0 & \beta_1 & u_2^0 & w_2^0 & \beta_2\end{pmatrix}$; $[T]=\begin{pmatrix}\Lambda & 0\\ 0 & \Lambda\end{pmatrix}$.

Подставим (15.60) в выражение для потенциальной энергии элемента (15.57):

$$\Pi_e=\frac{1}{2}\left[d^0\right]^T[T]^T\left[k^e\right][T]\left[d^0\right]-\left[d^0\right]^T[T]^T[r]. \tag{15.61}$$

Теперь получим приближенное выражение для потенциальной энергии всей конструкции в глобальной системе координат и найдем из него условие ее равновесия.

15.2.5. Условие равновесия конструкции

На основании принципа минимума потенциальной энергии тело находится в равновесии, если обеспечивается минимум его потенциальной энергии.

Обозначая в выражении (15.61) матрицу жесткости элемента в глобальной системе координат как:

$$[K]=[T]^T[k_e][T], \tag{15.62}$$

а также матрицу усилий элемента:

$$\left[r^0\right]=[T]^T[r] \tag{15.63}$$

и суммируя (15.61) по всем элементам, имеем:

$$\Pi=\sum_N \Pi_e=\frac{1}{2}[D]^T[K][D]-[D]^T[R], \tag{15.64}$$

где:

$$[D]^T=\begin{pmatrix}u_1^0 & w_1^0 & \beta_1 & u_2^0 & \ldots & u_{N+1}^0 & w_{N+1}^0 & \beta_{N+1}\end{pmatrix};$$

$$[R]^T=\begin{pmatrix}t_1^0 & n_1^0 & m_1^0 & t_2^0 & \ldots & t_{N+1}^0 & n_{N+1}^0 & m_{N+1}^0\end{pmatrix},$$

а t_i^0, n_i^0, m_i^0 — погонные силы и моменты, приложенные в узле i, являющиеся эквивалентами внешней поверхностной нагрузки. Заметим, что в данном случае количество узловых окружностей на единицу больше числа элементов N.

Функционал $\Pi\left(u_1^0 ... \beta_{N+1}^0\right)$ имеет минимум, если его первая вариация равна нулю, т. е.:

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial u_1^0}\delta u_1^0 + \frac{\partial\Pi}{\partial w_1^0}\delta w_1^0 + ... + \frac{\partial\Pi}{\partial\beta_{N+1}}\delta\beta_{N+1} = 0, \tag{15.65}$$

откуда можно записать следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial\Pi}{\partial u_1^0} = 0; \\ \dfrac{\partial\Pi}{\partial w_1^0} = 0; \\ ... \\ \dfrac{\partial\Pi}{\partial\beta_{N+1}} = 0, \end{array}\right\}, \tag{15.66}$$

которую в матричном виде можно переписать так:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial[D]} = 0, \tag{15.67}$$

или после дифференцирования (15.64):

$$[K][D] = [R], \tag{15.68}$$

где второе слагаемое в (15.64) после дифференцирования перенесено в правую часть.

Далее решается система линейных алгебраических уравнений (15.68) относительно столбца $[D]$ узловых перемещений и углов поворота. По известным значениям узловых перемещений находятся перемещения, деформации и напряжения с помощью приведенных ранее аппроксимаций.

Выводы

В этой главе были изучены следующие вопросы:

1. Записан энергетический функционал, который использовался для расчета цилиндрической оболочки методом конечных элементов.
2. На основе функционала выбран порядок аппроксимирующего полинома для пробной функции.
3. Получено приближенное матричное выражение для функционала конечного элемента и всего цилиндра.
4. Определен порядок расчета неизвестных узловых перемещений и углов поворота из условия минимума функционала.
5. Получена матрица жесткости конического конечного элемента для осесимметричных оболочек.
6. Получено выражение для потенциальной энергии оболочки вращения.
7. Составлено условие равновесия осесимметричной конструкции из оболочек из условия минимума функционала — потенциальной энергии конструкции.
8. Определен порядок расчета напряжений и деформаций в цилиндрической и осесимметричной ветвящейся оболочке по известным узловым перемещениям и углам поворота.

Упражнения и вопросы

1. Дайте определение функционала. Приведите примеры функционалов и объясните, чем функционал отличается от функции.
2. В чем состоит основная идея прямых методов решения дифференциальных уравнений?
3. Сформулируйте принцип минимума потенциальной энергии. Как связаны потенциальная энергия упругой деформации и потенциальная энергия внешних сил, действующих на упругое тело?
4. Как выбираются пробные функции, аппроксимирующие перемещения в пределах конечного элемента?
5. Опишите процедуру получения функционала всей оболочки по известным выражениям для функционала, записанного в пределах одного конечного элемента. Сколько раз повторяются слагаемые с внутренними узловыми неизвестными?
6. Как влияют граничные условия на форму записи энергетического функционала?

7. Представьте пробную функцию для нормальных перемещений оболочки в пределах элемента в виде линейной комбинации полиномов Эрмита.
8. Получите систему линейных алгебраических уравнений для определения узловых неизвестных в цилиндрической оболочке, объединив функционалы элементов.
9. Почему напряжения в узлах элементов имеют разрыв?
10. Можно ли определять напряжения в середине элементов цилиндрической оболочки переменной толщины по формулам безмоментной теории оболочек?
11. Получите с помощью коэффициентов Ламе и уравнений теории тонких оболочек из *гл. 6* геометрические уравнения (15.29)—(15.32) для конической оболочки.
12. Получите матрицу упругих констант $\left[D\right]$ для ортотропной оболочки, записанную в виде (15.48) для изотропной оболочки.
13. Запишите выражение для потенциальной энергии конструкции, составленной из конструктивно-анизотропных оболочек, аналогичное выражению (15.50), которое записано для однослойной изотропной оболочки.
14. Почему система линейных алгебраических уравнений решается относительно перемещений в глобальной системе координат?
15. Нужно ли полученные в глобальной системе координат значения неизвестных узловых перемещений и углов поворота пересчитывать к значениям в локальной системе координат при определении напряжений и деформаций в элементах?

Литература к главе 15

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. — М.: Мир, 1975, 541 с.
2. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. — М.: Наука, 1970, 512 с.
3. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. — М.: Наука, 1975, 576 с.
4. Образцов И. Ф., Савельев И. М., Хазанов Х. С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. — М.: Высшая школа, 1985, 392 с.
5. Постнов В. А., Хархурим И. Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. — Л.: Судостроение, 1974, 342 с.
6. Сегерлинд Д. Применение метода конечных элементов. — М.: Мир, 1979, 392 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Уравнения линейной теории упругости в криволинейных координатах

❐ Геометрические уравнения:

- Относительные деформации и сдвиги:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\beta}v + \frac{1}{h_1 h_3}\frac{\partial h_1}{\partial\gamma}w;\\
\varepsilon_2 &= \frac{1}{h_2}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{1}{h_2 h_3}\frac{\partial h_2}{\partial\eta_3}w + \frac{1}{h_2 h_1}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}u;\\
\varepsilon_3 &= \frac{1}{h_3}\frac{\partial w}{\partial\gamma} + \frac{1}{h_1 h_3}\frac{\partial h_3}{\partial\alpha}u + \frac{1}{h_3 h_2}\frac{\partial h_3}{\partial\beta}v;\\
\gamma_{12} = \gamma_{21} &= \frac{h_2}{h_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v}{h_2}\right) + \frac{h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u}{h_1}\right);\\
\gamma_{13} = \gamma_{31} &= \frac{h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{w}{h_3}\right) + \frac{h_1}{h_3}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{u}{h_1}\right);\\
\gamma_{23} = \gamma_{32} &= \frac{h_2}{h_3}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{v}{h_2}\right) + \frac{h_3}{h_2}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{w}{h_3}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (\text{П}1.1)$$

* Углы поворота триэдра локальных координатных осей:

$$\left.\begin{aligned}
2\omega_1 &= \frac{1}{h_2 h_3}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}(h_3 w) - \frac{\partial}{\partial\gamma}(h_2 v)\right);\\
2\omega_2 &= \frac{1}{h_1 h_3}\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}(h_1 u) - \frac{\partial}{\partial\alpha}(h_3 w)\right);\\
2\omega_3 &= \frac{1}{h_2 h_1}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}(h_2 v) - \frac{\partial}{\partial\beta}(h_1 u)\right).
\end{aligned}\right\} \tag{П1.2}$$

❒ Уравнения равновесия:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial\alpha}(h_2 h_3 \sigma_1) + \frac{\partial}{\partial\beta}(h_3 h_1 \tau_{12}) + \frac{\partial}{\partial\gamma}(h_1 h_2 \tau_{13}) + h_3 \frac{\partial h_1}{\partial\beta}\tau_{12} + \\
+ h_2 \frac{\partial h_1}{\partial\gamma}\tau_{13} - h_3 \frac{\partial h_2}{\partial\alpha}\sigma_2 - h_2 \frac{\partial h_3}{\partial\alpha}\sigma_3 + h_1 h_2 h_3 G_1 = 0;
\end{gathered} \tag{П1.3}$$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial\alpha}(h_2 h_3 \tau_{12}) + \frac{\partial}{\partial\beta}(h_3 h_1 \sigma_2) + \frac{\partial}{\partial\gamma}(h_1 h_2 \tau_{23}) + h_1 \frac{\partial h_2}{\partial\gamma}\tau_{23} + \\
+ h_3 \frac{\partial h_2}{\partial\alpha}\tau_{12} - h_1 \frac{\partial h_3}{\partial\beta}\sigma_3 - h_3 \frac{\partial h_1}{\partial\beta}\sigma_1 + h_1 h_2 h_3 G_2 = 0;
\end{gathered} \tag{П1.4}$$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial\alpha}(h_2 h_3 \tau_{13}) + \frac{\partial}{\partial\beta}(h_3 h_1 \tau_{23}) + \frac{\partial}{\partial\gamma}(h_1 h_2 \sigma_3) + h_2 \frac{\partial h_3}{\partial\alpha}\tau_{13} + \\
+ h_1 \frac{\partial h_3}{\partial\beta}\tau_{23} - h_2 \frac{\partial h_1}{\partial\gamma}\sigma_1 - h_1 \frac{\partial h_2}{\partial\gamma}\sigma_2 + h_1 h_2 h_3 G_3 = 0.
\end{gathered} \tag{П1.5}$$

❒ Закон Гука:

* Анизотропное тело:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{1}{E_1}(\sigma_1 - \mu_{12}\sigma_2 - \mu_{13}\sigma_3 - \mu_{14}\tau_{12} - \mu_{15}\tau_{23} - \mu_{16}\tau_{31});\\
\varepsilon_2 &= \frac{1}{E_2}(-\mu_{21}\sigma_1 + \sigma_2 - \mu_{23}\sigma_3 - \mu_{24}\tau_{12} - \mu_{25}\tau_{23} - \mu_{26}\tau_{31});\\
\varepsilon_3 &= \frac{1}{E_3}(-\mu_{31}\sigma_1 - \mu_{32}\sigma_2 + \sigma_3 - \mu_{34}\tau_{12} - \mu_{35}\tau_{23} - \mu_{36}\tau_{31});\\
\gamma_{12} &= \frac{1}{G_1}(-\mu_{41}\sigma_1 - \mu_{42}\sigma_2 - \mu_{43}\sigma_3 + \tau_{12} - \mu_{45}\tau_{23} - \mu_{46}\tau_{31});\\
\gamma_{23} &= \frac{1}{G_2}(-\mu_{51}\sigma_1 - \mu_{52}\sigma_2 - \mu_{53}\sigma_3 - \mu_{54}\tau_{12} + \tau_{23} - \mu_{56}\tau_{31});\\
\gamma_{31} &= \frac{1}{G_3}(-\mu_{61}\sigma_1 - \mu_{62}\sigma_2 - \mu_{63}\sigma_3 - \mu_{64}\tau_{12} - \mu_{65}\tau_{23} + \tau_{31}).
\end{aligned}\right\} \tag{П1.6}$$

- Ортотропное тело:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{1}{E_1}\left(\sigma_1 - \mu_{12}\sigma_2 - \mu_{13}\sigma_3\right);\\
\varepsilon_2 &= \frac{1}{E_2}\left(\sigma_2 - \mu_{21}\sigma_1 - \mu_{23}\sigma_3\right);\\
\varepsilon_3 &= \frac{1}{E_3}\left(\sigma_3 - \mu_{31}\sigma_1 - \mu_{32}\sigma_2\right);\\
\gamma_{12} &= \frac{1}{G_1}\tau_{12};\\
\gamma_{23} &= \frac{1}{G_2}\tau_{23};\\
\gamma_{31} &= \frac{1}{G_3}\tau_{31}.
\end{aligned}\right\} \tag{П1.7}$$

- Изотропное тело:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \mu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)\right);\\
\varepsilon_2 &= \frac{1}{E}\left(\sigma_2 - \mu\left(\sigma_1 + \sigma_3\right)\right);\\
\varepsilon_3 &= \frac{1}{E_3}\left(\sigma_3 - \mu\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)\right);\\
\gamma_{12} &= \frac{1}{G}\tau_{12};\\
\gamma_{23} &= \frac{1}{G}\tau_{23};\\
\gamma_{31} &= \frac{1}{G}\tau_{31}.
\end{aligned}\right\} \tag{П1.8}$$

Приложение 2

Формулы преобразования координат

П2.1. Цилиндрические координаты

Поставим в соответствие криволинейным координатам следующие независимые переменные цилиндрической системы координат:

$$\alpha = r\,; \quad \beta = \varphi\,; \quad \gamma = z\,.$$

Тогда формулы перехода от декартовых координат к цилиндрическим запишутся в следующем виде:

$$x = r\cos\varphi\,; \qquad r \geq 0\,; \qquad h_1 = 1\,;$$

$$y = r\sin\varphi\,; \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\,; \qquad h_2 = r\,;$$

$$z = z\,; \qquad -\infty < z < \infty\,; \qquad h_3 = 1\,.$$

Уравнения координатных поверхностей, пересечение которых образует координатные кривые, запишутся так:

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{(цилиндры);}$$

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi \quad \text{(плоскости);}$$

$$z = \mathrm{const} \quad \text{(плоскости).}$$

П2.2. Сферические координаты

Криволинейные координаты:

$$\alpha = R\,; \quad \beta = \varphi\,; \quad \gamma = \theta\,.$$

Формулы перехода от декартовых координат к сферическим:

$$x = R\sin\theta\cos\varphi\,; \quad R \ge 0\,; \quad h_1 = 1\,;$$

$$y = R\sin\theta\sin\varphi\,; \quad 0 \le \varphi \le 2\pi\,; \quad h_2 = R\sin\theta\,;$$

$$z = R\cos\theta\,; \quad 0 \le \theta \le 2\pi\,; \quad h_3 = R\,.$$

Координатные поверхности, пересечение которых образует координатные кривые:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{(сферы);}$$

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\varphi \quad \text{(плоскости);}$$

$$x^2 + y^2 = z^2\,\mathrm{tg}^2\theta \quad \text{(конуса).}$$

П2.3. Параболические координаты

Криволинейные координаты:

$$\alpha = \xi\,; \quad \beta = \eta\,; \quad \gamma = \varphi\,.$$

Формулы перехода от декартовых координат к параболическим:

$$x = \xi\eta\cos\varphi\,; \quad \xi \ge 0\,; \quad h_1 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}\,;$$

$$y = \xi\eta\sin\varphi\,; \quad \eta \ge 0\,; \quad h_2 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}\,;$$

$$z = \frac{1}{2}\left(\xi^2 - \eta^2\right); \quad 0 < \varphi < 2\pi\,; \quad h_3 = \xi\eta\,.$$

Координатные поверхности, пересечение которых образует координатные кривые:

$$x^2 + y^2 = -2\xi^2\left(z - \frac{\xi^2}{2}\right) \quad \text{(параболоиды);}$$

$$x^2 + y^2 = -2\eta^2\left(z + \frac{\eta^2}{2}\right) \quad \text{(параболоиды);}$$

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\varphi \quad \text{(плоскости).}$$

П2.4. Эллиптические координаты

Криволинейные координаты:

$$\alpha=\xi; \quad \beta=\eta; \quad \gamma=\varphi.$$

Формулы перехода от декартовых координат к параболическим:

$$x=\sqrt{\left(1-\eta^2\right)\left(\xi^2-1\right)}\cos\varphi; \quad 1\le \xi<\infty; \quad h_1=\sqrt{\frac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2-1}};$$

$$y=\sqrt{\left(1-\eta^2\right)\left(\xi^2-1\right)}\sin\varphi; \quad -1\le\eta\le1; \quad h_2=\sqrt{\frac{\xi^2-\eta^2}{1-\eta^2}};$$

$$z=\xi\eta; \quad 0\le\varphi\le2\pi; \quad h_3=\sqrt{\left(1-\eta^2\right)\left(\xi^2-1\right)}.$$

Координатные поверхности, пересечение которых образует координатные кривые:

$$x^2+y^2=-2\xi^2\left(z-\frac{\xi^2}{2}\right) \quad \text{(эллипсоид);}$$

$$\frac{z^2}{\eta^2}-\frac{x^2}{1-\eta^2}-\frac{y^2}{1-\eta^2}=1 \quad \text{(двухсторонний гиперболоид);}$$

$$y=x\,\mathrm{tg}\,\varphi \quad \text{(плоскости).}$$

П2.5. Эллиптические цилиндрические координаты

Криволинейные координаты:

$$\alpha=\xi; \quad \beta=\eta; \quad \gamma=z.$$

Формулы перехода от декартовых координат к эллиптико-цилиндрическим:

$$x=\cosh\xi\,\cos\eta; \quad \xi\ge0; \quad h_1=\sqrt{\sinh^2\xi+\sin^2\eta};$$

$$y=\sinh\xi\,\sin\eta; \quad 0\le\eta\le2\pi; \quad h_1=\sqrt{\sinh^2\xi+\sin^2\eta};$$

$$z=z; \quad -\infty<z<\infty; \quad h_3=1.$$

Координатные поверхности, пересечение которых образует координатные кривые:

$$\frac{x^2}{\cosh^2\xi}+\frac{y^2}{\sinh^2\eta}=1 \quad \text{(эллиптические цилиндры);}$$

$$\frac{x^2}{\cos^2\eta}-\frac{y^2}{\sin^2\eta}=1 \quad \text{(гиперболические цилиндры);}$$

$$z=\mathrm{const} \quad \text{(плоскости).}$$

Приложение 3

Уравнения линейной теории упругости в цилиндрической системе координат

❒ Геометрические уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_r = \frac{\partial w}{\partial r}; && \gamma_{r\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r};\\
&\varepsilon_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{w}{r}; && \gamma_{\varphi z} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi};\\
&\varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z}; && \gamma_{rz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r}.
\end{aligned}\right\} \tag{П3.1}$$

❒ Уравнения равновесия:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + G_r = 0;\\
&\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\varphi}}{r} + G_\varphi = 0;\\
&\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + G_z = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{П3.2}$$

❒ Физические уравнения для изотропного тела:

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_r = \frac{1}{E}\big(\sigma_r - \mu(\sigma_z + \sigma_\varphi)\big); && \gamma_{r\varphi} = \frac{1}{G}\tau_{r\varphi};\\
&\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E}\big(\sigma_\varphi - \mu(\sigma_r + \sigma_z)\big); && \gamma_{\varphi z} = \frac{1}{G}\tau_{\varphi z};\\
&\varepsilon_z = \frac{1}{E}\big(\sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_\varphi)\big); && \gamma_{rz} = \frac{1}{G}\tau_{rz}.
\end{aligned}\right\} \tag{П3.3}$$

Приложение 4

Основные соотношения для расчета стержней и балок

❒ Брусья:

- Геометрические уравнения:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du_0}{dx} - z\frac{d^2 w_0}{dx^2} - y\frac{d^2 v_0}{dx^2}\,; \tag{П4.1}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0\,; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial y} = 0\,; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0\,; \tag{П4.2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{dv_0}{dx} + \frac{dv_0}{dx} = 0\,; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{dw_0}{dx} + \frac{dw_0}{dx} = 0\,; \tag{П4.3}$$

$$u(x, y, z) = u_0(x) - z\frac{dw_0}{dx} - y\frac{dv_0}{dx}\,. \tag{П4.4}$$

- Уравнения равновесия:

$$\frac{dN_x}{dx} = -q_x(x)\,; \tag{П4.5}$$

$$\frac{dM_z}{dx} + Q_y = 0\,; \tag{П4.6}$$

$$\frac{dM_y}{dx} - Q_z = 0\,; \tag{П4.7}$$

$$\frac{dQ_y}{dx} + q_y = 0\,; \tag{П4.8}$$

$$\frac{dQ_z}{dx} + q_z = 0\,. \tag{П4.9}$$

- Физические уравнения:

$$N_x = \varepsilon_x^0 \int\limits_F E dF = B_{11} \varepsilon_x^0 ; \qquad (\text{П}4.10)$$

$$M_y(x) = \varepsilon_x^0 \int\limits_F EzdF + \kappa_2(x) \int\limits_F Ez^2 dF - \kappa_3(x) \int\limits_F yzEdF = \\ = A_{22}\kappa_2(x) - A_{23}\kappa_3(x); \qquad (\text{П}4.11)$$

$$M_z(x) = -\varepsilon_x^0 \int\limits_F EydF - \kappa_2(x) \int\limits_F EyzdF + \kappa_3(x) \int\limits_F y^2 EdF = \\ = -A_{23}\kappa_2(x) + A_{33}\kappa_3(x). \qquad (\text{П}4.12)$$

- Напряжения в сечении бруса:

$$\sigma_x = E\left(\frac{N_x}{B_{11}} + z\frac{A_{33}M_y + A_{23}M_z}{\Delta} - y\frac{A_{23}M_y + A_{22}M_z}{\Delta} \right). \qquad (\text{П}4.13)$$

- Уравнения в перемещениях:

$$\frac{d}{dx}\left(B_{11}\frac{du}{dx} \right) = -q_x(x); \qquad (\text{П}4.14)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(A_{33}\frac{d^2 v_0}{dx^2} + A_{23}\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) = q_y(x); \qquad (\text{П}4.15)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(A_{23}\frac{d^2 v_0}{dx^2} + A_{22}\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) = q_z(x). \qquad (\text{П}4.16)$$

❒ Стержни:

- Относительная деформация:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 = \frac{du_0}{dx}. \qquad (\text{П}4.17)$$

- Осевое внутреннее усилие:

$$N_x(x) = B_{11}\varepsilon_x^0(x); \qquad (\text{П}4.18)$$

$$B_{11} = \sum_{i=1}^{n} E^{(i)} \int\limits_{F_i} dF. \qquad (\text{П}4.19)$$

- Уравнение равновесия:

$$\frac{dN_x}{dx} = -q_x(x). \qquad (\text{П}4.20)$$

- Напряжения:

$$\sigma_x^{(i)} = E^{(i)} \frac{N_x(x)}{A_{11}}. \tag{П4.21}$$

- Уравнение для перемещения:

$$\frac{d}{dx} B_{11} \frac{du_0}{dx} = -q_x(x). \tag{П4.22}$$

❒ Балки:

- Относительная деформация в осевом направлении:

$$\varepsilon_x(x, y, z) = -y\kappa_3(x). \tag{П4.23}$$

- Внутреннее усилие и момент:

$$N_x(x) = 0; \tag{П4.24}$$

$$M_z(x) = \kappa_3(x)\left(\int_F Ey^2 dF\right) = A_{33}\kappa_3(x). \tag{П4.25}$$

- Уравнения равновесия:

$$\frac{dM_z}{dx} + Q_y = 0; \tag{П4.26}$$

$$\frac{dQ_y}{dx} = -q_y(x). \tag{П4.27}$$

- Поперечное перемещение:

$$\frac{d^2}{dx^2} A_{33} \frac{d^2 v_0}{dx^2} = q_y(x). \tag{П4.28}$$

- Напряжения:

$$\sigma_x^{(i)}(x, y, z) = -E^{(i)} y \frac{M_z}{A_{33}}; \tag{П4.29}$$

$$A_{33} = \sum_{i=1}^{n} E^{(i)} \int_{F_i} y^2 dF. \tag{П4.30}$$

Приложение 5

Основные соотношения теории тонких пластинок

❒ Уравнение Софи Жермен в декартовой системе координат:

$$D\nabla^4 w = p(x, y)\,. \tag{П5.1}$$

❒ Бигармонический оператор:

* в декартовой системе координат:

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4};$$

* в полярной системе координат:

$$\nabla^4 w = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right). \tag{П5.2}$$

Если перемещение симметрично относительно оси симметрии и производные по углу φ равны нулю, то оператор записывается в следующем виде:

$$\nabla^4 w = \frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{dw}{dr}\,. \tag{П5.3}$$

❒ Эллиптическая пластинка:

* Перемещение:

$$w = \frac{pa^4 b^4}{D\left(24b^4 + 16a^2 b^2 + 24a^4\right)}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2; \tag{П5.4}$$

* Изгибающий момент в центре и на конце большей полуоси:

$$\left(M_x\right)_{x=0,\ y=0} = 4CD\left(\frac{1}{a^2} + \frac{\mu}{b^2}\right); \tag{П5.5}$$

$$\left(M_x\right)_{x=a,\ y=0} = -\frac{8CD}{a^2}. \tag{П5.6}$$

- Изгибающий момент в центре и на конце меньшей полуоси:

$$\left(M_y\right)_{x=0,\ y=0} = 4CD\left(\frac{1}{b^2} + \frac{\mu}{a^2}\right); \tag{П5.7}$$

$$\left(M_y\right)_{x=0,\ y=b} = -\frac{8CD}{b^2}. \tag{П5.8}$$

❒ Круглая пластинка, защемленная по контуру:

- Перемещение:

$$w = \frac{p}{64D}\left(a^2 - x^2 - y^2\right)^2 = \frac{p}{64D}\left(a^2 - r^2\right)^2. \tag{П5.9}$$

- Напряжения в центре пластинки:

$$\sigma_x = \pm\frac{3p}{8}\left(\frac{a}{\delta}\right)^2 (1+\mu); \tag{П5.10}$$

$$\sigma_y = \pm\frac{3p}{8}\left(\frac{a}{\delta}\right)^2 (1+\mu); \tag{П5.11}$$

$$\tau_{xy} = 0. \tag{П5.12}$$

- Напряжения на контуре пластинки:

$$\sigma_x = \pm\frac{3}{4}p\left(\frac{a}{\delta}\right)^2; \tag{П5.13}$$

$$\sigma_y = \pm\frac{3}{4}\mu p\left(\frac{a}{\delta}\right)^2; \tag{П5.14}$$

$$\tau_{xy} = 0. \tag{П5.15}$$

❒ Круглая пластинка с шарнирным закреплением контура:

- Перемещение:

$$w = \frac{p\left(a^2 - r^2\right)}{64D}\left(\frac{5+\mu}{1+\mu}a^2 - r^2\right). \tag{П5.16}$$

- Максимальное напряжение:

$$\left(\sigma_1\right)_{\max} = \left(\sigma_2\right)_{\max} = \frac{6M_1}{\delta^2} = \frac{3(3+\mu)pa^2}{8\delta^2}. \tag{П5.17}$$

* Напряжения на контуре:

$$\left(\sigma_1\right)_{r=a} = 0\,; \qquad (\text{П5.18})$$

$$\left(\sigma_2\right)_{r=a} = \frac{3}{4}(1-\mu)\,pa^2\,. \qquad (\text{П5.19})$$

❒ Пластинка с отверстием, нагруженная краевыми моментами:

* Перемещение:

$$w = \frac{\left(a^2 M_a - b^2 M_b\right)}{2D(1+\mu)\left(a^2-b^2\right)}\left(a^2-r^2\right) - \frac{a^2 b^2 \left(M_a - M_b\right)}{D(1-\mu)\left(a^2-b^2\right)}\ln\frac{r}{a}\,. \qquad (\text{П5.20})$$

* Момент на контуре равен нулю:

$$w = -\frac{b^2 M_b}{2D(1+\mu)\left(a^2-b^2\right)}\left(a^2-r^2\right) + \frac{a^2 b^2 M_b}{D(1-\mu)\left(a^2-b^2\right)}\ln\frac{r}{a}\,. \qquad (\text{П5.21})$$

* Момент в отверстии равен нулю:

$$w = \frac{a^2 M_a}{2D(1+\mu)\left(a^2-b^2\right)}\left(a^2-r^2\right) - \frac{a^2 b^2 M_a}{D(1-\mu)\left(a^2-b^2\right)}\ln\frac{r}{a}\,. \qquad (\text{П5.22})$$

❒ Перемещения в прямоугольной пластинке:

$$w = \frac{49P}{128D\left(7\left(a^4-b^4\right)+4a^2b^2\right)}\left(x^2-a^2\right)\left(y^2-b^2\right). \qquad (\text{П5.23})$$

Приложение 6

Уравнения теории тонких оболочек в криволинейной системе координат

❒ Коэффициенты Ламе:

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2}\,; \tag{П6.1}$$

$$h_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2}\,. \tag{П6.2}$$

❒ Кривизна поверхности:

$$K = \frac{-\left(\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \overline{n}}{\partial \alpha}\right) d\alpha^2 - 2\left(\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \overline{n}}{\partial \beta}\right) d\alpha d\beta - \left(\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \overline{n}}{\partial \beta}\right) d\beta^2}{ds^2}\,; \tag{П6.3}$$

$$K = -\frac{D d\alpha^2 + 2D' d\alpha\, d\beta + D'' d\beta^2}{E d\alpha^2 + 2F d\alpha\, d\beta + G d\beta^2}\,. \tag{П6.4}$$

❒ Производные векторов единичного триэдра:

$$\frac{\partial \overline{n}}{\partial \alpha} = \frac{h_2}{R_1} \overline{\tau}_1\,; \tag{П6.5}$$

$$\frac{\partial \overline{n}}{\partial \beta} = \frac{h_2}{R_2} \overline{\tau}_2\,; \tag{П6.6}$$

$$\frac{\partial \overline{\tau}_1}{\partial \alpha} = -\frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \beta} \overline{\tau}_2 - \frac{h_1}{R_1} \overline{n}\,; \tag{П6.7}$$

$$\frac{\partial \overline{\tau}_1}{\partial \beta} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \alpha} \overline{\tau}_2\,; \tag{П6.8}$$

$$\frac{\partial \bar{\tau}_2}{\partial \alpha} = \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial \beta}\bar{\tau}_1; \tag{П6.9}$$

$$\frac{\partial \bar{\tau}_2}{\partial \beta} = -\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha}\bar{\tau}_1 - \frac{h_2}{R_2}\bar{n}. \tag{П6.10}$$

❒ Физические уравнения:

- Многослойная оболочка:

$$N_1 = B_{11}\varepsilon_1^0 + B_{12}\varepsilon_2^0 + A_{11}\kappa_1 + A_{12}\kappa_2; \tag{П6.11}$$

$$N_2 = B_{22}\varepsilon_2^0 + B_{21}\varepsilon_1^0 + A_{22}\kappa_2 + A_{21}\kappa_1; \tag{П6.12}$$

$$T_{12} = B_{33} + \gamma_{12}^0 + A_{33}\kappa_{12}; \tag{П6.13}$$

$$M_1 = A_{11}\varepsilon_1^0 + A_{12}\varepsilon_2^0 + D_{11}\kappa_1 + D_{12}\kappa_2; \tag{П6.14}$$

$$M_2 = A_{22}\varepsilon_2^0 + A_{21}\varepsilon_1^0 + D_{22}\kappa_2 + D_{21}\kappa_1; \tag{П6.15}$$

$$H = M_{12} = M_{21} = A_{33}\gamma_{12}^0 + 2D_{33}\kappa_{12}, \tag{П6.16}$$

где:

$$B_{11} = \sum_i \int_\delta \frac{E_1^i}{\left(1-\mu_1^i\mu_2^i\right)}dz; \quad B_{22} = \sum_i \int_\delta \frac{E_2^i}{\left(1-\mu_1^i\mu_2^i\right)}dz; \tag{П6.17}$$

$$B_{12} = \sum_i \int_\delta \frac{E_1^i\mu_2^i}{\left(1-\mu_1^i\mu_2^i\right)}dz; \quad B_{21} = \sum_i \int_\delta \frac{E_2^i\mu_1^i}{\left(1-\mu_1^i\mu_2^i\right)}dz; \tag{П6.18}$$

$$A_{11} = \sum_i \int_\delta \frac{E_1^i z}{\left(1-\mu_1^i\mu_2^i\right)}dz; \quad A_{22} = \sum_i \int_\delta \frac{E_2^i z}{\left(1-\mu_1^i\mu_2^i\right)}dz; \tag{П.6.19}$$

$$A_{12} = \sum_i \int_\delta \frac{E_1^i\mu_2^i z}{\left(1-\mu_1^i\mu_2^i\right)}dz; \quad A_{21} = \sum_i \int_\delta \frac{E_2^i\mu_1^i z}{\left(1-\mu_1^i\mu_2^i\right)}dz; \tag{П.6.20}$$

$$D_{11} = \sum_i \int_\delta \frac{E_1^i z^2}{\left(1-\mu_1^i\mu_2^i\right)}dz; \quad D_{22} = \sum_i \int_\delta \frac{E_2^i z^2}{\left(1-\mu_1^i\mu_2^i\right)}dz; \tag{П6.21}$$

$$D_{12} = \sum_i \int_\delta \frac{E_1^i\mu_2^i z^2}{\left(1-\mu_1^i\mu_2^i\right)}dz; \quad D_{21} = \sum_i \int_\delta \frac{E_2^i\mu_1^i z^2}{\left(1-\mu_1^i\mu_2^i\right)}dz; \tag{П6.22}$$

$$B_{33} = \sum_i \int_\delta G_i dz\,; \quad A_{33} = \sum_i \int_\delta G^i z dz\,; \quad D_{33} = \sum_i \int_\delta G^i z^2 dz\,. \tag{П6.23}$$

- Изотропная однослойная оболочка:

$$N_1 = \frac{E\delta}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_1^0 + \mu\varepsilon_2^0\right); \tag{П6.24}$$

$$N_2 = \frac{E\delta}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_2^0 + \mu\varepsilon_1^0\right); \tag{П6.25}$$

$$M_1 = D\left(\kappa_1 + \mu\kappa_2\right); \tag{П6.26}$$

$$M_2 = D\left(\kappa_2 + \mu\kappa_1\right); \tag{П6.27}$$

$$T_{12} = T_{21} = G\delta\gamma_{12}^0; \tag{П6.28}$$

$$H = G\left(\frac{\delta^3}{3}\right)\kappa_{12}\,. \tag{П6.29}$$

- Ортотропная однослойная оболочка:

$$N_1 = \frac{E_1\delta}{\left(1-\mu_1\mu_2\right)}\left(\varepsilon_1^0 + \mu_2\varepsilon_2^0\right); \tag{П6.30}$$

$$N_2 = \frac{E_2\delta}{\left(1-\mu_1\mu_2\right)}\left(\varepsilon_2^0 + \mu_1\varepsilon_1^0\right); \tag{П6.31}$$

$$M_1 = \frac{E_1\delta^3}{12\left(1-\mu_1\mu_2\right)}\left(\kappa_1 + \mu_2\kappa_2\right); \tag{П6.32}$$

$$M_2 = \frac{E_2\delta^3}{12\left(1-\mu_1\mu_2\right)}\left(\kappa_2 + \mu_1\kappa_1\right); \tag{П6.33}$$

$$T_{12} = G\delta\gamma_{12}^0; \tag{П6.34}$$

$$H = G\left(\frac{\delta^3}{3}\right)\kappa_{12}\,. \tag{П6.35}$$

- Вафельная оболочка:

$$N_1 = \frac{E\delta}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_1^0 + \mu\varepsilon_2^0\right) + \frac{EF_1}{l_1}\varepsilon_1^0 + \frac{ES_1}{l_1}\kappa_1; \tag{П6.36}$$

$$N_2 = \frac{E\delta}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_2^0 + \mu\varepsilon_1^0\right) + \frac{EF_2}{l_2}\varepsilon_2^0 + \frac{ES_2}{l_2}\kappa_2; \tag{П6.37}$$

$$T_{12} = G\delta\gamma_{12}^0; \tag{П6.38}$$

$$M_1 = \frac{ES_1}{l_1}\varepsilon_1^0 + D\left(\kappa_1 + \mu\kappa_2\right) + \frac{EJ_1}{l_1}\kappa_1; \tag{П6.39}$$

$$M_2 = \frac{ES_2}{l_2}\varepsilon_2^0 + D\left(\kappa_2 + \mu\kappa_1\right) + \frac{EJ_2}{l_2}\kappa_2; \tag{П6.40}$$

$$H = G\frac{\delta^3}{6}\kappa_{12} = D\left(1-\mu\right)\kappa_{12}. \tag{П6.41}$$

❒ Уравнения равновесия:

$$\frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial h_2 N_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial h_1 T_{12}}{\partial\beta} + T_{12}\frac{\partial h_1}{\partial\beta} - N_2\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}\right) + \frac{Q_1}{R_1} + q_1 = 0; \tag{П6.42}$$

$$\frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial h_2 T_{12}}{\partial\alpha} + \frac{\partial h_1 N_2}{\partial\beta} + T_{12}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha} - N_1\frac{\partial h_1}{\partial\beta}\right) + \frac{Q_2}{R_2} + q_2 = 0; \tag{П6.43}$$

$$\frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial Q h_2}{\partial\alpha} + \frac{\partial Q_2 h_1}{\partial\beta}\right) - \frac{N_1}{R_1} - \frac{N_2}{R_2} + q_n = 0. \tag{П6.44}$$

❒ Геометрические уравнения:

$$\varepsilon_1^0 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial u_0}{\partial\alpha} + \frac{v_0}{h_1 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\beta} + \frac{w_0}{R_1}; \tag{П6.45}$$

$$\varepsilon_2^0 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial v_0}{\partial\beta} + \frac{u_0}{h_1 h_2}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha} + \frac{w_0}{R_2}; \tag{П6.46}$$

$$\gamma_{12}^0 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial u_0}{\partial\beta} - \frac{v_0}{h_1 h_2}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha} + \frac{1}{h_1}\frac{\partial v_0}{\partial\alpha} - \frac{u_0}{h_1 h_2}\frac{dh_1}{\partial\beta}; \tag{П6.47}$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u_0}{R_1} - \frac{1}{h_1}\frac{\partial w_0}{\partial\alpha}\right) + \frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\alpha}\left(\frac{v_0}{R_2} - \frac{1}{h_2}\frac{\partial w_0}{\partial\beta}\right); \tag{П6.48}$$

$$\kappa_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{v_0}{R_2} - \frac{1}{h_2}\frac{\partial w_0}{\partial\beta}\right) + \frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}\left(\frac{u_0}{R_1} - \frac{1}{h_1}\frac{\partial w_0}{\partial\alpha}\right); \tag{П6.49}$$

$$\begin{aligned}\kappa_{12} = &-\frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial\beta}\frac{\partial w_0}{\partial\alpha} - \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}\frac{\partial w_0}{\partial\beta}\right) + \\ &+\frac{1}{R_1}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial u_0}{\partial\beta} - \frac{u_0}{h_1 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\beta}\right) + \frac{1}{R_2}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial v_0}{\partial\alpha} - \frac{v_0}{h_1 h_2}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}\right).\end{aligned} \tag{П6.50}$$

❒ Уравнения динамики оболочек:

$$\frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial N_1 h_2}{\partial \alpha}+\frac{\partial T_{12} h_1}{\partial \beta}+T_{12}\frac{\partial h_1}{\partial \beta}-N_2\frac{\partial h_2}{\partial \alpha}\right)+\frac{Q_1}{R_1}+q_1=\rho\delta\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}; \tag{П6.51}$$

$$\frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial h_2 T_{12}}{\partial \alpha}+\frac{\partial h_1 N_2}{\partial \beta}+T_{12}\frac{\partial h_1}{\partial \alpha}-N_1\frac{\partial h_1}{\partial \beta}\right)+\frac{Q_2}{R_2}-q_2=\rho\delta\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}; \tag{П6.52}$$

$$\frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial Q_1 h_2}{\partial \alpha}+\frac{\partial Q_2 h_1}{\partial \beta}\right)-\frac{N_1}{R_1}-\frac{N_2}{R_2}+q_n=\rho\delta\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}; \tag{П6.53}$$

$$Q_2-\frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial H h_2}{\partial \alpha}+\frac{\partial M_2 h_1}{\partial \beta}-M_1\frac{\partial h_1}{\partial \beta}+H\frac{\partial h_2}{\partial \alpha}\right)=\frac{\rho\delta^3}{12}\frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial t^2}; \tag{П6.54}$$

$$Q_1-\frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial M_1 h_2}{\partial \alpha}+\frac{\partial H h_1}{\partial \beta}+H\frac{\partial h_1}{\partial \beta}-M_2\frac{\partial h_2}{\partial \alpha}\right)=\frac{\rho\delta^3}{12}\frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial t^2}. \tag{П6.55}$$

❒ Функционал энергии оболочки:

$$\begin{aligned} I=\frac{1}{2}\int\limits_S\left(N_1\varepsilon_1^0+N_2\varepsilon_2^0+T_{12}\gamma_{12}^0+M_1\kappa_1+M_2\kappa_2+2H\kappa_{12}\right)dS-{}\\ -\int\limits_{S_1}\left(q_1 u_0+q_2 v_0+q_n w_0\right)dS. \end{aligned} \tag{П6.56}$$

Приложение 7

Безмоментные оболочки

❒ Уравнения безмоментных оболочек в криволинейных координатах:

- Уравнения равновесия:

$$\frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial h_2 N_1}{\partial \alpha}+\frac{\partial h_1 T_{12}}{\partial \beta}+T_{12}\frac{\partial h_1}{\partial \beta}-N_2\frac{\partial h_2}{\partial \alpha}\right)+q_1=0\,; \tag{П7.1}$$

$$\frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial h_2 T_{12}}{\partial \alpha}+\frac{\partial h_1 N_2}{\partial \beta}+T_{12}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha}-N_1\frac{\partial h_1}{\partial \beta}\right)+q_2=0\,; \tag{П7.2}$$

$$\frac{N_1}{R_1}+\frac{N_2}{R_2}=q_n\,. \tag{П7.3}$$

- Геометрические уравнения:

$$\varepsilon_1=\frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial \alpha}+\frac{v}{h_1 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial \beta}+\frac{w}{R_1}\,; \tag{П7.4}$$

$$\varepsilon_2=\frac{1}{h_2}\frac{\partial v}{\partial \beta}+\frac{u}{h_1 h_2}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha}+\frac{w}{R_2}\,; \tag{П7.5}$$

$$\gamma_{12}=\frac{1}{h_2}\frac{\partial u}{\partial \beta}-\frac{v}{h_1 h_2}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha}+\frac{1}{h_1}\frac{\partial v}{\partial \alpha}-\frac{u}{h_1 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial \beta}\,. \tag{П7.6}$$

- Физические уравнения для однослойной изотропной оболочки:

$$N_1=\frac{E\delta}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_1+\mu\varepsilon_2\right); \tag{П7.7}$$

$$N_2=\frac{E\delta}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_2+\mu\varepsilon_1\right); \tag{П7.8}$$

$$T_{12} = \frac{E\delta}{2(1+\mu)}\gamma_{12}. \qquad (\text{П7.9})$$

- Сфера, нагруженная постоянным давлением:
  - Перемещение:

$$w = \frac{p_0 R_{\text{сф}}^2}{2E\delta}(1-\mu). \qquad (\text{П7.10})$$

  - Напряжения:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = N_1/\delta = p_0 R_{\text{сф}}/(2\delta). \qquad (\text{П7.11})$$

- Цилиндр, нагруженный постоянным давлением:
  - Перемещение:

$$w = \frac{p_0 R^2}{E\delta}\left(1-\frac{\mu}{2}\right). \qquad (\text{П7.12})$$

  - Напряжения:

$$\sigma_1 = \frac{p_0 R}{2\delta}; \quad \sigma_2 = \frac{p_0 R}{\delta}. \qquad (\text{П7.13})$$

- Тор, нагруженный постоянным давлением:

$$\sigma_1 = \frac{p_0 a}{2\delta}\cdot\frac{(2b + a\sin\vartheta)}{(b + a\sin\vartheta)}; \quad \sigma_2 = \frac{p_0 a}{2\delta}. \qquad (\text{П7.14})$$

- Эллиптическое днище, нагруженное постоянным давлением:
  - Радиусы кривизны:

$$R_1 = \frac{\left(a^4 z^2 + b^4 y^2\right)^{3/2}}{a^4 b^4}; \quad R_2 = \frac{\left(a^4 z^2 + b^4 y^2\right)^{1/2}}{b^2}. \qquad (\text{П7.15})$$

  - Напряжения:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{\delta} = \frac{p_0}{2\delta}\sqrt{m^2 a^2 - r^2\left(m^2 - 1\right)}; \qquad (\text{П7.16})$$

$$\sigma_1 = \frac{N_{21}}{\delta} = \frac{p_0}{\delta}\sqrt{m^2 a^2 - r^2\left(m^2 - 1\right)}\left[1 - \frac{a^2 m^2}{2\left(a^2 m^2 - r^2\left(m^2 - 1\right)\right)}\right]. \qquad (\text{П7.17})$$

❒ Торосферическое днище, нагруженное постоянным давлением:

* Напряжения на сферическом участке:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{p_0 R_{\text{сф}}}{2\delta}. \qquad (\text{П}7.18)$$

* Напряжения на торовом участке:

$$\sigma_1 = \frac{p_0 R_2}{2\delta}; \quad \sigma_2 = \frac{p_0 R_2}{\delta}\left(1 - \frac{R_2}{2a}\right); \quad R_2 = \frac{r}{\sin\vartheta} = \frac{b + a\sin\vartheta}{\sin\vartheta}. \qquad (\text{П}7.19)$$

* Угол стыковки участков:

$$\sin\vartheta_0 = \frac{b}{R_{\text{сф}} - a}. \qquad (\text{П}7.20)$$

❒ Напряжения в полусферическом днище, заполненном жидкостью:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{\delta} = \frac{p_H R_{\text{сф}}}{2\delta} + \frac{\rho g n_x R_{\text{сф}}}{2\delta}\left(h + \frac{R_{\text{сф}}(2 - 3\cos\vartheta + \cos^3\vartheta)}{3\sin^2\vartheta}\right); \qquad (\text{П}7.21)$$

$$\sigma_2 = \frac{p_H R_{\text{сф}}}{2\delta} + \frac{\rho g n_x R_{\text{сф}}}{2\delta}\left(h - \frac{R_{\text{сф}}(2 - 3\cos\vartheta + \cos^3\vartheta)}{3\sin^2\vartheta}\right). \qquad (\text{П}7.22)$$

❒ Напряжения в эллиптическом днище, заполненном жидкостью:

$$\sigma_1 = \frac{p_H R_2}{2\delta} + \frac{\rho g n_x R_2}{2\delta}\left((h_0 + x) + \frac{2b^3 - 3b^2 x + x^3}{3\left(b^2 - x^2\right)}\right); \qquad (\text{П}7.23)$$

$$\sigma_2 = \frac{\left(p_H + \rho g n_x (h_0 + x)\right) R_2}{\delta}\left(1 - \frac{R_2}{2R_1}\right) - \frac{\rho g n_x R_2}{\delta} \cdot \frac{R_2}{2R_1} \cdot \frac{\left(2b^3 - 3b^2 x + x^3\right)}{3\left(b^2 - x^2\right)}. \qquad (\text{П}7.24)$$

❒ Напряжения в коническом днище, заполненном жидкостью:

$$\sigma_1 = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2\cos\alpha}\left(p_0 + \frac{1}{3}\rho g n_x (H + 2x)\right)(H - x); \qquad (\text{П}7.25)$$

$$\sigma_2 = \frac{p_h R_2}{\delta} = \frac{(p_0 + \rho g n_x x)(H - x)\operatorname{tg}\alpha}{\delta\cos\alpha}, \qquad (\text{П}7.26)$$

❒ Напряжения в торосферическом днище, заполненном жидкостью:

* Сферический участок днища:

$$\sigma_1 = \frac{p_0 R_{\text{сф}}}{2\delta} + \frac{\rho g n_x R_{\text{сф}}}{2\delta}\left(x + \frac{1}{3} R_{\text{сф}} \frac{\left(2 - 3\cos\vartheta + \cos^3\vartheta\right)}{\sin^2\vartheta} \right); \qquad (\text{П}7.27)$$

$$\sigma_2 = \frac{p_0 R_{\text{сф}}}{2\delta} + \frac{\rho g n_x R_{\text{сф}}}{2\delta}\left(x - \frac{1}{3} R_{\text{сф}} \frac{\left(2 - 3\cos\vartheta + \cos^3\vartheta\right)}{\sin^2\vartheta} \right). \qquad (\text{П}7.28)$$

* Торовый участок днища:

$$\sigma_1 = \frac{p_0 R_2}{2\delta} + \frac{\rho g n_x R_2}{2\delta}\left(x + \frac{V(\vartheta)}{\pi r^2} \right); \qquad (\text{П}7.29)$$

$$\sigma_2 = \frac{p_0 R_2}{\delta}\left(1 - \frac{R_2}{2a}\right) + \frac{\rho g n_x R_2}{\delta}\left[x\left(1 - \frac{R_2}{2a}\right) - \frac{R_2}{2a}\frac{V(\vartheta)}{\pi r^2} \right]; \qquad (\text{П}7.30)$$

$$V(\vartheta) = V_{\text{сф}}(\vartheta_0) + V_m(\vartheta_0) - V_m(\vartheta); \qquad (\text{П}7.31)$$

$$V_{\text{сф}}(\vartheta_0) = \frac{1}{3}\pi R_{\text{сф}}^3 \left(2 - 3\cos\vartheta_0 + \cos^3\vartheta_0\right); \qquad (\text{П}7.32)$$

$$V_m(\vartheta_0) = \pi a^2 \left[\cos\vartheta_0 \left(a + \frac{b^2}{a} + b\sin\vartheta_0 - \frac{a\cos^2\vartheta_0}{3} \right) + b\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_0 \right) \right]. \qquad (\text{П}7.33)$$

* Угол стыка сферической и торовой частей днища:

$$\vartheta_0 = \arcsin\left(\frac{b}{R_{\text{сф}} - a} \right). \qquad (\text{П}7.34)$$

Приложение 8

Изгиб цилиндрических оболочек

❒ Исходное уравнение:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\alpha^4 w = \frac{1}{D}\left(q_n - \frac{\mu N_1}{R}\right); \tag{П8.1}$$

$$w = e^{-\alpha x}\left(C_1 \cos\alpha x + C_2 \sin\alpha x\right) + e^{\alpha x}\left(C_3 \cos\alpha x + C_4 \sin\alpha x\right) + w_r\,. \tag{П8.2}$$

❒ Цилиндрическая оболочка, нагруженная краевой погонной силой и моментом:

$$w_0 = -\frac{1}{2\alpha^3 D}\left(\alpha M_0 \psi(\alpha x) + Q_0 \theta(\alpha x)\right); \tag{П8.3}$$

$$w_0' = \frac{1}{2\alpha^2 D}\left(2\alpha M_0 \theta(\alpha x) + Q_0 \varphi(\alpha x)\right); \tag{П8.4}$$

$$w_0'' = \frac{1}{\alpha D}\left(\alpha M_0 \varphi(\alpha x) + Q_0 \zeta(\alpha x)\right); \tag{П8.5}$$

$$w_0''' = \frac{1}{D}\left(2\alpha M_0 \zeta(\alpha x) - Q_0 \psi(\alpha x)\right), \tag{П8.6}$$

❒ Балочные функции:

$$\varphi(\alpha x) = e^{-\alpha x}\left(\cos\alpha x + \sin\alpha x\right); \tag{П8.7}$$

$$\psi(\alpha x) = e^{-\alpha x}\left(\cos\alpha x - \sin\alpha x\right); \tag{П8.8}$$

$$\theta(\alpha x) = e^{-\alpha x}\cos\alpha x\,; \tag{П8.9}$$

$$\xi(\alpha x) = e^{-\alpha x}\sin\alpha x\,. \tag{П8.10}$$

- Длина зоны краевого эффекта:

$$l_k = \frac{\pi}{\sqrt{3\left(1-\mu^2\right)}}\sqrt{R\delta} = 2,4\sqrt{R\delta} \quad \text{при } \mu = 0,3 . \tag{П8.11}$$

- Напряжения в области соединения с эллиптическим днищем:

$$\sigma_1 = \frac{p_0 R}{2\delta}\left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{1-\mu^2}} \cdot \frac{R^2}{b^2}\zeta(\alpha x)\right); \tag{П8.12}$$

$$\sigma_2 = \frac{p_0 R}{\delta}\left(1 - \frac{R^2}{2b^2} + \frac{R^2}{4b^2}\theta(\alpha x) \pm \mu\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{1-\mu^2}}\frac{R^2}{b^2}\zeta(\alpha x)\right). \tag{П8.13}$$

- Напряжения в области жесткой заделки:

$$\sigma_1 = \frac{p_0 R}{2\delta}\left(1 \mp \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{1-\mu^2}}\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\psi(\alpha x)\right); \tag{П8.14}$$

$$\sigma_2 = \frac{p_0 R}{2\delta}\left(1 - \left(1-\frac{\mu}{2}\right)\varphi(\alpha x) \mp \frac{\mu\sqrt{2}}{\sqrt{1-\mu^2}}\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\psi(\alpha x)\right). \tag{П8.15}$$

- Температурные напряжения в области продольного скачка температур на цилиндре:

$$\sigma_1 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{1-\mu^2}}E\beta(t_2 - t_1)\zeta(\alpha x); \tag{П8.16}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}E\beta(t_1 - t_2)\left(\theta(\alpha x) \pm \frac{\mu\sqrt{3}}{\sqrt{1-\mu^2}}\zeta(\alpha x)\right). \tag{П8.17}$$

- Напряжения в области соединения с плоским днищем:

$$\sigma_1 = \frac{p_0 R}{2\delta}\left[1 \mp 3,084\,\beta\left(\varphi(\alpha x) - \frac{1+\beta}{\beta}\zeta(\alpha x)\right)\right]; \tag{П8.18}$$

$$\begin{aligned}\sigma_2 = \frac{p_0 R}{\delta}\Bigg[1 + 0,85\,\beta\left(\varphi(\alpha x) - \frac{1+\beta}{\beta}\theta(\alpha x)\right) \mp \\ \mp 0,463\,\beta\left(\varphi(\alpha x) - \frac{1+\beta}{\beta}\zeta(\alpha x)\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{П8.19}$$

❒ Напряжения в области фланцевого соединения:

$$\sigma_1 = \frac{p_0 R}{2\delta}\left[1 \pm 12\beta\left(\varphi(\alpha x) + \frac{0,257-\beta}{\beta}\zeta(\alpha x)\right)\right]; \tag{П8.20}$$

$$\sigma_2 = \frac{p_0 R}{\delta}\left[1 - 3,3\beta\left(\psi(\alpha x) + \frac{0,257-\beta}{\beta}\theta(\alpha x)\right) \pm \right.$$
$$\left. \pm 1,8\beta\left(\varphi(\alpha x) + \frac{0,257-\beta}{\beta}\zeta(\alpha x)\right)\right]. \tag{П8.21}$$

❒ Напряжения в области распорного шпангоута:

$$\sigma_1 = \frac{p_0 R}{2\delta}\left(1 \mp 6,54\,\varphi(\alpha x) \pm 13,1\,\zeta(\alpha x)\right); \tag{П8.22}$$

$$\sigma_2 = \frac{p_0 R}{\delta}\left(1 - 1,766\psi(\alpha x) - 3,61\theta(\alpha x) \mp 0,96\varphi(\alpha x) \pm 1,97\zeta(\alpha x)\right). \tag{П8.23}$$

Приложение 9

Изгиб сферических оболочек

❒ Исходные уравнения:

$$\frac{d^2\vartheta_1}{ds^2}+\frac{\cos\vartheta}{r}\frac{d\vartheta_1}{ds}-\frac{\vartheta_1}{r^2}\left(\cos^2\vartheta+\mu\sin^2\vartheta\right)=\frac{Q_1}{D}\,; \tag{П9.1}$$

$$R_c^2\frac{d^2Q_1}{ds^2}+R_c\frac{dQ_1}{ds}\operatorname{ctg}\vartheta-Q_1\left(\operatorname{ctg}^2\vartheta-\mu\right)=-E\delta\vartheta_1\,. \tag{П9.2}$$

❒ Уравнение краевого эффекта:

$$\frac{d^4Q_1}{ds^4}+4\beta^4Q_1=0\,; \tag{П9.3}$$

$$\beta=\frac{\sqrt[4]{3\left(1-\mu^2\right)}}{\sqrt{R_c\delta}}\,; \tag{П9.4}$$

$$Q_1\left(\beta s\right)=e^{\beta s}\left(C_1\cos\beta s+C_2\sin\beta s\right)+e^{-\beta s}\left(C_3\cos\beta s+C_4\sin\beta s\right). \tag{П9.5}$$

❒ Сфера, нагруженная по контуру погонной силой и моментом:

- Решение уравнения:

$$Q_1=Q_0\psi\left(\beta\eta\right)+2\beta M_0\zeta\left(\beta\eta\right); \tag{П9.6}$$

$$Q_1'=2\beta\left(Q_0\theta\left(\beta\eta\right)-\beta M_0\psi\left(\beta\eta\right)\right); \tag{П9.7}$$

$$Q_1''=2\beta^2\left(Q_0\varphi\left(\beta\eta\right)-2\beta M_0\theta\left(\beta\eta\right)\right); \tag{П9.8}$$

$$Q_1'''=4\beta^3\left(Q_0\zeta\left(\beta\eta\right)-\beta M_0\varphi\left(\beta\eta\right)\right). \tag{П9.9}$$

* Расчетные соотношения:

$$N_1 = 0; \tag{П9.10}$$

$$N_2 = 2\beta R_c \left(Q_0 \theta(\beta\eta) - \beta M_0 \psi(\beta\eta) \right); \tag{П9.11}$$

$$M_1 = M_0 \varphi(\beta\eta) - \frac{Q_0}{\beta} \zeta(\beta\eta); \tag{П9.12}$$

$$M_2 = \mu M_1; \tag{П9.13}$$

$$\vartheta_1 = -\frac{2R_c^2\beta^2}{E\delta} \left(Q_0 \varphi(\beta\eta) - 2\beta M_0 \theta(\beta\eta) \right); \tag{П9.14}$$

$$H = \frac{2\beta R_c^2 \sin\vartheta}{E\delta} Q_0 \theta(\beta\eta) - \frac{2\beta^2 R_c^2 \sin\vartheta}{E\delta} M_0 \psi(\beta\eta); \tag{П9.15}$$

$$Q_0 = Q_H \sin\vartheta_0 . \tag{П9.16}$$

❒ Сферическое днище с жестко заделанной кромкой:

$$\sigma_1 = \frac{p_0 R_c}{2\delta} \left(1 \mp \sqrt{\frac{3(1-\mu)}{1+\mu}} \psi(\beta\eta) \right); \tag{П9.17}$$

$$\sigma_2 = \frac{p_0 R_c}{2\delta} \left(1 - (1-\mu)\varphi(\beta\eta) \mp \mu \sqrt{\frac{3(1-\mu)}{1+\mu}} \psi(\beta\eta) \right). \tag{П9.18}$$

❒ Сферическое днище с шарнирно закрепленной кромкой:

$$\sigma_1 = \frac{p_0 R_c}{2\delta} \left(1 \pm \sqrt{\frac{3(1-\mu)}{1+\mu}} \zeta(\beta\eta) \right); \tag{П9.19}$$

$$\sigma_2 = \frac{p_0 R_c}{2\delta} \left[1 - (1-\mu)\theta(\beta\eta) \pm \mu \sqrt{\frac{3(1-\mu)}{1+\mu}} \zeta(\beta\eta) \right]. \tag{П9.20}$$

Приложение 10

Пологие оболочки

❒ Исходное уравнение для цилиндрических оболочек:

$$D\nabla^8 w + \frac{E\delta}{R^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \nabla^4 q_n . \tag{П10.1}$$

❒ Обозначения операторов:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} ; \tag{П10.2}$$

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} . \tag{П10.3}$$

❒ Система уравнений относительно перемещений:

- Исходные уравнения:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{(1-\mu)}{2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{(1+\mu)}{2}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\mu}{R}\frac{\partial w}{\partial x} = 0 ; \tag{П10.4}$$

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{(1-\mu)}{2}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{(1+\mu)}{2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\mu}{R}\frac{\partial w}{\partial y} = 0 ; \tag{П10.5}$$

$$\frac{\delta^2}{12}\nabla^4 w + \frac{w}{R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\mu}{R}\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{\left(1-\mu^2\right)}{E\delta} q_n . \tag{П10.6}$$

- Внутренние погонные усилия и моменты:

$$N_1 = \frac{E\delta}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_1^0 + \mu\varepsilon_2^0\right) = \frac{E\delta}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \mu\frac{w}{R} + \mu\frac{\partial v_0}{\partial y}\right) ; \tag{П10.7}$$

$$N_2 = \frac{E\delta}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_2^0 + \mu\varepsilon_1^0\right) = \frac{E\delta}{1-\mu^2}\left(\frac{w}{R} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \mu\frac{\partial u_0}{\partial x}\right); \quad (П10.8)$$

$$T_{12} = \frac{E\delta}{2(1+\mu)}\gamma_{12}^0 = \frac{E\delta}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y}\right); \quad (П10.9)$$

$$M_1 = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right); \quad (П10.10)$$

$$M_2 = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right); \quad (П10.11)$$

$$H = -D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (П10.12)$$

- Напряжения:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{\delta} \pm \frac{6M_1}{\delta^2}; \quad (П10.13)$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{\delta} \pm \frac{6M_2}{\delta^2}. \quad (П10.14)$$

❒ Горизонтальный цилиндр, заполненный жидкостью:

- Перемещения:

$$u_0(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\cos\left(\frac{my}{R}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right); \quad (П10.15)$$

$$v_0(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}\sin\left(\frac{my}{R}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right); \quad (П10.16)$$

$$w(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}\cos\left(\frac{my}{R}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \quad (П10.17)$$

- Система уравнений для определения коэффициентов:

$$-A_{mn}\left[\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \frac{(1-\mu)}{2}\left(\frac{m}{R}\right)^2\right] + B_{mn}\frac{(1+\mu)}{2}\frac{n\pi}{l}\frac{m}{R} + C_{mn}\frac{\mu}{R}\frac{n\pi}{l} = 0; \quad (П10.18)$$

$$A_{mn}\frac{(1+\mu)}{2}\frac{n\pi}{l}\frac{m}{R} - B_{mn}\left[\left(\frac{m}{R}\right)^2 + \frac{(1-\mu)}{2}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right] + C_{mn}\frac{m}{R^2} = 0; \quad (П10.19)$$

$$A_{mn}\frac{n\pi}{l}\frac{m}{R}+B_{mn}\frac{m}{R^2}+C_{mn}\frac{1}{R^2}+C_{mn}\frac{h}{12}\left[\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2+\left(\frac{m}{R}\right)^2\right]^2=\frac{\left(1-\mu^2\right)}{E\delta}p_{mn}\,. \quad (\text{П}10.20)$$

❒ Напряжения в цилиндре в области отверстия:

* Осевое растяжение цилиндра:

$$\sigma_\varphi=\sigma'_\varphi\mp\sigma''_\varphi\,; \quad (\text{П}10.21)$$

$$\sigma_1=\frac{T_0}{\delta}\,;\quad \sigma_2=0\,; \quad (\text{П}10.22)$$

$$\sigma_r=\frac{T_0}{2\delta}(1+\cos 2\varphi)\,;\quad \sigma_\varphi=\frac{T_0}{2\delta}(1-\cos 2\varphi)\,;\quad \tau_{r\varphi}=-\frac{T_0}{2\delta}\sin 2\varphi\,; \quad (\text{П}10.23)$$

$$T_0=\frac{T}{2\pi R}\,. \quad (\text{П}10.24)$$

* Внутреннее давление:

$$\sigma'_\varphi=p_0\left[\frac{3}{2}+\cos 2\varphi+\pi\beta^2\left(1+\frac{5}{4}\cos 2\varphi\right)\right]; \quad (\text{П}10.25)$$

$$\sigma''_\varphi=-3p_0\frac{(1+\mu)}{4}\frac{r_0^2}{\delta^2}\left[4\left(1+\ln\frac{\gamma\beta}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{12}\frac{(7+5\mu)}{(3+\mu)}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{5}{k_1}\ln\frac{\gamma\beta}{\sqrt{2}}-\frac{1}{6}\frac{(13+23\mu)}{(3+\mu)}\right)\cos 2\varphi-\frac{\cos 4\varphi}{4k_1}\right]. \quad (\text{П}10.26)$$

* Кручение:

$$\sigma'_\varphi=-4\frac{\tau}{\delta}\left[\left(1+\sqrt{3\left(1-\mu^2\right)}\right)\frac{\pi r_0^2}{8R\delta}\right]\sin 2\varphi\,; \quad (\text{П}10.27)$$

$$\sigma''_\varphi=\frac{\tau}{\delta}\frac{(1+\mu)r_0^2}{4k_1R\delta}\left[2\left(3k_1-2-12\ln\frac{\gamma\beta}{\sqrt{2}}\right)\sin 2\varphi-3\sin 4\varphi\right]. \quad (\text{П}10.28)$$

* Контур отверстия, нагруженный изгибающим моментом:

$$\sigma'_\varphi=\frac{3(1+\mu)r_0^2}{2R\delta^3}M\left[4\ln\frac{\gamma\beta}{\sqrt{2}}+\left(4\ln\frac{\gamma\beta}{\sqrt{2}}+3\right)\cos 2\varphi\right]; \quad (\text{П}10.29)$$

$$\sigma''_\varphi=\frac{\pi r_0^2}{2\delta^2}M\left\{-\frac{2}{\pi r_0^2}+\frac{\beta^2}{r_0^2}\left[\frac{2(1+\mu)}{1-\mu}-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3+\mu}-\frac{3}{2}\frac{(1-\mu)}{(1+\mu)}\right)\cos 2\varphi\right]\right\}. \quad (\text{П}10.30)$$

❒ Напряжения в конусе в области отверстия:

- Кручение оболочки с отверстием:

$$\sigma'_\varphi = -\frac{T_0}{\delta}\left[\left(4 + 2\pi\beta^2\right)\sin 2\varphi - \frac{8}{\bar{\tau}_0}\sin 3\varphi + \frac{12}{\bar{\tau}_0^2}\sin 4\varphi\right]; \tag{П10.31}$$

$$\sigma''_\varphi = \frac{T_0}{\delta}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{3(3+\mu)^2}}\beta^2\left[2\left(\frac{3(3+\mu)}{1-\mu} - 2 - 12\ln\tilde{\gamma}\right)\sin 2\varphi - 3\sin 4\varphi\right], \tag{П10.32}$$

где:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3\left(1-\mu^2\right)}{4R^2\delta^2}}r_0; \tag{П10.33}$$

$$\tilde{\gamma} = \frac{\gamma\beta}{\sqrt{2}}. \tag{П10.34}$$

- Внутреннее давление:

$$\sigma_1 = \frac{p_0\tau}{2\delta}\operatorname{tg}\alpha_k; \quad \sigma_2 = \frac{p_0\tau}{\delta}\operatorname{tg}\alpha_k; \tag{П10.35}$$

$$\begin{aligned}\sigma'_\varphi = \frac{p_0R_0}{\delta}\Bigg[&\frac{3}{2} + \cos 2\varphi + \pi\beta^2\left(1 + \frac{5}{4}\cos 2\varphi\right) + \frac{1}{\bar{\tau}_0}\left(\frac{3}{2}\cos\varphi - \frac{1}{2}\cos 3\varphi\right) + \\ &+ \frac{1}{\bar{\tau}_0^2}\left(\frac{3}{8} - \frac{3}{4}\cos 2\varphi + \frac{3}{8}\cos 4\varphi - \frac{3}{32}\pi\beta^2\cos 2\varphi\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{П10.36}$$

- Переменное внутреннее давление:

$$\sigma_1 = \frac{1}{4}Q\tau^3\sin^2\alpha_k\operatorname{tg}\alpha_k; \quad \sigma_2 = Q\tau^3\sin^2\alpha_k\operatorname{tg}\alpha_k, \tag{П10.37}$$

где:

$$Q = \frac{\rho\omega^2}{2} \quad (\rho \text{ — плотность жидкости}); \tag{П10.38}$$

$$\begin{aligned}\sigma'_\varphi = \frac{QR_0^3}{8\delta}\cos^2\alpha_k \times \\ \times\left[2\left(5 - 6\cos^2\varphi\right) + \pi\beta^2\left(8 + 11\cos^2\varphi\right) + \frac{6}{\bar{\tau}_0}\left(\cos\varphi + 5\cos\varphi\right)\right].\end{aligned} \tag{П10.39}$$

- Растяжение оболочки с малым отверстием:

$$\sigma'_\varphi = \frac{T_0}{\delta}\left\{1-\left(2+\frac{\pi\beta^2}{2}\right)\cos 2\varphi + \frac{1}{\bar{\tau}_0}\left(3\cos 3\varphi - \cos\varphi\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4\bar{\tau}_0^2}\left[1+6\cos 2\varphi - 15\cos 4\varphi + \frac{\pi\beta^2}{4}\left(4+7\cos 2\varphi\right)\right]\right\}; \qquad (\text{П10.40})$$

$$\sigma''_\varphi = 1{,}5\beta^2\frac{T_0}{\delta}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{3(3+\mu)^2}}\times$$
$$\times\left[\frac{3+\mu}{1-\mu}+\left(\frac{1}{3}+\frac{3(3+\mu)}{1-\mu}+4\ln\frac{\gamma\beta}{\sqrt{2}}\right)\cos 2\varphi - \cos 4\varphi\right]. \qquad (\text{П10.41})$$

❒ Сферические днища со свободным отверстием:

- Коэффициент концентрации напряжений:

$$K = 1+\beta\frac{A\mp B}{C}; \qquad (\text{П10.42})$$

$$\beta = r_0\sqrt[4]{\frac{12\left(1-\mu^2\right)}{R_c^2\delta^2}}; \qquad (\text{П10.43})$$

$$A = \left[\beta\, her(\beta) - (1-\mu)\, hei'(\beta)\right] hei''(\beta) -$$
$$-\left[\beta\, hei(\beta) + (1-\mu)\, her'(\beta)\right] her''(\beta); \qquad (\text{П10.44})$$

$$B = \sqrt{3\left(1-\mu^2\right)}\left[her(\beta)\cdot her'(\beta) + hei(\beta)\cdot hei'(\beta)\right]; \qquad (\text{П10.45})$$

$$C = \beta\left[hei(\beta)\cdot her'(\beta) - her(\beta)\cdot hei'(\beta)\right] +$$
$$+(1-\mu)\left[\left(her'(\beta)\right)^2 + \left(hei'(\beta)\right)^2\right]. \qquad (\text{П10.46})$$

- Напряжения:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = K\frac{p_0 R_c}{2\delta}. \qquad (\text{П10.47})$$

Приложение 11

Многослойные оболочки

❒ Система уравнений для определения напряжений в двухслойном цилиндре:

$$\delta_1\sigma_1^{(1)} + \delta_2\sigma_1^{(2)} = \frac{p_0 R}{2}\left(1 - \frac{T}{\pi R^2 p_0}\right); \tag{П11.1}$$

$$\delta_1\sigma_2^{(1)} + \delta_2\sigma_2^{(2)} = p_0 R; \tag{П11.2}$$

$$\frac{1}{E_1^{(1)}}\sigma_1^{(1)} - \frac{1}{E^{(2)}}\sigma_1^{(2)} - \frac{\mu_2}{E_1^{(1)}}\sigma_1^{(1)} + \frac{\mu}{E^{(2)}}\sigma_2^{(2)} = 0; \tag{П11.3}$$

$$\frac{\mu_1}{E_2^{(1)}}\sigma_1^{(1)} + \frac{\mu}{E^{(2)}}\sigma_1^{(2)} + \frac{1}{E_2^{(1)}}\sigma_2^{(1)} - \frac{1}{E^{(2)}}\sigma_2^{(2)} = 0. \tag{П11.4}$$

❒ Напряжения в двухслойном конусе:

- Система уравнений:

$$\sigma_1^{(1)}\delta_1 + \sigma_1^{(2)}\delta_2 = \frac{\dfrac{Gn_x}{\pi r^2} - p(x) - \Delta p_a}{2\cos\psi} \equiv A; \tag{П11.5}$$

$$\sigma_2^{(1)}\delta_1 + \sigma_2^{(2)}\delta_2 = p_p R_2 \equiv B; \tag{П11.6}$$

$$\sigma_1^{(1)} - b\sigma_1^{(2)} - \sigma_2^{(1)} + a\sigma_2^{(2)} = 0; \tag{П11.7}$$

$$-\mu_1\sigma_1^{(1)} + a\sigma_1^{(2)} + \sigma_1^{(1)} - b\sigma_2^{(2)} = 0. \tag{П11.8}$$

- Решение системы уравнений:

$$\sigma_1^{(1)} = \frac{A - \sigma_1^{(2)}\delta_2}{\delta_1}\,; \tag{П11.9}$$

$$\sigma_2^{(1)} = \frac{B - \sigma_2^{(2)}\delta_2}{\delta_1}\,; \tag{П11.10}$$

$$\sigma_1^{(2)} = \frac{c_1 a_1 + b_1 c_2}{b_1^2 - a_1^2}\,; \tag{П11.11}$$

$$\sigma_2^{(2)} = \frac{c_1 b_1 + c_2 a_1}{b_1^2 - a_1^2}\,; \tag{П11.12}$$

$$a_1 = \frac{\delta_2}{\delta_1} + b\,; \tag{П11.13}$$

$$b_2 = \mu_2 \frac{\delta_2}{\delta_1} + a\,; \tag{П11.14}$$

$$c_1 = -\frac{A}{\delta_1} + \mu_1 \frac{B}{\delta_1}\,; \tag{П11.15}$$

$$c_2 = -\frac{B}{\delta_1} + \mu_2 \frac{A}{\delta_1}\,; \tag{П11.16}$$

$$a = \mu_2 \frac{E^{(1)}}{E^{(2)}}\,; \quad b = \frac{E^{(1)}}{E^{(2)}}\,. \tag{П11.17}$$

Приложение 12

Местная устойчивость

❒ Критические напряжения сжатого стержня:

- Формула Эйлера:

$$\sigma_{\text{э}} = \frac{C\pi^2 E}{\lambda^2}. \tag{П12.1}$$

- Критические напряжения за пределом упругости:

$$\sigma_{кр} = \sigma_b \frac{1+\nu}{1+\nu+\nu^2}; \quad \nu = \frac{\sigma_b}{\sigma_{\text{э}}}. \tag{П12.2}$$

- Стержень на упругом основании:

$$\sigma_{кр} = 2\sigma_{\text{э}}\sqrt{\bar{r}}; \quad \bar{r} = \frac{C_1}{EI}\left(\frac{l}{\pi}\right)^4. \tag{П12.3}$$

❒ Пластинки:

- Бесконечно длинная пластинка с шарнирным закреплением краев:

$$\sigma_{кр} \cong 3{,}28 \frac{E}{\left(1-\mu^2\right)}\left(\frac{\delta}{b}\right)^2. \tag{П12.4}$$

- Прямоугольная пластинка с шарнирным закреплением:

$$\sigma_{кр} = k\frac{\pi^2 D}{b^2\delta}. \tag{П12.5}$$

- Коэффициент закрепления пластинки (табл. П12.1):

Таблица П12.1. *Коэффициент k в зависимости от способа закрепления пластинки*

№	**Способ закрепления**	**k** $\left(\frac{a}{b} > 0{,}7\right)$
1	Шарнирное по обоим краям	4,0
2	Заделка по обеим кромкам	6,97
3	Один край шарнирный, а другой свободный	0,425
4	Один край защемлен, а другой свободный	1,28

- Подкрепленная панель:

$$\sigma_{кр} = \frac{2\pi^2\sqrt{D_1 D_2}}{b^2 h}\left(1 + \frac{D_3}{\sqrt{D_1 D_2}}\right); \tag{П12.6}$$

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12\left(1 - \mu_1 \mu_2\right)}; \tag{П12.7}$$

$$D_2 = \frac{E_2 h^3}{12\left(1 - \mu_1 \mu_2\right)}; \tag{П12.8}$$

$$D_3 = D_1 \mu_2 + 2D_k = D_2 \mu_1 + 2D_k; \tag{П12.9}$$

$$D_k = \frac{Gh^3}{12}. \tag{П12.10}$$

❒ Кольцо, нагруженное внешним давлением:

$$q_{кр} = \frac{\left(n^2 - 1\right) EI}{R^3}. \tag{П12.11}$$

❒ Критическая сила при осевом сжатии сильфона:

$$N_{кр} = C\frac{\pi^2 E h^3}{A_\varphi n l}. \tag{П12.12}$$

Приложение 13

Устойчивость цилиндрических оболочек

❒ Основное разрешающее уравнение:

$$D\nabla^8 w + \frac{E\delta}{R}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + N_1\nabla^4\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_2\nabla^4\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \tag{П13.1}$$

❒ Критические напряжения при осевом сжатии:

- Короткие оболочки $\left(\frac{l}{R} < 1{,}38\sqrt{\frac{\delta}{R}}\right)$:

$$\sigma_{1кр} = \frac{D\pi^2}{l^2\delta}. \tag{П13.2}$$

- Оболочки средней длины:

$$\sigma_{1кр} = kE\frac{\delta}{R}; \tag{П13.3}$$

$$k = 0{,}606 - 0{,}546\left[1 - \exp\left(\frac{1}{16}\sqrt{\frac{R}{\delta}}\right)\right] + 0{,}9\left(\frac{R}{l}\right)^2\left(\frac{\delta}{R}\right); \tag{П13.4}$$

$$k = \frac{1}{\pi}\sqrt[8]{\left(\frac{100\delta}{R}\right)^3}. \tag{П13.5}$$

- Длинные трубы:

$$\sigma_{1кр} = \frac{\pi^2 ER^2}{2l^2}. \tag{П13.6}$$

Критические напряжения при внешнем давлении:

* Короткие оболочки $\left(\frac{l}{R} < 1{,}38\sqrt{\frac{\delta}{R}}\right)$:

$$\sigma_{кр} = \frac{p_{кр} R}{8} = \frac{\pi^2}{3\left(1-\mu^2\right)} E \left(\frac{\delta}{l}\right)^2 . \tag{П13.7}$$

* Оболочки средней длины:

$$p_{кр} = \frac{\pi\sqrt{6}}{9\left(1-\mu^2\right)^{3/4}} E \left(\frac{\delta}{R}\right)^{5/4} ; \tag{П13.8}$$

$$p_{кр} = 0{,}92\, E \left(\frac{R}{l}\right)\left(\frac{\delta}{R}\right)^{5/2} ; \quad \mu = 0{,}3 . \tag{П13.9}$$

* Длинные оболочки:

$$p_{кр} = \frac{E}{4\left(1-\mu^2\right)} \left(\frac{\delta}{R}\right)^3 . \tag{П13.10}$$

❒ Условие устойчивости многослойной оболочки, сжатой осевой силой и внешним давлением:

$$N_1\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + N_2\left(\frac{m}{R}\right)^2 =$$

$$= C_{33} + C_{23}\left(\frac{C_{13}C_{12} - C_{11}C_{23}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}\right) + C_{13}\frac{C_{12}C_{23} - C_{13}C_{22}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2} ; \tag{П13.11}$$

$$C_{11} = B_{11}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + B_{33}\left(\frac{m}{R}\right)^2 ; \tag{П13.12}$$

$$C_{12} = \left(B_{12} + B_{33}\right)\frac{n\pi}{l}\frac{m}{R} ; \tag{П13.13}$$

$$C_{13} = \frac{B_{12}}{R}\frac{n\pi}{l} + A_{11}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^3 + \left(A_{21} + 2A_{33}\right)\frac{n\pi}{l}\left(\frac{m}{R}\right)^2 ; \tag{П13.14}$$

$$C_{22} = B_{33}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + B_{22}\left(\frac{m}{R}\right)^2 ; \tag{П13.15}$$

$$C_{23} = \left(A_{21} + 2A_{33}\right)\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \frac{m}{R} + \frac{B_{22}}{R}\frac{m}{R} + A_{22}\left(\frac{m}{R}\right)^3; \qquad (\text{П}13.16)$$

$$C_{33} = D_{11}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 + \left(4D_{33} + D_{12}\right)\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{m}{R}\right)^2 + D_{22}\left(\frac{m}{R}\right)^4 + \\ + \frac{2A_{21}}{R}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \frac{2A_{22}}{R}\left(\frac{m}{R}\right)^2 + \frac{B_{22}}{R^2}. \qquad (\text{П}13.17)$$

❒ Ортотропная и подкрепленная оболочка при осевом сжатии:

$$\sigma_{1кр} = \frac{1}{\sqrt{3\left(1-\mu_1\mu_2\right)}}\sqrt{E_1E_2}\,\frac{\delta}{R}; \quad \sigma_{1кр} = \frac{2}{R\delta}\sqrt{D_1B_2}\,; \qquad (\text{П}13.18)$$

$$D_1 = \frac{E_1\delta^3}{12\left(1-\mu_1\mu_2\right)}; \quad B_2 = E_2\delta. \qquad (\text{П}13.19)$$

❒ Ортотропная и подкрепленная оболочка при внешнем давлении:

$$p_{кр} = 4\frac{\pi R}{l}\left(\frac{B_1}{R}\right)^{1/4}\left(\frac{D_2}{3R^3}\right)^{3/4}. \qquad (\text{П}13.20)$$

❒ Условие устойчивости оболочки при осевом сжатии и внешнем давлении:

$$\frac{p}{p_{кр}} + \frac{\sigma_1}{\sigma_{1кр}} = 1. \qquad (\text{П}13.21)$$

Приложение 14

Потенциальная энергия тонкостенных конструкций

- Потенциальная энергия упругой деформации при растяжении стержня силой P_1 по оси X:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon_x \sigma_x dV = \frac{1}{2}\int_0^l \varepsilon_x E \varepsilon_x F dx = \frac{1}{2}\frac{EF}{l}\Delta l^2 = \frac{1}{2EF}P_1^2 = \frac{EFl}{2}\varepsilon_x^2 = \frac{Fl}{2E}\sigma_x^2, \tag{П14.1}$$

где $\Delta l = \varepsilon_x l$ — удлинение стержня длиной l и площадью F.

- Потенциальная энергия упругой деформации при изгибе прямой балки моментом $M_z(x)$:

$$U = \frac{EI}{2}\int_0^l y''^2(x)dx = \frac{1}{2EI}\int_0^l M_z^2(x)dx\,, \tag{П14.2}$$

где I — момент инерции сечения, а $y(x)$ — прогиб балки в направлении оси Y.

- Потенциальная энергия упругой деформации при изгибе тонкой пластинки:

$$U = \frac{D}{2}\int_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right]dS = \frac{1}{2D}\int_S \left[\left(1-\mu^2\right)\left(M_x^2 + M_y^2 - 2\mu M_x M_y\right) + \frac{2}{1-\mu}M_{xy}^2\right]dS, \tag{П14.3}$$

где:

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right); \quad M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right);$$

$$M_{xy} = -D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

- Потенциальная энергия упругой деформации тонкой оболочки:

$$U = \frac{1}{2}\int_S \left(N_1\varepsilon_1^0 + N_2\varepsilon_2^0 + T_{12}\gamma_{12}^0 + M_1\kappa_1 + M_2\kappa_2 + 2M_{12}\kappa_{12}\right)h_1 h_2 d\alpha d\beta, \quad (П14.4)$$

где S — поверхность оболочки.

- Потенциальная энергия упругой деформации тела:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}\right)dV; \quad (П14.5)$$

$$U = \frac{E}{2(1+\mu)}\int_V \left[\frac{\mu}{1-2\mu}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\right)^2 + \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2\right)\right]dV. \quad (П14.6)$$

- Полная потенциальная энергия деформируемой системы без учета массовых сил:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_V [\varepsilon]^T [E][\varepsilon]dV - \int_{S_\sigma} [f]^T [q]dS, \quad (П14.7)$$

где:

$$[\varepsilon] = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix}; \quad [E] = \begin{pmatrix} \frac{E}{1-\mu^2} & \frac{\mu E}{1-\mu^2} & \frac{\mu E}{1-\mu^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu E}{1-\mu^2} & \frac{E}{1-\mu^2} & \frac{\mu E}{1-\mu^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu E}{1-\mu^2} & \frac{\mu E}{1-\mu^2} & \frac{E}{1-\mu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{pmatrix};$$

$$[f] = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}; \quad [q] = \begin{pmatrix} F_{nx} \\ F_{ny} \\ F_{nz} \end{pmatrix}.$$

Предметный указатель

(окончание рубрики см. на стр. 518)