А. А. Черняк
Ж. А. Черняк
Ю. А. Доманова

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА НА БАЗЕ MATHCAD

ОБЩИЙ КУРС

- **Дифференциальное и интегральное исчисление**
  Пределы, производные, интегралы и их применение
- **Дифференциальные уравнения**
  Уравнения первого порядка, уравнения высших порядков, устойчивость решений
- **Ряды**
  Числовые, функциональные, степенные ряды и их приложения
- **Линейная алгебра и элементы аналитической геометрии**
  Матрицы, n-мерное векторное пространство, прямые и плоскости в n-мерном точечном пространстве
- **Интегрированная среда Mathcad**
  Демонстрация возможностей и применение в решении трудоемких математических задач

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

bhv

А. А. Черняк
Ж. А. Черняк
Ю. А. Доманова

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА НА БАЗЕ MATHCAD

ОБЩИЙ КУРС

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2004

УДК 681.3.06(075.8)
ББК 32.973.26-018.2я73
Ч-49

Черняк А. А., Черняк Ж. А., Доманова Ю. А.

Ч-49 Высшая математика на базе Mathcad. Общий курс. — СПб.: БХВ-Петербург, 2004. — 608 с.: ил.

ISBN 5-94157-470-3

Учебное пособие охватывает следующие разделы высшей математики: дифференциальное и интегральное исчисление, дифференциальные уравнения, ряды, линейная алгебра и элементы аналитической геометрии, а также описание интегрированной среды Mathcad. Содержание теоретического материала соответствует государственным образовательным стандартам преподавания общего курса высшей математики на экономических и инженерно-технических специальностях вузов. Возможности компьютерного пакета Mathcad демонстрируются с помощью алгоритмов решения трудоемких вычислительных задач.

Для студентов экономических и инженерно-технических специальностей вузов

УДК 681.3.06(075.8)
ББК 32.973.26-018.2я73

Допущено Министерством образования Республики Беларусь в качестве учебного пособия для студентов экономических специальностей высших учебных заведений

Рецензенты:

Белько И. В., доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и экономической кибернетики Белорусского государственного экономического университета.

Кафедра методов оптимального управления Белорусского государственного университета.

Группа подготовки издания:

Главный редактор *Екатерина Кондукова*
Зам. главного редактора *Людмила Еремеевская*
Зав. редакцией *Григорий Добин*
Редактор *Анатолий Хрипов*
Компьютерная верстка *Натальи Смирновой*
Корректор *Наталия Першакова*
Дизайн обложки *Игоря Цырульникова*
Зав. производством *Николай Тверских*

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 12.02.04.
Формат 70×100$^1/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 49,02.
Тираж 3000 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

Гигиеническое заключение на продукцию, товар № 77.99.02.953.Д.001537.03.02
от 13.03.2002 г. выдано Департаментом ГСЭН Минздрава России.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в Академической типографии "Наука" РАН
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12.

ISBN 5-94157-470-3

Содержание

> До́роги не те знания, которые отлагаются
> в мозгу, как жир; до́роги те, которые
> превращаются в умственные мышцы.
>
> *Г. Спенсер*

Предисловие

Основная идея книги: синтезировать традиционные принципы преподавания высшей математики для экономистов с новейшими достижениями компьютерной математики. При реализации этой идеи авторы исходили из следующих двух постулатов.

1. Учебник должен быть самодостаточным и содержать: исчерпывающее и строгое изложение классических основ высшей математики, а также блоки обучающих задач, сопровождаемых демонстрационными примерами. Учебник должен опираться на современные достижения в образовательных компьютерных технологиях и использовать их, не нанося ущерба математически строгому изложению теории.
2. Компьютерная математика не способна полностью исключить традиционные методы в преподавании, однако призвана сделать это преподавание более эффективным и доступным. Она всего лишь инструмент, позволяющий сосредоточить внимание студента на логике методов и алгоритмов, освобождая от необходимости освоения громоздких, незапоминающихся и потому бесполезных вычислительных процедур и трюков. И использование этого инструмента только в качестве иллюстративного средства с целью "уберечь" студента от "скучной" математики, сведя ее постижение к нажатию кнопок мыши и клавиш клавиатуры, сродни комиксам, низводящим классические произведения литературы до уровня примитивных мультяшек.

Содержание книги разбито на 6 частей: введение в теорию функций нескольких переменных, дифференциальное исчисление, интегральное исчисление, дифференциальные уравнения, ряды, линейная алгебра и элементы аналитической геометрии. **Несмотря на традиционное содержание, продиктованное программой общего курса высшей математики, книга имеет нетрадиционную структуру.** Это связано с тем, что в последние годы вычислительная техника все глубже проникает в различные сферы человеческой деятельности. И вопреки некоторой инертности и консервативности образования, компьютеры активно участвуют в процессе обучения, облегчая его, улучшая качество получаемых знаний и ускоряя процесс адаптации нынешних студентов к новой, "компьютерной" жизни.

Во-первых, главы содержат теорию, компьютерные разделы, блоки задач для самостоятельного решения, ответы и решения задач. Содержание теоретического материала соответствует государственным образовательным стандартам преподавания высшей математики на экономических специальностях вузов, а его структура ориентирована на использование любого пакета компьютерной математики, хотя базовым пакетом книги является Mathcad. Благодаря такой структуре отпала необходимость в изложении громоздких методов и приемов интегрирования, дифференцирования, решения дифференциальных уравнений, обращения матриц и т. д. — подобные процедуры "доверены" компьютеру, связь с которым реализуется через пакет Mathcad. Тем самым разгружена содержательная часть книги, а внимание потенциального читателя акцентировано на логике понятий и методов.

Во-вторых, данное пособие предполагает многоуровневое постижение основ высшей математики. Учитывая и уважая возможности контингента своих читателей, книга позволяет варьировать степень подробности и глубины изучения предмета. Так, возможно беглое знакомство с основным текстом главы на уровне определений, основных свойств и несложных иллюстративных примеров, опуская доказательства двух-трех базовых теорем данной главы. При более пристальном внимании можно вникнуть в доказательства приводимых в главе теорем, что позволяет понять взаимосвязь между основными понятиями и их свойствами. Наконец, самый заинтересованный читатель обратит свое внимание на те утверждения, которые лишь формулируются в тексте главы и предназначаются для самостоятельного осмысления. Каждая глава сопровождается практическим материалом, также дифференцированным по уровням. Творческий уровень представлен здесь теоретическими задачами, которые, с одной стороны, позволяют дополнить теорию, а с другой — указать ее тонкие и проблемные моменты. В случае затруднений в решении этих задач можно обратиться за помощью или подсказкой к *разд. "Ответы, указания, решения"*. Следующий уровень практических задач – типовые. Здесь приводятся 20 несложных примеров и один-два демонстрационных образца с подробным их решением. Эти задачи доступны среднему студенту и предназначены для приобретения практических навыков в освоении алгоритмов и методов, доступных для ручного счета и обработки, их можно также использовать в качестве практикума для студентов-заочников. Задачи третьего уровня — компьютерные, ориентированные на использование пакетов компьютерной математики и недоступные для ручной обработки. Каждый блок таких задач содержит по 10 однотипных примеров, в обязательном порядке сопровождаемых алгоритмами решения с помощью операторов и функций Mathcad.

Во-третьих, авторы стремились создать пособие, содержащее строгое описание основ классической математики, предложив собственный подход к изложению ряда разделов. Так, в *главах 2—11* реализован принцип "от общего к частному", где изначально понятия предела и непрерывности функций вводятся в классе функций n переменных, определенных в n-мерных точечных пространствах. Такой подход, вопреки сложившимся стереотипам, на наш взгляд, позволил сделать математически более мотивированными и прозрачными соответствующие понятия в классе функций одной переменной. В *главе 6* дана естественная классификация бесконечно малых функций по уровням малости, что позволило четко определить понятие главной части функции и указать методы ее нахождения. В *главах 21—23*, объединенных единой идеей интегрирующего множителя, излагаются типы дифференциальных уравнений и методы их интегрирования. Также с единых позиций (через суммы Дарбу) ведется изложение теории определенного и двойного интегралов *(главы 17—20)*. Основные теоремы линейной алгебры *(главы 31—41)* о вырожденных и обратных матрицах, определителях, системах линейных уравнений и т. д., фактически доказаны с помощью только двух "сквозных" понятий — линейной независимости и элементарного преобразования системы векторов.

Хотя теоретический материал книги ориентирован на использование произвольных пакетов компьютерной математики, базовым для книги является Mathcad. Mathcad выгодно отличается от других пакетов возможностью свободно компоновать рабочий лист и относительной легкостью изучения. Так же, как с карандашом в руке решается задача на листе бумаги, можно оформить и соответствующий Mathcad-документ. Если некоторое время не возникает необходимости работать с Mathcad, то впоследствии навыки пользования пакетом легко восстанавливаются (тогда как в других пакетах компьютерной математики используется очень сложный синтаксис, который быстро забывается, если не работать с этим пакетом постоянно). Кроме того, Mathcad — это универсальная, а не специализированная математическая среда.

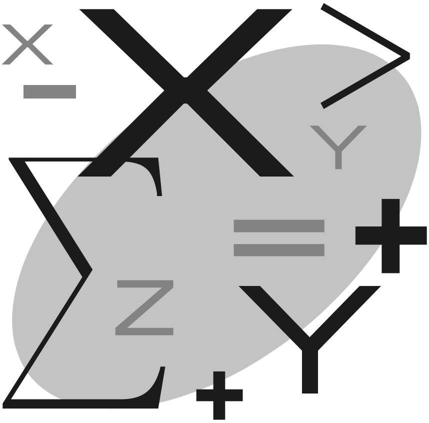
Описание Mathcad дается в компьютерных разделах глав параллельно изложению математической теории, что позволяет потенциальному читателю постепенно усваивать широкие возможности пакета без отрыва от конкретного математического контекста. При этом те или иные процедуры, функции и операторы Mathcad подробно описываются в компьютерном разделе именно той главы, где они впервые встречаются.

Новейшей версией Mathcad (на момент сдачи книги в набор) являлся Mathcad 11 Enterprise Edition, которому предшествовали Mathcad 2000 Pro и Mathcad 2001 Pro. Компьютерные разделы глав адаптированы к любой из этих версий. При этом следует иметь в виду, что существует обилие русифицированных вариантов Mathcad (даже в рамках одной его версии), в которых возможны непринципиальные внешние отличия некоторых диалоговых окон и панелей от приводимых в книге.

Нумерация глав сквозная. Теоремы, утверждения, леммы, следствия, рисунки, формулы и задачи нумеруются двумя числами: первое из них — это номер главы, второе — их порядковый номер в самой главе. В приложении, дополняющем компьютерные разделы глав, дается обзор панелей инструментов и описание способов редактирования формульных блоков.

Данная книга, вместе с ранее вышедшим учебным пособием "Математика для экономистов на базе Mathcad", изд-во БХВ-Петербург, 2003, охватывают программу всего цикла математических дисциплин для студентов экономических специальностей вузов.

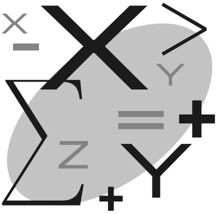
Авторы: доктор физико-математических наук, профессор, лауреат премии Академии наук Беларуси А. А. Черняк, кандидат физико-математических наук, доцент, Соросовский доцент Ж. А.Черняк, старший преподаватель Доманова Ю. А.



ЧАСТЬ I

Введение в теорию функций нескольких переменных

Глава 1



Понятие множества

Под множеством будем понимать совокупность различных объектов, объединенных по определенному признаку. Объекты, составляющие множество, называются его элементами. Тот факт, что объект a является элементом множества A, записывается так: $a \in A$. Запись $a \notin A$ означает, что a не является элементом множества A. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается $\varnothing$.

> **Пример.** Множество решений системы уравнений $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 5 \end{cases}$ является пустым множеством, поскольку система не имеет ни одного решения.

Пусть A и B — два множества. Тогда между ними можно определить следующие отношения. Если оба множества состоят из одних и тех же элементов, то они равны: $A = B$. Если все элементы множества A являются также элементами множества B, то A является подмножеством множества B, что обозначается $A \subseteq B$. Запись $A \subset B$ означает, что A является подмножеством B, не совпадающим с B.

> **Пример.** Множество A убыточных предприятий является подмножеством множества B всех предприятий, т. е. $A \subseteq B$.

Объединением двух множеств A и B называется множество C, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B: $C = A \cup B$. Пересечением A и B называется множество C, состоящее из всех элементов, принадлежащих обоим множествам A и B: $C = A \cap B$. Разностью множеств A и B называется множество C, состоящее из тех элементов A, которые не содержатся в B: $C = A \setminus B$.

Схематически операции над множествами показаны на рис. 1.1.

При рассмотрении числовых и точечных множеств вместо слова "элемент" употребляется также слово "точка".

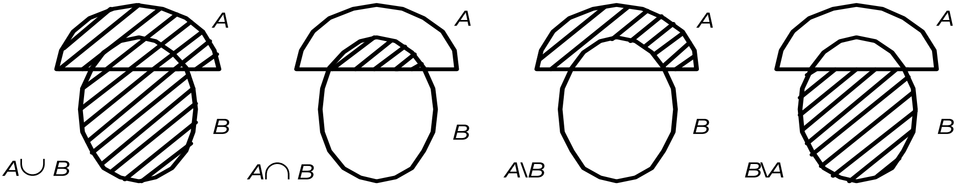


Рис. 1.1. Операции над множествами

n-мерной точкой A называется упорядоченный набор $(a_1, ..., a_n)$ n действительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$, называемых координатами точки A. Множество всех n-мерных точек называется n-мерным точечным (или n-мерным евклидовым) пространством Af^n, если задано расстояние $\rho(A, B)$ между любыми двумя точками $A = (a_1, ..., a_n)$ и $B = (b_1, ..., b_n)$, определяемое формулой:

$$\rho(A,B)=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2}\,.$$

Окрестностью радиуса ε точки A называется множество всех таких точек пространства Af^n, расстояние от которых до точки A меньше ε. Обозначается такая окрестность $N(A, \varepsilon)$.

Утверждение 1.1 (правило треугольника). Для любых трех точек A, B, C из Af^n верно $\rho(A, B) \le \rho(A, C) + \rho(C, B)$.

Примеры. Одномерное точечное пространство Af^1 — это прямая, на которой расстояние между точками a и b равно $\sqrt{(a-b)^2}=|a-b|$; окрестность $N(c, \varepsilon)$ в этом пространстве — интервал $(c - \varepsilon; c + \varepsilon)$, который графически представлен на рис. 1.2.

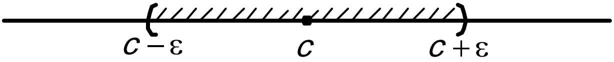


Рис. 1.2. Окрестность в пространстве Af^1

Двумерное точечное пространство Af^2 — это плоскость; окрестность $N(A, \varepsilon)$ в этом пространстве — круг без границы с центром в точке A радиусом ε.

Пусть a — либо число, либо символ $-\infty$, b — либо число, либо символ $+\infty$. Промежутком $X = <a; b>$ в Af^1 называется множество всех точек, лежащих на прямой между a и b. Числа a и b могут как включаться в промежуток

$X = <a; b>$, так и не включаться в него. Если оба числа a, b включаются в промежуток $X = <a; b>$, то X называется отрезком и обозначается $[a; b]$, если оба числа a, b не включаются в X, то X называется интервалом и обозначается $(a; b)$; если ровно одно из чисел a, b включается в X, то X называется полуинтервалом и обозначается $(a; b]$ или $[a; b)$.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — произвольные промежутки в пространстве Af^1. n-мерным промежутком в пространстве Af^n называется множество всех таких точек из Af^n, i-е координаты которых принадлежат X_i, $i = 1, 2, ..., n$. Обозначается такой n-мерный промежуток $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$.

> **Пример.** В пространстве Af^2 двумерные промежутки являются прямоугольниками или прямоугольными областями. Так, на рис. 1.3 изображены промежутки $[3; 4] \times [1; 2]$ и $(-\infty; -1] \times (-\infty; -2]$.

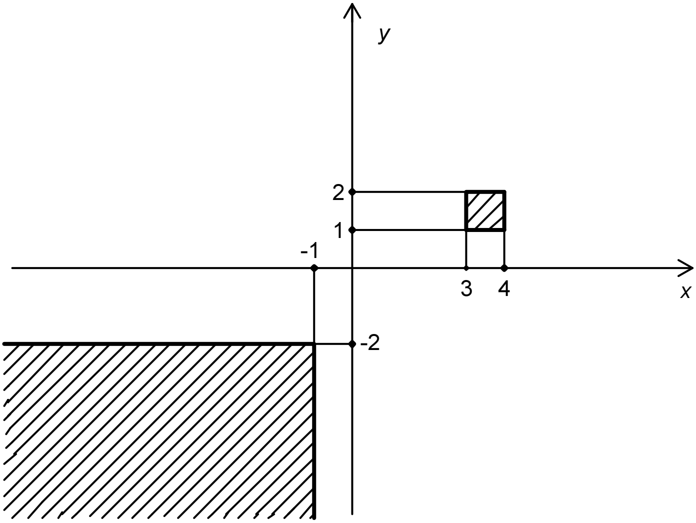


Рис. 1.3. Промежутки в пространстве Af^2

Задачи для самостоятельного решения

T1.1. Привести примеры числовых множеств A и B таких, что: а) $A \cup B = Af^1$ и $A \cap B = \varnothing$; б) $A \cup B = A$. Показать, что $A \cup B = A \Leftrightarrow A \cap B = B$.

Т1.2. Пусть даны точка $M \in Af^n$ и число $\varepsilon > 0$. Доказать, что существует такой n-мерный промежуток X, что $X \subset N(M, \varepsilon)$.

Т1.3. Пусть даны точка $M \in Af^n$ и число $\varepsilon > 0$. Доказать, что существует такой n-мерный промежуток X, что $N(M, \varepsilon) \subset X$.

Т1.4. Пусть даны точка $M \in Af^n$ и два числа ε_1, ε_2, где $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Всегда ли существует такой n-мерный промежуток X, что $N(M, \varepsilon_1) \subset X \subset N(M, \varepsilon_2)$?

Общая формулировка задач П1.1—П1.21

П1.1—21. (здесь число k совпадает с номером решаемой задачи $k = 1, 2, ..., 21$.) Перечислить элементы множеств A, B, C и найти $A \cup B$, $B \cap C$, $(A \cup B) \cap C$, $C \backslash B$, если: A — множество всех делителей числа $2k$; B — множество корней уравнения $x^2 - (2k + 1)x + k^2 + k = 0$; C — множество всех нечетных чисел x таких, что $3 \le x \le k + 3$.

П1.22. Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap B \cap C$, $(A \cup B) \cap C$, $A \setminus B$ и изобразить эти множества на координатной прямой, если:

$A = [0; 3]$, $B = (1; 5)$, $C = (-2; 0)$;

$A = (-\infty; 1]$, $B = [1; +\infty)$, $C = (0; 1)$;

$A = [-3; 1]$, $B = [2; +\infty)$, $C = (-\infty; -2]$.

Ответы, указания, решения

Т1.1. Ответы: а) например, A — множество всех рациональных чисел, B — множество всех иррациональных чисел; б) любые два множества, для которых $B \subseteq A$.

Т1.2. Пусть $M = (m_1, m_2, ..., m_n)$. Выберем число a такое, что $0 < a < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Положим $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, где $X_i = (m_i - a; m_i + a)$, i=1, 2, ..., n. Покажем, что для любой точки $L = (l_1, l_2, ..., l_n)$ из X верно $\rho(M, L) < \varepsilon$. Так как $l_i \in (m_i - a; m_i + a)$, то $|l_i - m_i| < a$, $(l_i - m_i)^2 < a^2$ и, следовательно,

$$\rho(M, L) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (m_i - l_i)^2} < \sqrt{na^2} = a\sqrt{n} < \varepsilon .$$

Утверждение доказано.

Т1.3. Пусть $M = (m_1, m_2, ..., m_n)$. Положим $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, где $X_i = (m_i - \varepsilon; m_i + \varepsilon)$, $i = 1, 2, ..., n$. Покажем, что для любой точки $L = (l_1, l_2, ..., l_n)$ из $N(M, \varepsilon)$ верно $L \in X$. Предположим противное: точка $L \in N(M, \varepsilon)$, но существует координата l_r такая, что $l_r \notin X_r$. Тогда $|m_r - l_r| > \varepsilon$, $(m_r - l_r)^2 > \varepsilon^2$ и, следовательно,

$$\rho(M, L) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (m_i - l_i)^2} \geq \sqrt{(m_r - l_r)^2} > \varepsilon,$$

что противоречит условию $L \in N(M, \varepsilon)$. Утверждение доказано.

Т1.4. Не всегда верно. Приведем контрпример. Пусть $\text{M} \in Af^2$ и $\varepsilon_2 < \frac{2\varepsilon_1}{\sqrt{\pi}}$.

Предположим, что существует 2-мерный промежуток X, содержащий $N(M, \varepsilon_1)$ и содержащийся в $N(M, \varepsilon_2)$. Очевидно, X — прямоугольник, стороны которого превосходят диаметр круга $N(M, \varepsilon_1)$. Поэтому площадь X больше $4\varepsilon_1^2$. С другой стороны, поскольку X содержится в круге $N(M, \varepsilon_2)$, то его площадь меньше $\pi\varepsilon_2^2 < \frac{4\pi}{\pi}\varepsilon_1^2 = 4\varepsilon_1^2$. Противоречие.

П1.21. В соответствии с условием задачи при $k = 21$ получаем: A — множество всех делителей числа 42, т. е. $A = \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm7, \pm14, \pm21, \pm42\}$; B — множество корней уравнения $x^2 - 43x + 20 \cdot 21 = 0$, т. е. $x_1 = 20$, $x_2 = 21$, $B = \{20, 21\}$; C — множество всех нечетных чисел x таких, что $3 \leq x \leq 24$, т. е.

$C = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23\}$.

Отсюда $A \cup B = \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm7, \pm14, \pm21, \pm42, 20\}$; $B \cap C = \{21\}$;
$(A \cup B) \cap C = \{3, 7, 21\}$; $C \setminus B = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 23\}$.

Глава 2

Предел последовательности

Занумерованный бесконечный набор точек $M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots = \{M_k\}$ пространства Af^n будем называть последовательностью, а ее элементы M_k — точками или членами последовательности. Отметим, что последовательность $\{M_k\}$ может содержать повторяющиеся члены и поэтому необязательно является множеством. Более того, в последовательности может быть лишь конечное число различных точек, как например, в последовательности $\left\{(-1)^k\right\} = -1, 1, -1, 1,\ \ldots, -1, 1,\ \ldots$

Говорят, что последовательность точек $\{M_k\}$ пространства Af^n сходится к точке M, если, задав любую, сколь угодно малую, окрестность точки M, можно указать такую точку этой последовательности, что все следующие за ней члены последовательности окажутся в заданной окрестности. При этом точка M называется пределом последовательности $\{M_k\}$, что обозначается $\{M_k\} \to M$ или $\lim\limits_{k\to\infty} M_k = M$, а сама последовательность $\{M_k\}$ называется сходящейся.

Говорят, что последовательность $\{M_k\}$ сходится к бесконечности ∞, если в любой, сколь угодно большой, окрестности некоторой фиксированной точки $M \in Af^n$ можно указать такую точку последовательности, что все следующие за ней члены последовательности окажутся вне заданной окрестности. Обозначается это так: $\{M_k\} \to \infty$ или $\lim\limits_{k\to\infty} M_k = \infty$.

Последовательность $\{M_k\}$, не имеющая конечного предела, называется расходящейся.

Последовательность называется ограниченной, если она целиком содержится в окрестности некоторой точки.

Пример. В одномерном пространстве Af^1 точки естественно называть числами. Последовательность чисел $\left\{\frac{1}{k}\right\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$ сходится к нулю. Действительно, если взять окрестность нуля радиусом ε, где $\varepsilon = \frac{1}{10^i}$, i — произвольное натуральное число, то все члены последовательности $\frac{1}{10^i + 1}, \frac{1}{10^i + 2}, \frac{1}{10^i + 3}, \cdots$, следующие за числом $\frac{1}{10^i}$, окажутся в этой окрестности.

Пример. Последовательность $\{k\}$ сходится к бесконечности. Действительно, если взять окрестность нуля радиусом ε, где $\varepsilon = 10^i$, i — произвольное натуральное число, то все члены последовательности $10^i + 1$, $10^i + 2$, $10^i + 3, \ldots$, следующие за числом 10^i, окажутся вне этой окрестности.

Теорема 2.1. Сходящаяся последовательность имеет единственный предел и является ограниченной.

Доказательство. Предположим, что последовательность $\{M_k\}$ имеет два различных предела A и B. Положим $\varepsilon = \frac{\rho(A,B)}{2}$. Согласно определению предела, можно указать такую точку M_s (M_r), что все следующие за ней члены последовательности M_{s+1}, $M_{s+2}, \ldots$ (соответственно M_{r+1}, $M_{r+2}, \ldots$) окажутся в окрестности с радиусом ε точки A (точки B). В частности, если $r \geq s$, то $\rho(M_{r+1}, A) < \varepsilon$, $\rho(B, M_{r+1}) < \varepsilon$. Но тогда в силу утверждения 1.1 $\rho(A, B) \leq \rho(A, M_{r+1}) + \rho(M_{r+1}, B) < 2\varepsilon = \rho(A, B)$, что невозможно.

Пусть теперь $\{M_k\} \to A$. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ можно указать такую точку M_s, что все следующие за ней точки последовательности M_{s+1}, $M_{s+2}, \ldots$ окажутся в окрестности радиусом ε точки A. И если обозначить через d наибольшее из чисел $\rho(A, M_1), \ldots, \rho(A, M_s)$, ε, то очевидно, что все члены последовательности $\{M_k\}$ окажутся в окрестности радиусом d точки A. Теорема доказана.

Перейдем теперь к более подробному рассмотрению числовых последовательностей. Подразумевается, что операции над ними выполняются поэлементно, а именно: $c\{x_n\} = \{cx_n\}$, $\{x_n\} \pm \{y_n\} = \{x_n \pm y_n\}$,

$\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n y_n\}$, $\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$.

Теорема 2.2 (о переходе к пределу в равенствах). Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — сходящиеся числовые последовательности, α, β — произвольные константы, то

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha x_n \pm \beta y_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} x_n \pm \beta \lim_{n\to\infty} y_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$$

(последнее равенство верно, если $y_n \neq 0$ при любом n и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$).

Доказательство теоремы дано в задаче Т2.1.

Теорема 2.3 (о переходе к пределу в неравенствах). Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — сходящиеся числовые последовательности. Тогда:

1) если $x_n \le y_n$ для любого натурального n, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

2) если $x_n \le z_n \le y_n$ для любого натурального n и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, то числовая последовательность $\{z_n\}$ также сходится к a.

Доказательство теоремы дано в задаче Т2.2.

Рассмотрим важный класс числовых последовательностей, для которых вопрос о существовании предела выясняется достаточно просто.

Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется возрастающей (убывающей), если для любого натурального n верно $x_n \le x_{n+1}$ (соответственно $x_n \ge x_{n+1}$). Возрастающие и убывающие последовательности называются монотонными.

Теорема 2.4 (критерий сходимости монотонной последовательности). Возрастающая (убывающая) числовая последовательность $\{x_n\}$ сходится, если и только если $\{x_n\}$ ограничена сверху (снизу), т. е. для любого натурального n верно $x_n \le M$ (соответственно $x_n \ge M$), где M — фиксированное число.

Доказательство. Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то она ограничена и сверху, и снизу. Предположим теперь, что $\{x_n\}$ ограничена сверху числом M, и докажем сходимость $\{x_n\}$. Назовем число M верхней гранью набора чисел $\{x_n\}$. Очевидно, $\{x_n\}$ имеет бесконечно много верхних граней, например, $M + 1$, $M + 2$, ... Примем без доказательства тот факт, что среди всех верхних граней некоторого набора чисел всегда есть наименьшая. Обозначим через M_0 наименьшую верхнюю грань последовательности $\{x_n\}$. Возьмем произвольное положительное число ε. Тогда найдется такой член последовательности x_r, что $x_r > M_0 - \varepsilon$ (в противном случае число $M_0 - \varepsilon$ было бы верхней гранью последовательности $\{x_n\}$, что противоречит минимальности M_0). Отсюда все члены x_n последовательности, следующие за x_r, также удовлетворяют неравенству $x_n > M_0 - \varepsilon$, т. е. для любого $n \ge r$ $M_0 - \varepsilon < x_n < M_0 + \varepsilon$ или $|x_n - M_0| < \varepsilon$. Отсюда ввиду произвольности выбора ε и в соответствии с определением предела следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = M_0$. Теорема доказана.

Следствием теорем 2.3 и 2.4 является утверждение о сходимости последовательности $\{x_n\} = \left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ (см. задачу Т2.8). Предел этой последовательности называется числом *e*. Число *e* иррационально, т. е. является бесконечной непериодической дробью $e = 2.71828182845904\ldots$ Более того, оно трансцендентно, т. е. не является корнем никакого алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами.

Пример. Вспомним известную формулу сложных процентов:

$$Q_n = Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n,$$

где Q_0 — первоначальное значение некоторой величины, p — процент, на который эта величина изменяется (увеличивается или уменьшается) за некоторый период времени, n — количество таких периодов времени.

Предположим теперь, что каждый период времени разбит еще на k равных периодов, общее количество которых равно kn. Естественно предположить, что процент, на который изменится наша величина в течение нового, более короткого, периода времени, уменьшится в k раз и станет равным $\dfrac{p}{k}$. Тогда по формуле сложных процентов имеем:

$$Q_{kn} = Q_0\left(1+\frac{p}{100\cdot k}\right)^{k\cdot n} = Q_0\left(\left(1+\frac{p}{100k}\right)^{\frac{100k}{p}}\right)^{\frac{p}{100}\cdot n} = Q_0\left(\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)^{\frac{pn}{100}},$$

где $m = \dfrac{100k}{p}$.

Переходя к пределу, получим:

$$\lim_{k\to\infty} Q_{kn} = Q_0\left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)^{\frac{pn}{100}} = Q_0 e^{\frac{pn}{100}} \approx Q_n .$$

Полученная приближенная формула называется формулой непрерывных процентов.

Пусть, например, темп инфляции составляет 1% в день. Определим, во сколько раз обесценится сумма Q_0 через полгода. В данном случае $p = -1$, $n = 365 / 2 = 182.5$. Воспользуемся формулой непрерывных процентов: $Q \approx Q_0 \cdot e^{-\frac{182.5}{100}} = \frac{Q_0}{e^{1.825}} \approx \frac{Q_0}{6}$, т. е. исходная сумма Q_0 обесценится примерно в 6 раз.

Компьютерный раздел

Подпанель **Арифметика** (Calculator), изображенная на рис. 2.1, вызывается кнопкой 🖩 панели **Математика** (Math) и содержит 35 кнопок.

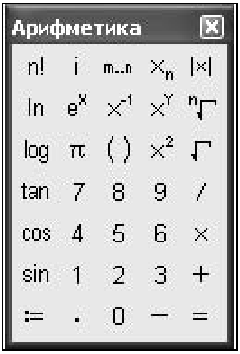


Рис. 2.1. Подпанель **Арифметика**

Рассмотрим действия тех кнопок, которые могут понадобиться при решении компьютерных задач данной главы. Кнопки первого столбца вызывают шаблоны встроенных функций: синуса, косинуса, тангенса, натурального логарифма, десятичного логарифма. Например, щелчок на кнопке ln вызовет шаблон ln(■) функции "логарифмирование по основанию *e*". Шаблон $\blacksquare!$ для вычисления факториалов вызывается кнопкой n!. Шаблон $|\blacksquare|$ для вычисления модуля выражения (которое вводится на месте метки), вызывается кнопкой |x|. Шаблон $\sqrt{\blacksquare}$ встроенной функции "извлечение квадратного корня" вызывается кнопкой √. Если алгебраическое выражение, из которого предполагается извлечь квадратный корень уже введено, то удобнее воспользоваться клавишей <\>, предварительно выделив слева все выражение синим курсором. Шаблон $\sqrt[\blacksquare]{\blacksquare}$ встроенной функции "извлечение корня *n*-й степени" вызывается кнопкой ⁿ√; при этом на месте верхней метки вводится показатель корня, а на месте второй метки — выражение, из которого предполагается этот корень извлечь.

Подпанель **Матанализ** (Calculus), изображенная на рис. 2.2, вызывается кнопкой ∫d/dx панели **Математика** (Math) и содержит 12 кнопок.

Рис. 2.2. Подпанель **Матанализ**

Кнопка ∞ вызывает знак бесконечности; кнопка $\prod_{n=1}^{m}$ вызывает шаблон $\prod_{\blacksquare=\blacksquare}^{\blacksquare}\blacksquare$ для записи произведения конечного числа сомножителей; кнопка $\sum_{n=1}^{m}$ вызывает шаблон $\sum_{\blacksquare=\blacksquare}^{\blacksquare}\blacksquare$ для записи суммы конечного числа слагаемых; кнопка $\lim_{\to a}$ вызывает шаблон $\lim_{\blacksquare\to\blacksquare}\blacksquare$ для вычисления пределов последовательностей и функций; назначение остальных кнопок будет описано в последующих главах.

В шаблоне $\sum_{\blacksquare=\blacksquare}^{\blacksquare}\blacksquare$ (или $\prod_{\blacksquare=\blacksquare}^{\blacksquare}\blacksquare$) на месте левой нижней метки вводится имя переменной, по которой должно производиться суммирование (произведение), на месте правой нижней метки — начальное значение этой переменной, на месте верхней метки — ее конечное значение; на месте метки справа от знака Σ (или П) вводится аналитическое выражение слагаемого (сомножителя), зависящего от переменной, по которой производится суммирование (произведение).

Для символьных вычислений в Mathcad используется знак символьного вывода →. Простейшим примером символьных вычислений является вычисление пределов.

Рассмотрим пример вычисления предела последовательности

$$\{x_n\}=\left\{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right\}.$$

В нужном месте рабочего листа щелчком левой кнопки мыши установите визир и щелчком кнопки $\boxed{\overset{\lim}{\to a}}$ подпанели **Матанализ** (Calculus) вызовите шаблон $\lim\limits_{\blacksquare\to\blacksquare}\blacksquare$. На месте метки справа от знака lim щелчком кнопки $\boxed{\prod\limits_{n=1}^{m}}$ вызовите шаблон $\prod\limits_{\blacksquare=\blacksquare}^{\blacksquare}\blacksquare$. На месте правой метки этого шаблона введите (i – –1)-й сомножитель $\left(1-\frac{1}{i^2}\right)$. Затем на месте соответствующих меток этого шаблона введите идентификатор переменной `i`, ее начальное значение `2` и ее конечное значение `n`. На месте двух нижних меток под знаком предела lim введите номер `n` n-го члена последовательности и символ ∞.

Комбинацией клавиш <Ctrl>+<·> введите знак → символьного вывода. После нажатия клавиши <Enter> справа от знака → появится искомое значение предела, равное $\frac{1}{2}$:

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)\to\frac{1}{2}.$$

Отметим, что переход от метки к метке осуществляется с помощью клавиши <Tab>.

Помимо широкого набора стандартных функций, в Mathcad возможно определение собственных функций пользователя. Функция определяется следующим образом:

```
имя функции(аргументы) := формула
```

где `имя функции` — любой уникальный для данного документа идентификатор; `аргументы` — список аргументов функции через запятую; `форму-`

ла — любая формула с использованием констант, стандартных функций и функций пользователя. Пример цепочки формул с использованием функций пользователя приведен ниже:

$$a := 2 \quad b := a^2 + \sin(a) \quad f(x) := x^3 + 2 \cdot x$$

$$c := f(a) + \cos(b) \quad c = 12.196$$

$$g(x, y) := f(x + y)^2 + y + x$$

$$d := a + b + f(a \cdot b) + g(0.5, a)$$

$$d = 1.401 \times 10^3$$

Отметим, что при формировании степенной функции перед вводом показателя этой функции с помощью клавиши <^> следует охватить правым синим уголком идентификатор функции вместе со всеми аргументами для того, чтобы операция возведения в степень указывалась после закрывающейся скобки, как это и было сделано в предыдущем примере. Однако в примере

$$f(x) := x^2 + 4$$

$$a := 5.5 + f^2(3)$$

получено не возведение в квадрат функции $f(3)$, а произведение квадрата некой переменной f на число 3. Подобная ошибка в Mathcad обнаруживается достаточно просто, т. к. числовое значение для переменной f не было задано выше в документе и поэтому f^2 будет выделяться на рабочем листе красным цветом.

При определении функции можно использовать программные модули, что будет рассмотрено в последующих компьютерных разделах.

Зачастую результат символьного вычисления, однажды уже полученный в документе Mathcad, приходится неоднократно использовать в этом же документе. В подобных случаях целесообразно поступать следующим образом. Пусть некоторое выражение E, зависящее от n переменных (параметров) $x1, \ldots, xn$, необходимо вычислить в символьном виде.

В нужном месте рабочего листа введите идентификатор функции с перечисленными в круглых скобках аргументами $x1, \ldots, xn$, например, $f(x1, \ldots, xn)$. Затем клавишей <:> введите знак присваивания := и справа от него — выражение E, выделив затем это выражение синим курсором. Комбинацией клавиш <Ctrl>+<·> введите знак →. После нажатия клавиши <Enter> справа от знака → появится искомый символьный результат, к которому можно обращаться в дальнейших вычислениях посредством функции $f(x1, \ldots, xn)$.

Пусть в рассмотренном выше примере вместо начального значения переменной i, равного 2, задан параметр p. Введите последовательно $f(p)$, знак присваивания := и выражение E, которое в данном случае имеет вид $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{i=p}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)$. После ввода знака символьного вывода → и нажатия клавиши <Enter> на экране получим следующее:

$$f(p) := \lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right) \to \frac{p-1}{p}.$$

Теперь можно получать значения пределов для любых натуральных p, не прибегая каждый раз к повторному их вычислению. Так, например, если p пробегает все значения от 4 до 12 с шагом 2, то

```
p := 4, 6 .. 18
          f(p) =
```

0.75
0.833
0.875
0.9
0.917
0.929
0.938
0.944

В данном примере использована так называемая ранжированная переменная p, принимающая значения из заданного промежутка [4;18] с равными интервалами (шагом изменения) длины 2. Опишем этот тип переменных в общем случае.

Пусть требуется определить ранжированную переменную `rvari` с начальным значением a, конечным значением b и с заданным шагом изменения h. В этом случае в нужном месте рабочего листа вводится имя переменной `rvari`, знак присваивания := и затем, через запятую, выражения a и $a + h$; после этого клавишей <;> вводится знак .. и на месте появившейся метки вводится b. Если конечное значение b при заданном шаге h не достигается точно, то последним значением переменной в случае $h > 0$ будет наибольшее возможное значение, не превышающее b, а в случае $h < 0$ — наименьшее возможное значение, превышающее a. Выражение $a + h$ можно опускать: в этом случае шаг по умолчанию равен 1 (если b больше a) или –1 (если b меньше a).

Задачи для самостоятельного решения

Т2.1. Доказать теорему 2.2.

Т2.2. Доказать теорему 2.3.

Т2.3. Дано: $\{x_n\}$ — числовая последовательность и $\{x_n\} \to a$. Доказать, что $\{|x_n|\} \to |a|$. Верно ли обратное утверждение?

Т2.4. Подпоследовательностью последовательности $\{M_k\}$ называется последовательность, полученная из $\{M_k\}$ удалением конечного или бесконечного числа членов с сохранением порядка оставшихся членов. Доказать, что любая подпоследовательность сходящейся последовательности $\{M_k\}$ сходится к той же точке, что и $\{M_k\}$.

Т2.5. Дано: числовая последовательность $\{x_n\}$ сходится к нулю, а числовая последовательность $\{y_n\}$ ограничена. Доказать: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = 0$.

Т2.6. Доказать или опровергнуть следующие утверждения:

а) если числовые последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ расходятся, то и последовательности $\{x_n \pm y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$, $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ расходятся;

б) если $\{x_n\}$ сходится, а $\{y_n\}$ расходится, то $\{x_n \pm y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$, $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ также расходятся.

Т2.7. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

Т2.8. Доказать сходимость последовательности $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$.

Т2.9. Пусть последовательность $\{M_k\}$ сходится к точке M. Доказать, что последовательность, полученная из $\{M_k\}$ добавлением конечного числа членов с сохранением порядка членов первоначальной последовательности, также сходится к M.

Общая формулировка задач П2.1—П2.21

Найти пределы последовательностей:

П2.1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{\sqrt{9n^4+1}}$.

П2.2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{1+2+3+\ldots+n}$.

П2.3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3+6+9+\ldots+3n}{n^2+4}$.

П2.4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+4+\ldots+2^n}{2^{n+2}+3^{-n}}$.

П2.5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\cdot 4^{-n}+5^{n+1}}{5+25+\ldots+5^n}$.

П2.6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{9+27+\ldots+3^{n+1}}{2\cdot 3^{n+2}+(-2)^n}$.

П2.7. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{1+2n}$.

П2.8. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{2n-3}$.

П2.9. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n\cdot n! - 5\cdot(n-1)!}{4\cdot n! - (n+1)!}$.

П2.10. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n! - (n+2)!}{(n+5)!\cdot n! + (n+2)!}$.

П2.11. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)! - n^2\cdot(n-2)!}{2\cdot n! - (n-1)!}$.

П2.12. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)! - 3\cdot n!}{(n+1)\cdot(n-1)! + (n-2)!}$.

П2.13. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+1}{2n-1}\right)^{n+2}$.

П2.14. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+4}{2n}\right)^{-2n}$.

П2.15. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n^2+n-1}-2n\right)$.

П2.16. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n-1}\cdot\left(\sqrt{n+7}-\sqrt{n+1}\right)\right)$.

П2.17. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{25n^2+n+4}-5n\right)$.

П2.18. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-1}\cdot\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}\right)\right)$.

П2.19. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-2n+1}{n^4+3n^5-2}$.

П2.20. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^5-4n^3+2n-3}{3n^6+5n^2}$.

П2.21. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^3+8}\cdot\left(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3-1}\right)\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n}{2n-3}\right)^{2-5n}$.

Общая формулировка задач К2.1—К2.11

С помощью Mathcad вычислить пределы указанных последовательностей. Диапазоны изменения параметров p, q, r равны соответственно [2; 3], [3; 4], [2; 3], а шаг изменения равен 1 (в задачах К2.5—К2.11).

К2.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+i}}$.

К2.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}$.

К2.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(2i-1)^7}{n^8}$.

К2.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

К2.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+pn+2}-n\right)$.

К2.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{i}{n^p}\right)$.

К2.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+p)^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$.

К2.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+p}\right)^{n^2}}{e^n}$.

К2.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\left(\frac{pi}{n+1}\right)}{n}$.

К2.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\cos\left(\frac{(2i-1)q}{pn}\right)}{n}$.

К2.11. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{(n+p)(n+q)\quad(n+r)}-n\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\left(\frac{p}{n}\right)+q\sin\left(\frac{r}{n^2}\right)\right)^{n^2}$.

Ответы, указания, решения

Т2.1. Очевидно, в одномерном пространстве принадлежность числа x окрестности числа a с радиусом ε равносильна выполнению неравенства $|x-a|<\varepsilon$. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$.

1) Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=a+b$. Возьмем произвольное число $\varepsilon>0$.

По определению предела последовательности, можно указать такие числа x_r и y_s, что все следующие за x_r числа x_{r+1}, x_{r+2}, … окажутся в окрестности точки a радиусом $\frac{\varepsilon}{2}$, а все следующие за y_s числа y_{s+1}, y_{s+2}, … окажутся в окрестности точки b радиусом $\frac{\varepsilon}{2}$. Тогда для каждого натурального n, большего $\max\{r, s\}$,

$$\left|(x_n + y_n) - (a+b)\right| = \left|(x_n - a) + (y_n - b)\right| \le |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$

что по определению предела последовательности означает сходимость последовательности $\{x_n + y_n\}$ к числу $a + b$.

2) Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$. В соответствии с теоремой 2.1, сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ ограничена, т. е. существует такое число $C > 0$, что $|x_n| < C$. Положим $M = \max\{C, |b|\}$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. По определению можно указать такие числа x_r и y_s, что все числа x_{r+1}, x_{r+2}, … и y_{s+1}, y_{s+2}, … окажутся соответственно в окрестностях точек a и b радиусом $\frac{\varepsilon}{2M}$. Тогда для каждого натурального n, большего $\max\{r, s\}$, верно

$$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab| = \left|x_n(y_n - b) + b(x_n - a)\right| \le |x_n(y_n - b)| +$$

$$|b(x_n - a)| = |x_n| \cdot |y_n - b| + |b| \cdot |x_n - a| < C \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |b| \cdot \frac{\varepsilon}{2M} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что означает сходимость последовательности $\{x_n y_n\}$ к числу ab.

Из доказанного выше следует, что для любых констант α, β $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha x_n \pm \beta y_n) = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \beta \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \alpha a + \beta b.$

3) Докажем, что если $b \ne 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$. Это равенство будет следовать из равенства $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$ и уже доказанного свойства, касающегося произведения сходящихся последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n \cdot \frac{1}{y_n}\right) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = a \cdot \frac{1}{b}\,.$$

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то, согласно определению предела, можно указать такое число y_s, что все числа y_{s+1},

y_{s+2}, … будут принадлежать окрестности $N\left(b, \dfrac{\varepsilon b^2}{2}\right)$. Можно также указать такое число y_r, что все числа y_{r+1}, y_{r+2}, … будут принадлежать окрестности $N\left(b, \dfrac{|b|}{2}\right)$. Последнее, в частности, означает, что модуль каждого из чисел y_{r+1}, y_{r+2}, … превосходит $\dfrac{|b|}{2}$. Отсюда для каждого натурального n, большего $\max\{r, s\}$, верно

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|y_n - b|}{|y_n| \cdot |b|} < \frac{\varepsilon b^2}{2|y_n| \cdot |b|} = \frac{\varepsilon |b|}{2|y_n|} < \varepsilon.$$

Т2.2. 1) Пусть $\{x_n\} \to a$, $\{y_n\} \to b$, $\{z_n\} = \{y_n - x_n\}$, $c = b - a$, $\varepsilon = \dfrac{|b-a|}{2}$. Докажем, что $c \geq 0$. Предположим противное: пусть $c < 0$. По теореме 2.2 $\{z_n\} \to c$. Поэтому найдется такой член z_r этой последовательности, что $z_r \in N(c, \varepsilon)$, отсюда $z_r < c + \varepsilon = b - a + \dfrac{a-b}{2} = \dfrac{b-a}{2} < 0$. Но по условию $z_r \geq 0$. Противоречие.

2) По аналогии с доказательством первого равенства теоремы 2.2 можно показать, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое n, что для каждого натурального $i > n$ одновременно $x_i \in N(a, \varepsilon)$ и $y_i \in N(a, \varepsilon)$. Но тогда и $z_i \in N(a, \varepsilon)$, поскольку $x_i \leq z_i \leq y_i$. Ввиду произвольности выбора ε это означает сходимость $\{z_n\}$ к a.

Т2.3. Предположим вначале, что $a = 0$. Тогда ввиду симметричности окрестности $N(a,\varepsilon)$ относительно нуля, для любого числа $\varepsilon > 0$ $x_n \in N(a, \varepsilon)$, если и только если $|x_n| \in N(a, \varepsilon)$. Другими словами, $\{x_n\} \to 0$, если и только если $\{|x_n|\} \to 0$. Если $a > 0$, $0 < \varepsilon < a$ и $x_n \in N(a, \varepsilon)$, то $x_n > a - \varepsilon > 0$ и, следовательно, $|x_n| \in N(a, \varepsilon)$. Поэтому из сходимости $\{x_n\}$ к a следует сходимость $\{|x_n|\}$ к a. Аналогично, если $a < 0$, $0 < \varepsilon < -a$ и $x_n \in N(a, \varepsilon)$, то $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon < 0$ и, следовательно, $-a + \varepsilon > -x_n > -a - \varepsilon$, т. е. $|a| - \varepsilon < |x_n| < |a| + \varepsilon$, $|x_n| \in N(|a|, \varepsilon)$. Опять-таки, из сходимости $\{x_n\}$ к a следует сходимость $\{|x_n|\}$ к $|a|$.

При $a \neq 0$ обратное утверждение не всегда верно: например, если $x_n = (-1)^n$.

Т2.4. Пусть $\{M_k\} \to M$. Занумеруем члены последовательности, полученной из $\{M_k\}$, удалением конечного или бесконечного числа членов (с сохранением порядка следования) последовательными натуральными числами 1, 2, 3, 4, … Обозначим полученную последовательность $\{L_k\}$. Поскольку порядок был сохранен, то каждый член L_i последовательности $\{L_k\}$ совпадает с некоторым членом M_j исходной последовательности, причем $j \geq i$. Поэтому если точки M_{r+1}, M_{r+2}, … принадлежат $N(M, \varepsilon)$, то и точки L_{r+1}, L_{r+2}, … принадлежат $N(M, \varepsilon)$. Другими словами, сходимость $\{M_k\}$ к M влечет сходимость $\{L_k\}$ к той же точке M.

Т2.5. Так как $\{y_n\}$ ограничена, то для некоторого положительного числа M $|y_n| \leq M$ при любом натуральном n. Отсюда $0 \leq |y_nx_n| \leq M|x_n|$ для любого натурального n. Из теоремы 2.3 имеем:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}|x_ny_n| \leq \lim_{n\to\infty} M|x_n| = M \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}|x_ny_n| = 0.$$

Следовательно, в силу утверждения задачи Т2.3 $\lim\limits_{n\to\infty} x_ny_n = 0$.

Т2.6. Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — расходятся, то $\{x_n \pm y_n\}$ может сходиться: например, $\{x_n\} = \{n\}$, $\{y_n\} = \{-n\}$, или $\{x_n\} = \{y_n\} = \{n\}$. Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — расходятся, то $\{x_ny_n\}$ и $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ могут сходиться. Например, если $\{x_n\} = \{y_n\} = \{(-1)^n\}$, то $\{x_ny_n\} = \left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\} = \{1\}$.

Если $\{x_n\}$ сходится, а $\{y_n\}$ расходится, то $\{x_n \pm y_n\}$ расходится, а $\{x_ny_n\}$ и $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ могут как сходиться, так и расходиться. Действительно, предположим, что последовательность $\{z_n\} = \{x_n + y_n\}$ сходится. Тогда из сходимости последовательностей $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ (теорема 2.1) следует, что последовательность $\{y_n\} = \{z_n - x_n\}$ тоже сходится. Противоречие.

Пусть $\{x_n\} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$, $\{y_n\} = \{n\}$, тогда $\{x_ny_n\} = \{1\}$ — сходится. Пусть $\{x_n\} = \{1\}$, $\{y_n\} = \{(-1)^n\}$, тогда последовательность $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\} = \left\{(-1)^n\right\}$ расходится.

T2.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\left(\pi\sqrt{n^2+1}-\pi n\right)+\pi n\right)=$

$$=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\left(\pi\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\left(\pi\frac{\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\left(\pi\frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right).$$

Поскольку $\{(-1)^n\}$ — ограниченная последовательность, а последовательность $\left\{\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)\right\}\to 0$, то последний предел равен нулю в силу утверждения задачи T2.5.

T2.8. Пусть $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$. Воспользуемся известным неравенством Коши: для любых неотрицательных чисел a_1, $a_2, \ldots, a_k$ верно $\sqrt[k]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k}\le\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}$.

Положим $k=n+1$, $a_1=a_2=\ldots=a_n=\frac{n+1}{n}$, $a_{n+1}=1$. Тогда, согласно неравенству Коши,

$$\sqrt[n+1]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot 1}\le\frac{n\left(\frac{n+1}{n}\right)+1}{n+1}=\frac{n+2}{n+1}\Rightarrow\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\le\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Итак, доказано, что $x_n\le x_{n+1}$ для любого натурального n, т. е. $\{x_n\}$ — возрастающая последовательность.

Положим теперь $k = n + 2$, $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$, $a_{n+2} = 1$. Согласно неравенству Коши,

$$\sqrt[n+2]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\cdot 1} \le \frac{(n+1)\frac{n}{n+1}+1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \Rightarrow \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \le \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}.$$

Если обозначить $y_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$, то последнее неравенство означает, что $y_n \le y_{n+1}$ для любого натурального n. В итоге имеем:

$$\frac{1}{4}x_n = y_1 x_n \le y_n x_n \le y_{n+1}x_{n+1} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}\cdot\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n+2} < 1$$ для любого натурального n. Отсюда $\dfrac{x_n}{4} < 1$, $x_n < 4$, что означает ограниченность последовательности $\{x_n\}$. Сходимость этой последовательности следует теперь из теоремы 2.4.

Т2.9. Указание: воспользоваться определением предела последовательности.

П2.21. а) $$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^3+8}\cdot\left(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n^3+8}\cdot\left(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3-1}\right)\times$$

$$\times\frac{\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n^3-1}}{\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n^3-1}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n^3+8}\cdot\frac{n^3+2-n^3+1}{\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n^3-1}} = \lim_{n\to\infty}3\frac{\sqrt{n^3+8}}{\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n^3-1}} =$$

$$=3\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{n^3+8}}{\sqrt{n^3}}}{\dfrac{\sqrt{n^3+2}}{\sqrt{n^3}}+\dfrac{\sqrt{n^3-1}}{\sqrt{n^3}}} = 3\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\dfrac{8}{n^3}}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n^3}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{n^3}}} = 3\frac{\sqrt{1+0}}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = \frac{3}{2}.$$

б) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{2n-3}\right)^{2-5n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n}{2n-3}-1\right)^{2-5n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{2n-3}\right)^{\frac{2n-3}{3}\cdot\frac{3}{2n-3}\cdot(2-5n)} =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{2n-3}\right)^{\frac{2n-3}{3}}\right)^{\frac{6-15n}{2n-3}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6-15n}{2n-3}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{6}{n}-15}{2-\frac{3}{n}}} = e^{-\frac{15}{2}}.$$

К2.11. б) Приведем алгоритм решения задачи с помощью Mathcad:

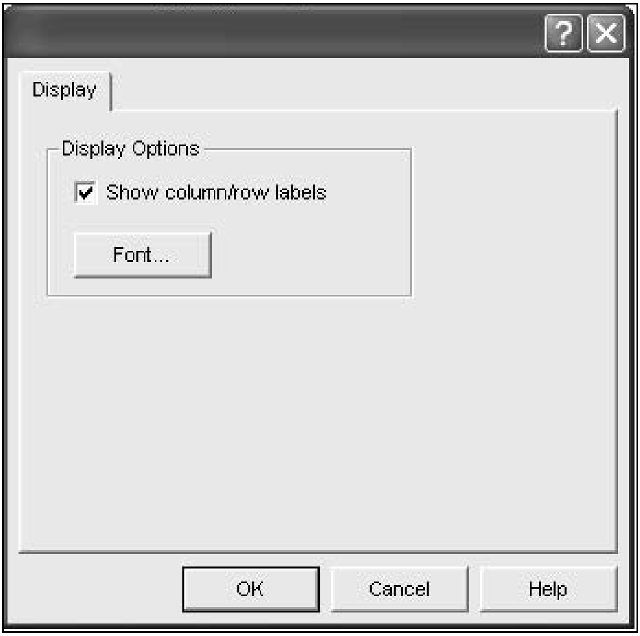
$$f(p,q,r) := \lim_{n\to\infty}\left(\cos\left(\frac{p}{n^1}\right)+q\cdot\sin\left(\frac{r}{n^2}\right)\right)^{n^2} \to \exp\left(\frac{-1}{2}\cdot p^2+q\cdot r\right)$$

$ORIGIN := 1$

$p := 2 .. 3 \qquad q := 3 .. 4 \qquad r := 2 .. 3$

$f(p,q,r) =$

	1
1	54.598
2	4.482
3	403.429
4	33.115
5	$1.097\cdot10^3$
6	90.017
7	$2.203\cdot10^4$
8	$1.808\cdot10^3$



☑ Show column/row labels

Рис 2.3. Диалоговое окно **Display**

Для того чтобы строки в таблице значений функции `f(p, q, r)`, выведенной после знака равенства, были занумерованы, щелкните правой кнопкой мыши на любом элементе таблицы и в выпадающем меню выберите команду **Properties** (Свойства); эта команда выводит диалоговое окно **Display** (Презентация), показанное на рис. 2.3, в котором следует отметить опцию **Show column/row labels** (Показать метки столбцов/строк).

Для задания начала нумерации строк таблиц с единицы необходимо задать единичное значение для системной переменной `ORIGIN` (эта переменная детально описана в компьютерном разделе *гл. 5*).

Глава 3

Предел функции

Рассмотрим в пространстве Af^n множество X и последовательность $\{M_k\}$, сходящуюся к точке M. Если все точки из $\{M_k\}$ принадлежат множеству X, то возникает вопрос о том, как взаимосвязаны точка M и множество X. Чтобы ответить на этот вопрос, разобьем все сходящиеся к M последовательности на два класса: не содержащие M (назовем их регулярными) и содержащие точку M хотя бы одним из своих членов (назовем их нерегулярными).

Точку M назовем предельной точкой множества X, если любая ее окрестность содержит бесконечно много точек из X. Предельная точка множества X может как принадлежать, так и не принадлежать X. Множество, содержащее все свои предельные точки, называется замкнутым. Если точка M принадлежит множеству X, но некоторая ее окрестность не содержит точек из X, отличных от M, то M назовем изолированной в X.

> **Примеры.** Если X состоит из конечного числа точек, то такое множество не может иметь предельных точек по определению; в то же время любая его точка является изолированной в X. Если $X \subset Af^1$ — множество рациональных чисел, то каждая точка пространства Af^1 является предельной точкой множества X, хотя ни одна точка из X не является изолированной в X.

Теорема 3.1. Пусть даны множество $X \subseteq Af^n$ и точка $M \in Af^n$. Точка M является предельной точкой множества X, если и только если существует сходящаяся к M регулярная последовательность точек из X. Точка M является изолированной в X, если и только если все сходящиеся к M последовательности точек из X нерегулярны.

Доказательство. Предположим, что M — предельная точка множества X. Выберем произвольную числовую последовательность ε_k различных положительных чисел, сходящуюся к нулю. Так как любая окрестность $N(M, \varepsilon_k)$ содержит бесконечное число точек из X, то в каждом множестве

$N(M, \varepsilon_k) \cap X$ можно выбрать точку M_k, отличную от M, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Из $\{\varepsilon_k\} \to 0$ следует $\{M_k\} \to M$, причем $\{M_k\}$ — регулярная последовательность.

Предположим теперь, что $\{M_k\}$ — регулярная последовательность точек из X, сходящаяся к M, но при этом M не является предельной точкой множества X. Последнее означает существование окрестности $N(M, \varepsilon)$, в которой может оказаться конечное или пустое множество точек из X. Если в этой окрестности нет точек из X (помимо точки M, возможно принадлежащей X), то положим $\delta = \varepsilon$. В противном случае выберем среди них отличную от M точку L, ближайшую к M, и положим $\delta = \rho(M, L)$. Очевидно, что окрестность $N(M, \delta)$ не содержит точек из X (кроме точки M, возможно принадлежащей X) и, следовательно, не содержит точек последовательности $\{M_k\}$, что противоречит сходимости $\{M_k\}$ к M.

Из этих рассуждений также следует, что если M — изолированная в X, то любая сходящаяся к ней последовательность точек из X нерегулярна. Одной из таких последовательностей, например, является последовательность $M, M, \ldots, M, \ldots$

Осталось рассмотреть случай, когда все сходящиеся к M последовательности точек из X нерегулярны. Пусть $\{M_k\}$ — одна из них. Точка M не может быть предельной (иначе существовала бы регулярная последовательность, сходящаяся к M). Поэтому, как было уже показано выше, существует окрестность $N(M, \delta)$, не содержащая точек из X и, следовательно, точек из $\{M_k\}$, отличных от M. Это означает, что $\{M_k\} = M_1, \ldots, M_r, M, M, \ldots, M, \ldots$ Отсюда $M \in X$ и, следовательно, M — изолированная точка в X. Теорема доказана.

Из этой теоремы, в частности, следует, что существование сходящихся к M последовательностей точек из X означает, что M является либо предельной точкой множества X, либо изолированной в X. Из доказательства также следует, что для любой последовательности точек из X, сходящейся к изолированной в X точке M, можно всегда указать такую ее точку, что все следующие за ней члены последовательности будут совпадать с M.

Пусть заданы множества $X \subseteq Af^n$, $Y \subseteq Af^1$ и некоторое правило f, по которому каждой точке $M = (x_1, \ldots, x_n)$ из X ставится в соответствие некоторое число y из Y. Число y называется образом точки M, а точка M — прообразом числа y. Пусть, к тому же, правило f таково, что каждая точка из X имеет ровно один образ и каждое число из Y — хотя бы один прообраз. Тогда соответствие $X \xrightarrow{f} Y$, обозначаемое также $y = f(M)$ или $y = f(x_1, \ldots, x_n)$, называется функцией f n переменных $x_1, \ldots, x_n$ с областью определения $X = D(f)$ и областью значений $Y = E(f)$. Координаты $x_1, \ldots, x_n$ называются независимыми переменными или аргументами функции f, y — зависимой переменной.

Примеры. Пусть дан прямоугольник со сторонами x_1 и x_2. Тогда площадь этого прямоугольника $S = f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ является функцией двух переменных x_1 и x_2.

Функцию можно задать графически: на рис. 3.1 показан график некоторой функции одной переменной $y = f(x)$; при этом $D(f) = [3; 7]$, $E(f) = [1;3]$, значения функции f в точках 4, 6 равны 2 ($f(4) = f(6) = 2$).

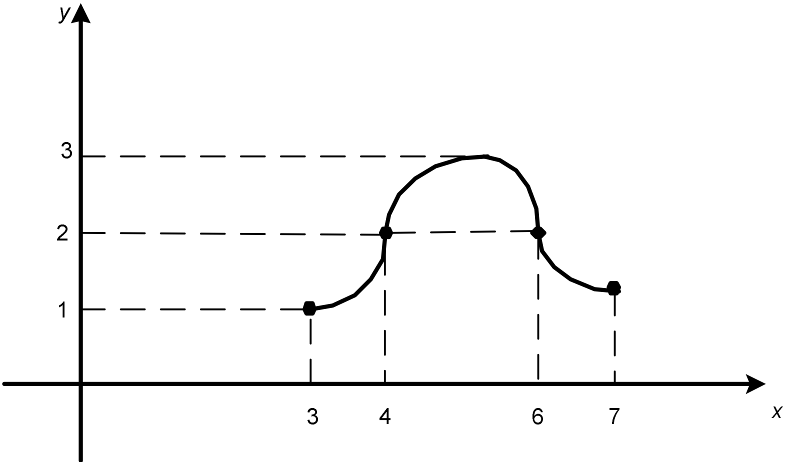


Рис. 3.1. График функции $y = f(x)$

Здесь разные точки из области определения $D(f)$ могут иметь совпадающие образы (например, точки $x = 4$ и $x = 6$), в то же время у каждой точки из $D(f)$ ровно один образ.

Дадим определение предела функции. Пусть даны множество $X \subseteq Af^n$ и точка $M_0 \in Af^n$. Пусть также задана функция f, определенная в каждой точке множества X. Если M_0 является предельной точкой множества X (или M_0 является изолированной точкой в X), то число a называется пределом функции f в точке M_0 вдоль X, если для любой сходящейся к M_0 регулярной (соответственно нерегулярной) последовательности $\{M_k\}$ точек из X соответствующая последовательность $\{f(M_k)\}$ значений функции f сходится к a.

Обозначается это так:

$\lim\limits_{\substack{M\to M_0\\ M\in X}} f(M)=a$ или $f(M)\to a$ при $M\to M_0$ вдоль X.

Число a называется пределом функции f на бесконечности вдоль X, если для любой сходящейся к ∞ последовательности $\{M_k\}$ точек из X соответствующая последовательность $\{f(M_k)\}$ значений функции f сходится к числу a. Обозначается это так:

$\lim\limits_{\substack{M\to\infty\\ M\in X}} f(M)=a$ или $f(M)\to a$ при $M\to\infty$ вдоль X.

В свете теоремы 3.1 ясно, почему в этом определении точка M_0 должна быть либо предельной точкой множества X, либо изолированной в X. Кроме того, в определении предела функции в предельной точке M_0 учитываются только регулярные последовательности, сходящиеся к M_0. Поэтому предел функции в этом случае не зависит от поведения функции в самой точке M_0, даже если $M_0\in X$. Отметим также, что предел функции f в точке M_0 вдоль X всегда равен $f(M_0)$, в случае, когда M_0 — изолированная в X точка (см. комментарии к теореме 3.1).

В определении предела функции фраза "вдоль X" означает, что предел функции чувствителен только к тому, как ведет себя функция именно "со стороны X". Очевидно, если M_0 имеет окрестность, целиком содержащуюся в X (за исключением, быть может, самой точки M_0), т. е. X "окружает" M_0, то для произвольной сходящейся к M_0 последовательности, все ее точки, начиная с некоторой, окажутся во множестве X, и фраза "вдоль X" в этой ситуации становится избыточной. В таких случаях можно использовать упрощенное обозначение предела: $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$.

Рассмотрим пример функции одной переменной $y=f(x)$, заданной на промежутке $X=<a;\ b>$. В случае $x_0=a$ предел функции f в точке x_0 вдоль X известен также как правый предел функции f в точке x_0 и обозначается $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$; в случае $x_0=b$ предел функции f в точке x_0 вдоль X известен как левый предел функции f в точке x_0 и обозначается $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$.

Если $X=<a;\ +\infty)$, то предел функции f на бесконечности вдоль X обозначается $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; если $X=(-\infty;\ b>$, то предел функции f на бесконечности вдоль X обозначается $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; если $X=(-\infty;\ +\infty)$, то предел функции f на бесконечности вдоль X обозначается $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

По аналогии с последовательностями множество точек в Af^n называется ограниченным, если оно целиком содержится в окрестности некоторой точки. В *гл. 5* понадобится следующее утверждение, которое приводится здесь без доказательства.

Утверждение 3.1. Любое бесконечное ограниченное множество точек в Af^n имеет хотя бы одну предельную точку.

Теорема 3.2 (арифметика пределов). Пусть $f(M)$ и $g(M)$ определены на множестве $X \subseteq Af^n$, M_0 — предельная точка множества X.

Если пределы $\lim\limits_{\substack{M\to M_o\\ M\in X}} f(M)$, $\lim\limits_{\substack{M\to M_0\\ M\in X}} g(M)$ существуют, то для произвольных чисел α и β

$$\lim_{\substack{M\to M_0\\ M\in X}} \left(\alpha f(M) \pm \beta g(M)\right) = \alpha \lim_{\substack{M\to M_0\\ M\in X}} f(M) \pm \beta \lim_{\substack{M\to M_0\\ M\in X}} g(M),$$

$$\lim_{\substack{M\to M_0\\ M\in X}} \left(f(M)\cdot g(M)\right) = \lim_{\substack{M\to M_0\\ M\in X}} f(M)\cdot \lim_{\substack{M\to M_0\\ M\in X}} g(M), \quad \lim_{\substack{M\to M_0\\ M\in X}} \frac{f(M)}{g(M)} = \frac{\lim\limits_{\substack{M\to M_0\\ M\in X}} f(M)}{\lim\limits_{\substack{M\to M_0\\ M\in X}} g(M)}$$

(последнее равенство верно, если $\lim\limits_{\substack{M\to M_0\\ M\in X}} g(M) \neq 0$ и $g(M) \neq 0$ для $M \in X$).

Доказательство теоремы дано в задаче Т3.1.

Пусть функция $\alpha(M)$ определена на множестве $X \subseteq Af^n$, M_0 — предельная точка множества X. Функция $\alpha(M)$ называется бесконечно малой (сокращенно б. м.) в точке M_0 вдоль X, если ее предел в точке M_0 вдоль X равен нулю. Если $\lim\limits_{\substack{M\to \infty\\ M\in X}} \alpha(M) = 0$, то $\alpha(M)$ называется б. м. на бесконечности.

Функция $\alpha(M)$ называется бесконечно большой в точке M_0 вдоль X, если обратная ей функция $\dfrac{1}{\alpha(M)}$ определена на X и является б. м. в точке M_0 вдоль X.

Если $\alpha(M)$ и $\beta(M)$ — б. м. в точке M_0 вдоль X и $\lim\limits_{\substack{M\to M_0\\ M\in X}} \dfrac{\alpha(M)}{\beta(M)} = 0$, то будем говорить, что б. м. $\alpha(M)$ более высокого порядка малости в точке M_0 вдоль X, чем б. м. $\beta(M)$; этому факту будет соответствовать запись: $\alpha(M) = o(\beta(M))$ при $M \to M_0$ вдоль X.

Следствие 3.1 (арифметика бесконечно малых).

1. Сумма, разность и произведение двух б. м. в точке M_0 вдоль X также является б. м. в точке M_0 вдоль X.
2. Если $\alpha(M)$ является б. м. в точке M_0 вдоль X, а множество значений функции $g(M)$ на множестве X ограничено, то $\alpha(M) \cdot g(M)$ также является б. м. в точке M_0 вдоль X.

Доказательство следствия дано в задаче Т13.1.

О поведении частного двух б. м. в точке M_0 в общем случае нельзя сказать ничего определенного. Например, функции x^2, x, $|x|$ являются б. м. в нуле. Однако $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^2} = \infty$, а предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ вообще не существует (см. задачу Т3.6). Поэтому говорят, что отношение двух б. м. в точке x_0 представляет собой в этой точке неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$.

Аналогично сумма, разность и частное двух бесконечно больших в точке M_0 не обязательно являются бесконечно большими в этой точке. Например, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\right) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$. Поэтому в этих случаях говорят о неопределенностях типа $\infty \pm \infty$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$. Неопределенностью типа $0 \cdot \infty$ является и произведение б. м. и бесконечно большой. Вычисление пределов в подобных ситуациях называется раскрытием неопределенностей.

Пусть даны множества $X \subseteq Af^n$, $Y = Af^n \backslash X$ и точка $M \in Af^n$. M называется внутренней точкой множества X, если она содержится в X вместе с некоторой своей окрестностью. Точка M называется выколотой из множества X, если $M \notin X$ и некоторая ее окрестность без точки M целиком содержится в X. M называется граничной точкой множества X, если любая ее окрестность содержит бесконечно много точек, как принадлежащих, так и не принадлежащих множеству X.

Очевидно, точка M одновременно является (или нет) граничной точкой обоих множеств X и Y.

Пример бесконечного ограниченного множества точек показан на рис. 3.2 в виде заштрихованной области. На этом же рисунке изображены две граничные точки M_1 и M_2 и одна внутренняя точка M_3.

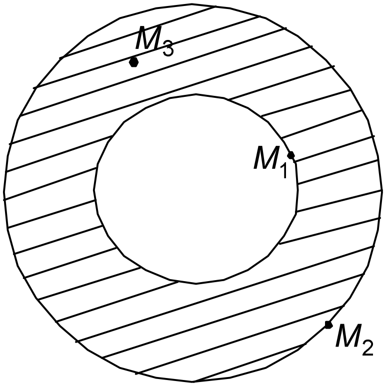


Рис. 3.2. Пример бесконечного ограниченного множества

Теорема 3.3 (топологическая классификация предельных точек).

Пусть даны множество $X \subseteq Af^n$ и точка $M \in Af^n$. M является предельной точкой множества X, если и только если она является либо внутренней, либо граничной точкой множества X, либо выколотой из множества X.

Доказательство теоремы дано в задаче Т3.2.

Компьютерный раздел

Подпанель **Матанализ** (Calculus), изображенная на рис. 2.2, содержит кнопки $\lim\limits_{\to a^+}$ и $\lim\limits_{\to a^-}$ для вычисления левого и правого пределов функции одной переменной. Эти кнопки вызывают, соответственно, шаблоны $\lim\limits_{\blacksquare \to \blacksquare^+} \blacksquare$ и $\lim\limits_{\blacksquare \to \blacksquare^-} \blacksquare$. На месте метки справа от знака lim вводится аналитическое выражение функции, на месте двух нижних меток вводятся аргумент функции и точка, в которой вычисляется предел.

Напомним, что имена переменных, функций и их аргументов называются идентификаторами. Идентификаторы в Mathcad могут иметь практически любую длину. Они состоят из символов, каждый из которых может быть буквой (в том числе и греческой), а также цифрой. При этом первым символом должна быть буква. Допускаются и некоторые специальные символы, например, знак подчеркивания _. Строчные и прописные буквы различаются. Идентификаторы должны быть уникальными, т. е. они не должны совпадать с именами встроенных функций и функций, определенных пользователем. В Mathcad идентификатор может содержать подстрочные символы, т. е. в нем некоторые последние символы, являющиеся составной частью этого идентификатора, могут быть набраны в виде "нижних индексов". Перед вводом подстрочных символов необходимо нажать клавишу <.>. Визуально идентификаторы с подстрочными символами почти не отличаются от индексированных координат *n*-мерных точек. Важно помнить, что перед вводом индексов координат точек или элементов матриц нажимается клавиша <[>.

При проведении сложных расчетов приходится комбинировать символьные вычисления с обычными. В этом случае возникает нежелательная ситуация, когда в символьное выражение преждевременно подставляется присвоенное переменной значение:

$y := 2 \quad \lim_{x \to 3^+} x^2 \cdot y \to 18$

Чтобы этого избежать, необходимо непосредственно перед символьным вычислением переопределить этот идентификатор, как это показано ниже:

$y := 2 \quad y := y$

$\lim_{x \to 3^+} x^2 \cdot y \to 9 \cdot y$

$a := y + 1 \quad a = 3$

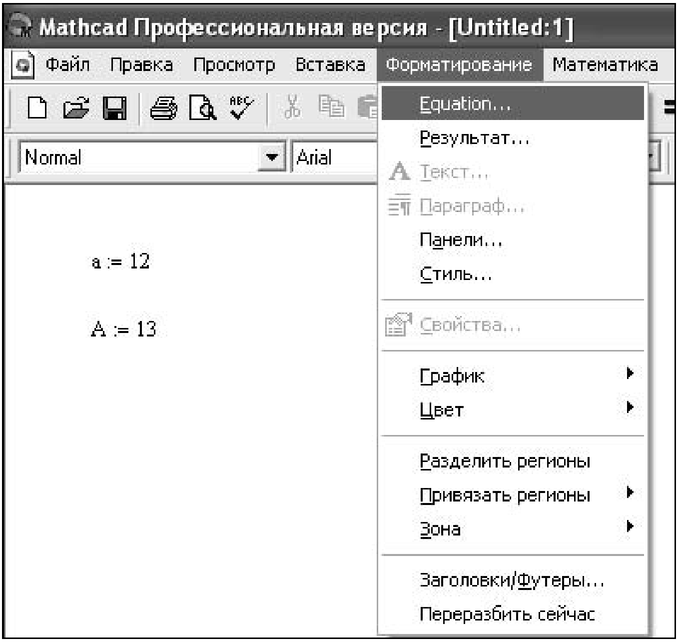
$(a - b)^2 \to (y + 1 - b)^2$

Как видно из этого примера, переменная y сохраняет свое значение 2. Сохраняет она и свою "способность" участвовать в дальнейших символьных вычислениях: в выражении $(a - b)^2$ вместо переменной a подставляется ее символьное выражение $y + 1$, а не числовое значение 3.

Форматирование формульных блоков осуществляется командой **Equation** выпадающего меню **Форматирование** (Format) (рис. 3.3). Эта команда вызывает диалоговое окно **Equation Format**, содержащее раскрывающийся список **Style Name** с именами стилей **Variables**, **Constant**, **User1**, **User2**, **User3**, **User4**, **User5**, **User6**, **User7** (рис. 3.4).

Кнопка **Modify** вызывает диалоговое окно с каталогом шрифтов и вариантами их начертания, размера и цвета.

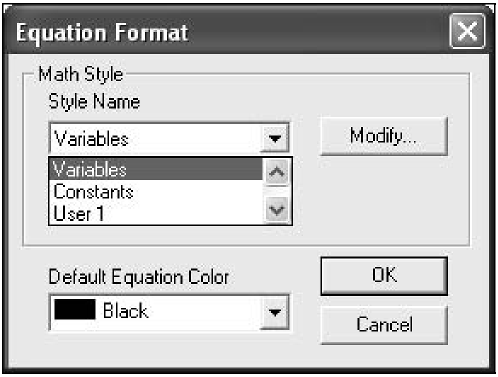
Существуют два способа форматирования модульных блоков: совместное и индивидуальное форматирование. Стиль **Variables** (Переменные) используется для совместного форматирования идентификаторов всех переменных и функций Mathcad-документа; стиль **Constant** (Константа) — для совместного форматирования всех констант Mathcad-документа. Остальные стили служат для индивидуального форматирования: для этого достаточно щелкнуть на соответствующем идентификаторе или константе и в раскрывающемся списке панели **Форматирование** (Formatting) выбрать нужный стиль. Индивидуальное форматирование имеет приоритет перед совместным в том смысле, что любые последующие изменения стилей **Variables** и **Constant** не затронут идентификаторов и констант, отформатированных индивидуально.



$a := 12$

$A := 13$

Рис. 3.3. Команда **Equation** меню **Форматирование** (Format)



Style Name: Variables

Default Equation Color: Black

Рис. 3.4. Диалоговое окно **Equation Format**

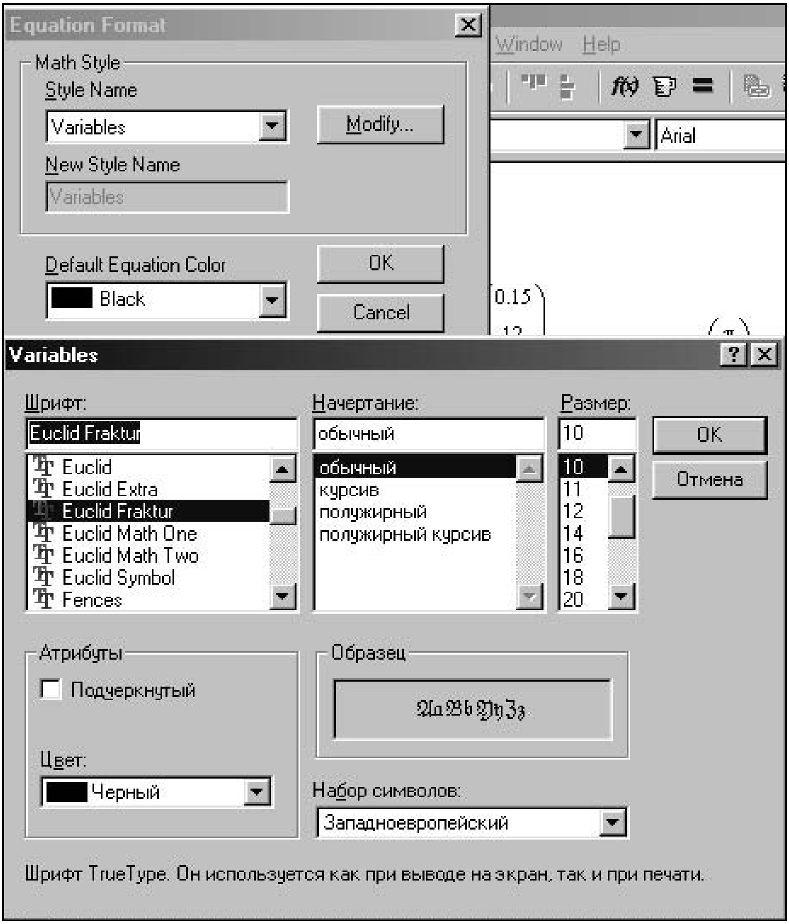
Рассмотрим следующий фрагмент рабочего листа:

$$a := 12$$

$$A := 13$$

$$Point := \begin{pmatrix} 0.15 \\ a \\ A \end{pmatrix} \quad Point = \begin{pmatrix} 0.15 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix} \quad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.5$$

$$f(x) := x^2$$



Equation Format

Math Style

Style Name: Variables

New Style Name: Variables

Default Equation Color: Black

Variables

Шрифт: Euclid Fraktur

Начертание: обычный

Размер: 10

Атрибуты

☐ Подчеркнутый

Цвет: Черный

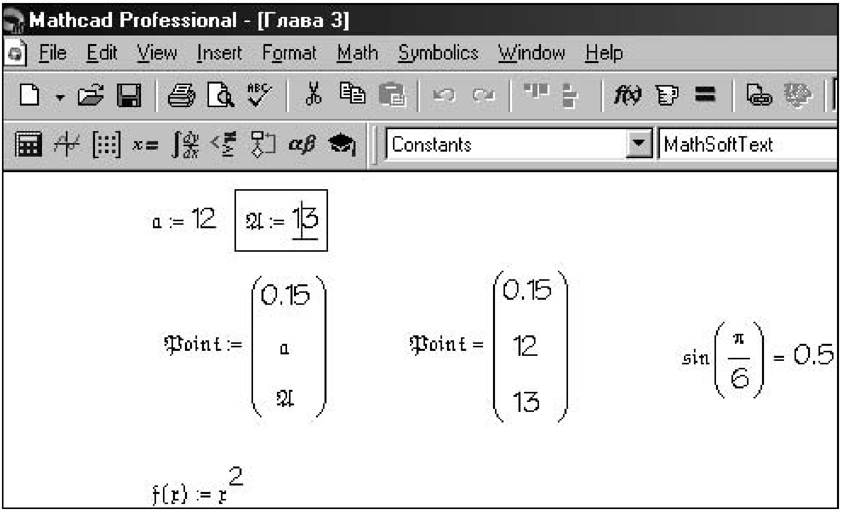
Набор символов: Западноевропейский

Шрифт TrueType. Он используется как при выводе на экран, так и при печати.

Рис. 3.5. Диалоговое окно **Equation Format**. Стиль **Variables**

Пусть требуется: заменить шрифт всех идентификаторов, исключая `Point`, шрифтом *Euclid Fraktur* размера 14; шрифт всех констант — шрифтом *Math Soft Text* размера 14; шрифт идентификатора `Point` — шрифтом *Arial* с полужирным очертанием размера 12. Вначале измените стиль **Variables** с помощью кнопки **Modify** окна **Equation Format** (рис. 3.5).

Стиль **Constant** можно изменить аналогичным образом. Однако можно поступить иначе: щелкните на константе `13` рабочего листа; в раскрывающемся списке панели **Форматирование** (Formatting) появится строка **Constants**; в раскрывающемся каталоге шрифтов выделите шрифт *Math Soft Text*; в раскрывающемся списке размеров — число 14 (рис. 3.6).



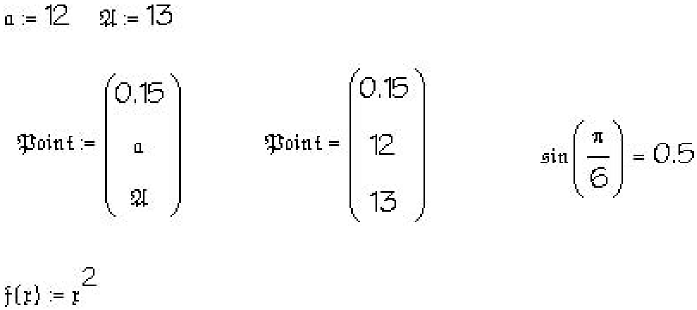
$\mathfrak{a} := 12 \quad \mathfrak{A} := 13$

$\mathfrak{Point} := \begin{pmatrix} 0.15 \\ \mathfrak{a} \\ \mathfrak{A} \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{Point} = \begin{pmatrix} 0.15 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{sin}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.5$

$\mathfrak{f}(\mathfrak{r}) := \mathfrak{r}^2$

Рис. 3.6. Результат изменения стилей констант и переменных

Рабочий лист после щелчка вне области формульных блоков, будет выглядеть так:

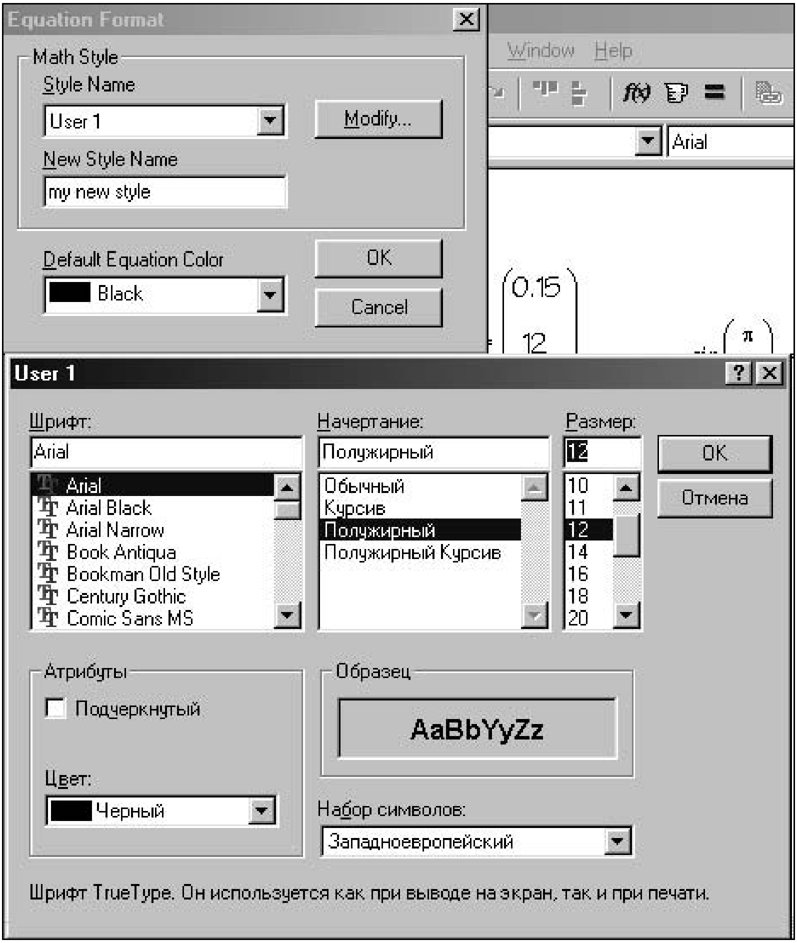


$\mathfrak{a} := 12 \quad \mathfrak{A} := 13$

$\mathfrak{Point} := \begin{pmatrix} 0.15 \\ \mathfrak{a} \\ \mathfrak{A} \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{Point} = \begin{pmatrix} 0.15 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{sin}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.5$

$\mathfrak{f}(\mathfrak{r}) := \mathfrak{r}^2$

Теперь определим индивидуальный стиль для форматирования идентификатора `Point`. В раскрывающемся списке **Style Name** (Название стиля) окна **Equation Format** выделите строку **User1** и введите в поле **New Style Name** (Название нового стиля) новое имя стиля, например, *my new style*. Щелкните на кнопке **Modify** и в появившемся окне **User1** выделите: шрифт *Arial*, начертание полужирное и размер 12 (рис. 3.7).



Style Name: User 1

New Style Name: my new style

Default Equation Color: Black

Шрифт: Arial

Начертание: Полужирный

Размер: 12

☐ Подчеркнутый

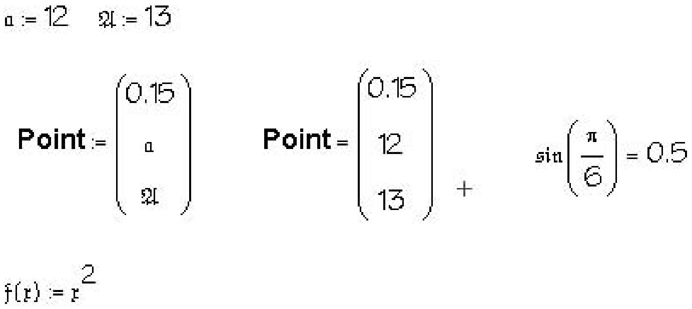
Цвет: Черный

Набор символов: Западноевропейский

Шрифт TrueType. Он используется как при выводе на экран, так и при печати.

Рис. 3.7. Диалоговое окно **Equation Format**.
Стиль **User1**

Закройте окна кнопками **OK**. Щелкните поочередно на каждом идентификаторе `Point` рабочего листа, не забывая при этом каждый раз выделять строку *my new style* в раскрывающемся списке стилей панели **Форматирование** (Formatting). После завершающего щелчка вне области формульных блоков рабочий лист будет выглядеть так:



$$a := 12 \quad \mathfrak{A} := 13$$

$$\mathbf{Point} := \begin{pmatrix} 0.15 \\ a \\ \mathfrak{A} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{Point} = \begin{pmatrix} 0.15 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix} + \qquad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.5$$

$$f(r) := r^2$$

Важно помнить следующее: идентификаторы, имеющие различные стили, различаются в пределах Mathcad-документа. Это видно на примере $f(r) := r^2 \quad f(3) = ▪$, где различие в стилях одного и того же идентификатора функции *f* не позволило вычислить значение этой функции в точке 3. Что касается идентификаторов встроенных функций, то здесь различие в стилях не имеет никакого значения. Например, на одном рабочем листе возможно следующее:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.5 \qquad \mathbf{sin}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.5$$

Задачи для самостоятельного решения

Т3.1. Доказать теорему 3.2 и следствие 3.1.

Т3.2. Доказать теорему 3.3.

Т3.3. Дано: точка M не является предельной точкой множества X, но $M \in X$. Доказать, что M — изолированная в X точка.

Т3.4. Даны замкнутое множество $X \subseteq Af^n$ и точка $M \in Af^n$. Доказать, что M является предельной точкой множества X, если и только если она является либо внутренней, либо граничной точкой множества X.

Т3.5. Привести пример числового множества, множество граничных точек которого совпадает с $(-\infty; +\infty)$.

Т3.6. Дана функция $f(x)=\frac{|x|}{x}$. Является ли точка $x = 0$ предельной точкой области определения функции f? Существует ли $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

Т3.7. Доказать, что $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ не существует, если $f(x)=\sin x$ или $f(x)=\cos x$.

Т3.8. Доказать, что функция Дирихле

$$D(x)=\begin{cases}0, \text{если x — иррациональное число;}\\ 1, \text{если x — рациональное число}\end{cases}$$

не имеет предела ни в одной точке промежутка $(-\infty; +\infty)$.

Т3.9. Пусть $x_0 \in (a; b)$ и для любой точки x из $(a; x_0) \cup (x_0; b)$ верно $\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)$. Известно, что $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0} \psi(x)=c$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=c$.

Т3.10. Привести пример двух всюду определенных функций, не имеющих пределов ни в одной точке из Af^1 вдоль промежутка $X = (-\infty; +\infty)$, но чьи сумма и произведение имеют пределы в каждой точке из Af^1 вдоль X.

Т3.11. Доказать, что если в точке $x_0 \in (a; b)$ существуют левый и правый пределы функции $f(x)$ и оба они равны c, то существует предел функции $f(x)$ в точке x_0, который равен c.

Т3.12. Пусть M_0 — предельная точка множества $X \subseteq Af^n$ и $f(M) \ge 0$ в каждой точке M множества X. Доказать, что $\lim\limits_{\substack{M\to M_0\\ M\in X}} f(x) \ge 0$, если этот предел существует.

Т3.13. Доказать, что любая точка M множества X является либо изолированной в X, либо внутренней или граничной точкой множества X.

Общая формулировка задач П3.1—П3.20

Вычислить правый и левый пределы функции $f(x)$ в точке x_0.

П3.1. $f(x)=\frac{x-|x|}{2x}, x_0=0$.

П3.2. $f(x)=\arccos(x-1), x_0=0$.

П3.3. $f(x) = \begin{cases} 2x+3 \text{ при } x>1 \\ 2x-3 \text{ при } x<1, \quad x_0=1. \\ 8 \text{ при } x=1 \end{cases}$

П3.4. $f(x)=\operatorname{sign}(\cos x), x_0=\frac{\pi}{2}$.

П3.5. $f(x)=\frac{2(1-x^2)+|1-x^2|}{3(1-x^2)-|1-x^2|}, x_0=1$.

П3.6. $f(x)=\frac{1}{3^{\frac{1}{3-x}}+x}, x_0=3$.

П3.7. $f(x)=e^{-\frac{1}{2x+1}}, x_0=-\frac{1}{2}$.

П3.8. $f(x)=\operatorname{sign}(x^2-2x-3)\ x_0=-1$.

П3.9. $f(x) = \begin{cases} x^3 \text{ при } x>3 \\ 20 \text{ при } x=3 \qquad , \quad x_0=3. \\ 24x+3 \text{ при } x<3 \end{cases}$

П3.10. $f(x)=\frac{3}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}, x_0=1$.

П3.11. $f(x)=\operatorname{sign}(x^2-2x-3)\, x_0=3$.

П3.12. $f(x)=\operatorname{sign}(\sin x), x_0=\pi$.

П3.13. $f(x)=\frac{x+|x|}{4x}, x_0=0$.

П3.14. $f(x)=\frac{3(1-x^2)-|1-x^2|}{2(1-x^2)+|1-x^2|}, x_0=-1$.

П3.15. $f(x)=\arcsin x, x_0=1$.

П3.16. $f(x)=5^{\frac{1}{x-3}}, x_0=3$.

П3.17. $f(x)=\frac{|x-1|}{x-1}, x_0=1$.

П3.18. $f(x)=4^{\frac{2}{x-1}}-3, x_0=1$.

П3.19.

$(x) = \begin{cases} (x-1)^2 \text{ при } x\le 2 \\ 5-x \text{ при } x>2 \end{cases}, \quad x_0=2.$

П3.20. $f(x)=\frac{x+2}{|x+2|}, x_0=-2$.

Напомним, что функция $f(x) = \operatorname{sign}(x)$ определяется так:

$$\operatorname{sign}(x)=\begin{cases} 1 \text{ при } x>0 \\ 0 \text{ при } x=0 \\ -1 \text{ при } x<0 \end{cases}.$$

Общая формулировка задач К3.1—К3.10

Вычислить правый и левый пределы функции $f(x)$ в точке x_0. Используя команду **Equation** меню **Форматирование**, добиться, чтобы все идентификаторы аргументов и переменных имели стиль *New Times Roman*, все константы — стиль *Arial*, а идентификаторы функций — индивидуальный стиль. Добиться также различий в очертании, размере и цвете заданных шрифтов.

К3.1. $x_0 = -1,\ f(x) = \dfrac{\sqrt{\pi} - \sqrt{\arccos(x)}}{\sqrt{|x+1|}}$.

К3.2. $x_0 = 0,\ f(x) = \sqrt{|x|} \cdot \arcsin\sqrt{|x|} \cdot \dfrac{e^{7\sqrt[3]{x}} - 1}{tg\sqrt[3]{x} \cdot \ln(1+3x)}$.

К3.3. $x_0 = 0,\ f(x) = \dfrac{2 + \cos\left(x^4\right)}{\left|\sqrt{x^3} \cdot \sin(2x)\right|} - \dfrac{3}{x^3}$.

К3.4. $x_0 = 0,\ f(x) = \left(\dfrac{\operatorname{arctg}\left(\dfrac{|2x|}{2-x^2}\right) - x}{x \cdot \sin\left(\dfrac{x^2}{6}\right)}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

К3.5. $x_0 = 0,\ f(x) = \dfrac{\sqrt[13]{\cos(4x)} - \sqrt[6]{\cos\left(5\sqrt[4]{x}\right)}}{1 - \cos(7x)}$.

К3.6. $x_0 = 1,\ f(x) = \left(\sqrt[5]{\cos^2(x-1)} + \sqrt{\operatorname{arctg}^3(x-1)}\right)^{\frac{1}{\operatorname{arctg}(x-1)^2}}$.

К3.7. $x_0 = 0,\ f(x) = \left(\sqrt[3]{\cos^2(x)} + \operatorname{arctg}^2 x\right)^{\frac{1}{\operatorname{arctg}\left(x^2\right)}}$.

К3.8. $x_0 = 1,\ f(x) = \dfrac{2\sin\sqrt{(x-1)^2 + \sqrt{(x-1)^3}} + \ln x}{x - 1 + \sqrt{(x-1)\sqrt{x-1}}}$.

К3.9. $x_0 = 0,\ f(x) = \dfrac{\sin\sqrt{x^2+\sqrt{x^3}} - \ln(x+1)}{x^{\frac{3}{2}} + \sqrt{x\sqrt{x}}}$.

К3.10. $x_0 = 0,\ f(x) = \dfrac{\sqrt{\pi} - \sqrt{\arccos(x-1)}}{\sqrt{|x|}}$.

Ответы, указания, решения

Т3.1. Теорема 3.1 и следствие 3.1 непосредственно следуют из определения предела функции и соответствующих свойств сходящихся последовательностей, сформулированных в теореме 2.2 и задаче Т2.5. Докажем, например, первое свойство. Пусть $a = \lim\limits_{\substack{M\to M_0\\ M\in X}} f(M)$, $b = \lim\limits_{\substack{M\to M_0\\ M\in X}} g(M)$ и $\{M_k\}$ — произвольная регулярная последовательность точек из X, сходящаяся к M_0. Тогда по определению предела функции $\{f(M_k)\} \to a$, $\{g(M_k)\} \to b$ при $\{M_k\} \to M_0$ вдоль X. Отсюда по теореме 2.2 $\lim\limits_{k\to\infty}(\alpha f(M_k) \pm$
$\pm\, \beta g(M_k)) = \alpha \lim\limits_{k\to\infty} f(M_k) \pm \beta \lim\limits_{k\to\infty} g(M_k) = \alpha a \pm \beta b,$

т. е. $\{\alpha f(M_k) \pm \beta g(M_k)\} \to \alpha a \pm \beta b$ при $\{M_k\} \to M_0$ вдоль X.

Ввиду произвольности выбора последовательности $\{M_k\}$ последнее означает, что $\lim\limits_{\substack{M\to M_0\\ M\in X}} (\alpha f(M) \pm \beta g(M)) = \alpha a \pm \beta b$.

Остальные утверждения доказываются аналогично.

Т3.2. Внутренняя, граничная и выколотая точки являются предельными по определению. Предположим теперь, что M — предельная точка множества X. Если M не является ни внутренней, ни выколотой из множества X, то каждая ее окрестность должна содержать хотя бы одну точку из Y, где $Y = Af^n \setminus (X \cup \{M\})$. Если к тому же M не является граничной точкой множества X, то M не является предельной точкой множества Y и, следовательно, M имеет окрестность, содержащую лишь конечное число точек из Y. Выберем среди них точку L, ближайшую к M, и положим $\varepsilon = \rho(M, L)$. Очевидно, окрестность $N(M, \varepsilon)$ уже не содержит точек из Y. Противоречие. Теорема доказана.

Т3.3. Указание: воспользоваться теоремой 3.1.

Т3.4. Замкнутое множество не может иметь выколотых точек. Остальное следует из теоремы 3.3.

Т3.5. Пусть X — множество всех рациональных чисел. Тогда $Y = Af^1 \backslash X$ — множество всех иррациональных чисел и каждая точка из Af^1 является предельной точкой обоих множеств X и Y, т. е. является граничной точкой множества X.

Т3.6. Ответы: да; нет.

Т3.7. Последовательность $\{x_k\} = \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k\right\}$ точек из $X = (0; +\infty)$ сходится к бесконечности. Но последовательность значений $\{\sin(x_k)\} = \{(-1)^k\}$ функции $\sin(x)$ расходится. Поэтому предел $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ не существует.

Т3.8. Пусть $x_0 \in Af^1$. Существуют сходящиеся к x_0 регулярные последовательности $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ рациональных и иррациональных чисел соответственно. Тогда чередующаяся последовательность $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_k, y_k, \ldots$ также сходится к x_0. Но последовательность значений функции Дирихле $\{D(x_1), D(y_1), D(x_2), D(y_2), \ldots, D(x_k), D(y_k), \ldots\} = \{1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, \ldots\}$ расходится. Поэтому $\lim\limits_{x\to x_0} D(x)$ не существует.

Т3.9. Рассмотрим произвольную регулярную последовательность $\{x_k\}$ точек из $(a; b)$, сходящуюся к x_0. Тогда $\varphi(x_k) \le f(x_k) \le \psi(x_k)$, $k = 1, 2, \ldots$ и $\{\varphi(x_k)\} \to c$, $\{\psi(x_k)\} \to c$. Отсюда по теореме 2.3 $\{f(x_k)\} \to c$. Последнее, ввиду произвольности выбора $\{x_k\}$, означает, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c$.

Т3.10. Указание: рассмотреть две пары функций $D(x)$ и $D_1(x)$, $D(x)$ и $D_2(x)$, где $D(x)$ — функция Дирихле, $D_1(x) = -D(x)$,

$$D_2(x) = \begin{cases} 0, \text{если x — рациональное число;} \\ 1, \text{если x — иррациональное число.} \end{cases}$$

Т3.11. Рассмотрим произвольную регулярную последовательность $\{x_k\}$ точек из $(a; b)$, сходящуюся к x_0. Предположим, что в $\{x_k\}$ имеется лишь конечное число членов, превосходящих x_0. Пусть x_r — тот из них, чей номер r — наибольший. Согласно утверждению задачи Т2.4, подпоследовательность $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots$ тоже сходится к x_0. Но тогда последовательность $f(x_{r+1}), f(x_{r+2}), \ldots$ сходится к c, поскольку $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = c$. Отсюда $\{f(x_k)\} \to c$ (см. задачу Т2.9), т. е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c$. Случай, когда в $\{x_k\}$

имеется лишь конечное число членов, меньших x_0, рассматривается аналогично.

Пусть в $\{x_k\}$ имеется бесконечное число членов как превосходящих x_0, так и меньших x_0. Обозначим соответствующие подпоследовательности из таких членов последовательности $\{x_k\}$ через $\{y_k\}$ и $\{z_k\}$. Согласно утверждению задачи Т2.4, $\{y_k\} \to x_0$, $\{z_k\} \to x_0$ и, следовательно, $\{f(y_k)\} \to c$, $\{f(z_k)\} \to c$. Последнее означает, что для любой окрестности $N(c, \varepsilon)$ можно указать такую точку в $\{f(y_k)\}$ и такую точку в $\{f(z_k)\}$, что все следующие за ними члены соответствующих последовательностей окажутся в $N(c, \varepsilon)$. Пусть $f(x_p)$ — одна из этих двух точек, имеющая наибольший номер p в последовательности $\{f(x_p)\}$. Поскольку все точки $f(x_{p+1}), f(x_{p+2}), \ldots$ принадлежат $N(c, \varepsilon)$, то ввиду произвольности выбора этой окрестности $\{f(x_k)\} \to c$, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c$.

Т3.12. Пусть $\lim\limits_{\substack{M\to M_0 \\ M\in X}} f(M) = a$. Положим $\{z_k\} = \{0, 0, \ldots, 0, \ldots\}$. Тогда $\{z_k\} \to 0$. Если теперь $\{f(M_k)\} \to a$, то $z_k \le f(M_k)$ и, следовательно, по теореме 2.3 $0 = \lim\limits_{k\to\infty} z_k \le \lim\limits_{k\to\infty} f(M_k) = a$, т. е. $a \ge 0$.

Т3.13. Указание: воспользоваться утверждением задачи Т3.3 и теоремой 3.3.

П3.1. Ответы: 0; 1.

П3.2. Ответы: π; не существует.

П3.3. Ответы: 5; –1.

П3.4. Ответы: –1; 1.

Глава 4

Непрерывные функции

Пусть даны множество $X \subseteq Af^n$, точка $M_0 \in X$ и функция $f(M)$, определенная в каждой точке множества X. Функция f называется непрерывной в точке M_0 вдоль X, если ее предел в точке M_0 вдоль X равен $f(M_0)$.

Это определение корректно, поскольку любая точка множества X является либо его предельной точкой, либо изолированной в X (задача Т3.13), что согласуется с определением предела функции, введенным в *гл. 3*.

Функция f называется непрерывной на множестве X, если она непрерывна вдоль X в каждой точке множества X. Точки из X, в которых функция f не является непрерывной вдоль X, называются точками разрыва функции f на множестве X.

В определении непрерывности имеется фраза "вдоль X", которая означает непрерывность функции f в точке M_0 только "со стороны множества X". Очевидно, если M_0 — внутренняя точка множества X, то фраза "вдоль X" становится избыточной. Отметим также, что всякая функция непрерывна вдоль X в любой изолированной точке этого множества *(см. гл. 3)*.

Рассмотрим функцию одной переменной $y = f(x)$, определенную на отрезке $[a; b]$. В этом случае непрерывность функции f в точке b (в точке a) вдоль $[a; b]$ эквивалентна известному понятию непрерывности функции f в точке b слева (в точке a справа).

Иногда удобно использовать эквивалентное определение непрерывности функции в точке. Введем обозначения: $\Delta M = (\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n)$, $M_0 = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$, $M = M_0 + \Delta M = (m_1 + \Delta x_1, m_2 + \Delta x_2, \ldots, m_n + \Delta x_n)$, $O = (0, 0, \ldots, 0)$ — нулевая точка из Af^n. Тогда разность $\Delta f(M_0, \Delta M) = f(M) - f(M_0) = f(M_0 + \Delta M) - f(M_0)$, где $M_0 + \Delta M \in X$, называется приращением функции f в точке M_0, соответствующим приращениям $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ аргументов в этой точке.

Утверждение 4.1. Функция f непрерывна в точке M_0 вдоль X, если и только если $\lim\limits_{\substack{\Delta M \to O \\ M_0+\Delta M \in X}} \Delta f(M_0, \Delta M) = 0$.

Доказательство утверждения дано в задаче T4.1.

Пусть даны функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n переменных и n функций $g_1, \ldots, g_n$ k переменных $t_1, \ldots, t_k$. Тогда функция $f(g_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, g_n(t_1, \ldots, t_k))$, если она определена, называется суперпозицией функций $f, g_1, \ldots, g_n$ или сложной функцией k переменных $t_1, \ldots, t_k$.

Примеры. Пусть $f(x_1, x_2) = \ln(x_1 + x_2)$, $g_1(t_1, t_2, t_3) = \sin t_1$, $g_2(t_1, t_2, t_3) = e^{t_1 t_2 t_3}$. Тогда $f(g_1(t_1, t_2, t_3), g_2(t_1, t_2, t_3)) = \ln(\sin t_1 + e^{t_1 t_2 t_3})$ — суперпозиция функций f, g_1, g_2.

Если $f(x) = \sqrt{x}$, $g(t) = -t^2 - 5$, то сложная функция $f(g(t))$ не определена ни при каких значениях переменной t.

Теорема 4.1. Функция, являющаяся суммой, разностью, произведением, частным или суперпозицией непрерывных функций, также непрерывна на своей области определения.

Доказательство теоремы дано в задаче T4.2.

Основными элементарными функциями независимой переменной x называются функции $f(x) = a$, $f(x) = a^x$, $f(x) = x^a$, $f(x) = \log_a x$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \operatorname{tg} x$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $f(x) = \arcsin x$, $f(x) = \arccos x$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $f(x) = \operatorname{arcctg} x$, где a — константа. Функция, получаемая из основных элементарных функций с помощью конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и суперпозиции, называется элементарной. Так как основные элементарные функции непрерывны на их области определения (см. задачу T4.3), то в силу теоремы 4.1 справедливо следующее утверждение.

Следствие 4.1. Всякая элементарная функция непрерывна на своей области определения.

Однако существуют непрерывные функции, не являющиеся элементарными, как например, функция $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \le 0 \\ x+1, \text{ если } x > 0 \end{cases}$.

Теорема 4.2 (об устойчивости знака непрерывной функции).

Пусть функция $f(M)$ определена на множестве $X \subseteq Af^n$ и непрерывна в точке $M_0 \in X$ вдоль X. Если M_0 не является изолированной в X и $f(M_0) \neq 0$, то существует такая окрестность N точки M_0, что для любой точки M из $N \cap X$ числа $f(M)$ и $f(M_0)$ будут иметь одинаковый знак.

Доказательство теоремы дано в задаче Т4.4.

Следствие 4.2. Пусть функция $f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ непрерывна на Af^n. Тогда множество всех точек M из Af^n, удовлетворяющих неравенству $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0$ (или уравнению $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$), замкнуто.

Следствие 4.3. Множество всех точек из Af^n, удовлетворяющих системе уравнений и нестрогих неравенств, левые и правые части которых являются непрерывными на Af^n функциями, замкнуто.

Доказательство следствий 4.2, 4.3 дано в задаче Т4.5.

При доказательстве теоремы 2.4 использовалось понятие верхней грани числовой последовательности. Обобщим его для произвольного числового множества.

Пусть дано непустое числовое множество Y. Если каждое число из Y меньше или равно (больше или равно) некоторого числа C, то C называется верхней (нижней) гранью множества Y. Наименьшая верхняя (наибольшая нижняя) грань множества Y называется его точной верхней (нижней) гранью.

Приведем без доказательства вспомогательное утверждение, которое уже использовалось ранее при обосновании теоремы 2.4.

Лемма 4.1. Если непустое числовое множество имеет верхнюю (нижнюю) грань, то оно имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

Непрерывные функции одной переменной обладают рядом важных специфических свойств, которые формулируются в следствиях 4.4—4.6.

Следствие 4.4 (о существовании корня). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков, то существует такая точка $c \in (a; b)$, что $f(c) = 0$.

Доказательство. Пусть для определенности $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Обозначим Y — множество всех точек из $[a; b]$, в которых значения функции $f(x)$ отрицательны. Очевидно, b является верхней гранью множества Y. Поэтому Y имеет наименьшую верхнюю грань (лемма 4.1), которую обозначим c. Если $f(c) \neq 0$, то по теореме 4.2 найдется окрестность $N(c; \varepsilon)$ такая, что для любой точки из $N(c; \varepsilon) \cap [a; b]$ значение функции f будет иметь тот же знак, что и число $f(c)$. При этом число ε можно выбрать достаточно малым с тем, чтобы $(c; c+\varepsilon) \subseteq (a; b)$ при $c < b$ или $(c-\varepsilon; c) \subseteq (a; b)$ при $c > a$.

Если $f(c) < 0$, то $c < b$ и в любой точке интервала $(c; c+\varepsilon)$ значение функции f отрицательно. А это противоречит тому, что c — верхняя грань множества таких точек. Если $f(c) > 0$, то $c > a$ и в каждой точке из $(c - \varepsilon; c)$ значение функции f положительно. Но тогда, например, точка $c-\frac{\varepsilon}{2}$ будет верхней гранью множества Y, откуда следует, что c не является верхней гранью этого множества. Итак, остается только одна возможность: $f(c) = 0$. Следствие доказано.

Следствие 4.5 (о промежуточном значении). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Если $f(a) \neq f(b)$, то для любого числа C, расположенного между $f(a)$ и $f(b)$, найдется такая точка $c \in (a; b)$, что $f(c) = C$.

Доказательство следствия дано в задаче Т4.6.

Следствие 4.5 означает, что все значения, принимаемые непрерывной функцией $f(x)$, когда x изменяется в каком-либо промежутке X, сами также заполняют сплошь некоторый промежуток Y.

Пусть функция $y = f(x)$ такова, что любые две различные точки из ее области определения $X = D(f)$ имеют различные образы в ее области значений $Y = E(f)$ или, что равносильно, каждое число y из Y имеет точно один прообраз x из X. Соответствие $Y \xrightarrow{g} X$, при котором $x = g(y)$ и x — прообраз числа y, называется функцией, обратной к функции f, и обозначается $x = f^{-1}(y)$.

Очевидно, что первоначальная функция $y = f(x)$ является обратной к функции $x = g(y)$, т. е. определена пара взаимно обратных функций $f(x)$, $f^{-1}(y)$.

Примеры. Пусть $y = f(x)$, $f(x) = 2x + 1$, $D(f) = E(f) = (-\infty; +\infty)$. Тогда функция $x=\frac{1}{2}(y-1)$ является обратной к функции f.

Пусть $y = f(x)$, $f(x) = 2^x$, $D(f) = (-\infty; +\infty)$, $E(f) = (0; +\infty)$. Тогда функция $x = \log_2 y$ является обратной к функции f. Если же $f(x) = \log_2 x$, то обратной к f является функция $x = 2^y$. Таким образом, функции $y = 2^x$, $x = \log_2 y$ образуют пару взаимно обратных функций.

Для функции $y = f(x)$, где $f(x) = x^2$, с областью определения $D(f) = (-\infty; +\infty)$, нельзя определить обратную функцию, т. к. $f(x_0) = f(-x_0) = x_0^2$, т. е. две различные точки x_0 и $-x_0$ из области определения этой функции имеют одинаковый образ x_0^2. Но если рассмотреть эту же функцию на области определения $X = [0; +\infty)$, то обратная к ней функция существует и имеет вид $x = \sqrt{y}$.

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (неубывающей) на промежутке X, если для любых точек $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$, верно $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) \leq f(x_2)$).

Функция $y = f(x)$ называется убывающей (невозрастающей) на промежутке X, если для любых точек $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$, верно $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$).

Функции, о которых шла речь в этих определениях, называются монотонными.

Следствие 4.6. Пусть $y = f(x)$ является непрерывной возрастающей (убывающей) функцией на промежутке X. Тогда обратная ей функция $x = g(y)$ является непрерывной возрастающей (убывающей) функцией на промежутке Y значений функции $f(x)$, когда $x \in X$.

Утверждение этого следствия геометрически иллюстрируется на рис. 4.1, а его доказательство дано в задаче 4.7.

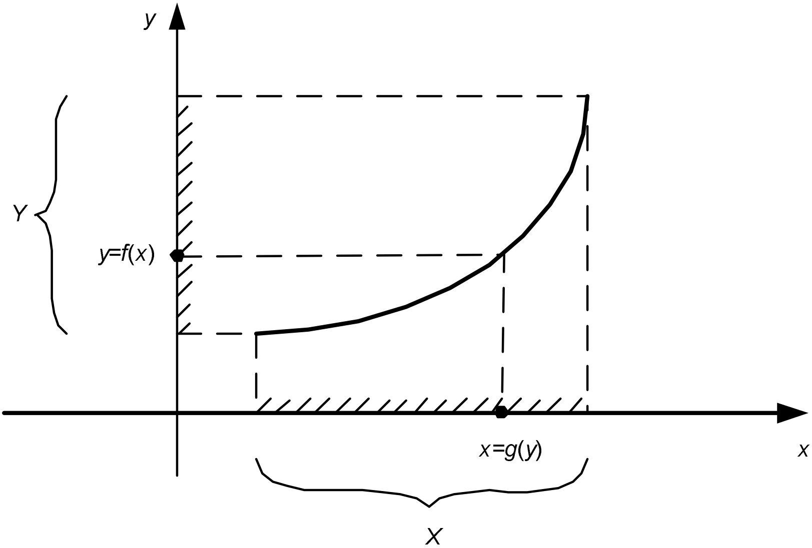


Рис. 4.1. Иллюстрация к следствию 4.6

Компьютерный раздел

Клавиша <@> вызывает шаблон для построения графиков функций одной переменной в прямоугольных координатах (рис. 4.2). Внешняя рамка, снабженная тремя маркерами изменения размеров, служит для перемещения графика и изменения его размеров. Собственно график будет находиться внутри меньшей рамки, снизу и слева от которой находятся две метки: нижняя — для ввода идентификаторов независимых переменных, левая — для ввода идентификаторов соответствующих им функций. Переход от метки к метке осуществляется клавишей <Tab>.

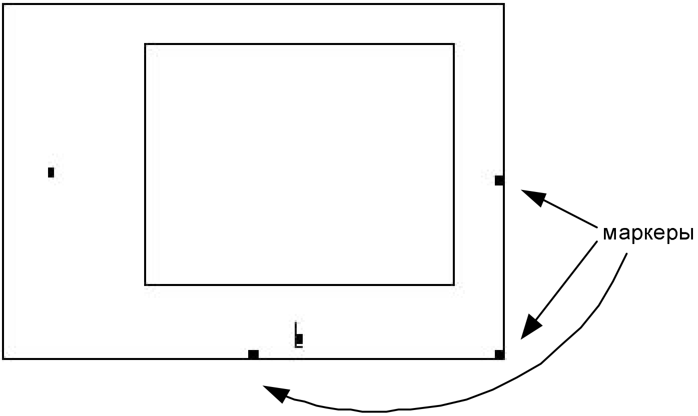


Рис. 4.2. Шаблон для построения графиков функций одной переменной в прямоугольных координатах

По умолчанию диапазон изменения значений функций вдоль оси $0y$ определяется автоматически, а диапазон изменения значений независимых переменных вдоль оси $0x$ задается от -10 до 10. Для изменения этих диапазонов имеются специальные метки. Две такие метки для ввода границ изменения графиков вдоль оси $0x$ появляются слева и справа от вводимых идентификаторов независимых переменных. Еще две метки для ввода границ изменения графиков вдоль оси $0y$ появляются ниже и выше вводимых идентификаторов функций (рис. 4.3). С помощью одного шаблона можно строить несколько графиков функций на одной координатной плоскости (важно только, чтобы независимые переменные этих функций имели одинаковые диапазоны изменения). Для этого на месте метки снизу от оси $0x$ вводятся через запятую идентификаторы переменных, а на месте слева от оси $0y$ — идентификаторы соответствующих им функций.

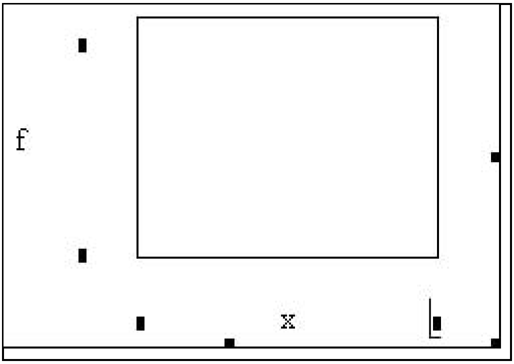


Рис. 4.3. Шаблон для построения графика функции $f(x)$

Рассмотрим пример построения на одной координатной плоскости графиков четырех функций, заданных различными способами: две функции $y = \mathrm{tg}x$ и $y = x^2 + 1$, определенные на интервале $[0; \pi/2)$; функция $y = t$, зависящая от ранжированной переменной t с диапазоном изменения от 0 до $\pi/2$ и с шагом изменения 0.1; и, наконец, функция, заданная в табличном виде:

x	0	0.3	0.5	0.6	0.9	1	1.1	1.2
y	5	2	5.5	2.5	3	4	1	6

В начале рабочего листа определим эти функции следующим образом:

$$f(x) := x^2 + 1 \qquad g(t) := t \qquad t := 0,\ 0.1\ ..\ \frac{\pi}{2}$$

$$Y := \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5.5 \\ 2.5 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad X := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.3 \\ 0.5 \\ 0.6 \\ 0.9 \\ 1 \\ 1.1 \\ 1.2 \end{pmatrix}$$

Функция тангенс является встроенной функцией Mathcad и имеет вид `tan(x)`, а i-е координаты векторов X и Y будут совпадать с координатами i-й точки графика четвертой функции, заданной табличным способом.

Для построения графиков клавишей <@> введите шаблон. На месте метки под осью 0*x* введите имена независимых переменных `x`, `x`, `t`, `X`; на месте появившихся меток для ввода диапазонов изменения этих переменных введите числа 0 и π/2. На месте метки слева от оси 0*y* введите имена функций `tan(x)`, `f(x)`, `g(t)`, `Y` (через запятую); на месте появившихся меток для ввода диапазонов изменения этих функций введите `min(Y) - 1` — внизу и `max(Y) + 1` — вверху, как это показано на рис. 4.4.

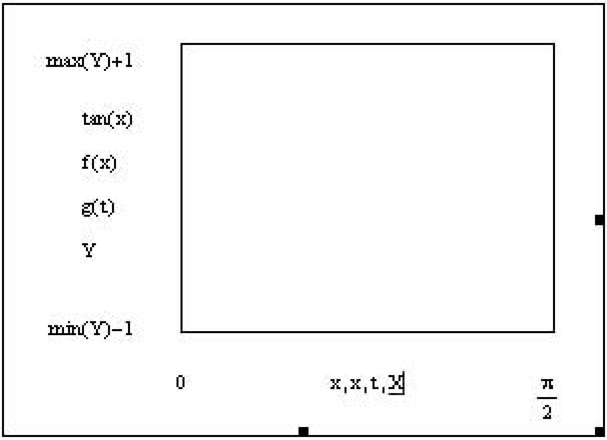
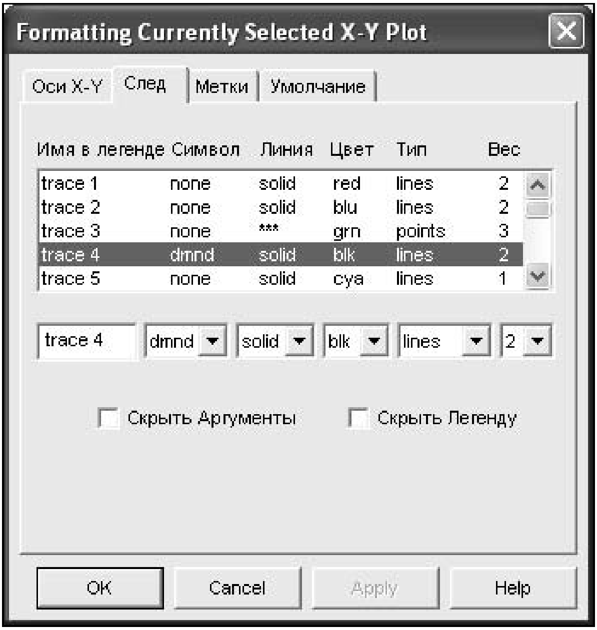


Рис. 4.4. Пример построения графиков четырех функций

Задание и изменение внешнего вида графиков пользователем осуществляется с помощью диалогового окна **Formatting Currently Selected X-Y Plot** (Форматирование текущего графика), которое вызывается двойным щелчком кнопки мыши по выделенной области графика. Это окно имеет четыре вкладки: **Оси X-Y** (X-Y Axes) — для форматирования осей графиков, **След** (Traces) — для форматирования самих графиков, **Метки** (Labels) — для оформления заголовков и подписей к графикам, **Умолчание** (Defaults) — для применения на графиках установок по умолчанию. При активизации вкладки **След** (Traces) открывается 6 полей для выбора параметров графиков, как это показано на рис. 4.5.

Поле **Имя в легенде** (Legend Label) присваивает имя *trace i* *i*-му графику, ставя этому графику в соответствие набор параметров, содержащихся в строке *trace i*. Поле **Символ** (Symbol) задает вид каждой точки соответствующего графика. Поле **Линия** (line) задает вид линии соответствующего графика: **solid** (сплошная), **dash** (штриховая), **dot** (точечная) **dadot** (штрихпунктирная). При этом поле **Линия** (line) доступно, если в поле **Тип** (Type) выбран параметр **lines**. Поле **Тип** (Type) задает один из семи типов графика: **lines** — в виде кривой, **bar** — в виде столбцов и т. д. Поля **Цвет** (Color) и **Вес** (Weight) задают соответственно цвет и толщину линий.



Имя в легенде	Символ	Линия	Цвет	Тип	Вес
trace 1	none	solid	red	lines	2
trace 2	none	solid	blu	lines	2
trace 3	none	***	grn	points	3
trace 4	dmnd	solid	blk	lines	2
trace 5	none	solid	cya	lines	1

trace 4 | dmnd | solid | blk | lines | 2

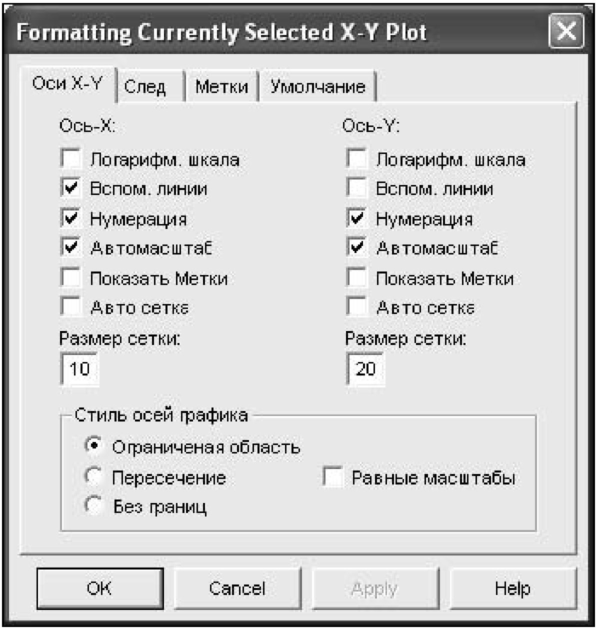
☐ Скрыть Аргументы ☐ Скрыть Легенду

Рис. 4.5. Диалоговое окно **Formatting Currently Selected X-Y Plot**, вкладка **След**

В нижней части вкладки **След** (Traces) расположены две опции: опция **Скрыть Аргументы** (Hide Arguments) регулирует вывод слева от оси 0*y* фрагментов линий графиков; опция **Скрыть Легенду** (Hide Legend) регулирует вывод под графиком имен *trace i* соответствующих графиков.

Вкладка **Оси X-Y** (X-Y Axes) содержит 6 опций для каждой координаты (см. рис. 4.6). Охарактеризуем наиболее используемые из них. Опция **Вспом. линии** (Grid Lines) задает отображение сетки в виде прямых, параллельных осям; опция **Нумерация** (Numbered) отображает координаты линий сетки. Опция **Автосетка** (Auto Grid) автоматически определяет число прямых в сетке (если включена опция **Вспом. линии** (Grid Lines)); если опция **Автосетка** (Auto Grid) отключена, то активизируются поля **Размер сетки** (Number of Grids) для задания количества прямых в сетке.

После выполнения всех необходимых установок окно **Formatting Currently Selected X-Y Plot** следует закрыть, щелкнув на кнопке **OK**.



Ось-X:
☐ Логарифм. шкала
☑ Вспом. линии
☑ Нумерация
☑ Автомасштаб
☐ Показать Метки
☐ Авто сетка
Размер сетки: 10

Ось-Y:
☐ Логарифм. шкала
☐ Вспом. линии
☑ Нумерация
☑ Автомасштаб
☐ Показать Метки
☐ Авто сетка
Размер сетки: 20

Стиль осей графика
● Ограниченая область
○ Пересечение
○ Без границ
☐ Равные масштабы

Рис. 4.6. Диалоговое окно **Formatting Currently Selected X-Y Plot**, вкладка **Оси X-Y**

Последующее нажатие клавиши <Enter> приведет к появлению графиков на экране. В нашем случае, при установках, сделанных на рис. 4.5, 4.6, это будет выглядеть так, как показано на рис. 4.7.

В Mathcad можно производить трассировку графика, построенного в прямоугольной системе координат. Трассировка позволяет автоматически определять координаты точек такого графика. Пусть, например, построен график функции $\varphi 1(x)$, которая определена на рабочем листе Mathcad-документа следующим образом:

$$\varphi 1(x) := \frac{1}{2} \cdot \sin(x) + \frac{1}{2} \cdot \cos(x)$$

После щелчка правой кнопкой мыши на области графика появится меню, показанное на рис. 4.8.

После выбора команды **Трассировка** (Trace) этого меню появится диалоговое окно **X-Y Trace** (Трассировка X-Y), показанное на рис. 4.9. Подведите курсор мыши к линии графика и щелкните левой кнопкой мыши. Появится перекрестие из двух перпендикулярных пунктирных линий, которое можно перемещать вдоль графика, не отпуская левой кнопки мыши.

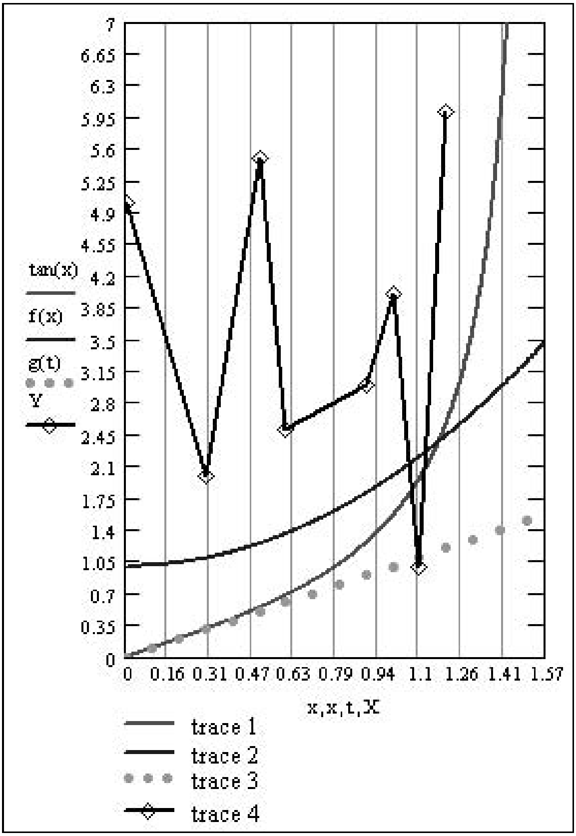


Рис. 4.7. Графики четырех функций на одной координатной плоскости

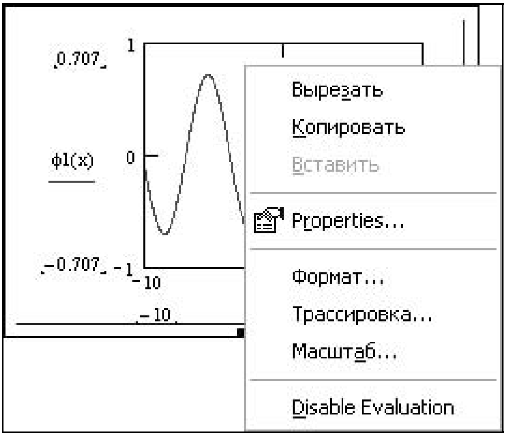
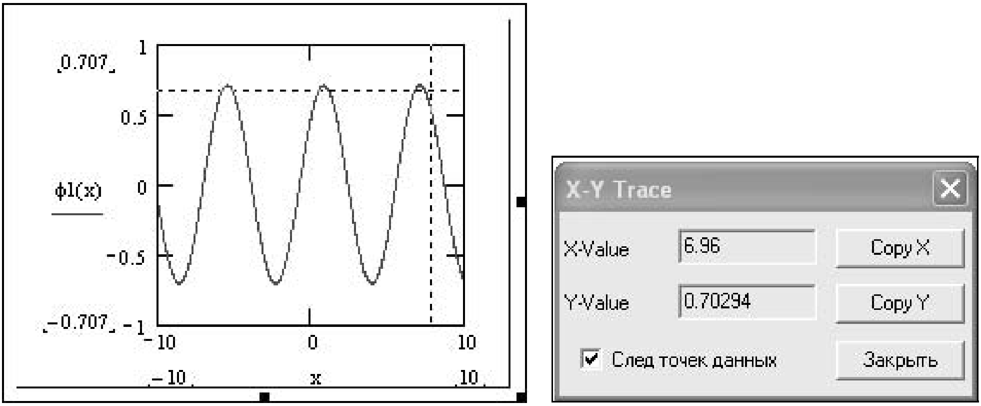


Рис. 4.8. Контекстное меню

Координаты соответствующих точек при этом будут появляться в полях **X-Value** (Значение X), **Y-Value** (Значение Y) окна **X-Y Trace**. Предварительно отметьте опцию **След точек данных** (Trace Data Points) этого окна с тем, чтобы перекрестие удерживалось на линии графика.



X-Value 6.96

Y-Value 0.70294

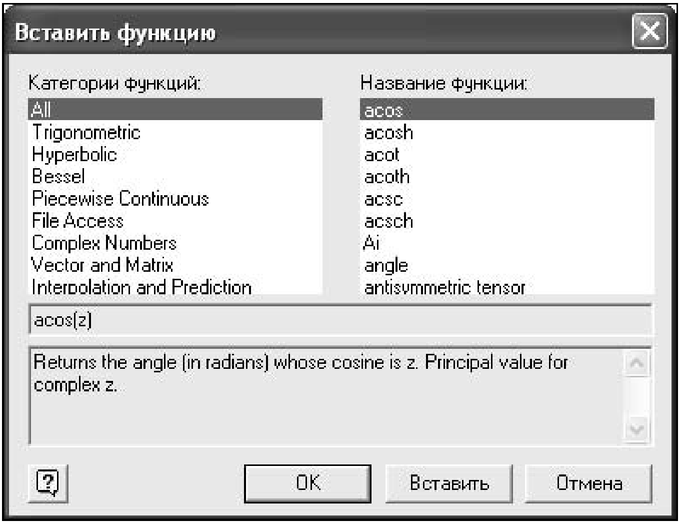
☑ След точек данных

Рис. 4.9. Диалоговое окно **X-Y Trace** графика функции

В Mathcad ввод любой встроенной функции удобно производить с помощью диалогового окна **Вставить функцию** (Insert Function), содержащего два прокручиваемых списка (рис. 4.10). Левый список **Категории функций** (Function Category) содержит названия групп, на которые разбиты встроенные функции, правый **Название функции** (Function Name) — идентификаторы этих функций. Для выбора группы функций надо выделить соответствующую строку в левом списке, при этом в правом списке появятся идентификаторы этой группы функций в алфавитном порядке. Если теперь выделить какой-либо из этих идентификаторов, то в окнах под списками появится определение соответствующей функции. Щелчок по кнопке **Вставить** или кнопкой **OK** приведет к появлению шаблона функции на рабочем листе (при этом во втором случае диалоговое окно **Вставить функцию** (Insert Function) исчезнет с экрана).

Встроенные функции можно вставлять в Mathcad-документ и без использования диалогового окна **Вставить функцию** (Insert Function): в нужном месте рабочего листа достаточно ввести идентификатор функции со списком аргументов в круглых скобках. При этом необходимо внимательно следить за правильностью ввода идентификатора функции и, в частности, за соответствием описанию функции малых и больших букв ее идентификатора.

В Mathcad встроенная функция `if(L, A, B)` зависит от трех выражений `L`, `A`, `B`, причем `L` — логическое (булево) выражение. Результатом выполнения этой функции будет `A` или `B`, в зависимости от того, какое значение — истинное или ложное — примет соответственно логическое выражение `L`. Пусть, например, требуется определить функцию `f(x)`, которая равна $-2x$ при $x \le 0$ и равна $\operatorname{arctg} x$ при $x > 0$. В нужном месте рабочего листа введите `f(x)` и знак присваивания := клавишей <:>. Затем с помощью команды **Функция** (Function) меню **Вставка** (Insert) вызовите диалоговое окно **Вставить функцию** (Insert Function), изображенное на рис. 4.10.



acos(z)

Returns the angle (in radians) whose cosine is z. Principal value for complex z.

Рис. 4.10. Диалоговое окно **Вставить функцию**

Для выбора функции `if` в левом списке выберите строку **All** и затем в правом списке — строку **if**. Щелчок по кнопке **Вставить** (Insert) приведет к появлению шаблона функции `if` справа от знака присваивания: `f(x):=if(▮,▮,▮)`. На месте правой метки этого шаблона введите логическое выражение $x \le 0$, на месте второй — выражение $-2x$, затем синим курсором выделите третью метку. Далее, в диалоговом окне **Вставить функцию** (Insert Function) в левом списке выделите строку **Trigonometric** (Тригонометрия), а в правом — строку **atan** с идентификатором функции арктангенса. Щелчок по кнопке **OK** приведет к появлению шаблона `atan(▮)` (при этом диалоговое окно исчезнет). На месте метки этого шаблона введите `x`. После нажатия клавиши <Enter> функция `f(x)` будет определена:

$$f(x) := \mathrm{if}(x \le 0, -2 \cdot x, \mathrm{atan}(x))$$

Так, если на рабочем листе теперь ввести выражение `f(1)`, а затем знак символьного вывода →, то справа от этого знака появится значение $\frac{\pi}{4}$ как результат arctg(1); в то же время `f(-1)` → `2`, что соответствует результату (–2) · (–1).

Задачи для самостоятельного решения

Т4.1. Доказать утверждение 4.1.

Т4.2. Доказать теорему 4.1.

Т4.3. Доказать, что основные элементарные функции непрерывны на их области определения.

Т4.4. Доказать теорему 4.2.

Т4.5. Доказать следствия 4.2, 4.3.

Т4.6. Доказать следствие 4.5.

Т4.7. Доказать следствие 4.6.

Т4.8. Известно, что: а) в точке x_0 функция $f(x)$ непрерывна, а функция $g(x)$ разрывна; б) в точке x_0 функции $f(x)$ и $g(x)$ разрывны. Что можно сказать в этих случаях о непрерывности в точке x_0 функций $f(x) + g(x)$ и $f(x) \cdot g(x)$?

Т4.9. Можно ли утверждать, что квадрат разрывной в точке x_0 функции является разрывной функцией в этой же точке?

Т4.10. Исследовать непрерывность сложных функций:

1) $y = f(f(f(x)))$, где $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$;

2) $f(g(x))$ и $g(f(x))$, где $g(x) = x(1\text{-}x^2)$, $f(x) = \text{sign}(x)$,

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1, \text{ если } x < 0; \\ 0, \text{ если } x = 0; \\ 1, \text{ если } x > 0. \end{cases}$$

Т4.11. Пусть два числовых множества A и B имеют соответственно точные нижние грани A_* и B_*. Доказать, что $A_* \le B_*$, если для каждого числа $b \in B$ найдется число $a \in A$ такое, что $a \le b$.

Т4.12. Пусть два числовых множества A и B имеют соответственно точные верхние грани A^* и B^*. Доказать, что $A^* \le B^*$, если для каждого числа $a \in A$ найдется число $b \in B$ такое, что $a \le b$.

Общая формулировка задач К4.1—К4.11

Построить график функции $y = f(x)$ и с его помощью определить точки разрыва функции f на множестве Af[1].

К4.1. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, \text{ если } x < 0 \\ (x+1)^2, \text{ если } 0 \le x \le 2 \\ 1 - x, \text{ если } x > 2 \end{cases}.$$

К4.2. $$f(x) = \begin{cases} 1 - x^3, \text{ если } x < 0 \\ (x-1)^3, \text{ если } 0 \le x \le 2 \\ 4 - x, \text{ если } x > 2 \end{cases}.$$

К4.3. $$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x > \dfrac{3\pi}{2} \\ \dfrac{x \cdot \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\sin x}, \text{ если } \dfrac{\pi}{2} < x \le \dfrac{3\pi}{2} \\ x^2 - \dfrac{\pi}{12}, \text{ если } \dfrac{\pi}{4} \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ \cos x, \text{ если } x < \dfrac{\pi}{4} \end{cases}.$$

К4.4. $$f(x) = \begin{cases} (x+1) \cdot 2^{-\left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{x}\right)}, \text{ если } x \ne 0 \\ 0, \text{ если } x = 0 \end{cases}.$$

К4.5.
$$f(x)=\begin{cases}\arcsin\left(\dfrac{1}{x}\right), \text{ если } |x|\ge 1\\ \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right), \text{ если } |x|<1,\ x\ne 0\\ 0, \text{ если } x=0\end{cases}.$$

К4.6.
$$f(x)=\begin{cases}\arccos\left(\dfrac{1}{x}\right), \text{ если } |x|\ge 1\\ \operatorname{arcctg}\left(\dfrac{1}{x}\right), \text{ если } |x|<1,\ x\ne 0\\ 0, \text{ если } x=0\end{cases}.$$

К4.7.
$$f(x)=\begin{cases}\ln\left(\ln\left(\ln\left(1+x^3\right)\right)\right), \text{ если } x>-1\\ \ln\left(\ln\left(1-x^3\right)\right), \text{ если } x\le -1\end{cases}.$$

К4.8.
$$f(x)=\begin{cases}\ln\left(\ln\left(1+x^4\right)\right), \text{ если } |x|\ge 1\\ \ln\left(\ln\left(1+x^2\right)\right), \text{ если } |x|<1\end{cases}.$$

К4.9.
$$f(x)=\begin{cases}x\cdot 3^{-\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{x}\right)}, \text{ если } x\ne 0\\ 0, \text{ если } x=0\end{cases}.$$

К4.10.
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|-x}{x^2}, \text{ если } x\ne 0\\ 0, \text{ если } x=0\end{cases}.$$

К4.11.
$$f(x)=\begin{cases}2^x, \text{ если } x\le 0\\ \dfrac{x+5}{x-3}, \text{ если } 0<x\le 10,\quad x\ne 3\\ \sin\left(\cos x\right), \text{ если } x>10\end{cases}.$$

Ответы, указания, решения

Т4.1. Справедливость утверждения вытекает из следующей цепочки равносильных равенств:

$$\lim_{\substack{M\to M_o\\ M\in X}} f(M)=f(M_0),\quad \lim_{\substack{M\to M_o\\ M\in X}} f(M)-f(M_0)=0,$$

$$\lim_{\substack{M_0+\Delta M\to M_o\\ M_0+\Delta M\in X}} f(M_0+\Delta M)-f(M_0)=0,\quad \lim_{\substack{\Delta M\to O\\ M_0+\Delta M\in X}} \Delta f(M_0,\Delta M)=0$$

(здесь $O = (0, 0, \ldots, 0) \in Af^n$).

Т4.2. Если функции $f(M)$ и $g(M)$ непрерывны в точке M_0 вдоль X, то непрерывность их суммы, разности, произведения и частного в точке M_0 вдоль X непосредственно следует из теоремы 3.2 и определения непрерывности функции в точке.

Если функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g_1(T), \ldots, g_n(T)$ непрерывны в точке T_0 вдоль $X = D(f(g_1, g_2, \ldots, g_n))$, то непрерывность суперпозиции $f(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ вытекает из следующей цепочки следствий:

$\{T_r\} \to T_0 \Rightarrow \{g_i(T_r)\} \to g_i(T_0)$, $i = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow \{M_r\} \to M_0$, где
$M_r = (g_1(T_r), g_2(T_r), \ldots, g_n(T_r))$, $M_0 = (g_1(T_0), g_2(T_0), \ldots, g_n(T_0)) \Rightarrow$
$\Rightarrow \{f(M_r)\} \to f(M_0) \Rightarrow \{f(g_1(T_r), g_2(T_r), \ldots, g_n(T_r))\} \to f(g_1(T_0), g_2(T_0), \ldots, g_n(T_0))$.

В этой цепочке только сходимость $\{M_r\} \to M_0$, вытекающая из сходимостей $\{g_i(T_r)\} \to g_i(T_0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, нуждается в обосновании. Для упрощения обозначений положим $x_r^i = g_i(T_r)$, $g_i(T_0) = x_0^i$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Согласно утверждению задачи Т1.2, существует n-мерный промежуток $X = X_1 \times \ldots \times X_n$, содержащийся в $N(M_0, \varepsilon)$, в котором $X_i = (x_0^i - \delta_i; x_0^i + \delta_i) = N(x_0^i, \delta_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Так как $\{x_r^i\} \to x_0^i$, то найдется такое s_i, что все члены последовательности $\{x_r^i\}$ с номерами, бóльшими s_i, окажутся в X_i. Если теперь s — наибольшее из чисел $s_1, s_2, \ldots, s_n$, то все члены последовательности $\{M_r\}$ с номерами, бóльшими s, окажутся в X, а значит, и в окрестности $N(M_0, \varepsilon)$, что доказывает сходимость $\{M_r\}$ к M_0.

Т4.3. Непрерывность основных элементарных функций доказывается для каждого класса в отдельности. Ограничимся доказательством непрерывности функции $f(x) = \sin x$ на ее области определения $D(f) = (-\infty; +\infty)$ (остальные функции рассматриваются аналогично). Возьмем произвольную точку x_0 из $D(f)$. Тогда

$$\Delta f(x_0, \Delta x) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin(x_0) = 2\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Отсюда

$$0 \le |\Delta f(x_0, \Delta x)| = \left|2\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\right| \le 2\cdot 1\cdot\left|\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\right| \le |\Delta x|$$

(здесь использовалось известное неравенство $|\sin a| \le |a|$ при $a \in$ $\in (-\pi/2; \pi/2)$). Следовательно, $-|\Delta x| \le \Delta f(x_0, \Delta x) \le |\Delta x|$. Так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}|\Delta x| = 0$, то в силу утверждения задачи Т3.9 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0, \Delta x) = 0$. Непрерывность функции $f(x)$ следует теперь из утверждения 4.1.

Т4.4. Пусть для определенности $f(M_0) < 0$. Выберем произвольную последовательность $\{\varepsilon_k\}$ положительных чисел, сходящуюся к нулю, и предположим противное: каждая окрестность $N(M_0, \varepsilon_k)$ содержит хотя бы одну такую точку M_k из X, что $f(M_k) \ge 0$. Так как $\{\varepsilon_k\} \to 0$, то $\{M_k\} \to M_0$ и, следовательно, в силу непрерывности f в точке M_0 вдоль X $\{f(M_k)\} \to f(M_0)$. Но по теореме 2.3 $\lim\limits_{k\to\infty} f(M_k) \ge 0$, что противоречит предположению о знаке этого предела.

Т4.5. Обозначим через X множество всех точек из Af^n, удовлетворяющих неравенству $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0$. Если M_0 — предельная точка множества X, то по теореме 3.1 существует регулярная последовательность $\{M_k\}$ точек из X, сходящаяся к M_0. Так как f непрерывна в точке M_0, то $\{f(M_k)\} \to f(M_0)$. Отсюда по теореме 2.3 $f(M_0) \le 0$, т. е. $M_0 \in X$. Следствие 4.2 доказано.

Обозначим через X множество всех точек из Af^n, удовлетворяющих системе из n уравнений и неравенств, о которой говорится в следствии 4.3, а через X_i — множество всех точек из Af^n, удовлетворяющих i-му ограничению этой системы. Очевидно, X — это пересечение множеств X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Если M_0 — предельная точка множества X, то по теореме 3.1 существует регулярная последовательность $\{M_k\}$ точек из X, сходящаяся к M_0. Так как все члены этой последовательности принадлежат X_i, то по теореме 3.1 M_0 является предельной точкой множества X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Это означает, что $M_0 \in X_i$ и, следовательно, $M_0 \in X$. Следствие 4.3 доказано.

Т4.6. Указание: применить следствие 4.4 к функции $f(x) - C$.

Т4.7. Пусть для определенности функция $f(x)$ возрастает на X. Возьмем произвольные две точки $y_1, y_2 \in Y$, где $y_1 < y_2$. Если бы $g(y_1) \ge g(y_2)$, то $y_1 = f(g(y_1)) \ge f(g(y_2)) = y_2$, что невозможно. Поэтому $g(y_1) < g(y_2)$, т. е. функция g — возрастающая на промежутке Y. Докажем ее непрерывность в произвольной точке $y_0 \in Y$ вдоль Y. Для этого достаточно показать, что если $\{y_k\}$ — произвольная последовательность точек из Y, сходящаяся к $y_0 = f(x_0)$, то $\{g(y_k)\} \to g(y_0)$. Возьмем произвольное положительное число ε и положим $f(x_0 - \varepsilon) = y_0 - \delta_1$, $f(x_0 + \varepsilon) = y_0 + \delta_2$. Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Так как $\{y_k\} \to y_0$, то найдется такое y_r, что все следующие за y_r члены последовательности $\{y_k\}$ окажутся в окрестности $N(y_0, \delta)$, т. е. $y_0 - \delta < y_i < y_0 + \delta$ для любого $i > r$. Но тогда $x_0 - \varepsilon = g(y_0 - \delta_1) \le g(y_0 - \delta) < g(y_i) < g(y_0 + \delta) \le g(y_0 + \delta_2) = x_0 + \varepsilon$, т. е. все члены последовательности $\{g(y_k)\}$, следующие за $g(y_r)$, окажутся в окрестности $N(x_0, \varepsilon)$. Это и завершает доказательство следствия.

Т4.8. а) Функция $f(x) + g(x)$ разрывна в точке x_0. Действительно, если бы это было не так, то по теореме 4.1 функция $(f(x) + g(x)) - f(x)$ была бы непрерывной. Функция $f(x) \cdot g(x)$ может быть как непрерывной, так и разрывной в точке x_0: например, если $f(x) \equiv 1$, то $f(x) \cdot g(x)$ разрывна, а если $f(x) \equiv 0$, то $f(x) \cdot g(x)$ непрерывна.

б) Указание: рассмотреть функции $D(x)$, $D_1(x)$, $D_2(x)$, использованные в решении задачи Т3.10.

Т4.9. Если $f(x) = \begin{cases} 1, \text{если x — рациональное число;} \\ -1, \text{если x — иррациональное число,} \end{cases}$

то $f^2(x) \equiv 1$, т. е. $f^2(x)$ непрерывна на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

Т4.10. Очевидно, точка $x = 1$ является точкой разрыва функции $f(x)$. Пусть $x \ne 1$. Тогда $u(x) = f\big(f(x)\big) = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{1-x}} = \dfrac{x-1}{x}$. Следовательно, $x = 0$ — точка разрыва функции $u(x)$. Если $x \ne 0$, $x \ne 1$,

то $f(u(x)) = f\Big(f\big(f(x)\big)\Big) = \dfrac{1}{1 - \dfrac{x-1}{x}} = x$. Таким образом, сложная функция $f(f(f(x)))$ имеет разрывы в точках $x = 0$ и $x = 1$, в остальных точках эта функция непрерывна.

Функция $f(y) = \operatorname{sign}(y)$ терпит разрыв в точке $y = 0$, по обе стороны от которой ее аргумент имеет разные знаки, тогда как значения функции $g(x)$ меняют знак в точках $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$, поэтому именно в этих точках сложная функция $f(g(x))$ будет разрывна.

Поскольку область значений $E(f) = \{-1, 0, 1\}$ состоит только из нулей функции $g(y) = y(1-y)^2$, то $g(f(x)) \equiv 0$, т. е. сложная функция $g(f(x))$ непрерывна на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

Т4.11. Предположим противное: $A_* - B_* = \varepsilon > 0$. Поскольку B_* — точная нижняя грань множества B, то найдется такое число $b \in B$, что $b < B_* + \varepsilon$. Но по условию также существует и число $a \in A$ такое, что $a \le b$. Поэтому $a \le b < B_* + \varepsilon = A_*$, т. е. $a < A_*$, что невозможно.

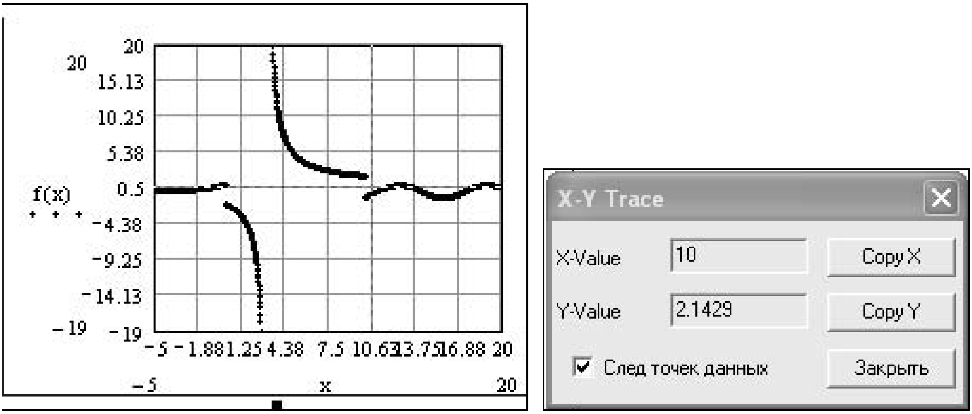
Т4.12. Указание: доказательство аналогично решению задачи Т4.11.

К4.11. Приведем алгоритм решения задачи с помощью Mathcad:

$$f1(x) := 2^x \qquad f2(x) := \frac{x+5}{x-3} \qquad f3(x) := \sin(\cos(x))$$

$$f(x) := if(x \le 0, f1(x), if(0 < x \le 10, f2(x), f3(x)))$$

График функции приведен на рис. 4.11.



X-Value 10

Y-Value 2.1429

☑ След точек данных

Рис 4.11. Диалоговое окно **X-Y Trace** графика функции

Глава 5

Общая задача условной оптимизации

Пусть задано множество $X \subseteq Af^n$ и функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенная в каждой точке этого множества. Функцию f назовем целевой функцией, а точки множества X — планами функции f. Задача условной оптимизации заключается в нахождении такого плана $M^* \in X$, для которого значение $f(M^*)$ является наименьшим или наибольшим (в зависимости от того, решается задача на минимум или на максимум) среди всех значений функции f на множестве X. План M^* называется оптимальным на множестве X, а значение $f(M^*)$ — оптимальным значением функции f на множестве X. Кратко эту задачу можно записать так:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max \text{ (или min)} \tag{5.1}$$

$$\text{на множестве планов } X \subseteq Af^n.$$

Вид целевой функции в (5.1) и способы задания ее множества планов определяют подходы и методы решения задачи (5.1).

Теорема 5.1. Если в задаче (5.1) множество планов X замкнуто и ограничено, а функция f непрерывна на X, то задача (5.1) имеет оптимальные планы.

Доказательство. Покажем вначале, что множество значений $E(h)$ произвольной функции h, определенной и непрерывной на X, ограничено. Предположим противное. Тогда для любого натурального k найдется точка $M_k \in X$ такая, что $\left|h(M_k)\right| > k$. Это означает, что $\{h(M_k)\} \to \infty$ и, в частности, любая подпоследовательность последовательности $\{h(M_k)\}$ также сходится к ∞.

Поскольку в последовательности $\{M_k\}$ бесконечно много различных членов, то в силу утверждения 3.1 она имеет некоторую предельную точку M_0. По теореме 3.1 существует регулярная подпоследовательность

$\left\{M_{k_i}\right\}$ точек последовательности $\{M_k\}$, сходящаяся к M_0. Но все точки из $\left\{M_{k_i}\right\}$ принадлежат X. Следовательно, опять-таки по теореме 3.1, M_0 — предельная точка всего множества X. Так как X замкнуто, то $M_0 \in X$. Ввиду непрерывности h на множестве X $\lim\limits_{\substack{M \to M_o \\ M \in X}} h(M) = h(M_0)$. В частности, $\left\{h\left(M_{k_i}\right)\right\} \to h(M_0)$, что противоречит $\left\{h\left(M_{k_i}\right)\right\} \to \infty$.

Итак, множество значений $E(f)$ функции f на множестве X ограничено, т. е. множество $E(f)$ имеет точные верхнюю и нижнюю грани (лемма 4.1). Рассмотрим для определенности точную верхнюю грань u множества $E(f)$. Если $u \in E(f)$, то u — оптимальное решение задачи (5.1) и теорема доказана. Предположим, что $u \notin E(f)$. Тогда по теореме 4.1 функция $g(M) = \dfrac{1}{u - f(M)}$ непрерывна на X, поскольку $u > f(M)$ для любого плана $M \in X$. Множество значений $E(g)$ функции g на множестве X ограничено. Выберем произвольную положительную верхнюю грань v этого множества. Тогда для любого плана $M \in X$

$$g(M) \le v \Rightarrow \frac{1}{u - f(M)} \le v \Rightarrow f(M) \le u - \frac{1}{v} < u,$$

что противоречит тому, что u — точная верхняя грань множества $E(f)$. Теорема доказана.

Пересечение $N(M, \delta) \cap X$ назовем условной окрестностью точки M радиусом δ. Точка $M^* \in X$ называется локально-оптимальным планом задачи (5.1), если M^* является оптимальным планом в некоторой своей условной окрестности, т. е. $f(M^*)$ — наибольшее (или наименьшее) значение среди всех значений функции f в некоторой условной окрестности точки M^*. Это понятие будет использовано в *гл. 10*.

Пусть функция $g(M)$ определена на множестве $Y \subseteq Af^n$, а ее множество значений Z на множестве Y ограничено. Тогда амплитудой функции $g(M)$ на Y называется разность между точными верхней и нижней гранями множества Z.

Следствие 5.1 (о равномерной непрерывности). Пусть функция $f(M)$ непрерывна на ограниченном замкнутом множестве X. Тогда для любого положительного числа ε найдется положительное число δ такое, что амплитуда функции f на любой условной окрестности радиусом δ не превзойдет ε.

Доказательство. Отметим сразу, что в силу теоремы 5.1 множество значений функции f на X ограничено. Поэтому можно вычислить амплитуду функции f на любой условной окрестности.

Предположим, что утверждение следствия неверно: существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любого числа $\delta > 0$ найдется условная окрестность $N(M, \delta) \cap X$, на которой амплитуда функции f превзойдет ε. Это означает, что в $N(M, \delta) \cap X$ найдутся точки M_δ, L_δ такие, что $|f(M_\delta) - f(L_\delta)| \geq \varepsilon$; при этом в силу утверждения 1.1

$\rho(M_\delta, L_\delta) \leq \rho(M_\delta, M) + \rho(M, L_\delta) < \delta + \delta = 2\delta$.

Из сказанного следует, что для любого натурального k можно указать такую пару точек M_k, L_k из X, что $\rho(M_k, L_k) < 1/k$, но $|f(M_k) - f(L_k)| \geq \varepsilon$. По крайней мере одна из последовательностей $\{M_k\}$, $\{L_k\}$ содержит бесконечное число различных точек, поскольку все расстояния $\rho(M_k, L_k)$ попарно различны. Пусть это будет $\{M_k\}$. Тогда, по утверждению 3.1, множество точек этой последовательности имеет предельную точку M_0. Следовательно, по теореме 3.1 существует регулярная подпоследовательность $\left\{M_{k_i}\right\}$ точек последовательности $\{M_k\}$, сходящаяся к M_0. Но все точки из $\left\{M_{k_i}\right\}$ принадлежат X. Поэтому по теореме 3.1 M_0 является предельной точкой всего множества X, а поскольку X замкнуто, то $M_0 \in X$. Так как $\left\{\rho\left(M_{k_i}, M_0\right)\right\} \to 0$ и $\left\{\rho\left(M_{k_i}, L_{k_i}\right)\right\} \to 0$,

то по теореме 2.2 $\left\{\rho\left(L_{k_i}, M_{k_i}\right) + \rho\left(M_{k_i}, M_0\right)\right\} \to 0$.

Но, согласно утверждению 1.1, $\rho\left(L_{k_i}, M_0\right) \leq \rho\left(L_{k_i}, M_{k_i}\right) + \rho\left(M_{k_i}, M_0\right)$.

Следовательно, по теореме 2.3 $\rho\left(L_{k_i}, M_0\right) \to 0$, т. е. $\left\{L_{k_i}\right\} \to M_0$.

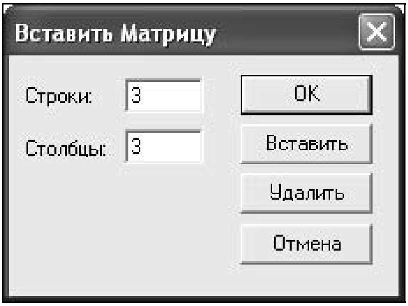
Ввиду непрерывности f на множестве X из $\left\{M_{k_i}\right\} \to M_0$ следует $\left\{f\left(M_{k_i}\right)\right\} \to f(M_0)$. Последнее означает, что найдется такая точка M_{k_r}, что $\left|f\left(M_{k_i}\right) - f\left(M_0\right)\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ для любого натурального $i > r$. Но по предположению $\left|f\left(M_{k_i}\right) - f\left(L_{k_i}\right)\right| \geq \varepsilon$ для всех натуральных i. Поэтому все точки в $\left\{L_{k_i}\right\}$ отличны от M_0, т. е. $\left\{L_{k_i}\right\}$ — регулярная последовательность, сходящаяся к M_0. Отсюда ввиду непрерывности f $\left\{f\left(L_{k_i}\right)\right\} \to f(M_0)$. Последнее означает, что найдется такая точка L_{k_s}, что $\left|f\left(L_{k_i}\right) - f\left(M_0\right)\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ для любого $i > s$. Пусть $t = \max\{r, s\}$. Тогда для любого $i > t$

$\left|f(L_{k_i})-f(M_{k_i})\right| \le \left|f(M_{k_i})-f(M_0)\right| + \left|f(L_{k_i})-f(M_0)\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, что противоречит предположению. Следствие доказано.

Компьютерный раздел

Системная переменная `ORIGIN` задает начало нумерации строк таблиц в Mathcad-документе. Переменная `ORIGIN` используется также и для задания начала нумерации координат точек пространства Af^n. По умолчанию ее значение равно нулю.

Координаты точек вводятся следующим образом. Пусть, к примеру, надо ввести точку `M = (1, 2.8, 3, -7)`. Разместите красный курсор в нужном месте рабочего листа. Введите идентификатор точки `M`. Клавишей <:> введите знак присваивания <:=>. Комбинацией клавиш <Ctrl>+<M> вызовите диалоговое окно **Вставить матрицу** (Insert Matrix) (рис. 5.1).

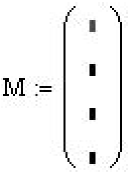


Строки: 3

Столбцы: 3

Рис. 5.1. Диалоговое окно **Вставить Матрицу**

В поле **Строки** (Rows) этого окна задайте число координат 4 точки `M`, а в поле **Столбцы** (Columns) — число 1. Щелкните на кнопке **OK**. Справа от знака присваивания на месте метки, выделенной синим курсором, появится шаблон с метками для ввода координат точки:



Следует отметить, что на рабочем листе координаты точек n-мерного пространства располагаются вертикально. С помощью операции транспонирования можно достичь их горизонтального расположения. Однако в этом случае Mathcad будет воспринимать `M` как матрицу, что приведет к усложнению индексации.

Чтобы извлечь `i`-ю координату точки, необходимо ввести ее идентификатор с индексом `i` (в случае равенства переменной `ORIGIN` единице). Например, для извлечения координаты `2.8` точки `M` введите идентификатор `M`, затем комбинацией клавиш <Ctrl>+<[> перейдите в режим ввода индексов: $\mathrm{M}_{\blacksquare}$. Введите на месте метки индекс `i`. После нажатия клавиши <=> справа от знака равенства появится искомая координата: `M = 2.8`.

Индексы в Mathcad используются для нумерации переменных и координат точек n-мерного пространства (например, x_1, y_3, z_i). Индексы могут принимать только неотрицательные целые значения. Минимальное значение, которое они могут принимать, задается системной переменной `ORIGIN`.

Перевод в режим ввода индексов осуществляется комбинацией клавиш <Ctrl>+<[>. Например, для ввода индексированной переменной x_3 введите в нужном месте рабочего листа идентификатор `x` и затем перейдите в режим ввода индексов. Справа от идентификатора появится метка для ввода индекса `3`: $\mathrm{x}_{\blacksquare}$.

Следует различать знаки равенства и логического равенства, которые на экране почти неразличимы (логический знак равенства отличается только полужирным шрифтом). Знак равенства, вводимый клавишей <=>, используется для получения на экране численного значения выражения, предшествующего этому знаку. Иное — знак логического равенства. Он вводится комбинацией клавиш <Ctrl>+<=> и имеет двоякое назначение: помимо логических выражений, он используется при вводе уравнений, связывая их левые и правые части.

В Mathcad встроенная функция `maximize(f, M)` (`minimize(f, M)`) определяет точку `M`, в которой функция `f` достигает максимального (минимального) значения. Перед использованием этих функций необходимо задать начальные (стартовые) значения координатам точки `M`. Если же решается задача условной оптимизации, то функции `maximize` и `minimize` должны завершать так называемый блок решений в Mathcad, начинающийся ключевым словом `Given`. Пусть, например, требуется решить задачу условной оптимизации

$$f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 \to \max,$$

$$x_1 + x_2 =10;$$

здесь множество планов X задается уравнением $x_1 + x_2 = 10$, связывающим координаты точки (x_1, x_2).

В Mathcad эту задачу можно решить так:

`ORIGIN := 1`

$$x := \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad f(x) := x_1 \cdot x_2$$

Given

$$x_1 + x_2 = 10$$

$$x := \mathrm{maximize}(f, x)$$

$$x = \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix} \qquad f(x) := 25$$

Поиск минимума и максимума с помощью функций `maximize` и `minimize` в Mathcad реализован несколькими алгоритмами. Какой из алгоритмов выбрать — зависит от вида целевой функции. На практике рекомендуется проверить поиск решения по каждому методу и сравнить решения. Альтернативные методы поиска решения надо использовать и в том случае, если какой-то метод не дает решения.

Для выбора метода решения необходимо щелкнуть левой кнопкой мыши на идентификаторе `maximize` или `minimize` и вызвать контекстное меню, щелкнув затем правой кнопкой мыши (рис. 5.2). Далее остается только установить флажок рядом с соответствующим методом поиска решения.

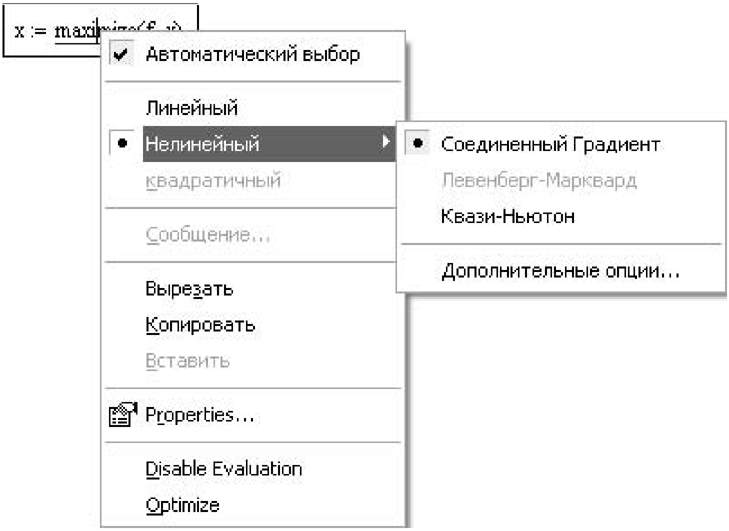


Рис. 5.2. Контексное меню
для выбора метода решения задачи оптимизации

Задачи для самостоятельного решения

Общая формулировка задач K5.1—K5.11

Решить задачу условной оптимизации с заданной целевой функцией $f(x_1, x_2)$ и множеством планов X, состоящим из всех точек (x_1, x_2), удовлетворяющих указанной системе неравенств.

K5.1. $f(x_1, x_2) = -6x_1 - 4x_2 + x_1^2 + x_2^2 + 18 \to \min$

$$X: \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 24 \\ x_1^2 - 5x_1 + x_2^2 \le 6. \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

K5.2. $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 2.4x_2 -0.2\ x_1^2 - 0.2x_2^2 \to \max$

$$X: \begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 10 \\ x_1^2 + x_2^2 \le 100. \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \le 8 \end{cases}$$

K5.3. $f(x_1, x_2) = -5.6x_1 - 8.8x_2 + 0.4x_1^2 + 0.4x_2^2 \to \min$

$$X: \begin{cases} 0 \le x_1 \le 6 \\ x_1^2 + x_2^2 \le 144. \\ x_1 \le x_2 \end{cases}$$

K5.4. $f(x_1, x_2) = -3.2x_1 + 0.2x_1^2 - 3.6x_2 + 0.2x_2^2 \to \min$

$$X: \begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 20 \\ x_1^2 - 6x_1 - 10x_2 + x_2^2 \le 66 \quad . \\ 20x_1 - x_1^2 + 10\ x_2 - x_2^2 \ge 25 \end{cases}$$

K5.5. $f(x_1, x_2) = 3.6x_1 - 0.2x_1^2 + 0.8x_2 - 0.2x_2^2 \to \max$

$$X: \begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 10 \\ x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 \le 75. \\ \ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

К5.6. $f(x_1, x_2) = -3x_1 + 0.25x_1^2 - 4x_2 + 0.25x_2^2 \to \min$

$$X: \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 10x_2 \le 75 \\ x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 \le 75 \\ x_1 + x_2 \ge 10 \end{cases}.$$

К5.7. $f(x_1, x_2) = 2.75x_1 - 0.125x_1^2 + 3.25x_2 - 0.125x_2^2 \to \max$

$$X: \begin{cases} x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 \le 75 \\ 2x_1 + x_2 \ge 10 \\ x_1 + 3\ x_2 \ge 15 \end{cases}.$$

К5.8. $f(x_1, x_2) = -2.75x_1 + 0.125x_1^2 - 4x_2 + 0.125x_2^2 \to \min$

$$X: \begin{cases} 8x_1 + x_1^2 + 4x_2 + x_2^2 \le 176 \\ 4x_1 + x_1^2 + 18x_2 + x_2^2 \le 276 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

К5.9. $f(x_1, x_2) = -6x_1 + 0.25x_1^2 - 5.5x_2 + 0.25x_2^2 \to \min$

$$X: \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 100 \\ x_1^2 + x_2^2 \ge 13 \end{cases}.$$

К5.10. $f(x_1, x_2) = 2x_1 - 0.2x_1^2 + 2.4x_2 - 0.2x_2^2 \to \max$

$$X: \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 26 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 - x_2 \le 2 \end{cases}.$$

К5.11. $f(x_1, x_2) = 5x_1 - 0.2x_1^2 + 2x_2 - 0.2x_2^2 \to \max$

$$X: \begin{cases} 13x_1 + 6x_2 \le 90 \\ 8x_1 + 11x_2 \le 88 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

Ответы, указания, решения

К5.11. Алгоритм решения задачи с помощью Mathcad следующий:

ORIGIN := 1

$i = 1 \,..\, 2 \qquad x_i := 0$

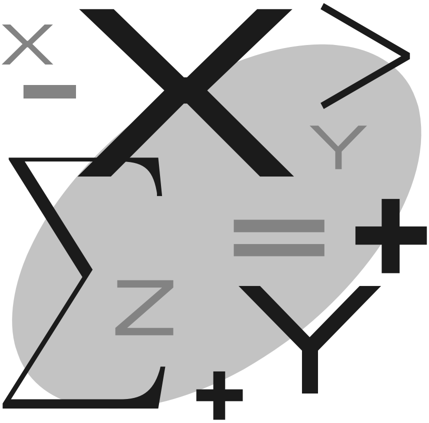
$f(x) := 5 \cdot x_1 - 0.2 \cdot (x_1)^2 + 2 \cdot x_2 - 0.2 \cdot (x_2)^2$

Given

$x \geq 0 \qquad 13 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \leq 90 \qquad 8 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2 \leq 88$

$M := \mathrm{maximize}(f, x)$

$M = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad f(M) := 26$



ЧАСТЬ II

Дифференциальное исчисление

Глава 6

Классификация бесконечно малых функций одной переменной

Функции одной переменной определены на множествах одномерного точечного пространства Af^1. Естественно, что при изучении общих предельных свойств таких функций можно ограничиться множествами с простейшей топологией, но имеющими "представительную" систему предельных точек (по теореме 3.3 предельными точками множества являются его внутренние, граничные, выколотые точки и только они). Промежуток $<a; b>$ — простейшее множество в Af^1: все его точки (кроме a, b) — внутренние, а сами a, b являются граничными, если они отличны от символов $-\infty$, $+\infty$. Однако промежутки не имеют выколотых точек. Если допустить наличие одной выколотой из множества точки, то обобщением промежутка станет квазипромежуток. Более конкретно, любой квазипромежуток либо является промежутком, либо имеет вид $<a; c) \cup (c; b>$.

В *гл. 3* определены бесконечно малые функции нескольких переменных. В этой главе будет дана классификация бесконечно малых функций одной переменной.

Поведение функции $\alpha(x)$ в окрестности точки x_0, в которой $\alpha(x)$ является бесконечно малой, становится более ясным, если $\alpha(x)$ удается сопоставить с простейшей функцией — одночленом $a(x - x_0)^k$.

Пусть x_0 — предельная точка квазипромежутка X, $\alpha(x)$ — б. м. в точке x_0 вдоль X. Если $a \neq 0$, $k > 0$ и $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} \dfrac{\alpha(x)}{a(x-x_0)^k} = 1$, то пару чисел (a, k) будем называть уровнем малости б. м. $\alpha(x)$ в точке x_0 (вдоль X), а число k — порядком малости б. м. $\alpha(x)$ в точке x_0 (вдоль X). Две б. м. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ одинакового уровня малости в точке x_0 (вдоль X) называются эквивалентными в точке x_0 (вдоль X); этому факту будет соответствовать запись: $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$, $x \in X$.

Утверждение 6.1. Предел в точке x_0 отношения двух функций, являющихся б. м. в этой точке, не изменится, если каждую или одну из них заменить на эквивалентную ей в точке x_0 б. м.

Доказательство утверждения дано в задаче Т6.2.

Теорема 6.1 (классификация б. м.). Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются б. м. в точке x_0 уровней малости (a, k) и (b, r) соответственно. Тогда в точке x_0:

1) $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ является б. м. уровня малости $(ab, k + r)$;
2) если $k \neq r$, то $\alpha(x) \pm \beta(x)$ сохраняет уровень малости той из б. м. $\alpha(x)$, $\beta(x)$, чей порядок меньше;
3) если $k = r$ и $a \pm b \neq 0$, то $\alpha(x) \pm \beta(x)$ является б. м. уровня малости $(a \pm b, k)$;
4) если $k = r$ и $a \pm b = 0$, то $\alpha(x) \pm \beta(x)$ является б. м. более высокого порядка малости, чем каждая из б. м. $\alpha(x)$, $\beta(x)$.

Доказательство. Пусть $k < r$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x) \pm \beta(x)}{a(x - x_0)^k} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{a(x - x_0)^k} \pm \lim_{x\to x_0} \frac{\beta(x)}{a(x - x_0)^k} =$$

$$= 1 \pm \lim_{x\to x_0} \left(\frac{\beta(x)}{b(x - x_0)^r} \cdot b(x - x_0)^{r-k} \right) =$$

$$= 1 \pm 1 \cdot \lim_{x\to x_0} b(x - x_0)^{r-k} = 1.$$

Пусть $k = r$ и $a - b \neq 0$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{(a - b)(x - x_0)^k} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{(a - b)(x - x_0)^k} - \lim_{x\to x_0} \frac{\beta(x)}{(a - b)(x - x_0)^k} =$$

$$= \frac{a}{a - b} \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{a(x - x_0)^k} - \frac{b}{a - b} \lim_{x\to x_0} \frac{\beta(x)}{b(x - x_0)^k} = \frac{a}{a - b} - \frac{b}{a - b} = 1.$$

Пусть $k = r$ и $a - b = 0$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} = 1 - \lim_{x\to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1 - \lim_{x\to x_0} \frac{b(x - x_0)^k}{a(x - x_0)^k} = 1 - 1 = 0.$$

Остальные утверждения теоремы доказываются аналогично (см. задачу Т6.1).

Пусть $\alpha(x)$ — б. м. уровня малости (a, k) в точке x_0 (вдоль X). Тогда по теореме 6.1 функция $\alpha(x) - a(x - x_0)^k$ есть б. м. более высокого порядка малости в точке x_0, чем б. м. $\alpha(x)$, т. е. для любой точки $x \in X$

$$\alpha(x) = a(x - x_0)^k + \beta(x),\ \beta(x) = o((x - x_0)^k).$$

Одночлен $a(x - x_0)^k$ называют главной частью бесконечно малой $\alpha(x)$, а $\beta(x)$ — ее остаточной частью в точке x_0. Далее, если $\beta(x)$ — б. м. уровня (b, r), где $k < r$, то можно выделить ее главную часть в точке x_0:

$$\beta(x) = b(x - x_0)^r + \gamma(x),\ \gamma(x) = o((x - x_0)^r).$$

В результате получим следующее разложение:

$$\alpha(x) = a(x - x_0)^k + b(x - x_0)^r + \gamma(x).$$

Этот процесс можно продолжать и дальше до получения суммы нужного числа одночленов с возрастающими степенями. В связи с этим возникают два вопроса: как выделять главную часть бесконечно малой функции в указанной точке или, что то же самое, определять ее уровень малости; сколько раз это следует делать для обеспечения заданной точности приближения бесконечно малой функции многочленом? Ответы на эти вопросы будут даны в *гл. 13*.

В заключение определим главные части некоторых элементарных функций, являющихся б. м. в точке $x_0 = 0$ вдоль их области определения X.

Лемма 6.1 (три замечательных предела).

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,\quad \lim_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e\,.$$

Доказательство приведем только для первого предела.

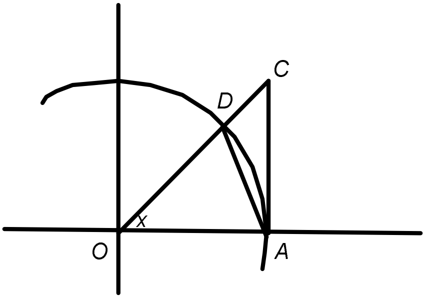


Рис. 6.1. Иллюстрация к доказательству леммы 6.1

Так как функция $\frac{\sin x}{x}$ четная, то достаточно показать, что $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}=1$. Рассмотрим окружность радиуса 1 и угол AOC с радианной мерой x, где $0 < x < \pi/2$. Очевидно, площадь треугольника AOD меньше площади сектора OAD, которая, в свою очередь, меньше площади треугольника OCA (см. рис. 6.1), т. е.

$$\frac{1}{2}|OD|\cdot|OA|\cdot\sin x<\frac{1}{2}|OA|^2\cdot x<\frac{1}{2}|OA|\cdot|AC|\Leftrightarrow\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin x<\frac{1}{2}\cdot x<\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\operatorname{tg} x\,.$$

Разделим последнее неравенство на $\frac{\sin x}{2}$ ($\sin x > 0$):

$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$ или $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$. Но $\lim\limits_{x\to 0+}\cos x=1$. Поэтому пределы "окаймляющих" функций равны 1. Отсюда в силу утверждения задачи Т3.9 $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}=1$.

Следствие 6.1. При $x \to 0$

$$\sin x \sim x,\ 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},\ \operatorname{tg} x\sim x,\ \arcsin x\sim x,\ \operatorname{arctg} x\sim x,\ e^x-1\sim x,$$

$$a^x-1\sim x\ln a,\ \ln(1+x)\sim x,\ \log_a(1+x)\sim\frac{x}{\ln a},\ (1+x)^k-1\sim kx\ (k>0).$$

Доказательство эквивалентностей из следствия 6.1, исключая последнюю, дано в задаче Т6.3.

Эквиваленности из следствия 6.1 сохраняют свою силу, если в них вместо аргумента x подставить либо член x_n последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к 0, либо бесконечно малую в точке 0 функцию $\alpha(x)$, а также в случае $x \to x_0$, если аргумент $\alpha(x)$, заменяющий собой x, является б. м. в точке x_0. Например, $\ln(1+(2x-2))\sim 2(x-1)$ при $x\to 1$, поскольку $\lim\limits_{x\to 1}2(x-1)=0$.

Задачи для самостоятельного решения

Т6.1. Завершить доказательство теоремы 6.1.

Т6.2. Доказать утверждение 6.1.

Т6.3. Доказать следствие 6.1.

Т6.4. Цепочка эквивалентностей при $x \to 1$

$$\arcsin(\sqrt{1+\operatorname{tg}(\pi x)}-1) \sim \sqrt{1+\operatorname{tg}(\pi x)}-1 \sim \frac{1}{2}\operatorname{tg}(\pi x) \sim \frac{1}{2}\pi x$$

содержит одну ошибку. Найти и исправить эту ошибку.

Т6.5. Пусть $\alpha(x)$ — бесконечно малая в точке x_0, $r > 0$, $k > 0$. Доказать следующие утверждения, в которых знак равенства для краткости заменяет фразу "является при $x \to x_0$":

1) $o(\alpha(x)) \pm o(\alpha(x)) = o(\alpha(x))$;
2) $\alpha^k(x)o(\alpha^r(x)) = o(\alpha^{k+r}(x))$;
3) если c — число, $c \neq 0$, то $o(c\alpha(x)) = o(\alpha(x))$, $co(\alpha(x)) = o(\alpha(x))$;
4) если $r > k$, то $o(\alpha^r(x)) = o(\alpha^k(x))$.

Т6.6. Определить главную часть бесконечно малой в точке $x_0 = 0$ функции $\alpha(x) = \left(5\sqrt{x}+x\right)^2 - \sin^3 x$.

Общая формулировка задач П6.1—П6.21

Вычислить пределы с помощью эквивалентностей из следствия 6.1.

П6.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2(3x)}{x\left(\sqrt{1+\sin(4x)}-1\right)}$.

П6.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(3^x-1\right)\left(5^x-1\right)}{\left(2^x-1\right)\left(7^x-1\right)}$.

П6.3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^2-3x+3)}{x^2-7x+6}$.

П6.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin\left(\pi(x+1)\right)}{\ln(1+2x)}$.

П6.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(10x)}{e^{5x^2}-1}$.

П6.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)\cdot\left(1-e^{\sin x}\right)}{\sqrt{1+2x^2-x^3}-1}$.

П6.7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\ln x}$.

П6.8. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\operatorname{tg}(\pi x)}{x+2}$.

П6.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-\operatorname{tg}^2 x}{x^2\ln\left(1-2x^2\right)}$.

П6.10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{1+\ln^2 x}-1}{(x-1)^2}$.

П6.11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{\ln^2 x}$.

П6.12. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x-1)^3}{\sqrt[5]{1+\ln^3 x}-1}$.

П6.13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos(\pi x)}{\left(x^2-7x+6\right)\left(e^{x-1}-1\right)}$.

П6.14. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\pi-x}$.

П6.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x(1-\cos x)}$.

П6.16. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(2x-5)}{e^{\sin(\pi x)}-1}$.

П6.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left(e^{\pi x}-1\right)}{3\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)}$.

П6.18. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\cos(5x)-\cos(3x)}{\sin^2 x}$.

П6.19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}$.

П6.20. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1+\cos(3x)}{\sin^2(7x)}$.

П6.21. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\mathrm{arctg}(x^2-2x)}{\sin(3\pi x)}$.

Ответы, указания, решения

Т6.1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)\cdot\beta(x)}{ab(x-x_0)^{k+r}}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{a(x-x_0)^k}\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{b(x-x_0)^r}=1\cdot 1=1$.

Т6.2. Пусть $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$ и $\beta(x)\sim\beta_1(x)$ при $x\to x_0$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\alpha_1(x)}{\alpha(x)}\cdot\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\cdot\frac{\beta(x)}{\beta_1(x)}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\beta_1(x)}=$$

$$=1\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\cdot 1=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

Т6.3. Так как $1-\cos x=2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\sim\dfrac{x}{2}$ при $x\to 0$,

то $1-\cos x\sim 2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$ при $x\to 0$.

Далее, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right)=1$.

Пусть $y = \arcsin x$. Тогда $x = \sin y$, $\lim\limits_{x\to 0} y = 0$ и, следовательно, $y \sim \sin y$ при $x \to 0$, т. е. $\arcsin x \sim x$, при $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

Пусть $y = a^x - 1$. Тогда $x = \log_a(y + 1)$, $\lim\limits_{x\to 0} y = 0$. Следовательно, $\log_a(y + 1) \sim \dfrac{y}{\ln a}$ при $x \to 0$, т. е. $x \sim \dfrac{a^x - 1}{\ln a}$ при $x \to 0$.

Т6.4. Ошибка в последней эквивалентности. Исправим ее: пусть $y = x - 1$, тогда $\frac{1}{2}\operatorname{tg}(\pi x) = \frac{1}{2}\operatorname{tg}(\pi(y+1)) = \frac{1}{2}\operatorname{tg}(\pi y) \sim \frac{1}{2}\pi y$, при $y \to 0$,

т. е. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}(\pi x) \sim \frac{1}{2}\pi(x-1)$ при $x \to 1$.

Т6.5. Пусть $r > k$, $\beta(x) = o(\alpha^r(x))$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha^k(x)} = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{\beta(x)}{\alpha^r(x)}\cdot\alpha^{r-k}(x)\right) = \lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha^r(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\alpha^{r-k}(x) = 0.$$

Остальные утверждения доказываются аналогично.

Т6.6. $\alpha(x) = 25x + 10x\sqrt{x} + x^2 - \sin^3 x$. Среди всех слагаемых этой функции наименьший порядок малости при $x \to 0$ имеет $25x$. Поэтому в силу теоремы 6.1 уровень малости бесконечно малой $\alpha(x)$ в точке $x_0 = 0$ равен $(25, 1)$, т. е. ее главная часть равна $25x$.

П6.7. Сделаем замену: $y = x - 2$. Тогда

$\lim\limits_{x\to 2} y = 0$, $x = y + 2$

и

$$\lim_{x\to 2}\frac{\operatorname{arctg}(x^2 - 2x)}{\sin(3\pi x)} = \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(y(y+2))}{\sin((y+2)3\pi)} = \lim_{y\to 0}\frac{y(y+2)}{\sin(3\pi y)} = \,.$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{y(y+2)}{3\pi y} = \lim_{y\to 0}\frac{y+2}{3\pi} = \frac{2}{3\pi}$$

Глава 7

Производная функции одной переменной

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $X \subseteq Af^1$, содержащем точку x_0. Производной $f'(x_0)$ функции $f(x)$ в точке x_0 вдоль X называется предел

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \tag{7.1}$$

если этот предел существует. Если предел (7.1) не существует, то говорят, что $f(x)$ не имеет производной в точке x_0 вдоль X.

Если не отмечать точку, в которой вычисляется производная, то используются обозначения f', f'_x. Как и раньше, запись $x_0 + \Delta x \in X$ в пределах будет опускаться, если x_0 — внутренняя точка промежутка X.

Определение (7.1) можно записать через приращение функции:

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ x_0 + \Delta x \in X}} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x}. \tag{7.2}$$

Поскольку величина $\frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x}$ выражает среднюю скорость изменения функции f на отрезке $[x_0; x_0 + \Delta x]$ при $\Delta x > 0$ (на отрезке $[x_0 + \Delta x; x_0]$ при $\Delta x < 0$), то ввиду (7.2) $f'(x_0)$ есть мгновенная (или предельная) скорость изменения функции $f(x)$ в точке x_0.

В приложениях используется еще одна интерпретация производной. Рассмотрим некоторый процесс, в течение которого изменяются характеристики A и B. Пусть B (доходность акций, издержки производства, прибыль) зависит от A (времени, объема продукции, производительности).

Предположим, что функция $f(x)$ выражает эту зависимость следующим образом: $f(x)$ равно количеству B, накопленному в процессе изменения величины A от нуля до x. В этом случае $\Delta f(x_0, \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ есть количество B, накопленное в ходе изменения величины A от x_0 до $x_0 + \Delta x$. Следовательно, $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x}$ равно мгновенному приросту величины B в момент достижения A величины, равной x_0. Другими словами, $f'(x_0)$ приближенно выражает величину прироста B при увеличении величины A на одну единицу в момент, когда A достигает величины x_0.

> **Пример.** Пусть функция $f(x) = x^3 + x^2$ выражает издержки в у. е., соответствующие объему продукции, выросшему от 0 до x, $f'(x) = 3x^2 + 2x$, $f'(10) = 320$. Это означает, что при увеличении объема продукции с 10 ед. до 11 ед. дополнительные издержки составят приблизительно 320 у. е.

Естественный вопрос, который возникает в связи с определением (7.2): при каких условиях средняя скорость изменения функции $f(x)$ на отрезке $[x_0; x_0 + \Delta x]$ совпадает с мгновенной скоростью изменения в точке x_0 и, следовательно, выполняется равенство

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}? \qquad (7.3)$$

Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 7.1. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке X и $x_0 \in X$. Равенство (7.3) выполняется для любого $x = x_0 + \Delta x \in X$, если и только если $f(x)$ линейна на промежутке X.

Доказательство. Пусть $f(x) = ax + b$ на промежутке X. Тогда

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} \frac{ax + b - ax_0 - b}{x - x_0} = a = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Пусть теперь верно (7.3) для любого $x = x_0 + \Delta x \in X$. Тогда

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \quad f(x) = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0.$$

Если положить $a = f'(x_0)$, $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$, то $f(x) = ax + b$.

Теорема доказана.

Однако приближенно равенство (7.3) выполняется для любых функций f, имеющих производную в точке x_0. Действительно, поскольку

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}}f'(x_0)=$$

$$=f'(x_0)-f'(x_0)=0,$$

то разность между средней скоростью изменения функции f на промежутке $[x_0; x_0+\Delta x]$ и ее мгновенной скоростью $f'(x_0)$ в точке x_0 есть бесконечно малая в точке x_0 функция.

Вышеприведенные высказывания можно выразить в компактной форме с помощью понятия дифференциала. Дифференциалом функции $f(x)$ независимой переменной x называется функция двух независимых переменных x и Δx, равная $f'(x)\cdot\Delta x$ и обозначаемая df, т. е. $df(x, \Delta x) = f'(x)\cdot\Delta x$. Величина $df(x_0, \Delta x)$ называется дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0.

Функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0 вдоль промежутка X, если разность между ее приращением и дифференциалом в точке x_0 является б. м. (относительно переменной Δx) более высокого порядка малости, чем Δx, в точке $\Delta x = 0$ вдоль X: $\Delta f(x_0, \Delta x) - df(x_0, \Delta x) = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$, $x_0 + \Delta x \in X$.

Теорема 7.2. Линейные функции и только они, обладают свойством равенства их приращения и дифференциала в любой точке x_0. Если функция определена на промежутке X и $x_0 \in X$, то она дифференцируема в точке x_0 вдоль X, если и только если она имеет в этой точке производную вдоль X.

Доказательство теоремы дано в задаче Т7.1.

Ввиду теоремы 7.2 дифференцируемость функции одной переменной в точке x_0 равносильна существованию ее конечной производной в этой точке.

Если функция $f(x)$ имеет производную вдоль X в каждой точке промежутка X, то говорят, что f дифференцируема на X. Если при этом $X = Af^1$, то говорят, что f всюду дифференцируема.

В заключение главы дадим геометрическую интерпретацию производной.

Пусть даны график функции $y = f(x)$ и точка M_0, принадлежащая кривой $y = f(x)$. Возьмем на этой кривой еще одну точку M_1. Тогда касательной к кривой $y = f(x)$ в точке M_0 называется предельное положение секущей M_0

M_1 при условии, что точка M_1, двигаясь по кривой, стремится к совпадению с M_0 (рис. 7.1).

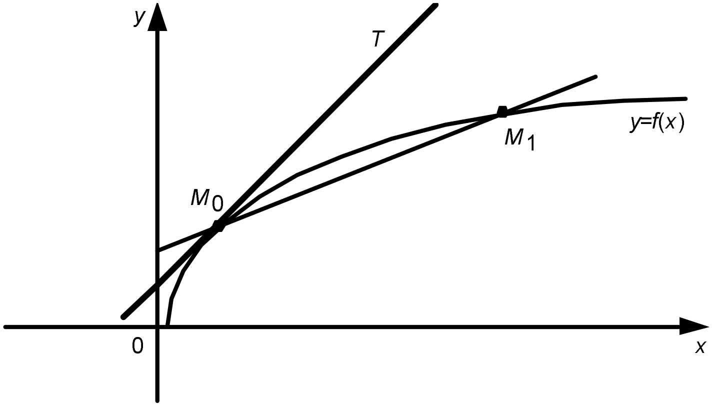


Рис. 7.1. Геометрическая интерпретация производной

Выведем уравнение касательной. Пусть $M_0 = (x_0, f(x_0))$, $M_1 = (x_1, f(x_1))$. Известно, что уравнение прямой, проходящей через две точки M_0 и M_1, имеет вид:

$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Поскольку $\lim\limits_{M_1 \to M_0} \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim\limits_{x_1 \to x_0} \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0)$, то из определения касательной следует, что ее уравнение имеет вид $\dfrac{y - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ или $y = f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0)$. Таким образом, производная $f'(x_0)$ равна угловому коэффициенту касательной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

Компьютерный раздел

Кнопка $\frac{d}{dx}$ подпанели **Матанализ** (Calculus) вызывает шаблон $\frac{d}{d\blacksquare}\blacksquare$ для дифференцирования функций. На месте верхней метки вводится идентификатор функции вместе с аргументами в скобках, на месте нижней метки — идентификатор аргумента, относительно которого вычисляется производная. Рассмотрим пример вычисления производной функции $f(x) = a^3x + x^2$ в точке $x = 2$ с помощью Mathcad:

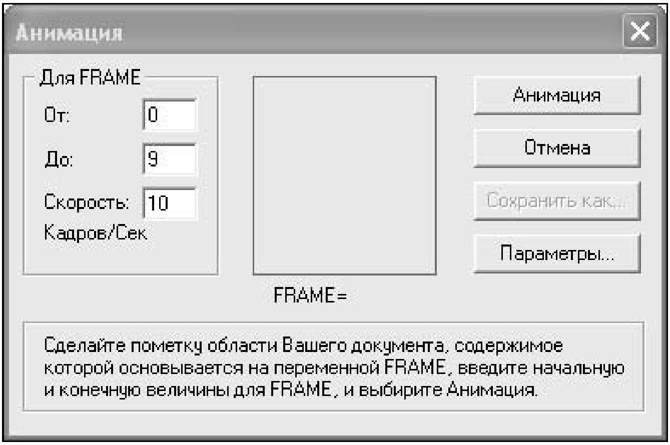
$$f(x) := a^3 \cdot x + x^2$$

$$g(x) := \frac{d}{dx} f(x) \rightarrow a^3 + 2 \cdot x$$

$$g(2) \rightarrow a^3 + 4$$

В этом фрагменте при вычислении производной в точке $x = 2$ используется знак символьного вывода, поскольку функция `g(x)` зависит не только от аргумента `x`, но и от параметра `a`.

Анимация графиков функций осуществляется с помощью команды **Анимация** (Animate) меню **Вид** (View), которая вызывает диалоговое окно **Анимация** (Animate) (рис. 7.2).



От: 0
До: 9
Скорость: 10
Кадров/Сек

Сделайте пометку области Вашего документа, содержимое которой основывается на переменной FRAME, введите начальную и конечную величины для FRAME, и выбирите Анимация.

Рис. 7.2. Диалоговое окно **Анимация**

Это окно содержит группу полей **Для FRAME** (For FRAME) для ввода параметров ранжированной встроенной переменной FRAME, принимающей только целочисленные значения с шагом 1. В поле **От** (From) задается начальное значение FRAME, в поле **До** (To) — конечное, в поле **Скорость** (At) — частота кадров. Любая функция, график которой предполагается анимировать, в качестве одного из своих аргументов должна содержать переменную, зависящую от FRAME. После заполнения группы полей **Для FRAME** (For FRAME), необходимо выделить область графика на рабочем листе (первым из двух способов выделения формульных областей, описанных в *разд. П3 приложения*). Последующий щелчок по кнопке **Анимация** (Animate) диалогового окна **Анимация** (Animate) приведет к созданию серии кадров анимационного графика; после чего появится проигрыватель **Playback**, с помощью которого можно многократно наблюдать изменение графика во времени.

Пусть, например, требуется осуществить движение точки $M = (0, 0)$ вдоль кривой графика функции $f(x) = \sin x$ в диапазоне от 0 до 9. Задайте начальную абсциссу точки M и переменную `d`, зависящую от `FRAME`:

$$y := 0 \qquad d := \frac{\mathrm{FRAME}}{10}$$

С помощью клавиши <@> введите шаблон графика. На месте соответствующих меток задайте диапазоны изменения вдоль осей: например, от –2 до 15 — вдоль оси 0x, и от –2 до 2 — вдоль оси 0y. На месте метки для ввода идентификаторов переменных введите `d`, `x`, а на месте метки для ввода функций — `sin(y + d)`, `sin x`. С помощью вкладки **След** (**Traces**) диалогового окна **Formatting Currently Selected X-Y Plot** произведите настройку графиков следующим образом:

Имя в легенде	Символ	Линия	Цвет	Тип	Вес
Trace1	box	***	red	points	2
Trace2	none	dot	blu	lines	1

Последующее нажатие клавиши <Enter> приведет к появлению синусоиды и точки $M = (0, 0)$ в виде квадрата (рис. 7.3).

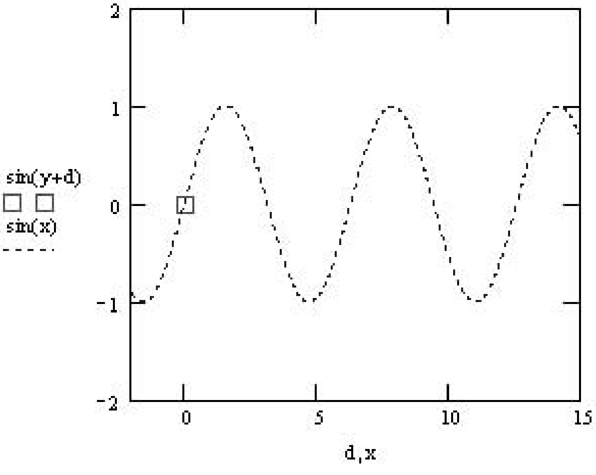
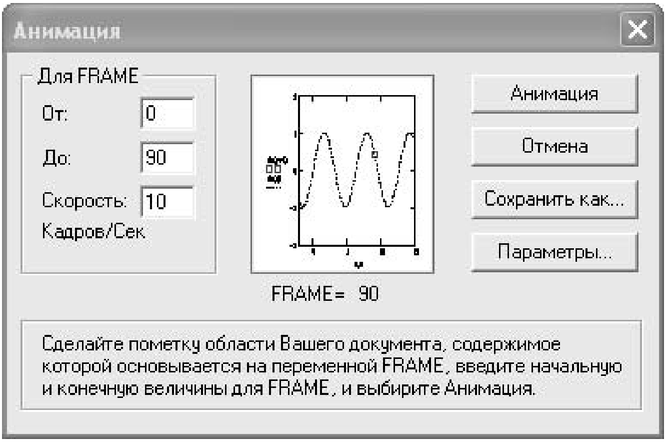


Рис. 7.3. Пример анимации графика

Вызовите диалоговое окно **Анимация** (Animate) и в поле **До** (To) введите число 90. Выделите область графика и щелкните по кнопке **Анимация** (Animate): после создания серии кадров, которые можно наблюдать на рабочем листе графика и в диалоговом окне **Анимация** (Animate) (рис. 7.4), появится проигрыватель, с помощью которого можно наблюдать движение точки вдоль синусоиды (рис. 7.5).



От: 0
До: 90
Скорость: 10
Кадров/Сек

FRAME= 90

Сделайте пометку области Вашего документа, содержимое которой основывается на переменной FRAME, введите начальную и конечную величины для FRAME, и выбирите Анимация.

Рис. 7.4. Диалоговое окно **Анимация**

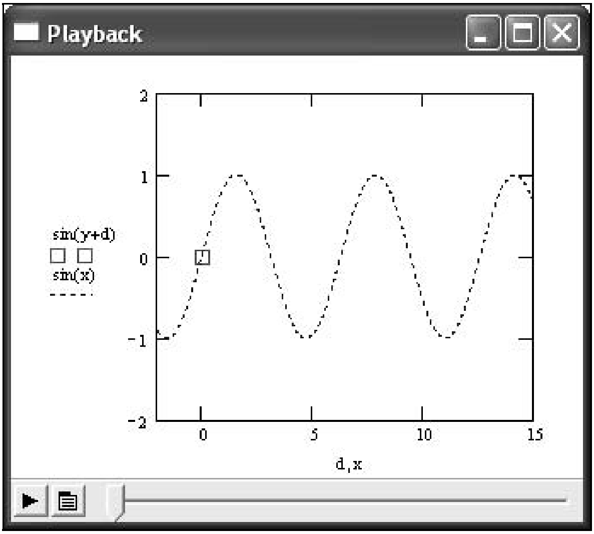


Рис. 7.5. Проигрыватель **Playback**

Если бы вместо графика функции $y = \sin x$ был построен график функции $\sin (x - d)$, то вместе с точкой вдоль оси $0x$ при анимации наблюдалось бы движение самой синусоиды (естественно, что в этом случае траектории движения точки и синусоиды не совпали бы).

Задачи для самостоятельного решения

Т7.1. Доказать теорему 7.2.

Т7.2. Доказать, что если функция имеет производную в точке x_0 вдоль X, то эта функция непрерывна в точке x_0 вдоль X. Верно ли обратное утверждение?

Т7.3. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $X = [a, b]$. В этом случае производная $f'(a)$ вдоль X известна как правая производная функции f в точке $x_0 = a$ и обозначается через $f'_+(x_0)$. Аналогично, $f'(b)$ — это левая производная функции f в точке $x_0 = b$ и обозначается через $f'_-(x_0)$. Доказать, что для произвольной внутренней точки x_0 отрезка X производная $f'(x_0)$ существует если и только если в этой точке существуют равные между собой правая и левая производные: $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Т7.4. Пусть $f(x)$ всюду дифференцируемая функция. Доказать, что если $f(x)$ является четной (нечетной, периодической) функцией, то $f'(x)$ является нечетной (четной, периодической) функцией.

Т7.5. Привести пример функции, всюду дифференцируемой, за исключением точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Т7.6. Привести пример функции, не дифференцируемой ни в одной точке множества Af^1, но квадрат которой всюду дифференцируем.

Общая формулировка задач К7.1—К7.10

Даны функция $f(x)$ и точка x_0. Построить график функции $y = f(x)$ касательную к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$, а также секущую, проходящую через точку $(x_0, f(x_0))$ и произвольную точку $(x_1, f(x_1))$. С помощью анимационных средств Mathcad показать, что касательная есть предельное положение секущей при $x_1 \to x_0$.

К7.1. $f(x) = \sin x$, $x_0 = 1$.

К7.2. $f(x) = \cos x$, $x_0 = 2$.

К7.3. $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x_0 = 0$.

К7.4. $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $x_0 = \pi/2$.

К7.5. $f(x) = x^3$, $x_0 = 1$.

К7.6. $f(x) = \ln x$, $x_0 = 2$.

К7.7. $f(x) = 2^x$, $x_0 = 2$.

К7.8. $f(x) = x^4$, $x_0 = 0$.

К7.9. $f(x) = \arcsin x$, $x_0 = 0$.

К7.10. $f(x) = \arccos x$, $x_0 = 0$.

Ответы, указания, решения

Т7.1. Первое утверждение следует из теоремы 7.1. Докажем второе. Пусть $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ x_0+\Delta x\in X}} \frac{\Delta f(x_0,\Delta x)-df(x_0,\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ x_0+\Delta x\in X}} \frac{\Delta f(x_0,\Delta x)}{\Delta x} - \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ x_0+\Delta x\in X}} \frac{\Delta f'(x_0,\Delta x)\Delta x}{\Delta x} =$$

$$= f'(x_0) - f'(x_0) = 0,$$

т. е. $\Delta f(x_0,\Delta x) - df(x_0,\Delta x) = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$, $x_0 + \Delta x \in X$.

Т7.2.

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} \left(f(x)-f(x_0)\right)+f(x_0) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ x_0+\Delta x\in X}} \left(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right)+f(x_0).$$

Но в силу теоремы 7.2

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ x_0+\Delta x\in X}} \Delta f(x_0,\Delta x) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ x_0+\Delta x\in X}} df(x_0,\Delta x) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ x_0+\Delta x\in X}} (f'(x_0)\Delta x) = 0,$$

откуда $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) = f(x_0)$.

Обратное утверждение неверно: примером может служить функция $f(x) = |x|$ в точке $x_0 = 0$.

Т7.3. Указание: воспользоваться утверждением задачи Т3.11.

Т7.4. Пусть $f(x)$ является четной функцией: $f(-x) = f(x)$ для любого $x \in Af^1$.

Тогда $f'(-x_0) = \lim\limits_{x\to -x_0} \dfrac{f(x)-f(-x_0)}{x-(-x_0)} = \lim\limits_{-x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x+x_0} =$

$$= \lim_{-x\to x_0} \frac{f(-x)-f(x_0)}{-(-x-x_0)} = -\lim_{-x\to x_0} \frac{f(-x)-f(x_0)}{-x-x_0} = -f'(x_0),$$

что и означает нечетность функции $f'(x)$.

Утверждение, касающееся нечетной функции $f(x)$, доказывается аналогично. Предположим, теперь, что $f(x)$ — периодическая функция с периодом T, т. е. для любого $x \in Af^1\, f(x) = f(x - T) = f(x + T)$. Тогда

$$f'(x_0+T) = \lim_{x \to x_0+T} \frac{f(x) - f(x_0+T)}{x-(x_0+T)} = \lim_{x-T \to x_0} \frac{f(x-T) - f(x_0)}{(x-T)-x_0} = f'(x_0).$$

Т7.5. Примером такой функции является функция $f(x) = |x - x_1| + |x - x_2| + \ldots + |x - x_n|$. Ее недифференцируемость в точке x_i, где $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, следует из утверждения задачи Т7.3, поскольку $f'_+(x_i) = 1$, $f'_-(x_i) = -1$. Если же x_0 — произвольная точка, отличная от $x_1, \ldots, x_n$, то функция f линейна в окрестности этой точки (чтобы убедиться в этом, достаточно раскрыть модули в точке x_0) и ее дифференцируемость следует из теоремы 7.1.

Т7.6. Примером такой функции является функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{если x} - \text{рациональное число;} \\ -1, \text{если x} - \text{иррациональное число.} \end{cases}$$

Данная функция разрывна в каждой точке (см. задачу Т4.9). Поэтому в силу утверждения задачи Т7.2 она всюду недифференцируема. Квадрат же этой функции есть линейная функция $y = 1$, которая всюду дифференцируема (теорема 7.1).

К7.1—К7.10. Приведем общий алгоритм решения этих задач с помощью Mathcad.

Ввести исходные данные: функцию $f(x)$, абсциссу x_0, величину Δx, равную $x_1 - x_0$. Задать уравнения секущей и касательной:

$$y(x, x_1) := \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

$$g(x) := \frac{d}{dx} f(x)$$

$$k(x) := g(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Задать абсциссу x_1:

$$x_1 := x_0 + \Delta x + 0.00001 - \frac{\mathrm{FRAME}}{10}$$

Построить графики функций $f(x)$, $y(x,\ x_1)$, $k(x)$ и произвести анимацию.

Глава 8

Правила и формулы дифференцирования функции одной переменной

Вычисление производной элементарной функции — это конечный алгоритмический процесс, который основывается на теоремах 8.1, 8.2 и таблице производных основных элементарных функций. Этот процесс будем называть дифференцированием.

Чтобы избежать громоздких формулировок теорем 8.1, 8.2, условимся считать точки x_0, t_0 внутренними точками промежутков, на которых заданы соответствующие функции.

Теорема 8.1 (арифметика дифференцирования). Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x_0, то сумма, разность, произведение и частное (при условии $v(x_0) \neq 0$) этих функций также дифференцируемы в точке x_0, причем в этой точке справедливы равенства:

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \ (uv)' = u'v + uv', \ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \tag{8.1}$$

Доказательство. Докажем вторую из формул (8.1):

$$(uv)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{u(x)v(x) - u(x_0)v(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x)v(x) - u(x_0)v(x) + u(x_0)v(x) - u(x_0)v(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(u(x) - u(x_0))\,v(x)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{(v(x) - v(x_0))\,u(x_0)}{x - x_0} = v(x_0)\,u'(x_0) + v'(x_0)\,u(x_0).$$

В этой цепочке равенств использовалась теорема 3.2 и непрерывность функции $v(x)$ в точке x_0 (см. задачу Т7.2). Остальные равенства из (8.1) доказываются аналогично.

Теорема 8.2. Суперпозиция дифференцируемых функций одной переменной является дифференцируемой функцией. Более точно: если функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема в точке t_0, а функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 = \varphi(t_0)$, то и сложная функция $y(t) = f(\varphi(t))$ дифференцируема в точке t_0, при этом $y'(t_0) = f'(x_0)\cdot\varphi'(t_0)$ или $y'_t = f'_x\cdot\varphi'_t$.

Доказательство. Согласно определению производной,

$$y'(t_0) = \lim_{t\to t_0}\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0} = \lim_{t\to t_0}\frac{f(\varphi(t))-f(\varphi(t_0))}{t-t_0} = \lim_{t\to t_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{t-t_0}.$$

В *гл. 7* показано, что $(f(x)-f(x_0))-f'(x_0)(x-x_0) = o((x-x_0))$ при $x \to x_0$. Кроме того, ввиду непрерывности $\varphi(t)$ в точке t_0 (задача Т7.2) $\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t) = \varphi(t_0)$ или $x \to x_0$ при $t \to t_0$. Поэтому

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{t-t_0} = \lim_{t\to t_0}\frac{f'(x_0)(x-x_0)+o((x-x_0))}{t-t_0} =$$

$$= \lim_{t\to t_0} f'(x_0)\frac{(x-x_0)}{t-t_0} + \lim_{t\to t_0}\frac{o((x-x_0))}{t-t_0} =$$

$$= f'(x_0)\lim_{t\to t_0}\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0} + \lim_{t\to t_0}\left(\frac{o((x-x_0))}{x-x_0}\cdot\frac{x-x_0}{t-t_0}\right) =$$

$$= f'(x_0)\cdot\varphi'(t_0) + \lim_{t\to t_0}\frac{o((x-x_0))}{x-x_0}\cdot\lim_{t\to t_0}\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0} =$$

$$= f'(x_0)\cdot\varphi'(t_0) + 0\cdot\varphi'(t_0) = f'(x_0)\cdot\varphi'(t_0).$$

Теорема 8.3. Пусть функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на промежутке X и имеет отличную от нуля производную в точке x_0 из этого промежутка. Тогда обратная ей функция $x = f^{-1}(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, причем эта производная равна $\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Доказательство теоремы дано в задаче Т8.2.

Следствие 8.1 (таблица производных элементарных функций). Пусть $y = f(x)$ — произвольная элементарная функция, дифференцируемая на промежутке X.

Тогда:

1. Если y — константа, то $y' = 0$.
2. При $a > 0$ $(a^y)' = a^y \cdot \ln a \cdot y'$ для любого $x \in X$; в частности, $(e^y)' = e^y \cdot y'$.
3. При $a \neq 0$ $(y^a)' = a \cdot y^{a-1} \cdot y'$ для любого $x \in X$, при котором $y > 0$; в частности, если a — натуральное число, то $(y^a)' = a \cdot y^{a-1} \cdot y'$ для любого $x \in X$.
4. При $a > 0$, $a \neq 1$ $(\log_a y)' = \dfrac{1}{y \cdot \ln a} y'$ для любого $x \in X$, при котором $y > 0$; в частности, $(\ln y)' = \dfrac{y'}{y}$.
5. $(\sin y)' = \cos y \cdot y'$ для любого $x \in X$.
6. $(\cos y)' = -\sin y \cdot y'$ для любого $x \in X$.
7. $(\operatorname{tg} y)' = \dfrac{1}{\cos^2 y} y'$ для любого $x \in X$, при котором $y \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, где k — целое.
8. $(\operatorname{ctg} y)' = -\dfrac{1}{\sin^2 y} y'$ для любого $x \in X$, при котором $y \neq \pi k$, где k — целое.
9. $(\arcsin y)' = \dfrac{y'}{\sqrt{1-y^2}}$ для любого $x \in X$, при котором $|y| < 1$.
10. $(\arccos y)' = -\dfrac{y'}{\sqrt{1-y^2}}$ для любого $x \in X$, при котором $|y| < 1$.
11. $(\operatorname{arctg} y)' = \dfrac{1}{1+y^2} y'$ для любого $x \in X$.
12. $(\operatorname{arcctg} y)' = -\dfrac{1}{1+y^2} y'$ для любого $x \in X$.

Отметим, что при $f(x) = x$ во всех приведенных выше формулах $y' = 1$.

Доказательство следствия дано в задаче T8.3.

К сожалению, теоремы 8.1—8.3 обеспечивают лишь достаточные условия дифференцируемости, поэтому может случиться так, что функция будет иметь производную, несмотря на нарушение условий этих теорем. Рассмотрим, к примеру, две элементарные функции $f(x)=\sqrt{x}$, $\varphi(t) = \sin(t^4)$. Первая из этих функций недифференцируема в точке $x_0 = 0$ вдоль $[0; +\infty)$, поскольку предел $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sqrt{x}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ не существует. Однако суперпозиция этих функций $f(\varphi(t))=\sqrt{\sin\left(t^4\right)}$ дифференцируема в точке $t_0 = 0$, т. к.

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{\sin\left(t^4\right)}-0}{t-0}=\lim_{t\to 0}t\sqrt{\frac{\sin\left(t^4\right)}{t^4}}=\lim_{t\to 0}t\cdot\lim_{t\to 0}\sqrt{\frac{\sin\left(t^4\right)}{t^4}}=0\cdot 1=0.$$

Другие примеры даны в задачах Т8.4, Т8.5.

Компьютерный раздел

Программирование в Mathcad осуществляется с помощью подпанели **Программирование** (Programming) (см. рис. 8.1), для вызова которой следует щелкнуть на кнопке ⊡ панели инструментов **Математика** (Math). Эта подпанель содержит 10 кнопок. Щелчок на кнопке Add Line выводит шаблон новой строки, щелчок на любой другой кнопке выводит шаблон соответствующего оператора в том месте, где находится синий курсор ввода. Из операторов составляются программные модули, представляющие собой подпрограммы-функции. При этом окончательным значением такой подпрограммы-функции будет число (вектор или матрица), вычисленное последним в этом программном модуле. Внутри программного модуля могут присутствовать внешние и внутренние переменные. В программном модуле значения внешних переменных определяются в соответствии с общими правилами локального и глобального присваивания. Внутренняя переменная программного модуля определяется с момента присваивания ей числового значения операцией внутреннего присваивания (кнопкой ← подпанели **Программирование** (Programming)). Если идентификаторы внутренней и внешней переменной совпадают, то в пределах программного модуля действует внутренняя переменная.

Кнопка Add Line вызывает шаблон $\Big|\begin{smallmatrix}\blacksquare\\ \blacksquare\end{smallmatrix}$ для ввода на месте меток нужных операторов. Вертикальная черта означает, что операторы, примыкающие к ней, будут образовывать один блок. Если в блоке ниже или выше некоторой строки необходимо добавить метку для новой строки, то следует выделить синим курсором ввода всю данную строку и щелкнуть на кнопке Add Line. При этом новая метка появится ниже или выше выделенной строки, в зависимости от того, справа или слева синий курсор окаймлял данную строку.

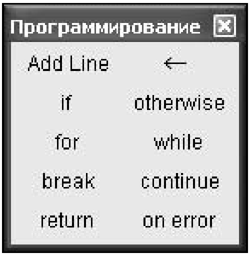


Рис. 8.1. Подпанель **Программирование**

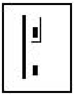
Кнопка ← или комбинация клавиш <Ctrl>+<{> вызывают шаблон ▮ ← ▮ оператора присваивания ←. Если, например, на месте левой метки этого шаблона ввести идентификатор `vari`, а на месте правой метки — число 3, то это приведет к присваиванию переменной `vari` значения 3: `vari`←3.

Рассмотрим пример

$$a := 5 \qquad b := 2 \qquad y := \left|\begin{array}{l} b \leftarrow 1 \\ x \leftarrow a + b \\ x^2 \end{array}\right.$$

$$y = 36 \qquad b = 2 \qquad a = 5$$

вычисляющий значение выражения $(a + b)^2$. В этом примере программный модуль содержит внешнюю переменную a и внутреннюю переменную b, чей идентификатор совпадает с внешней переменной b, имеющей значение 2. Как видно из результата, значение b внутри модуля равно 1, а за его пределами b, по-прежнему, равно 2.

Рассмотрим последовательность действий при формировании предыдущего модуля. Установите визир в нужном месте рабочего листа и кнопкой Add Line введите вертикальную черту с двумя метками . На месте правой метки задайте значение внутренней переменной кнопкой ← : $\left| \begin{array}{l} b \leftarrow 1 \\ \blacksquare \end{array} \right.$. На месте второй метки переменной x присвойте значение выражения $a + b$. Добейтесь окаймления справа синим курсором всей последней строки: $\left| \begin{array}{l} b \leftarrow 1 \\ x \leftarrow a + b \end{array} \right.$. Кнопкой Add Line добавьте новую строку с меткой для ввода очередного оператора: $\left| \begin{array}{l} b \leftarrow 1 \\ x \leftarrow a + b \\ \blacksquare \end{array} \right.$. На месте метки введите x^2. Добейтесь окаймления слева синим курсором всего программного модуля и клавишей <:> введите знак присваивания :=, затем на месте появившейся метки введите идентификатор y:

$$y := \left| \begin{array}{l} b \leftarrow 1 \\ x \leftarrow a + b \\ x^2 \end{array} \right.$$

После щелчка вне этого блока переменная y получит значение 36.

Отметим, что внутри программного модуля в одной строке можно записать только один оператор или формулу.

Часто программные модули используются для определения функций пользователя. Пример определения функции пользователя с использованием программного модуля приведен ниже:

$$f(x) := \left| \begin{array}{l} a \leftarrow (x + 1) \cdot 2 \\ a^2 + x \end{array} \right. \qquad f(0.5) = 9.5$$

Кнопка for вызывает шаблон $\left| \begin{array}{l} \text{for } \blacksquare \in \blacksquare \\ \quad \blacksquare \end{array} \right.$ оператора цикла `for` с фиксированным числом повторений. На месте левой верхней метки вводится имя ранжированной переменной, а на месте правой верхней метки — диапазон (и шаг) ее изменения; на месте нижней метки вводится блок операторов цикла (добавление меток в этом блоке осуществляется кнопкой Add Line). Алгоритм работы оператора цикла: ранжированной переменной присваивается первое значение и выполняются все операторы блока, затем ранжированной переменной присваивается второе значение и опять выполняются все операторы блока и так далее, пока не будет присвоено последнее значение из диапазона изменения ранжированной переменной, после чего операторы блока выполнятся в последний раз. Например, результатом программного модуля

```
$v :=$
    for $i \in 0..3$
        $a_i \leftarrow i+1$
        $b_i \leftarrow (a_i)^2$
    $b$
```

будет точка $v=\begin{pmatrix}1\\4\\9\\16\end{pmatrix}$.

Рассмотрим еще два примера использования оператора `for`:

```
$sum(n) :=$
    $s \leftarrow 0$
    for $i \in 1..n$
        $s \leftarrow s + i$
```

$sum(10) = 55$

$sum(20) = 210$

```
$prod(n) :=$
    $p \leftarrow 1$
    for $i \in 1..n$
        $p \leftarrow p \cdot i$
    $p$
```

$prod(3) = 6$

$prod(10) = 3.629 \times 10^6$

Алгоритм работы последнего программного модуля следующий. В программный блок в качестве аргумента функции передается переменная n. Затем внутренней переменной p присваивается значение 1. Начинается выполнение цикла `for`. Переменной i присваивается значение 1 и выполняется оператор $p \leftarrow p \cdot i$, после чего $p = 1$; переменной i присваивается значение 2 и выполняется оператор $p \leftarrow p \cdot i$, после чего $p = 1 \cdot 2$; и так далее, до достижения переменной i значения n, после чего p будет равно $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. В конце программного блока указана переменная p, значение которой возвращается из модуля в качестве результата.

Задачи для самостоятельного решения

Т8.1. Доказать первое и третье равенства из теоремы 8.1.

Т8.2. Доказать теорему 8.3.

Т8.3. Доказать следствие 8.1.

Т8.4. Можно ли утверждать, что функция $u(x) + v(x)$ не имеет производной в точке x_0, если: а) функция $u(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $v(x)$ — нет; б) обе функции $u(x)$, $v(x)$ не имеют производной в точке x_0?

Т8.5. Можно ли утверждать, что функция $u(x) \cdot v(x)$ не имеет производной в точке x_0, если: а) функция $u(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $v(x)$ — нет; б) обе функции не имеют производной в этой точке?

Т8.6. Доказать или опровергнуть следующие утверждения: а) если $f(x) \le g(x)$ для любого x из промежутка X, то $f'(x) \le g'(x)$ при $x \in X$; б) если $f'(x) < g'(x)$ для любого x из промежутка X, то $f(x) < g(x)$ при $x \in X$.

Т8.7. При каких значениях m и n функция $f(x)$ всюду дифференцируема:

а) $$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + x + 2), \text{ если } x \le 2; \\ mx - n, \text{ если } x > 2. \end{cases}$$

б) $$f(x) = \begin{cases} mx^2 - n, \text{ если } x \le 1; \\ \sqrt{x^2 + x + 2}, \text{ если } x > 1. \end{cases}$$

в) $$f(x) = \begin{cases} e^{x^2+x-2}, \text{ если } x \le 1; \\ mx^2 + n, \text{ если } x > 1. \end{cases}$$

Общая формулировка задач П8.1—П8.21

Пользуясь следствием 8.1, вычислить производную функции $g(x)$.

П8.1. $g(x) = 2^{\sin x} + \cos^2 x$.

П8.2. $g(x) = e^{\sin(3x)} + \sin^2 x$.

П8.3. $g(x) = \arcsin\left(x^3\right)$.

П8.4. $g(x) = \arccos\left(2 + x^5\right)$.

П8.5. $g(x) = \ln\left(\operatorname{tg}\left(x^2\right)\right)$.

П8.6. $g(x) = \ln\left(\operatorname{ctg}\left(1 + x^2\right)\right)$.

П8.7. $g(x)=\sin^3\left(x^5\right)$.

П8.8. $g(x)=\cos^4\left(x^3\right)$.

П8.9. $g(x)=\log_2(\sin x)$.

П8.10. $g(x)=\log_3(\cos(5x))$.

П8.11. $g(x)=\sqrt[3]{\ln(5x)}$.

П8.12. $g(x)=\sqrt[7]{\ln\left(1+x^2\right)}$.

П8.13. $g(x)=\ln^3(2x)$.

П8.14. $g(x)=\ln^4(3x+1)$.

П8.15. $g(x)=\sqrt{\operatorname{arctg}(x+1)}$.

П8.16. $g(x)=\sqrt[3]{\operatorname{arcctg}(2x)}$.

П8.17. $g(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}\cdot\operatorname{tg}(x+1)}$.

П8.18. $g(x)=\sqrt[3]{\mathrm{sinx}\cdot\ln(\mathrm{x}+3)}$.

П8.19. $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\arcsin x}$.

П8.20. $g(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\arccos x}$.

П8.21. $g(x)=\sqrt{\sin^3\left(\ln^2\left(x^2+5x\right)\right)}$.

Общая формулировка задач K8.1—K8.11

Для данных функций $g(y)$, $f(x_1, \ldots, x_k)$, $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_k(t)$ найти символьное выражение сложной функции $F(t) = g(f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_k(t)))$ и вычислить ее производную в символьном виде, а также в точке t_0.

K8.1.

$$g(y)=\sin(\sin(\sin(\sin y))),\ f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^3,\ \varphi_1(t)=\ln t,\ \varphi_2(t)=\operatorname{tg}\left(\sqrt{t}\right),\ t_0=1.$$

K8.2. $g(y)=\cos(\cos(\cos y)),\ f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2x_3^3,$

$$\varphi_1(t)=\varphi_2(t)=t^2+1,\varphi_3(t)=\sqrt{\frac{t}{1-t}},\ t_0=\frac{1}{2}.$$

K8.3.

$$g(y)=\left(\left(\left(y^2+1\right)^2+1\right)^2+1\right)^2+1,\ f(x_1,x_2)=\operatorname{tg}(x_1)^{x_2},\ \varphi_1(t)=t,\ \varphi_2(t)=t^4,\ t_0=4.$$

K8.4.

$$g(y)=\sqrt{\sqrt{\sqrt{y}+2}+2},\ f(x_1,x_2)=\frac{\sqrt[7]{x_1}}{\sqrt[3]{x_2}},\ \varphi_1(t)=\sqrt{\frac{t^2+1}{t^4+1}},\ \varphi_2(t)=t^3,\ t_0=1.5.$$

К8.5. $g(y)=\arcsin\left(\arcsin\left(\arcsin\left(y^4+1\right)\right)\right),\ f(x_1,x_2,x_3)=\dfrac{x_1}{x_2x_3},$

$\varphi_1(t)=\varphi_2(t)=\varphi_3(t)=\log_2(\sin t),\ t_0=1.$

К8.6. $g(y)=2^{2^{2^y}},\ f(x_1,x_2)=e^{x_1}x_2,\ \varphi_1(t)=\cos^3 t,\ \varphi_2(t)=\sqrt[3]{t},\ t_0=1.$

К8.7. $g(y)=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{arctg}\left(\operatorname{arctg}\left(y^2-1\right)\right)\right),\ f(x_1,x_2,x_3)=\dfrac{x_2x_1}{x_3},$

$\varphi_1(t)=\varphi_2(t)=\varphi_3(t)=\log_7(\cos t),\ t_0=4.$

К8.8.

$$g(y)=\left(\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{y+1}+1}+1}\right)^{\frac{1}{3}},\ f(x_1,x_2)=x_1\operatorname{ctg}x_2,\ \varphi_1(t)=\sin^3 t,\ \varphi_2(t)=\ln t,\ t_0=\frac{1}{2}.$$

К8.9.

$$g(y)=\operatorname{tg}(\operatorname{tg}(\operatorname{tg}(y+2))+2)+2,\ f(x_1,x_2,x_3)=x_1^{x_2}+x_2^{x_3},\ \varphi_1(t)=t,\ \varphi_2(t)=t^2,$$

$\varphi_3(t)=t^3,\ t_0=1.$

К8.10. $g(y)=3^{3^{3^y}},\ f(x_1,x_2)=x_1-x_2^2,\ \varphi_1(t)=\sin t,\ \varphi_2(t)=\operatorname{tg}^2 t,\ t_0=1.$

К8.11. $g(y)=\ln(\ln y),\ f(x_1,x_2)=\sin x_1+x_1x_2,\ \varphi_1(t)=t^2,\ \varphi_2(t)=t^3,\ t_0=3.$

Ответы, указания, решения

Т8.2. По определению производной

$$\left(f^{-1}(y_0)\right)'=\lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\lim_{y\to y_0}\frac{x-x_0}{y-y_0}=\lim_{y\to y_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}.$$

С другой стороны,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Дифференцируемость функции $f(x)$ в точке x_0 означает непрерывность ее в этой точке (задача Т7.2). Поэтому непрерывна и функция $f^{-1}(y)$ в точке y_0 (следствие 4.6), т. е. $\lim\limits_{y\to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$ или $\lim\limits_{y\to y_0} x = x_0$. Отсюда по определению предела функции получаем следующую цепочку следствий: $\{y_n\} \to y_0 \Rightarrow \{f^{-1}(y_n)\} \to f^{-1}(y_0) \Rightarrow \{x_n\} \to x_0$. В частности, это означает, что из равенства $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$ следует равенство

$$\lim_{y\to y_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$ Теорема доказана.

Т8.3. Достаточно рассмотреть случай $y = f(x) = x$; общий случай будет следовать тогда из теоремы 8.2.

Согласно определению производной,

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x\to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2\Delta x}{2\Delta x} \cdot \cos x = \cos x .$$

Аналогично показывается, что $(\cos x)' = -\sin x$. Формулы для $(\mathrm{tg}x)'$ и $(\mathrm{ctg}x)'$ выводятся с помощью теоремы 8.1, примененной к отношениям $\frac{\sin x}{\cos x}$ и $\frac{\cos x}{\sin x}$.

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x\to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x\to 0} \frac{e^{\Delta x \ln a} - 1}{\Delta x} =$$

$$= a^x \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x \ln a}{\Delta x} = a^x \ln a$$

(здесь была использована эквивалентность из следствия 6.1).

Если $z = \log_a x$, то $x = a^z$ — обратная функция. Отсюда по теореме 8.3

$$z'_x = \frac{1}{x'_z} = \frac{1}{\ln a \cdot a^z} = \frac{1}{\ln a \cdot a^{\log_a x}} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Если $z = x^a$, $a \neq 0$, $x > 0$, то $z = e^{a\ln x}$ и, следовательно,

$$z'_x = e^{a\ln x} \cdot (a \ln x)' = e^{a\ln x} \cdot \frac{a}{x} = \frac{a \cdot x^a}{x} = ax^{a-1}.$$

Если $z = \arcsin x$, $|x| < 1$, то $x = \sin z$ — обратная функция на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Отсюда по теореме 8.3

$$z'_x = \frac{1}{x'_z} = \frac{1}{\cos z} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Аналогично с помощью теоремы 8.3 доказываются остальные формулы для обратных тригонометрических функций.

Т8.4. а) Можно; доказывается от противного с помощью теоремы 8.1. б) Пусть $u(x) = |x|$, $v(x) = -|x|$. Эти функции недифференцируемы в точке нуль, поскольку $u'_+(0) \neq u'_-(0)$, $v'_+(0) \neq v'_-(0)$ (задача Т7.3); однако их сумма дифференцируема всюду в Af^1.

Т8.5. а) Нельзя: рассмотреть функции $u(x) = x$, $v(x) = |x|$ в точке $x_0 = 0$. б) Нельзя: рассмотреть функции $u(x) = v(x) = |x|$ в точке $x_0 = 0$.

Т8.6. а) Утверждение неверно: рассмотреть функции $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ на промежутке $X = (-\infty; 0)$. б) Утверждение не верно: рассмотреть функции $f(x) = -x^3$, $g(x) = x$ на промежутке $X = (-\infty; 0)$.

Т8.7. Обозначим: $g(x) = e^{x^2+x-2}$, $r(x) = mx^2 + n$.

Тогда $f(x) = \begin{cases} g(x), \text{при } x \le 1, \\ r(x) \text{ при } x > 1. \end{cases}$

Очевидно, функция $f(x)$ дифференцируема во всех точках, исключая, быть может, точку $x = 1$. Чтобы $f(x)$ имела производную в этой точке, необходима ее непрерывность в этой точке (задача Т7.2). Согласно утверждению задачи Т3.11, $f(x)$ непрерывна в точке $x = 1$, если $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+} f(x) = f(1)$.

Но $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-} g(x) = g(1) = 1$, $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+} r(x) = r(1) = m + n$.

Поэтому $f(x)$ непрерывна в точке $x = 1$, если $1 = m + n$; при этом $g(1) = r(1) = f(1)$.

Воспользуемся теперь утверждением задачи Т7.3, согласно которому производная $f'(1)$ в точке $x = 1$ существует, если и только если $f'_-(1) = f'_+(1)$. Вычислим левую и правую производные функции $f(x)$ в точке $x = 1$ при условии, что $m + n = 1$ (т. е. при условии непрерывности $f(x)$ в этой точке).

$f'_-(1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0-} \dfrac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0-} \dfrac{g(1+\Delta x) - g(1)}{\Delta x}$. Последний предел равен пределу $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{g(1+\Delta x) - g(1)}{\Delta x}$, который по определению есть производная функции $g(x)$ в точке $x = 1$. Отсюда ввиду $g'(x) = (2x+1)e^{x^2+x-2}$ $f'_-(1) = g'(1) = 3$.

Аналогично,

$$f'_+(1) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{r(1+\Delta x) - r(1)}{\Delta x}.$$

Последний предел равен пределу $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{r(1+\Delta x) - r(1)}{\Delta x}$, который по определению есть производная функции $r(x)$ в точке $x = 1$. Отсюда ввиду $r'(x) = 2mx$ $f'_+(1) = r'(1) = 2m$.

Итак, $f'_-(1) = f'_+(1) \Leftrightarrow 3 = 2m$. В итоге имеем:

$$\begin{cases} m + n = 1 \\ 3 = 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -0.5 \\ m = 1.5 \end{cases}.$$

П8.21. Обозначим $y = \sin\left(\ln^2\left(x^2 + 5x\right)\right)$. Тогда $g(x) = y^{\frac{3}{2}}$. По следствию 8.1 $g' = \left(y^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}} y'$. Обозначим $z = \ln^2(x^2 + 5x)$. Тогда $y = \sin z$, и по следствию 8.1 $y' = (\sin z)' = \cos z \cdot z'$. Обозначим $t = \ln(x^2 + 5x)$. Тогда $z = t^2$, $z' = 2t \cdot t' = 2t\left(\ln\left(x^2 + 5x\right)\right)' = \dfrac{2t}{x^2 + 5x}\left(x^2 + 5x\right)' = \dfrac{2t(2x+5)}{x^2 + 5x}$. В итоге получаем:

$$g' = \frac{3}{2}\sqrt{\sin\left(\ln^2\left(x^2 + 5x\right)\right)} \cdot \cos\left(\ln^2\left(x^2 + 5x\right)\right) \cdot 2\ln\left(x^2 + 5x\right) \cdot \frac{(2x+5)}{x^2 + 5x}.$$

К8.11. Алгоритм решения задачи с помощью Mathcad.

Задать системную переменную `ORIGIN` и вспомогательные "промежуточные" функции `g(y)`, `f(x)`:

`ORIGIN := 1`   `g(y) := ln(y)` $f(x) :=\sin(x_1) + x_1 \cdot x_2$

С помощью программных операторов присваивания ← и оператора цикла `for` построить сложную функцию $F(t)$:

```
F(t) := | x_1 ← t^2
        | x_2 ← t^3
        | F ← f(x)
        | for i ∈ 1 .. 2
        |     F ← g(F)
        | F
```

Вычислить в символьном виде функцию $F(t)$ и ее производную $pr(t)$, а также значение производной в точке $t = 3$:

$$F(t) \rightarrow \ln\left(\ln\left(\sin\left(t^2\right) + t^5\right)\right)$$

$$pr(t) := \frac{d}{dt}F(t) \rightarrow \frac{\left(2 \cdot \cos\left(t^2\right) \cdot t + 5 \cdot t^4\right)}{\left[\left(\sin\left(t^2\right) + t^5\right) \cdot \ln\left(\sin\left(t^2\right) + t^5\right)\right]}$$

$$pr(3) = 0.299$$

Глава 9

Производные и дифференциалы высших порядков

Определим индуктивно n-ю производную функции $f(x)$. Если функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке промежутка X, то $f'(x)$ сама является функцией переменной x, определенной на этом промежутке. $f'(x)$ (ее еще можно обозначать $f^{(1)}(x)$) называется первой производной функции $f(x)$. Предположим, что уже определена $(n-1)$-я производная $f^{(n-1)}(x)$ на промежутке X, где $n \geq 2$. Тогда первая производная функции $f^{(n-1)}(x)$ называется n-й производной (или производной n-го порядка) функции $f(x)$ на промежутке X и обозначается через $f^{(n)}(x)$; $f^{(n)}(x_0)$ называется n-й производной функции $f(x)$ в точке x_0. Иногда саму функцию $f(x)$ удобно обозначать $f^{(0)}(x)$, а ее вторую и третью производные — $f''(x)$ и $f'''(x)$.

n-м дифференциалом функции $f(x)$ независимой переменной x называется функция двух независимых переменных x и Δx, равная $f^{(n)}(x)(\Delta x)^n$ и обозначаемая d^nf, т. е. $d^nf(x, \Delta x) = f^{(n)}(x)(\Delta x)^n$. Величина $d^nf(x_0, \Delta x)$ называется n-дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0. Если $g(x) = x$, то $dg(x, \Delta x) = (x)'\Delta x = \Delta x$. Поэтому будет также использоваться следующая запись n-го дифференциала: $d^nf(x) = f^{(n)}(x)dx^n$ (здесь dx^n означает $(dx)^n$).

Равенство $d^nf(x) = f^{(n)}(x)dx^n$ объясняет происхождение одного из обозначений n-й производной $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n}{dx^n} f(x)$ *(см. "Компьютерный раздел")*.

Отметим, что данное здесь определение n-го дифференциала отличается от традиционного индуктивного, согласно которому d^nf равен первому дифференциалу от $(n-1)$-го дифференциала $d^{n-1}f$. Однако индуктивное определение является более громоздким, поскольку сопровождается дополнительными условиями, а именно: а) приращение Δx должно рассматриваться как постоянный множитель; б) при вычислении дифференциала от $d^{n-1}f$ новое приращение Δx считается равным тому, которое использовалось при вычислении дифференциалов меньших порядков.

Утверждение 9.1 (инвариантность формы первого дифференциала). Если функция $\varphi(t)$ дифференцируема на некотором промежутке, t — независимая переменная, а функция $f(x)$ дифференцируема на области значений $E(\varphi)$ функции $x = \varphi(t)$, то $df(x) = f'(x)\,dx(t) = f'(x)\,dx$.

Доказательство. Пусть $y(t) = f(\varphi(t))$. По определению первого дифференциала, с учетом теоремы 8.2, имеем:

$df(x) = dy(t) = y'_t(t)dt = f'_x \cdot \varphi'_t \cdot dt = f'_x d\varphi(t) = f'(x)dx$. Утверждение доказано.

Дифференциалы второго и более высоких порядков в общем случае не обладают свойством инвариантности. В частности, $d^2 f(x) \neq f''(x)\,dx^2$, где $x = \varphi(t)$. Действительно, если $y(t) = f(\varphi(t))$, то в силу теорем 8.1, 8.2

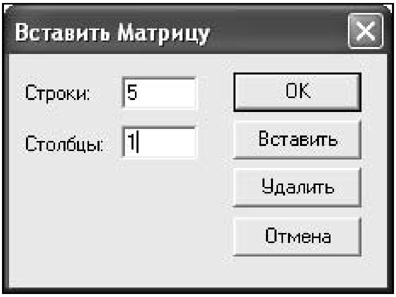
$$
\begin{aligned}
d^2 f(x) &= d^2 y(t) = y''(t)dt^2 = (f'(x)\varphi'(t))'dt^2 = \\
&= \left(f''(x)\,\varphi'(t)\,\varphi'(t) + f'(x)\,\varphi''(t)\right)dt^2 = f''(x)\left(\varphi'(t)\,dt\right)^2 + f'(x)\varphi''(t)\,dt^2 = \\
&= f''(x)(d\varphi(t))^2 + f'(x)\,d^2\varphi(t) = f''(x)\,dx^2 + f'(x)\,d^2x\,.
\end{aligned}
$$

Отсюда видно, что $d^2 f(x) = f''(x)\,dx^2$ только в случае $f'(x)\,d^2x = 0$. В частности, если $x = \varphi(t) = at + b$ — линейная функция, то $d^n f(x) = f^{(n)}(x)\,dx^n$ (см. задачу Т9.1).

Компьютерный раздел

Кнопка $\frac{d^n}{dx^n}$ подпанели **Матанализ** (Calculus) вызывает шаблон $\frac{d^{\blacksquare}}{d\blacksquare^{\blacksquare}}\blacksquare$ для вычисления производных высших порядков. Две метки этого шаблона служат для ввода порядка вычисляемой производной. Например, если воспользоваться знаком символьного вывода →, то $\frac{d^3(x^3)}{dx^3} \to 6$.

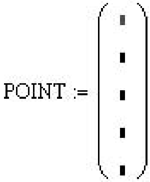
Для вычисления значений некоторой функции одной переменной в нескольких точках $p_1, \ldots, p_n$ удобно представить эти точки в виде координат n-мерной точки: $(p_1, \ldots, p_n)$. Координаты точек пространства Af^n располагаются на рабочем листе Mathcad-документа вертикально. Можно добиться их горизонтального расположения, однако при этом они уже будут восприниматься как матрицы, что приведет к усложнению операций над ними и, в частности, к необходимости использования двойной индексации. Рассмотрим пример ввода точки (1, 13, –4, 0, 3), которой присвоено имя POINT. Разместите красный курсор (красный крестик) в нужном месте рабочего листа и введите идентификатор POINT. Клавишей <:> введите знак присваивания :=. Комбинацией клавиш <Ctrl>+<M> вызовите диалоговое окно **Вставить Матрицу** (Insert Matrix), изображенное на рис. 9.1.



Строки: 5
Столбцы: 1

Рис. 9.1. Диалоговое окно **Вставить Матрицу**

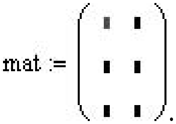
В поле **Строки** (Rows) этого окна задайте размерность 5 точки POINT, а в поле **Столбцы** (Columns) введите 1. Щелкните по кнопке **OK**. Справа от знака присваивания, на месте метки, выделенной синим курсором (уголком), появится шаблон точки с метками для ввода ее координат:



На месте меток введите последовательно числа 1, 13, –4, 0, 3.

Напомним, что системная переменная ORIGIN задает начало индексации в Mathcad-документе. Если ее значение равно 1, то для извлечения i-й координаты точки необходимо ввести идентификатор этой точки с индексом i. Например, введите идентификатор POINT и, перейдя в режим ввода индексов, введите число 2. После нажатия клавиши <=> справа от знака равенства на экране появится вторая координата точки: `POINT`$_2$ `= 13`.

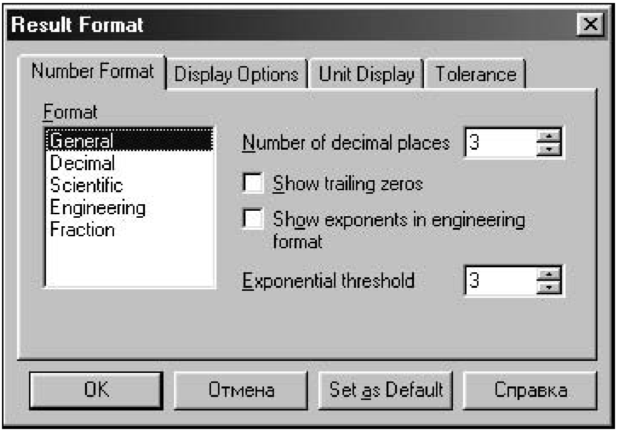
Если n-мерную точку расположить на рабочем листе горизонтально, то как было сказано выше, она будет восприниматься как матрица, состоящая из одной строки и n столбцов. Ввод элементов матрицы аналогичен вводу координат n-мерных точек. Пусть, к примеру, надо ввести матрицу $mat = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -5 & 8.2 \end{pmatrix}$. В нужном месте рабочего листа введите идентификатор матрицы `mat` и знак присваивания :=. Затем выведите диалоговое окно **Вставить матрицу** (Insert Matrix). В поле **Строки** (Rows) этого окна надо задайте число строк 3, а в поле **Столбцы** (Columns) — число столбцов 2. После щелчка по кнопке **OK** справа от знака присваивания появится шаблон матрицы с метками для ввода ее элементов:



$$mat := \begin{pmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{pmatrix}.$$

Чтобы извлечь элемент матрицы, находящийся на пересечении i-й строки и k-го столбца, необходимо ввести идентификатор матрицы с индексами i, k через запятую (при условии, что `ORIGIN` равно 1). Рассмотрим, например, элемент 8.2 матрицы `mat`, который находится на пересечении третьей строки и второго столбца. Для извлечения этого элемента введите идентификатор `mat`, затем комбинацией клавиш <Ctrl>+<[> перейдите в режим ввода индексов: $mat_{\blacksquare}$. Введите на месте метки индексы 3, 2. Клавишей <=> введите знак равенства, справа от которого появится искомый элемент: $mat_{3,2} = 8.2$.

Форматирование численных результатов вычислений осуществляется командой **Результат** (Result) выпадающего меню **Форматирование** (Format) (см. рис. 3.3). Эта команда вызывает диалоговое окно **Result Format** (рис. 9.2), содержащее 4 вкладки. Список **Format** вкладки **Number Format** содержит перечень форматов численных результатов: `General`, `Decimal`, `Scientific`, `Engineering`, `Fraction`. Выделение (щелчком левой кнопки мыши) любого из этих форматов, кроме строки `Fraction`, открывает прокручиваемый список **Number of decimal places** (Число знаков после запятой) (см. рис. 9.2) для задания количества знаков, отображаемых после десятичной точки.



Format: General, Decimal, Scientific, Engineering, Fraction

Number of decimal places 3

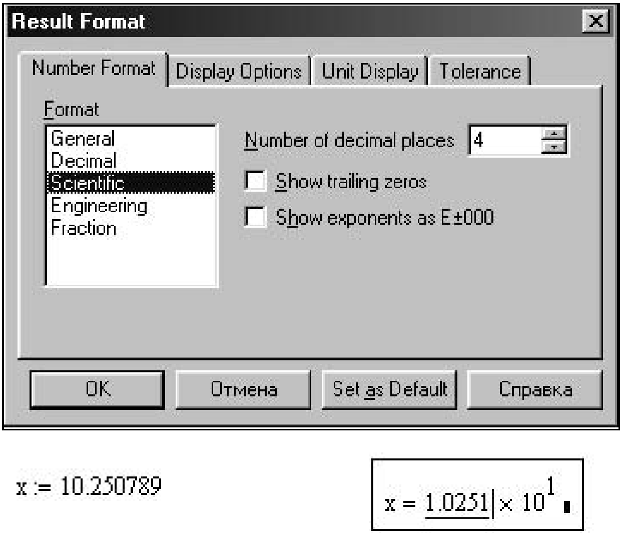
☐ Show trailing zeros

☐ Show exponents in engineering format

Exponential threshold 3

Рис. 9.2. Диалоговое окно **Result Format**, строка `General`

Выделение строчки `General` открывает дополнительно прокручиваемый список **Exponential threshold** (Экспоненциальный порог) для задания порога k при экспоненциальном представлении чисел, т. е. число a представляется в экспоненциальном виде, если и только если $|a| \geq 10^k$ или $|a| \leq 10^{-k}$.



Format: General, Decimal, Scientific, Engineering, Fraction

Number of decimal places 4

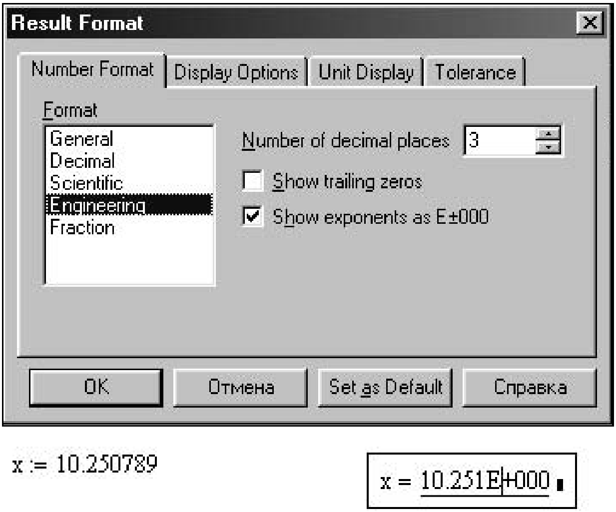
☐ Show trailing zeros

☐ Show exponents as E±000

x := 10.250789

x = 1.0251 × 10^1

Рис. 9.3. Диалоговое окно **Result Format**, строка `Scientific`



Number of decimal places 3

☐ Show trailing zeros

☑ Show exponents as E±000

x := 10.250789

x = 10.251E+000

Рис. 9.4. Диалоговое окно **Result Format**, строка `Engineering`

Рассмотрим следующий пример. Пусть переменной x присвоено значение 10.250789: `x := 10.250789`. Вызовите окно **Result Format** и выделите строку `General` в списке **Format**. В списке **Number of decimal places** задайте число 4. Щелкните по кнопке **OK** и в нужном месте рабочего листа введите выражение `x =`. Справа от знака равенства появится число `10.2507`. Аналогичные действия с форматами `Scientific` и `Engineering` показаны на рис. 9.3 и 9.4.

Если те же действия повторите с форматом `Fraction`, отметив опцию **use mixed numbers** (Использование смешанных чисел), то получите $x = 10\frac{250789}{1000000}$.

Вкладка **Display Options** (Опции представления) содержит раскрывающийся список **Matrix display style** (Опции представления матрицы): `Automatic`, `Matrix`, `Table`. Этот список служит для задания стиля численных результатов матричных вычислений. По умолчанию выбирается строка `Automatic` — в этом случае выбор стиля в каждом конкретном случае остается за Mathcad. Рассмотрим следующий фрагмент рабочего листа:

ORIGIN := 1

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad 2 \cdot M = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$i := 1..100 \qquad j := 1..100 \qquad N_{i,j} := i \cdot j$$

$N =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
11	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110
12	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120
13	13	26	39	52	65	78	91	104	117	130
14	14	28	42	56	70	84	98	112	126	140
15	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150

Поскольку матрица `M` размера 2 × 2, то Mathcad выбрал стиль `Matrix` при форматировании результата умножения матрицы `M` на 2. Для матрицы `N` размера 100 × 100 Mathcad выбрал стиль `Table`.

Теперь вызовите окно **Result Format** и в списке **Matrix display style** вкладки **Display Options** выделите строку `Matrix`. Щелчок по кнопке **OK** приведет к следующему виду рабочего листа:

ORIGIN := 1

$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad 2 \cdot M = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

$i := 1..100 \qquad j := 1..100 \qquad N_{i,j} := i \cdot j$

N = too large to display

В этом случае справа от выражения `N =` появилось сообщение "слишком велика для дисплея". Это означает, что рабочий лист Mathcad не приспособлен для вывода таких больших матриц, как `N`, в стиле `Matrix`.

Существует два способа форматирования численных результатов с помощью окна **Result Format**: совместное и индивидуальное. Совместное форматирование осуществляется в том случае, когда курсор ввода имеет вид визира. Индивидуальное форматирование результата осуществляется, если синий уголок курсора ввода расположен в пределах этого результата. Кстати, такое расположение курсора можно совместить с вызовом диалогового окна **Result Format** — достаточно только дважды щелкнуть на форматируемом результате. Индивидуальное форматирование имеет приоритет перед совместным в том смысле, что любые последующие совместные изменения стилей в рамках одного Mathcad-документа не затрагивают результата, отформатированного перед этим индивидуально. Так, если в последнем примере дважды щелкните в пределах матрицы $\begin{pmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{pmatrix}$ и в появившемся окне **Result Format** в списке **Matrix display style** вкладки **Display Options** выделите строку `Table` (рис. 9.5), то после щелчка по кнопке **OK** получите

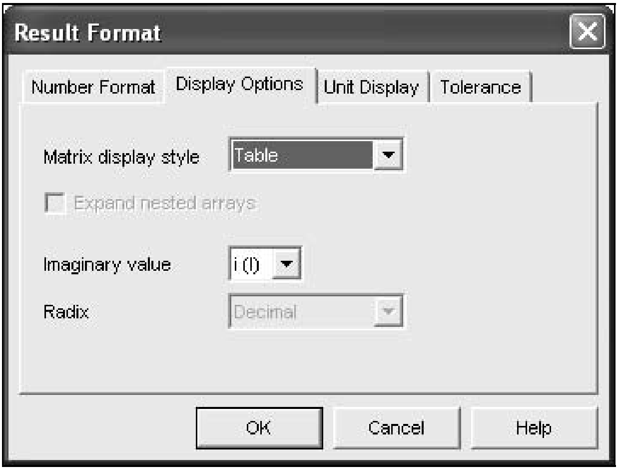
ORIGIN := 1

$M := \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

$$2 \cdot M = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & 2\\ \hline 1 & 2 & 4\\ \hline 2 & 6 & 8\\ \hline \end{array}$$

$i := 1..100$ $j := 1..100$ $N_{i,j} := i \cdot j$

N = too large to display



Matrix display style: Table

☐ Expand nested arrays

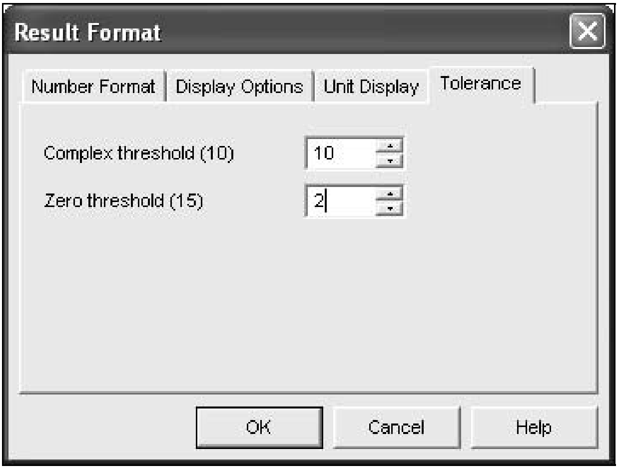
Imaginary value: i (I)

Radix: Decimal

Рис. 9.5. Вкладка **Display Options**

Щелкните теперь вне области формульных блоков, вызовите окно **Result Format** и выделите строку `Matrix`. Щелчок по кнопке **OK** не изменит вид рабочего листа, показанный выше.

Вкладка **Tolerance** (Допустимость) содержит поле **Zero threshold** (Нулевой порог) для установки нулевого порога (рис. 9.6). Целое число k, заданное в этом поле, указывает, что численный результат, не превосходящий по модулю 10^{-k}, будет считаться равным нулю.



Complex threshold (10): 10

Zero threshold (15): 2

Рис. 9.6. Вкладка **Tolerance**

Задачи для самостоятельного решения

T9.1. Доказать, что n-й дифференциал $d^n f(x)$ обладает свойством инвариантности, если зависимая переменная x функции $f(x)$ является линейной функцией $x = at + b$.

T9.2. Многочленом Тейлора $T_n(x)$ n-го порядка для функции $f(x)$ в точке x_0 называется многочлен

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Доказать, что если функция $f(x)$ сама является многочленом $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 +\ldots+ a_nx^n$, то этот многочлен является многочленом Тейлора для функции $f(x)$ в точке $x_0 = 0$, т. е. $a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Т9.3. Доказать, что если функция $f(x)$ имеет вид

$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n$, то этот многочлен является многочленом Тейлора для функции $f(x)$ в точке x_0, т. е.

$$a_i = \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!},\ i = 0, 1, 2, \ldots, n\,.$$

Т9.4. Пусть функция $r(x)$ является разностью между $f(x)$ и ее многочленом Тейлора $T_n(x)$ n-го порядка в точке x_0:

$$r(x) = f(x) - \left(f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \right).$$

Доказать, что $r(x_0) = r'(x_0) = \ldots = r^{(n)}(x_0) = 0$, $r^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$.

Т9.5. Определить, какого порядка производными обладает в точке $x = 0$ функция $f(x) = |x^3|$.

Т9.6. Найти второй дифференциал функции $f(x) = \ln\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$ при условии, что: а) x — независимая переменная; б) x — функция другой независимой переменной t; в) $x = \operatorname{tg} t$.

Т9.7. Найти n-е производные функций $f(x) = \dfrac{1 + x}{1 - x}$, $g(x) = \sin^2(x)$.

Т9.8. Найти n-е производные функций a^x, x^a, $\sin x$, $\cos x$, $\ln x$.

Общая формулировка задач П9.1—П9.21

Для данной функции $y = f(x)$ вычислить дифференциал второго порядка d^2y в точке x_0.

П9.1. $y = \sin^2 x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

П9.2. $y = \dfrac{1}{2}x^2 e^x,\ x_0 = 0$.

П9.3. $y = \ln(2 + x^2),\ x_0 = 0$.

П9.4. $y = e^x \cos x,\ x_0 = 0$.

П9.5. $y = e^x \sin(2x),\ x_0 = 0$.

П9.6. $y = e^{-x} \cos x,\ x_0 = 0$.

П9.7. $y = \ln(1 + x),\ x_0 = 2$.

П9.8. $y = \operatorname{arctg} x,\ x_0 = 1$.

П9.9. $y = \arcsin x,\ x_0 = 0$.

П9.10. $y = (5x-4)^5,\ x_0 = 2$.

П9.11. $y = x\sin x,\ x_0 = \frac{\pi}{2}$.

П9.12. $y = x^2 \ln x,\ x_0 = \frac{1}{3}$.

П9.13. $y = x\sin(2x),\ x_0 = -\frac{\pi}{4}$.

П9.14. $y = x\cos(2x),\ x_0 = \frac{\pi}{2}$.

П9.15. $y = x^4 \ln x,\ x_0 = 1$.

П9.16. $y = x + \operatorname{arctg} x,\ x_0 = 1$.

П9.17. $y = \ln^3 x,\ x_0 = 1$.

П9.18. $y = \ln(x^2 - 4),\ x_0 = 3$.

П9.19. $y = x^2 \cos x,\ x_0 = \frac{\pi}{2}$.

П9.20. $y = \arccos x,\ x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

П9.21. $y = \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\cos^2 x,\ x_0 = \frac{\pi}{8}$.

Общая формулировка задач К9.1—К9.10

В задачах К8.1—К8.10 из *гл. 8* вычислить значение n-ой производной в точках, являющихся элементами матрицы T.

К9.1. $n = 2$, $T = (1, 11, 3, 4)$.

К9.2. $n = 2$, $T = (2, 4, 5, 6)$.

К9.3. $n = 3$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 16 \end{pmatrix}$.

К9.4. $n = 3$, $T = \begin{pmatrix} 16 & 9 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

К9.5. $n = 2$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

К9.6. $n = 2$, $T = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

К9.7. $n = 3$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$.

К9.8. $n = 3$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 4 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$.

К9.9. $n = 2$, $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

К9.10. $n = 2$, $T = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$.

Ответы, указания, решения

Т9.1. Положим $y(t) = f(at + b)$.

Тогда по определению $d^n f(x) = d^n y(t) = y^{(n)}(t)dt^n$.

По теореме 8.2 $y'(t) = f'(x)(at+b)' = af'(x)$. Пусть $n \geq 2$.

Тогда $y^{(n)}(t) = (y^{(n-1)}(t))' = (a^{n-1}f^{(n-1)}(x))' = a^{n-1}f^{(n)}(x)(at+b)' = a^n f^{(n)}(x)$.

Отсюда имеем:

$$d^n f(x) = y^{(n)}(t)dt^n = a^n f^{(n)}(x)dt^n = f^{(n)}(x)(adt)^n = f^{(n)}(x)d(at+b)^n =$$
$$= f^{(n)}(x)dx^n.$$

Т9.2. Докажем индукцией по n. При $n = 1$ $f(x) = a_0 + a_1x$ и очевидно, что $a_0 = f(0)$, $a_1 = f'(0)$. Предположим, что утверждение верно для всех многочленов, порядок которых меньше n, в частности, и для многочлена

$g(x) = f'(x) = 1 \cdot a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1}$ порядка $n - 1$, т. е.

$(i+1)a_{i+1} = \dfrac{g^{(i)}(0)}{i!}$, $i = 0, 1, \ldots, n - 1$. Но $g^{(i)}(0) = f^{(i+1)}(0)$. Поэтому

$(i+1)a_{i+1} = \dfrac{f^{(i+1)}(0)}{i!}$, $a_{i+1} = \dfrac{f^{(i+1)}(0)}{(i+1)!}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ или $a_i = \dfrac{f^{(i)}(0)}{i!}$,

$i = 1, \ldots, n$. (равенство $a_0 = f(0)$ очевидно).

Т9.3. Указание: сделать замену переменной $t = x - x_0$ и воспользоваться утверждением задачи Т9.2.

Т9.4. Если обозначить через $g(x)$ многочлен n-го порядка:

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

то согласно утверждению задачи Т9.3, $\dfrac{f^{(i)}(x_0)}{i!} = \dfrac{g^{(i)}(x_0)}{i!}$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Непосредственно проверяется также, что для любого $i > n$ $g^{(i)}(x) \equiv 0$ (это же верно для любого многочлена $g(x)$, чей порядок равен или меньше n). Но $r(x) = f(x) - g(x)$.

Отсюда при $i = 0, 1, \ldots, n$ $r^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0) - g^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0) - f^{(i)}(x_0) = 0$,

а при $i = n + 1$ $r^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$.

Т9.5. Функция $f(x) = |x^3|$ в точке $x = 0$ имеет только первую и вторую производные. Покажем это. Если $x \neq 0$, то

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \text{ при } x > 0; \\ -3x^2 \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

При $x = 0$ по определению производной

$f'_+(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0+} \frac{|\Delta x|^3}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0+} (\Delta x)^2 = 0$. Аналогично, $f'_-(0) = 0$. Таким образом, первая производная существует при всех x, причем $f'(x) = 3x|x|$. Далее,

$$f''(x) = \begin{cases} 6x \text{ при } x > 0; \\ -6x \text{ при } x < 0 \end{cases}$$

и

$f''(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f'(0+\Delta x) - f'(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x|\Delta x|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 3|\Delta x| = 0$, т. е. вторая производная существует при всех x, причем $f''(x) = 6|x|$. Но функция $|x|$ недифференцируема в точке $x = 0$ (см. задачу Т7.5). Следовательно, функция $f(x)$ не имеет производной третьего порядка в точке $x = 0$.

Т9.6. Ответы: а) $-\frac{4(1+3x^4)}{(1-x^4)^2}dx^2$; б) $-\frac{4(1+3x^4)}{(1-x^4)^2}dx^2 - \frac{4x}{1-x^4}d^2x$;

в) $-\frac{4}{\cos^2(2t)}dt^2$.

Т9.7. Ответы: $f^{(n)}(x) = \frac{2(n!)}{(1-x)^{n+1}}$; $g^{(n)}(x) = -2^{n-1}\cos\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right)$.

Т9.8. Ответы: $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$; $(x^a)^{(n)} = a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)x^{a-n}$;

$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$; $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$; $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

П9.21. $y'(x)=\frac{1}{2}\cos x\cdot\sin x=\frac{1}{4}\sin(2x)$, $y''(x)=\frac{1}{2}\cos(2x)$,

$y''\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}$. Так как $d^2y(x)=y''\left(\frac{\pi}{8}\right)dx^2$, то $d^2y(x)=\frac{\sqrt{2}}{4}dx^2$.

К9.1—К9.10. Указание: при перечислении элементов $T_{i,j}$ матрицы T следует использовать ранжированные переменные i и j.

Глава 10

Теоремы о промежуточных значениях

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $X \subseteq Af^1$, содержащем точку x_0. Если x_0 — внутренняя точка множества X и $f'(x_0) = 0$, то x_0 называется стационарной точкой функции $f(x)$ (на множестве X).

Лемма 10.1. Пусть $f(x)$ определена на промежутке $X \subseteq Af^1$, x_0 — внутренняя точка этого промежутка, в которой функция f дифференцируема. Если x_0 является локально оптимальным планом задачи условной оптимизации

$$\begin{gathered} f(x) \to \max \text{ (или min)} \\ \text{на промежутке } X, \end{gathered} \tag{10.1}$$

то x_0 — стационарная точка функции $f(x)$.

Доказательство. Предположим для определенности, что x_0 — локально оптимальный план задачи (10.1), решаемой на максимум. Тогда существует окрестность $N(x_0, \varepsilon)$ точки x_0 такая, что $f(x_0) \geq f(x)$ в каждой точке x этой окрестности. Из существования $f'(x_0)$ следует, что $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ (см. задачу T7.3).

По определению $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Но $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, т. к. $x > x_0$, $f(x) \leq f(x_0)$. Поэтому $f'_+(x_0) \leq 0$ в силу утверждения задачи T3.12. Аналогично показывается, что $f'_-(x_0) \geq 0$. В итоге имеем:

$0 \leq f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0) \leq 0$, т. е. $f'(x_0) = 0$.

Лемма доказана.

Теорема 10.1 (Ролля). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$, причем $f(a) = f(b)$. Тогда в этом интервале существует стационарная точка функции $f(x)$.

Доказательство. Так как f непрерывна на замкнутом, ограниченном множестве $X = [a; b]$, то в силу теоремы 5.1 она достигает в некоторых точках x_1^* и x_2^* из X своего наибольшего и наименьшего значений (среди всех других ее значений на X). В частности, x_1^* и x_2^* являются локально оптимальными планами задачи (10.1).

Если $f(x_1^*) = f(x_2^*)$, то f является константой на X и, следовательно, каждая точка из $(a; b)$ — ее стационарная точка. Если же $f(x_1^*) \neq f(x_2^*)$, то ввиду $f(a) = f(b)$ по крайней мере одна из точек x_1^*, x_2^* отлична от a и b и потому является внутренней точкой. Остальное следует из леммы 10.1.

Поскольку $f'(x_0)$ — это угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$, то теорема 10.1 утверждает: если на концах отрезка значения функции равны, то внутри этого отрезка всегда найдется точка, в которой касательная, проведенная к графику функции $y = f(x)$, будет параллельна оси $0x$.

Теорема 10.2 (Лагранжа). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$. Тогда в этом интервале существует такая точка c, что $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Доказательство. Определим вспомогательную функцию $g(x)$: $g(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. Эта функция непрерывна на $[a; b]$ (теорема 4.1), дифференцируема на $(a; b)$ (теорема 8.1), $g(a) = g(b) = 0$ и $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Поэтому в силу теоремы 10.1 найдется точка $c \in (a; b)$ такая, что $g'(c) = 0$ или $f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$. Теорема доказана.

Поскольку $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ — это угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $A = (a, f(a))$ и $B = (b, f(b))$, то теорема 10.2 утверждает следующее: внутри отрезка $[a; b]$ найдется точка, в которой касательная, проведенная к графику функции $y = f(x)$, будет параллельна прямой, проходящей через точки A и B (рис. 10.1).

Теорема 10.3 (Коши). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$ и дифференцируемы на интервале $(a; b)$, причем $g'(x) \neq 0$ в каждой точке x этого интервала. Тогда существует точка $c \in (a; b)$ такая, что $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

Доказательство теоремы дано в задаче 10.1.

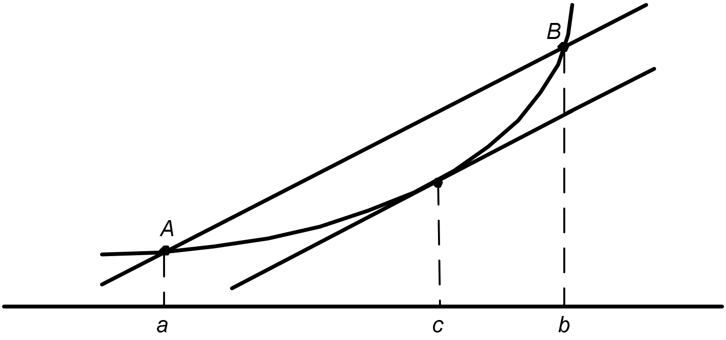


Рис. 10.1. Иллюстрация к теореме 10.2

Задачи для самостоятельного решения

Т10.1. Доказать теорему 10.3.

Т10.2. Пусть функции $f(x)$ и $f'(x)$ определены на промежутке X, а уравнения $f(x) = 0$ и $f'(x) = 0$ имеют соответственно k_0 и k_1 различных действительных корней на этом промежутке. Доказать, что $k_0 \le k_1 + 1$.

Т10.3. Пусть функции $f(x)$ и $f^{(n)}(x)$ определены на промежутке X, а уравнения $f(x) = 0$ и $f^{(n)}(x) = 0$ имеют соответственно k_0 и k_1 различных действительных корней на этом промежутке. Доказать, что $k_0 \le k_n + n$.

Т10.4. Пусть $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$. Доказать, что уравнение $e^x + P_n(x) = 0$ имеет не более $n + 1$ различных действительных корней.

Т10.5. Пусть $f(x) = x(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5)$. Доказать, что уравнение $f'(x) = 0$ имеет ровно 5 различных действительных корней.

Т10.6. Для каких из следующих функций выполнены условия теоремы Ролля на отрезке $[0, 2]$: а) $x - 1$; б) $(x - 1)^2$; в) $|x - 1|$; г) $\frac{x^2 - 2x}{x+1}$; д) $\frac{x^2 - 2x}{x-1}$?

Т10.7. На кривых $y = 4 - 6x^3$, $y = 6x^3 + 7$, $y = -7x^3 - 1$ найти точки, в которых касательные параллельны хордам, соединяющим соответственно точки (–1, 10) и (2, –44), (–1, 1) и (2, 55), (0, –1) и (1, –8).

Т10.8. При выполнении какого из следующих условий теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши: а) $a = b$; б) $g(x) = x^2$; в) $g(x) = x$?

Т10.9. Дано: $0 < a < b$. С помощью теоремы Лагранжа доказать неравенства $\frac{b-a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a}$.

Т10.10. Дано: $0 < a < b$, $p > 1$. С помощью теоремы Лагранжа доказать неравенства $pa^{p-1}(b-a) < b^p - a^p < pb^{p-1}(b-a)$.

Т10.11. Для любых a, b с помощью теоремы Лагранжа доказать неравенства: $|\sin b - \sin a| \le |b-a|$; $|\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a| \le |b-a|$.

Т10.12. Дана функция $f(x) = kx^2 + nx + r$. Показать, что именно в точке $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ касательная к кривой $y = f(x)$ будет параллельна хорде, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

Т10.13. Пусть для функции $f(x)$ выполняются условия теоремы 10.2. Можно ли для каждой точки $c \in (a, b)$ указать две другие точки x_1, x_2 из этого интервала такие, что $x_1 < c < x_2$, $f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$?

Т10.14. Доказать, что если функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке [1, 2], то существует такая точка $c \in (1, 2)$, что $f(2) - f(1) = \frac{f'(c) \cdot c^2}{2}$.

Т10.15. Обнаружить ошибку в следующем ложном доказательстве теоремы 10.3. Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ на отрезке $[a; b]$ удовлетворяют всем условиям теоремы 10.3. Тогда каждая из них будет удовлетворять и условиям теоремы 10.2. Следовательно, для каждой из этих функций найдется точка $c \in (a, b)$ такая, что $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$, $\frac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(c)$. Разделив почленно эти равенства, получим:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Т10.16. Доказать, что функция $f(x)$ в каждой точке из Af^1 имеет производную, равную k, если и только если $f(x) = kx + b$.

Ответы, указания, решения

Т10.1. Если $g(a) = g(b)$, то в силу теоремы 10.1 существует такая точка c, что $g'(c) = 0$, а это противоречит условию $g'(c) \neq 0$. Поэтому можно определить вспомогательную функцию

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot \left(g(x) - g(a)\right).$$

Для этой функции выполняются все условия теоремы 10.1, причем $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x)$. В силу этой же теоремы существует точка $c \in (a, b)$, для которой $0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c)$. Теорема доказана.

Т10.2. Пусть $x_1, \ldots, x_k$ — корни уравнения $f(x) = 0$, где $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$, $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$. Поскольку $f(x_i) = f(x_{i+1})$ и $f(x)$ непрерывна на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ (см. задачу Т7.2), то по теореме 10.1 найдется точка $y_i \in (x_i, x_{i+1})$, в которой $f'(y_i) = 0$, $i = 1, \ldots, k - 1$, т. е. уравнение $f'(x) = 0$ имеет не менее $k - 1$ различных корней на промежутке X.

Т10.3. Если обозначить через k_i число корней уравнения $f^{(i)}(x) = 0$ на промежутке X, $i = 0, 1, \ldots, n$ (здесь $f^{(0)}(x)$ считаем равной $f(x)$), то в силу утверждения задачи 10.2 $k_0 \leq k_1 + 1$, $k_1 \leq k_2 + 1$, $\ldots$, $k_{n-1} \leq k_n + 1$. Сложив почленно все эти неравенства, получим $k_0 \leq k_n + n$.

Т10.4. Поскольку $(n + 1)$-я производная многочлена $P_n(x)$ равна нулю, то $(n + 1)$-я производная функции $f(x) = e^x + P_n(x)$ равна e^x. Но уравнение $e^x = 0$ не имеет действительных корней. Остальное следует из утверждения задачи 10.3.

Т10.5. Уравнение $f(x) = 0$ имеет 6 различных корней. Следовательно, в силу утверждения задачи 10.2 уравнение $f'(x) = 0$ должно иметь не менее 5 действительных корней. Но $f'(x)$ является многочленом пятой степени и потому не может иметь более пяти корней, а значит, имеет ровно пять корней.

Т10.6. Ответ: для функций из б) и г).

Т10.7. Указание: воспользоваться геометрической интерпретацией теоремы 10.2.

Т10.8. Ответ: условие в).

Т10.9. Рассмотрим функцию $\ln x$ на отрезке $[a; b]$. В силу теоремы 10.2 найдется точка $c \in (a, b)$, для которой

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\ln b - \ln a}{b - a} = \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot \frac{1}{b - a}.$$

Но $f'(c) = \frac{1}{c}$, $\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$, откуда $\frac{1}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot \frac{1}{b - a} < \frac{1}{a}$.

Т10.10. Указание: применить теорему 10.2 к функции x^p на отрезке $[a; b]$.

Т10.11. Указание: применить теорему 10.2 соответственно к функциям $\sin x$ и $\operatorname{arctg} x$, приняв во внимание, что $|\cos x| \le 1$, $\frac{1}{1 + x^2} \le 1$.

Т10.13. В общем случае нельзя. Контрпример: функция $f(x) = x^3$ на отрезке $[-1; 1]$ и $c = 0$.

Т10.14. Положим $g(x) = -\frac{1}{x}$. Тогда по теореме 10.3 найдется такая точка $c \in (1, 2)$, что $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(2) - f(1)}{g(2) - g(1)} = 2(f(2) - f(1))$. Остальное следует из равенства $g'(c) = \frac{1}{c^2}$.

Т10.16. Предположим, что $f'(x) = k$ для любой точки x из Af^1. Так как $f(x)$ всюду дифференцируема, то на отрезке $[0; x]$ выполняются условия теоремы 10.2, в силу которой $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = k$.

Таким образом, $f(x) = kx + f(0)$ для любого x.

Глава 11

Следствия теорем о средних значениях

Следствие 11.1 (правило Лопиталя). Пусть функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ дифференцируемы на квазипромежутке X, x_0 — предельная точка X, в которой $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми вдоль X функциями, причем $\beta(x) \neq 0$ в каждой точке $x \neq x_0$ множества X. Тогда если существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} \dfrac{\alpha'(x)}{\beta'(x)} = L$, то $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = L$.

Доказательство. Если $x_0 \notin X$, то доопределим функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ в этой точке, положив $\alpha(x_0)$ и $\beta(x_0)$ равными нулю. Поскольку X — квазипромежуток, то найдется такая точка x, что $(x_0, x] \subseteq X$ (или $(x, x_0] \subseteq X$). Функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ непрерывны на $(x_0, x]$ (см. задачу 7.2); непрерывны они и в точке x_0, т. к. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} \alpha(x) = \alpha(x_0) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} \beta(x) = \beta(x_0) = 0$. Выполняются условия теоремы 10.3, в силу которой найдется точка $c \in (x_0, x)$ такая, что $\dfrac{\alpha'(c)}{\beta'(c)} = \dfrac{\alpha(x)-\alpha(x_0)}{\beta(x)-\beta(x_0)} = \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, откуда

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} \frac{\alpha'(c)}{\beta'(c)}. \tag{11.1}$$

Но $c \to x_0$ при $x \to x_0$ вдоль X. Следовательно, $\dfrac{\alpha'(c)}{\beta'(c)} \to L$ при $x \to x_0$ вдоль X. С учетом (11.1) это означает, что $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = L$. Следствие доказано.

Комментарии к правилу Лопиталя.

1. Следствие 11.1 сохраняет свою силу и в случае, когда $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми на бесконечности, а вместо точки x_0 используются знаки $+\infty, -\infty$ или ∞. Следствие остается верным, если в нем бесконечно малые функции заменить на бесконечно большие вдоль X функции.
2. Правило Лопиталя можно применять неоднократно. Например, поскольку пары функций:

   $\alpha(x) = x - \sin x$ и $\beta(x) = x^3$, $\alpha'(x) = 1 - \cos x$ и $\beta'(x) = 3x^2$, $\alpha^{(2)}(x) = \sin x$ и $\beta^{(2)}(x) = 6x$ являются бесконечно малыми в точке нуль, а $\alpha^{(3)}(x) = \cos x$, $\beta^{(3)}(x) = 6$ и $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha^{(3)}(x)}{\beta^{(3)}(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{6} = \dfrac{1}{6}$, то трехкратное применение следствия 11.1 приводит к следующей цепочке равенств:

$$\frac{1}{6} = \lim_{x\to 0}\frac{\alpha^{(2)}(x)}{\beta^{(2)}(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^3}.$$

Следствие 11.2 (признак постоянства функции). Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет нулевую производную во всех внутренних точках этого промежутка, то $f(x)$ является константой на промежутке X.

Доказательство следствия см. в задаче T11.1.

Следствие 11.3 (признак возрастания функции). Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет неотрицательную производную во всех внутренних точках этого промежутка, причем внутри промежутка X нет такого интервала, в каждой точке которого производная равнялась бы нулю, то $f(x)$ — возрастающая функция на промежутке X.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in X$ и $x_1 < x_2$. На отрезке $[x_1, x_2]$ выполняются условия теоремы 10.2, в силу которой найдется такая точка $c \in (x_1, x_2)$, что $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \geq 0$, откуда $f(x_2) \geq f(x_1)$. Таким образом, $f(x)$ — неубывающая функция на промежутке X. Если при этом $f(x_2) = f(x_1)$, то $f(x)$ — константа на интервале (x_1, x_2) и, следовательно, $f'(x) = 0$ в каждой точке x этого интервала, что противоречит условию.

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Следствие 11.4 (признак убывания функции). Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет неположительную производную во всех внутренних точках этого промежутка, причем внутри промежутка X нет такого интервала, в каждой точке которого производная равнялась бы нулю, то $f(x)$ — убывающая функция на промежутке X.

Пример. Пусть $f(x) = x - \sin x$. Очевидно, $f'(x) = 1 - \cos x$ и, следовательно, $f'(x) \geq 0$ всюду в Af^1. Кроме того, $f'(x)$ обращается в нуль только в точках $2\pi k$, где k — произвольное целое число. Поэтому в силу следствия 11.3 f возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

Следствие 11.5. Если $X = [a, b]$ и функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), то задача (10.1) имеет оптимальные планы, каждый из которых либо является стационарной точкой функции $f(x)$, либо совпадает с одним из концов отрезка.

Доказательство следствия дано в задаче Т11.5.

Следствие 11.6. Если $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) для любой точки x промежутка X и x^* — стационарная точка функции $f(x)$ на множестве X, то x^* является единственным оптимальным планом задачи (10.1) при условии, что эта задача решается на минимум (максимум).

Доказательство. По условию $f'\left(x^*\right) = 0$. Кроме того, поскольку x^* — внутренняя точка промежутка X, то она разбивает X на два промежутка X_1 и X_2. Предположим, что $f''(x) > 0$ для любого $x \in X$. В силу утверждения задачи 7.2 функция $f'(x)$ непрерывна на X. Отсюда по следствию 11.3 функция $f'(x)$ возрастает на промежутке X. Следовательно, $f'(x) < f'(x^*) = 0$ для любого $x \in X_1$ и $0 = f'(x^*) < f'(x)$ для любого $x \in X_2$. Теперь можно применить следствия 11.4 и 11.3 к функции $f(x)$ соответственно на промежутках X_1 и X_2: согласно этим следствиям $f(x)$ убывает на X_1 и возрастает на X_2. А это означает, что в точке x^* значение $f(x^*)$ — наименьшее среди всех других значений функции $f(x)$ на промежутке X.

Аналогично показывается, что при $f''(x) < 0$, $x \in X$, значение $f(x^*)$ в точке x^* будет наибольшим среди всех других значений функции $f(x)$ на промежутке X. Следствие доказано.

Пример. Пусть $f(x) = \ln x - 2x$ и $X = (0; +\infty)$. Тогда $f'(x) = \frac{1}{x} - 2$ и $x^* = \frac{1}{2}$ — стационарная точка. Далее, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ всюду на X. Поэтому по следствию 11.6 x^* — единственная оптимальная точка, в которой функция f принимает наибольшее значение среди всех других точек промежутка X.

Компьютерный раздел

Кнопка панели **Математика** (Math) вызывает подпанель **Символы** (Symbolic), изображенную на рис. 11.1.

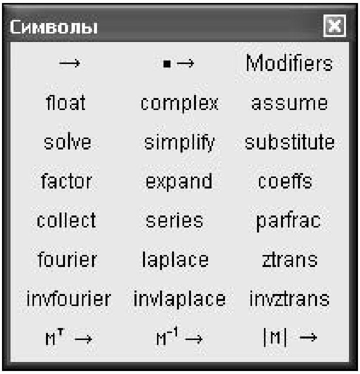


Рис. 11.1. Подпанель **Символы**

Эта подпанель содержит кнопки для символьных вычислений. Кнопка solve подпанели **Символы** (Symbolic) вызывает шаблон ▪ solve,▪ → для символьного решения уравнения или неравенства; при этом уравнение или неравенство вводится на месте левой метки, а на месте правой метки вводится переменная, относительно которой это уравнение или неравенство должно быть разрешено. Рассмотрим пример решения неравенства $\frac{1}{x-1}-\frac{5x+6}{x^3-1}>0$. Кнопкой solve вызовите шаблон ▪ solve,▪ →; на месте левой метки шаблона введите неравенство, на месте правой — идентификатор аргумента x. После нажатия клавиши <Enter> на экране получите следующее:

$$\frac{1}{x-1}-\frac{5\cdot x+6}{x^3-1}>0 \text{ solve}, x \to \begin{bmatrix}(-1<x)\cdot(x<1)\\ 5<x\end{bmatrix}$$

Первые три команды выпадающего меню **Математика** (Math) (рис. 11.2) определяют два типа режима вычислений: ручной и автоматический. В автоматическом режиме результаты всех вычислений, а также графики, обновляются каждый раз, когда изменения вносятся в формульные блоки. О том, что включен именно этот режим, свидетельствует флажок слева от команды **Автовычисление** (Automatic Calculation), а также сообщение `Auto` в правой части строки состояния. При отключении автоматического режима пользователь должен самостоятельно инициировать обновление вычислений. Команда **Вычислить таблицу** (Calculate Worksheet) позволяет это делать каждый раз для всего Mathcad-документа. Команда **Вычислить** (Calculate) (или клавиша <F9>) производит перерасчет только до видимого участка рабочего листа включительно.

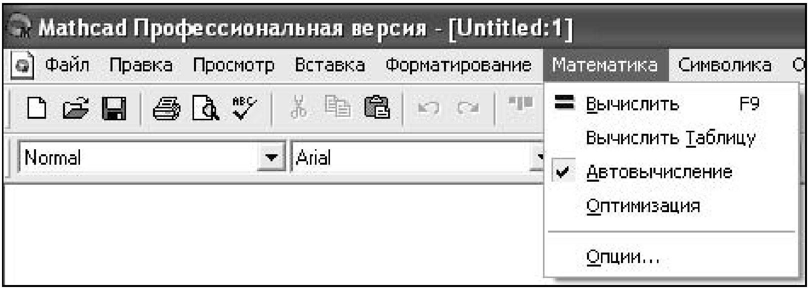


Рис. 11.2. Выпадающее меню **Математика**

Если выбрана команда **Оптимизация** (Optimization) меню **Математика** (Math) (на это указывает флажок слева от команды), то символьный процессор Mathcad будет пытаться найти упрощенную форму (оптимизировать) всех выражений, расположенных в формульных блоках справа от знака присваивания :=. При этом те блоки, для которых это удастся сделать, будут отмечены справа красной звездочкой. Красная звездочка означает, что найденная упрощенная форма оптимизированного блока будет использована при всех дальнейших изменениях Mathcad-документа (при условии, конечно, что эти изменения не затронут отмеченный блок и все предшествующие, связанные с ним блоки). Чтобы увидеть оптимизированную форму отмеченного блока, достаточно дважды щелкнуть на звездочке.

Возможна индивидуальная оптимизация отдельных блоков. Для этого щелкните правой кнопкой мыши на соответствующем блоке и в появившемся контекстном меню отметьте флажком команду **Optimize** (Оптимизировать) (рис. 11.3). Индивидуальная оптимизация приоритетна: отмена команды **Оптимизация** (Optimization) в меню **Математика** (Math) никак не скажется на тех блоках, которые были оптимизированы индивидуально.

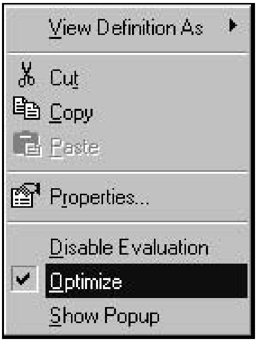


Рис. 11.3. Контекстное меню для оптимизации

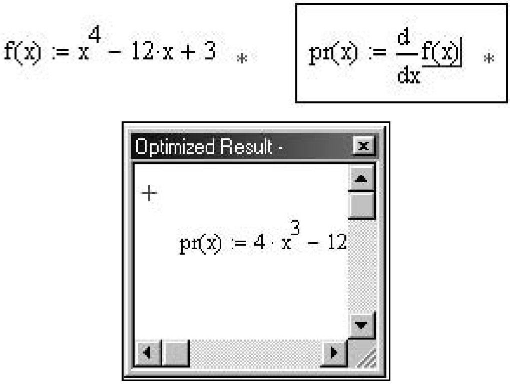
Рассмотрим пример вычисления удвоенных значений производной функции $f(x) = x^4 - 12x + 3$ в точках $x = 0, 1, 2, \ldots, 20\ 000$. Алгоритм решения этой задачи с помощью Mathcad следующий:

$f(x) := x^4 - 12 \cdot x + 3 \quad pr(x) := \frac{d}{dx} f(x) \quad i := 0..20000$

$pr(i) \cdot 2 =$

-24
-16
40
192
488
976
$1.704 \cdot 10^3$
$2.72 \cdot 10^3$
$4.072 \cdot 10^3$
$5.808 \cdot 10^3$
$7.976 \cdot 10^3$
$1.062 \cdot 10^4$
$1.382 \cdot 10^4$
$1.755 \cdot 10^4$

Здесь в процессе получения таблицы значений Mathcad вынужден определять символьное выражение для производной $\frac{d}{dx}f(x)$ функции $f(x)$ все 20 001 раз. Поэтому отрезок времени между вводом выражения `pr(i) · 2 =` и появлением искомой таблицы справа от знака равенства будет измеряться десятками секунд. Такое же время понадобится для пересчета таблицы в случае замены числа `2` в выражении `pr(i) · 2` числом `3`. Но можно поступить иначе: включите команду **Оптимизация** (Optimization) меню **Математика** (Math). Тогда блок $pr(x) := \frac{d}{dx}f(x)$ будет оптимизирован и отмечен звездочкой. Дважды щелкните на этой звездочке: появится окно **Optimized Result** (Оптимизированный результат) с однажды уже найденным символьным выражением производной функции $f(x)$ (рис. 11.4). Это означает, что во всех последующих вычислениях, значения 0, 1, 2, ..., 20 000 будут сразу подставляться в найденное символьное выражение $4x^3 - 12$, минуя стадию его многократного поиска. В преимуществе такого подхода легко убедиться, заменив число `2` в выражении `pr(i) · 2` числом `3`: на пересчет новой таблицы уйдут считанные секунды.



$f(x) := x^4 - 12\cdot x + 3$ *

$pr(x) := \frac{d}{dx}f(x)$ *

Optimized Result -

$pr(x) := 4\cdot x^3 - 12$

Рис. 11.4. Окно **Optimized Result**

В случае символьных вычислений до завершения редактирования вводимых формул и выражений на рабочем листе рекомендуется отключать опцию **Автовычисление** (Automatic Calculation) в меню **Математика** (Math), поскольку возможны зацикливания вычисляемых процедур при неправильном вводе.

Задачи для самостоятельного решения

T11.1. Доказать следствие 11.2.

T11.2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на промежутке X и дифференцируемы во всех внутренних точках этого промежутка, причем в каждой такой точке $f'(x) = g'(x)$. Доказать, что $f(x) = g(x) + C$, где C — константа, для любой точки $x \in X$.

T11.3. Доказать, что при $|x| \leq 1$ верно $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

T11.4. Доказать, что $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$ для любого x.

T11.5. Доказать следствие 11.5.

T11.6. Доказать, что функция $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$ не является монотонной ни в какой окрестности точки нуль.

T11.7. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на промежутке $X = [a; b)$ и дифференцируемы в каждой внутренней точке X, причем в каждой такой точке $x \in (a; b)$ $f'(x) > g'(x)$. Кроме того, $f(a) = g(a)$. Доказать, что $f(x) > g(x)$ для любой внутренней точки x из X.

T11.8. Доказать, что при $0 < x \leq 1$ верно неравенство

$$x - \frac{x^3}{3} < \operatorname{arctg} x < x - \frac{x^3}{6}.$$

T11.9. Доказать, что при $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ верно неравенство $\frac{2x}{\pi} \leq \sin x < x$.

T11.10. Доказать неравенство $(a+b)^p \leq a^p + b^p$, где $a > 0$, $b > 0$, $0 \leq p \leq 1$.

T11.11. Доказать, что при $x > 0$ верно неравенство $e^x > 1 + \ln(1+x)$.

T11.12. Показать, что уравнение $xe^x = 2$ имеет только один положительный корень, принадлежащий отрезку $[0; 1]$.

T11.13. Решить неравенство $(e^{x-1} - x)(x - 3) \geq 0$.

T11.14. Что больше: e^π или π^e?

T11.15. Доказать неравенство $2x \cdot \operatorname{arctg} x \geq \ln\left(1 + x^2\right)$.

Т11.16. При n измерениях некоторой характеристики получены ее величины $x_1, \ldots, x_n$. Найти x, при котором сумма квадратов погрешностей $(x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \ldots + (x - x_n)^2$ будет минимальной.

Т11.17. Найти номер наибольшего члена последовательности $\{x_n\}$, где а) $x_n = 105n + 3n^2 - n^3$; б) $x_n = \dfrac{n^2}{n^3 + 200}$; в) $x_n = \dfrac{n^{10}}{2^n}$.

Общая формулировка задач П11.1 (а)—П11.21 (а)

Определить интервалы монотонности функции $f(x)$.

П11.1. а) $f(x) = 6 - 3x^2 - x^3$.

П11.2. а) $f(x) = xe^{-x}$.

П11.3. а) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

П11.4. а) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$.

П11.5. а) $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$.

П11.6. а) $f(x) = \dfrac{\left(1 - x^2\right)^2}{4}$.

П11.7. а) $f(x) = \dfrac{x + 1}{(x - 1)^2}$.

П11.8. а) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

П11.9. а) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$.

П11.10. а) $f(x) = e^{-x} - e^{-2x}$.

П11.11. а) $f(x) = x^2e^{-x}$.

П11.12. а) $f(x) = x + \ln(1 - 2x)$.

П11.13. а) $f(x) = x + \ln(1 - 5x)$.

П11.14. а) $f(x) = \dfrac{(x - 2)(x + 3)}{(x - 5)^2}$.

П11.15. а) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{4}{x^3}$.

П11.16. а) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$.

П11.17. а) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

П11.18. а) $f(x) = 2x^2 - x^4$.

П11.19. а) $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

П11.20. а) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$.

П11.21. а) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$.

Общая формулировка задач П11.1 (б)—П11.21(б)

Найти пределы, используя правило Лопиталя.

П11.1. б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-4\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{6}\right)}{x^2-1}$.

П11.2. б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-x}{2^{x^3}-1}$.

П11.3. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{2x}}{4x^3-1}$.

П11.4. б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$.

П11.5. б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin 5x)}{\ln(\sin x)}$.

П11.6. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

П11.7. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{x+\sqrt{2+x}}$.

П11.8. б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{\sin 7x}$.

П11.9. б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{1-x^3}$.

П11.10. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+2)}{\sqrt[7]{x-3}}$.

П11.11. б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

П11.12. б) $\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{\ln(1-x)}{\operatorname{ctg}\pi x}$.

П11.13. б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{5-5e^{-3x}}$.

П11.14. б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}$.

П11.15. б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{1-\cos 3x}$.

П11.16. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{x^2}+1}{\ln(x^2+2)}$.

П11.17. б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ctg} x}{\ln x}$.

П11.18. б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 4x)}{\ln(\cos 9x)}$.

П11.19. б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{tg}^2 x-1}{1-2\sin^2 x}$.

П11.20. б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\operatorname{tg} 5x-7\operatorname{tg} x}{3\sin 5x-7\sin x}$.

П11.21. б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{\pi x^3}$.

Общая формулировка задач K11.1—K11.12

С помощью Mathcad определить интервалы монотонности и стационарные точки функции $f(x)$.

K11.1. $f(x)=\dfrac{x^3}{3-x^2}$.

K11.2. $f(x)=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.

K11.3. $f(x)=\dfrac{x^4}{(x+1)^3}$.

K11.4. $f(x)=\operatorname{arctg}^3 x-\ln x$.

K11.5. $f(x)=\dfrac{x^3}{\ln^2 x}$.

K11.6. $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+|x+2|}}{1+|x|}$.

K11.7. $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x^4+4x^3+30)}$.

K11.8. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

K11.9. $f(x)=\sqrt[3]{6x^2-x^3}$.

K11.10. $f(x)=(x^2+1)\sqrt[3]{x^2-2}$.

K11.11. $f(x)=\sqrt{8x^2-x^4}$.

K11.12. $f(x)=\sqrt[5]{4x^3-12x}$.

Ответы, указания, решения

T11.1. Указание: применить теорему 10.2.

T11.2. Указание: применить следствие 11.2 к функции $f(x)-g(x)$.

T11.3. Пусть $f(x)=\arcsin x+\arccos x$. Тогда $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0$ при $|x|<1$. Отсюда в силу следствия 11.2 $f(x)=C$ для любого $x\in[-1;1]$. Но $f(0)=\dfrac{\pi}{2}$. Поэтому $C=\dfrac{\pi}{2}$.

T11.4. Указание: доказательство аналогично решению задачи T11.3.

T11.5. Так как $f(x)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $X=[a;b]$, то задача (10.1) имеет оптимальные планы в силу теоремы 5.1. Пусть x^* — один из них. Если $x^*\neq a$ и $x^*\neq b$, то x^* — внутренняя точка отрезка $[a;b]$. Но тогда по лемме 10.1 x^* является стационарной точкой функции $f(x)$.

Т11.6. Функция $f(x)$ является четной, поэтому достаточно найти ее интервалы монотонности при $x > 0$. Так как $f'(x)=\frac{\pi}{x^2}\sin\frac{\pi}{x}$, то неравенство $f'(x)>0$ при $x > 0$ равносильно неравенствам $2\pi k<\frac{\pi}{x}<\pi+2\pi k$, k целое, $k \geq 0$ или

$$\left[\begin{array}{l} 0<\frac{1}{x}<1 \\ 2k<\frac{1}{x}<1+2k,\ k\geq 1 \end{array}\right.,\quad \left[\begin{array}{l} x>1 \\ \frac{1}{2k+1}<x<\frac{1}{2k},\ k\geq 1 \end{array}\right..$$

В силу следствия 11.3 последние неравенства задают интервалы возрастания функции $f(x)$. Следовательно, $\left(\frac{1}{2k};\frac{1}{2k-1}\right)$, $k\geq 1$ — интервалы убывания этой функции (при $x > 0$). Поскольку $\left\{\frac{1}{2k}\right\}\to 0$, $\left\{\frac{1}{2k+1}\right\}\to 0$, то в каждой окрестности точки $x = 0$ содержится бесконечно много как интервалов возрастания, так и интервалов убывания функции $f(x)$, т. е. $f(x)$ не является монотонной ни в какой окрестности точки $x = 0$.

Т11.7. Функция $r(x) = f(x) - g(x)$ является возрастающей на промежутке X в силу следствия 11.3. Но $r(a) = 0$. Поэтому $r(x) > r(a) = 0$ при любом $x \in (a; b)$.

Т11.8. Докажем правое неравенство (левое доказывается аналогично). Если $f(x)=x-\frac{x^3}{6}$, $g(x)=\operatorname{arctg} x$,

то $f'(x)-g'(x)=1-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x^2+1}=\frac{x^2\left(1-x^2\right)}{2\left(1+x^2\right)}>0$ при $|x| < 1$.

Кроме того, $f(0) = g(0) = 0$. Поэтому справедливость неравенства следует из утверждения задачи Т11.7.

Т11.9. Пусть

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & \text{при } x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right] \\ 1 & \text{при } x=0\end{cases}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, то $f(x)$ непрерывна на отрезке $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

$f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$. Следовательно, на интервале $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow x\cos x-\sin x<0 \Leftrightarrow x<\operatorname{tg} x$.

Но последнее неравенство верно при любом $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ (см. доказательство леммы 6.1). Поэтому выполняются условия следствия 11.4, в силу которого f убывает на отрезке $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Но $f(0) = 1$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2}{\pi}$, откуда $\dfrac{2}{\pi}\le f(x)\le 1$ при $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ или $\dfrac{2}{\pi}\le\dfrac{\sin x}{x}<1$ при $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Т11.10. При $p = 1$ неравенство очевидно. Пусть $0\le p<1$. Разделим обе части неравенства на b^p: $\left(\dfrac{a}{b}+1\right)^p\le\left(\dfrac{a}{b}\right)^p+1$.

Если положить $x=\dfrac{a}{b}$, то неравенство примет вид: $(x+1)^p\le x^p+1$.

Рассмотрим функцию $f(x)=x^p+1-(x+1)^p$ на промежутке $X = [0; +\infty)$. Поскольку $f'(x)=px^{p-1}-p(x+1)^{p-1}=p\left(\dfrac{1}{x^{1-p}}-\dfrac{1}{(x+1)^{1-p}}\right)>0$ при $x > 0$, то $f(x)$ возрастает на промежутке X в силу следствия 11.3. Отсюда $f(x) > f(0) = 0$ для любого $x > 0$. Неравенство доказано.

Т11.11. Указание: рассмотреть функции $f(x) = e^x$, $g(x) = 1 + \ln(1 + x)$, $r(x) = f(x) - g(x)$ на промежутке $X = [0; +\infty)$ и воспользоваться утверждением задачи Т11.7.

Т11.12. Указание: показать, что функция $f(x) = xe^x - 2$ возрастает на отрезке $[0; 1]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков.

Т11.13. Ответ: $x\in[1]\cup[3; +\infty)$.

Т11.14. $e^\pi>\pi^e\Leftrightarrow\ln e^\pi>\ln\pi^e\Leftrightarrow\pi>e\ln\pi\Leftrightarrow\dfrac{1}{e}>\dfrac{\ln\pi}{\pi}$. Пусть $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

Тогда $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, $f'(x)>0$ при $x<e$ и $f'(x)<0$ при $x>e$. Следовательно, по следствию 11.4 функция $f(x)$ убывает на промежутке $X = [e; +\infty)$.

Но $f(e)=\frac{1}{e}$. Поэтому $f(x)<\frac{1}{e}$ для любого x из X и, в частности, для $x = \pi$.

Т11.15. Пусть $f(x)=2x\cdot\operatorname{arctg} x-\ln\left(1+x^2\right)$. Тогда $f'(x)=2\operatorname{arctg} x$, $f''(x)=$ $=\frac{2}{1+x^2}$ и, следовательно, $f''(x)>0$ при любом x. Поэтому согласно следствию 11.6, любая стационарная точка функции $f(x)$ является точкой, в которой f принимает наименьшее значение. А т. к. $f'(x)=0$ при $x = 0$, то $x^* = 0$ — стационарная точка; при этом $f(0) = 0$. Отсюда $f(x) \geq 0$ при любом x.

Т11.16. Рассмотрим функцию $f(x) = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 +\ldots+ (x - x_n)^2$ на промежутке $X = (-\infty; +\infty)$. $f'(x)=2(x-x_1)+\ldots+2\left(x-x_n\right)$. Следовательно, $x^*=\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$ — стационарная точка этой функции. Так как $f''(x)=2+\ldots+2=2n>0$, то в силу следствия 11.6 x^* — единственная точка в X, в которой функция $f(x)$ принимает наименьшее значение.

Т11.17. Ответы: а) $n = 7$; б) $n = 7$; в) $n = 14$.

б) Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{x^2}{x^3+200}$ на промежутке $[1; +\infty)$. Так как $f'(x)=\frac{x(400-x^3)}{\left(x^3+200\right)^2}$, то $f'(x)>0$ при $x\in\left[1;\ \sqrt[3]{400}\right)$. В силу следствия 11.3 f возрастает на промежутке $\left[1;\sqrt[3]{400}\right]$ и убывает на промежутке $\left[\sqrt[3]{400};\ +\infty\right)$. Так как $7<\sqrt[3]{400}<8$, то наибольшим членом последовательности может быть либо x_7, либо x_8. Поскольку $x_7=\frac{49}{543}>x_8=\frac{8}{89}$, то наибольшим членом является x_7.

П11.21. а) Пусть $f(x)=\frac{x^3}{x^2-3}$. Область определения этой функции есть $D(f)=\left(-\infty;\ -\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{3};\ \sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};\ +\infty\right)$.

Производная $f'(x)=\frac{x^2(x^2-9)}{\left(x^2-3\right)^2}$ обращается в нуль в точках $x_1 = 0$, $x_2 = -3$,

$x_3 = 3$. Эти точки разбивают область определения *D*(*f*) на интервалы знакопостоянства производной $f'(x)$: $f'(x) > 0$ при $|x| > 3$. Отсюда получаем интервалы монотонности функции *f*(*x*) (рис. 11.5).

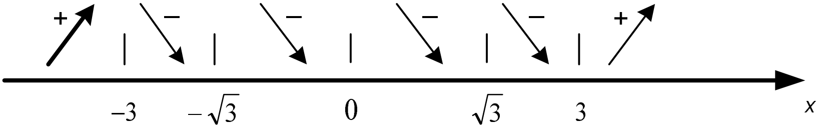


Рис. 11.5. Интервалы монотонности функции *f*(*x*)

П11.21. б) Функции $\alpha(x) = x\cos x - \sin x$ и $\beta(x) = \pi x^3$ — бесконечно малые в точке $x = 0$, производные $\alpha'(x) = \cos x - x\sin x - \cos x = -x\sin x$ и $\beta'(x) = 3\pi x^2$, а также вторые производные $\alpha^{(2)}(x) = -\sin x - x\cos x$ и $\beta^{(2)}(x) = 6\pi x$ — бесконечно малые в точке $x = 0$.

Однако $\alpha^{(3)}(x) = -\cos x - \cos x + x\sin x$, $\beta^{(3)}(x) = 6\pi$

и $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha^{(3)}(x)}{\beta^{(3)}(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha^{(3)}(x)}{\beta^{(3)}(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\cos x + x\sin x}{6\pi} = \dfrac{-2}{6\pi} = -\dfrac{1}{3\pi}$.

Трехкратное применение следствия 11.1 приводит к следующему результату: $-\dfrac{1}{3\pi} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha^{(3)}(x)}{\beta^{(3)}(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha^{(2)}(x)}{\beta^{(2)}(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha'(x)}{\beta'(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$.

К11.1—К11.11. Указания. При решении неравенств типа $g(x) > 0$ в символьном виде Mathcad не ограничивает область определения функции $g(x)$ множеством действительных чисел. Поэтому результаты символьных вычислений могут содержать промежутки, в которых $g(x)$ не определена. Чтобы учесть эту особенность, следует построить график функции $y = g(x)$: он позволит исключить те из найденных интервалов, в которых $g(x)$ не определена. Это касается задач К11.4, К11.5, К11.11. Кроме того, следует помнить, что выражение $a^{\frac{m}{n}}$ определено только при $a > 0$. В то же время при нечетном n выражение $\sqrt[n]{a^m}$ определено при всех действительных значениях a.

К11.12. Алгоритм решения задачи с помощью Mathcad. Задать функцию `f(x)` и вычислить ее производную:

$$f(x) := \sqrt[5]{4\cdot x^3 - 12\cdot x}$$

$$pr(x) := \frac{d}{dx}f(x)\ \ \text{simplify}\ \ \rightarrow \frac{3}{5}\cdot\sqrt[5]{2^2}\cdot\frac{\left(x^2-1\right)}{\left[x\cdot\left(x^2-3\right)\right]^{\left(\frac{4}{5}\right)}}$$

Поскольку знаменатель результата вычисления производной `pr(x)` представлен в виде $\left(x\left(x^2-3\right)\right)^{\frac{4}{5}}$, то необходимо переопределить функцию `pr(x)` следующим образом:

$$pr(x) := \frac{3}{5}\cdot\left(\sqrt[5]{2}\right)^2\cdot\frac{\left(x^2-1\right)}{\sqrt[5]{\left[x\cdot\left(x^2-3\right)\right]^4}}$$

Найти интервалы монотонности и стационарные точки функции `f(x)`, а также построить ее график (рис. 11.6):

$$pr(x) > 0\ \text{solve},\ x \rightarrow \begin{bmatrix} x < -\sqrt{3} \\ \left(-\sqrt{3} < x\right)\cdot\left(x < -1\right) \\ \left(1 < x\right)\cdot\left(x < \sqrt{3}\right) \\ \sqrt{3} < x \end{bmatrix}$$

$$pr(x) < 0\ \text{solve},\ x \rightarrow \begin{bmatrix} \left(-1 < x\right)\cdot\left(x < 0\right) \\ \left(0 < x\right)\cdot\left(x < 1\right) \end{bmatrix}$$

$$pr(x) = 0\ \text{solve},\ x \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

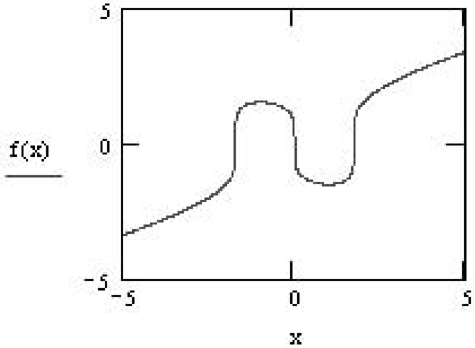


Рис. 11.6. График функции `f(x)`

Глава 12

Эластичность функций

Понятие эластичности было введено в связи с анализом функции спроса $d(p)$, в которой p — это цена единицы товара, $d(p)$ — количество требуемого товара. В теореме 12.2 будет выражен экономический смысл этого понятия. Но вначале — несколько определений.

Известно, что если величина a некоторой характеристики изменилась на Δa, став равной $a + \Delta a$, то $\frac{\Delta a}{a}$ называется относительным изменением этой характеристики, $\frac{\Delta a}{a} \cdot 100$ — ее процентным изменением. На языке функций эти понятия звучат так: величина $\frac{x - x_0}{x_0} = \frac{\Delta x}{x_0}$ называется относительным изменением аргумента x в точке x_0 при его абсолютном изменении, равном Δx; величина $\frac{f(x) - f(x_0)}{f(x_0)} = \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{f(x_0)}$ называется относительным изменением функции f в точке x_0 при абсолютном изменении аргумента, равном Δx; при умножении этих относительных изменений на 100 получаются соответствующие процентные изменения.

Эластичностью $E_f(x_0)$ функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел в точке x_0 отношения относительного изменения функции f в этой точке к относительному изменению аргумента в этой точке:

$$E_f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{f(x_0)} : \frac{x - x_0}{x_0} \right) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{f(x_0)} : \frac{\Delta x}{x_0} \right).$$

Теорема 12.1.

$$E_f(x_0) = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \cdot x_0 , \quad E_f(x) = \frac{(\ln f(x))'}{(\ln x)'} .$$

Доказательство теоремы дано в задаче Т12.1.

Теорема 12.2. Эластичность функции $f(x)$ в точке x_0 приближенно равна процентному изменению функции $f(x)$ в точке x_0 при процентном изменении аргумента в этой точке, равном 1%.

Доказательство теоремы дано в задаче Т12.2.

Если эластичность $E_d(p)$ функции спроса $d(p)$ меньше -1, то спрос называется эластичным, поскольку в этом случае процентное изменение цены на единицу вызывает изменение спроса более, чем на один процент (теорема 12.2). Аналогично, если $-1 < E_d(p) < 0$, то спрос называется неэластичным, поскольку процентное изменение цены на единицу вызывает изменение спроса менее, чем на один процент (теорема 12.2). В случае $E_d(p) = -1$ спрос называется нейтральным. В случае $E_d(p) \geq 0$ увеличение цены вызывает увеличение спроса, что соответствует кризисной ситуации в экономике.

Пример. Рассмотрим эластичность спроса в ситуации, когда продавцы обладают достаточными запасами товара, чтобы удовлетворить весь спрос на него: в этом случае $d(p)$ совпадает с количеством проданного товара, а общая выручка $i(p)$ составит $p \cdot d(p)$. Найдем производную функции $i(p)$: $i'(p) = d(p) + pd'(p) = d(p)\left(1 + E_d(p)\right)$. Отсюда видно, что при эластичном спросе $i'(p) < 0$, при нейтральном спросе $i'(p) = 0$, а при неэластичном спросе $i'(p) > 0$. Поэтому на основании следствий 11.3 и 11.4 можно сделать следующий вывод: если спрос эластичен, то изменение цены вызывает изменение общей выручки в противоположном направлении; при неэластичном спросе изменение цены вызывает изменение общей выручки в том же направлении; при нейтральном спросе изменение цены не влияет на выручку.

Теорема 12.3. Если значения функций $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ в точке x_0 положительны, то эластичность суммы этих функций в точке x_0 будет заключена между величинами $E_{\min}$ и $E_{\max}$, где $E_{\min} = \min\left\{E_{f_1}(x_0), \ldots, E_{f_n}(x_0)\right\}$, $E_{\max} = \max\left\{E_{f_1}(x_0), \ldots, E_{f_n}(x_0)\right\}$.

Доказательство теоремы дано в задаче Т12.3.

Эта теорема означает, что если спрос со стороны отдельных групп покупателей эластичен (неэластичен), то и суммарный спрос эластичен (неэластичен).

Задачи для самостоятельного решения

T12.1. Доказать теорему 12.1.

T12.2. Доказать теорему 12.2.

T12.3. Доказать теорему 12.3.

T12.4. Доказать, что эластичность произведения двух функций точке x_0 равна сумме эластичностей этих функций в точке x_0.

T12.5. Доказать, что эластичность отношения двух функций точке x_0 (если это отношение определено) равна разности эластичностей этих функций в точке x_0.

T12.6. Доказать, что эластичность суперпозиции функций равна произведению эластичностей этих функций. Более точно: если $y(t) = f(\varphi(t))$, $x_0 = \varphi(t_0)$, то $E_y(t_0) = E_f(x_0) \cdot E_\varphi(t_0)$.

T12.7. Если $x = f^{-1}(y)$ — функция, обратная к функции $y = f(x)$, то $E_{f^{-1}}(y_0) = \dfrac{1}{E_f(x_0)}$. Доказать.

T12.8. Чему равна эластичность степенной функции $f(x) = x^a$?

Ответы, указания, решения

T12.1. Указание: воспользоваться определением эластичности и определением производной.

T12.2. Ввиду дифференцируемости функции $f(x)$ в точке x_0 $\Delta f(x_0, \Delta x) - df(x_0, \Delta x) = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$. Отсюда

$$\frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{f(x_0)} \cdot 100 - \frac{f'(x_0)\Delta x}{f(x_0)} \cdot 100 = o(\Delta x)$$

(здесь использовалось утверждение задачи T6.5, согласно которому, $c \cdot o(\alpha(x)) = o(\alpha(x))$). Но $\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)} \cdot \Delta x \cdot 100 = E'_f(x_0) \cdot \left(\dfrac{\Delta x}{x_0} \cdot 100\right)$ и, следовательно, при $\frac{\Delta x}{x_0}\cdot 100 = 1$ имеем: $\frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{f(x_0)}\cdot 100 - E'_f(x_0) = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$, т. е. $\frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{f(x_0)}\cdot 100 \approx E'_f(x_0)$.

Т12.3. Обозначим: $E_s = E_{f_1+\ldots+f_n}(x_0), E_i = E_{f_i}(x_0), i = 1,2, \ldots, n$. По теореме 12.1

$E_s = \frac{x_0(f'_1(x_0) + \ldots + f'_n(x_0))}{f_1(x_0) + \ldots + f_n(x_0)}$, $x_0 f'_i(x_0) = E_i f_i(x_0), i = 1,2, \ldots, n$. Отсюда

$$E_s = \frac{E_1 f_1(x_0) + \ldots + E_n f_n(x_0)}{f_1(x_0) + \ldots + f_n(x_0)}.$$

Но

$$E_{\min}\cdot\sum_{i=1}^{n} f_i(x_0) = \sum_{i=1}^{n} E_{\min}\cdot f_i(x_0) \le \sum_{i=1}^{n} E_i\cdot f_i(x_0) \le \sum_{i=1}^{n} E_{\max}\cdot f_i(x_0) = E_{\max}\cdot\sum_{i=1}^{n} f_i(x_0),$$

или $E_{\min}\cdot\sum_{i=1}^{n} f_i(x_0) \le \sum_{i=1}^{n} E_i\cdot f_i(x_0) \le E_{\max}\cdot\sum_{i=1}^{n} f_i(x_0)$. Разделив это неравенство на положительную величину $\sum_{i=1}^{n} f_i(x_0)$, получим искомое неравенство.

Т12.4. Согласно теореме 12.1, $E_u(x) = \frac{(\ln u(x))'}{(\ln x)'}$, $E_v(x) = \frac{(\ln v(x))'}{(\ln x)'}$. Отсюда по теореме 8.1 $E_u(x) + E_v(x) = \frac{(\ln u(x) + \ln v(x))'}{(\ln x)'} = \frac{(\ln u(x)\cdot v(x))'}{(\ln x)'} = E_{u\cdot v}(x)$.

Т12.5. Указание: доказательство аналогично решению задачи Т12.4.

Т12.6. По теореме 8.2 $y'(t_0) = f'(x_0)\cdot\varphi'(t_0)$. Поэтому

$$E_f(x_0)\cdot E_\varphi(t_0) = \frac{f'(x_0)x_0}{f(x_0)}\cdot\frac{\varphi'(t_0)t_0}{\varphi(t_0)} = \frac{y'(t_0)\cdot x_0\cdot t_0}{f(x_0)\cdot x_0} = \frac{y'(t_0)\cdot t_0}{y(t_0)} = E_y(t_0).$$

Т12.7. Обозначим $g(y) = f^{-1}(y)$. По теореме 8.3 $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$. Кроме того, $g(y_0) = x_0$. Поэтому $\frac{1}{E_f(x_0)} = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)\cdot x_0} = \frac{g'(y_0)\cdot y_0}{g(y_0)} = E_g(y_0)$.

Т12.8. Ответы: $E_f(x) = a$ при любом $x > 0$.

Глава 13

Формула Тейлора

Формула Тейлора является важнейшей в дифференциальном исчислении, поскольку решает задачу локального приближения многократно дифференцируемой функции многочленами. Эта задача уже упоминалась в *гл. 6*.

В *гл. 9* определен многочлен Тейлора $T_n(x)$ n-го порядка для функции $f(x)$ в точке x_0:

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

(см. задачи Т9.2—Т9.4).

Теорема 13.1. Пусть функция $f(x)$ имеет на промежутке X n-ю производную $f^{(n)}(x)$, которая непрерывна в точке x_0 вдоль X, $x_0 \in X$. Тогда

$$f(x) - T_n(x) = \mathrm{o}((x - x_0)^n) \text{ при } x \to x_0 \text{ вдоль } X. \tag{13.1}$$

Доказательство. Обозначим: $r(x) = f(x) - T_n(x)$, $p(x) = (x - x_0)^n$. Согласно утверждению задачи Т9.4, $r^{(i)}(x_0) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Функция $r^{(n)}(x)$ непрерывна в точке x_0 вдоль X по условию, а функции $r^{(i)}(x)$, $i = 0, 1, \ldots, n - 1$, непрерывны в точке x_0 вдоль X согласно утверждению задачи Т7.2. Поэтому $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} r^{(i)}(x) = r^{(i)}(x_0) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Что касается одночлена $p(x)$, то его производные до $(n - 1)$-го порядка включительно также являются б. м. в точке x_0 вдоль X, поскольку

$$p^{(i)}(x) = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n - i + 1) \cdot (x - x_0)^{n-i},\ i = 0, 1,\ \ldots, n - 1,\ p^{(n)}(x) = n!\,.$$

Отсюда $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x\in X}} \dfrac{r^{(n)}(x)}{p^{(n)}(x)} = \dfrac{0}{n!} = 0$ и n-кратное применение правила Лопиталя (следствие 11.1) завершает доказательство теоремы:

$$0 = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in X}} \frac{r^{(n)}(x)}{p^{(n)}(x)} = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in X}} \frac{r^{(n-1)}(x)}{p^{(n-1)}(x)} = \ldots = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in X}} \frac{r'(x)}{p'(x)} = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in X}} \frac{r(x)}{p(x)}.$$

Формулу (13.1) удобно записать в виде

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \quad R_n(x) = o((x - x_0)^n) \text{ при } x \to x_0 \text{ вдоль } X. \tag{13.2}$$

В таком виде она называется формулой Тейлора n-го порядка для функции $f(x)$ в точке x_0 с остатком n-го порядка $R_n(x)$ в форме Пеано.

Следствие 13.1. Пусть $\alpha(x)$ является б. м. в точке x_0 вдоль промежутка X, $x_0 \in X$ и $\alpha(x)$ имеет на промежутке X n-ю производную $\alpha^{(n)}(x)$, непрерывную в точке x_0 вдоль X, причем $\alpha^{(1)}(x_0) = \alpha^{(2)}(x_0) = \ldots = \alpha^{(n-1)}(x_0) = 0$, $\alpha^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда $\alpha(x)$ имеет в точке x_0 уровень малости $\left(\dfrac{\alpha^{(n)}(x_0)}{n!}, n\right)$.

Следствие 13.2. Если функция $f(x)$ удовлетворяет требованиям теоремы 13.1, то

$$\Delta f(x_0, \Delta x) - \left(\frac{df(x_0, \Delta x)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0, \Delta x)}{2!} + \ldots + \frac{d^n f(x_0, \Delta x)}{n!}\right) = o\left(\Delta x^n\right)$$

при $\Delta x \to 0$, $x_0 + \Delta x \in X$.

Следствие 13.3. Если функция $f(x)$ удовлетворяет требованиям теоремы 13.1, причем $f'(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то приращение $\Delta f(x_0, \Delta x)$ в точке $\Delta x = 0$ является б. м. относительно переменной Δx функцией уровня малости $\left(\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, n\right)$.

Доказательство следствий 13.1—13.3 дано в задаче Т13.1.

Следствие 13.1 отвечает на вопрос, сформулированный в *гл. 6* по поводу уровня малости бесконечно малых. Чтобы ответить на второй вопрос, касающийся точности приближения функции многочленом, необходимо уточнить вид остатка $R_n(x)$.

Теорема 13.2. Пусть функция $f(x)$ имеет на промежутке X $(n + 1)$-ю производную $f^{(n+1)}(x)$ и $x_0 \in X$. Тогда для любой точки x из X найдется такая точка c, расположенная между x_0 и x, что

$$f(x)=T_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (13.3)$$

Доказательство. Обозначим $r(x) = f(x) - T_n(x)$, $p(x) = (x - x_0)^{n+1}$. Для пар функций $r^{(i)}(x)$ и $p^{(i)}(x)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, на отрезке $[x_0; x]$ (или $[x; x_0]$) выполняются требования теоремы 10.3, в силу которой существует последовательность точек $y_0 = x, y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ такая, что y_{i+1} расположена между x_0 и y_i и

$$\frac{r^{(i)}(y_i)-r^{(i)}(x_0)}{p^{(i)}(y_i)-p^{(i)}(x_0)}=\frac{r^{(i+1)}(y_{i+1})}{p^{(i+1)}(y_{i+1})}, i=0,1,\ \ldots,n. \qquad (13.4)$$

Но как было уже показано в доказательстве теоремы 13.1, $p^{(i)}(x_0) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $p^{(n+1)}(x) = (n + 1)!$. Кроме того, $r^{(i)}(x_0) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $r^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ (см. задачу T9.4). Следовательно, равенства (13.4) можно записать так:

$\dfrac{r(x)}{p(x)}=\dfrac{r^{(1)}(y_1)}{p^{(1)}(y_1)}=\dfrac{r^{(2)}(y_2)}{p^{(2)}(y_2)}=\ldots=\dfrac{r^{(n)}(y_n)}{p^{(n)}(y_n)}=\dfrac{f^{(n+1)}(y_{n+1})}{(n+1)!}$. Если теперь положить $c = y_{n+1}$, то $\dfrac{r(x)}{p(x)}=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$, $r(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$. Теорема доказана.

Формула (13.3) называется формулой Тейлора n-го порядка для функции $f(x)$ в точке x_0 с остатком n-го порядка $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ в форме Лагранжа.

Следствие 13.4. Если функция $f(x)$ удовлетворяет требованиям теоремы 13.2, то

$$\Delta f(x_0,\Delta x)=df(x_0,\Delta x)+\frac{d^2 f(x_0,\Delta x)}{2!}+\ldots+\frac{d^n f(x_0,\Delta x)}{n!}+\frac{d^{n+1} f(c,\Delta x)}{(n+1)!}.$$

Доказательство следствия дано в задаче T13.1.

Формула Тейлора для функции $f(x)$ с остатком в форме Лагранжа позволяет оценить точность приближения функции $f(x)$ многочленом T_n n-го порядка, абсолютная погрешность при этом не будет превышать $\left|\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|$, где $c \in (x_0; x)$.

Пример. Оценим абсолютную погрешность приближенной формулы $f(x)=e^x \approx 1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}$ для $x \in [0; 1]$. Так как $f^{(n+1)}(x)=e^x$, $x_0 = 0$, $|x| \le 1$, $c \in (0, 1)$, то $\left|\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| \le \dfrac{e^c}{(n+1)!} \le \dfrac{e}{(n+1)!}$.

Теперь можно, например, определить порядок остатка $R_n(x)$, при котором абсолютная погрешность не превзойдет 10^{-6}: $\dfrac{e}{(n+1)!} \le 10^{-6}$, откуда $(n + 1)! \ge e \cdot 10^6$. Последнее неравенство выполняется, начиная с $n = 9$.

Следствие 13.5. Пусть функция $f(x)$ имеет на промежутке X n-ю производную $f^{(n)}(x)$, непрерывную в точке x_0 вдоль X, $x_0 \in X$. Если

$$f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 +\ldots +a_n(x - x_0)^n) = o((x - x_0)^n) \qquad (13.5)$$

при $x \to x_0$ вдоль X,

то $a_i = \dfrac{f^{(i)}(x_0)}{i!}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ (здесь $0! = 1, f^{(0)}(x) = f(x)$).

Доказательство следствия дано в задаче T13.2.

Неформально говоря, следствие 13.5 утверждает, что никакой другой многочлен, кроме многочлена Тейлора $T_n(x)$ для функции $f(x)$ в точке x_0, не приближает эту функцию в окрестности точки x_0 с точностью до бесконечно малой более высокого порядка малости, чем $(x - x_0)^n$ при $x \to x_0$.

Если $x_0 = 0$, то формулы (13.2) и (13,3) называются формулами Маклорена. В последующих главах понадобятся формулы Маклорена для некоторых основных элементарных функций.

Следствие 13.6.

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}+\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1};$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)\,!} + (-1)^{n+1} \frac{\sin c}{(2n+2)!} x^{2n+2};$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)\,!} + (-1)^{n+1} \frac{\sin c}{(2n+1)!} x^{2n+1};$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + R_n(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{x^i}{i} + \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)\cdot(c+1)^{n+1}} x^{n+1};$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{2i+1} + R_{2n+1}(x);$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)x^2}{2!} + \ldots + \frac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)x^n}{n!} + R_n(x) =$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-i+1)x^i}{i!} + \frac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n)}{(n+1)!} \cdot \frac{x^{n+1}}{(c+1)^{n+1-a}};$$

здесь c расположено между 0 и x.

Доказательство следствия дано в задаче Т13.3.

Отметим два частных случая последней формулы Маклорена из следствия 13.6:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + R_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x^i + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(c+1)^{n+2}};$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + R_n(x) = \sum_{i=0}^{n} x^i + \frac{x^{n+1}}{(1-c)^{n+2}}.$$

Компьютерный раздел

Подпанель **Символы** (Symbolic), изображенная на рис. 11.1, содержит кнопку `series`, которая вызывает шаблон ▪ series,▪,▪ → для построения многочлена Тейлора $T_n(x)$ для функции $f(x)$ в точке x_0. На месте левой метки вводится функция $f(x)$; на месте средней метки — выражение вида $x = a$ (здесь используется знак логического равенства =, вводимый комбинацией клавиш <Ctrl>+<=>), где x — аргумент функции $f(x)$, a — точка x_0; если вводится только идентификатор x, то по умолчанию x_0 считается равной нулю. На месте правой метки вводится порядок многочлена Тейлора, увеличенный на 1. Пусть, например, надо построить многочлен Тейлора $T_{10}(x)$ для функции $f(x) = \ln(1 + x^2)$ в точке $x_0 = 0$. На рабочем листе Mathcad-документа это будет выглядеть так:

$$\ln\left(1 + x^2\right) \; series, \; x, \; 11 \rightarrow x^2 - \frac{1}{2} \cdot x^4 + \frac{1}{3} \cdot x^6 - \frac{1}{4} \cdot x^8 + \frac{1}{5} \cdot x^{10}$$

Несмотря на ограничения, вызванные размером рабочего листа, можно построить многочлен Тейлора любого, сколь угодно большого порядка, если учесть, что первые $n + 1$ слагаемых в формуле Тейлора для функции $f(x) - T_n(x)$ равны нулю. Рассмотрим предыдущий пример. Модифицируем его следующим образом:

$$T1(x) := \ln\left(1 + x^2\right) \; series, \; x, \; 11 \rightarrow x^2 - \frac{1}{2} \cdot x^4 + \frac{1}{3} \cdot x^6 - \frac{1}{4} \cdot x^8 + \frac{1}{5} \cdot x^{10}$$

Здесь `T1(x)` равен многочлену Тейлора $T_{10}(x)$ в точке $x_0 = 0$ для функции $f(x) = \ln(1 + x^2)$. Тогда

$$T2(x) := \ln\left(1 + x^2\right) - T1(x) \; series, \; x, \; 11 \rightarrow \frac{-1}{6} \cdot x^{12} + \frac{1}{7} \cdot x^{14} - \frac{1}{8} \cdot x^{16} + \frac{1}{9} \cdot x^{18}$$

Таким образом, многочлен Тейлора 18-го порядка разбит на две части `T1(x)` и `T2(x)`, где `T1(x)` содержит все его члены с первого по 10-й, а `T2(x)` — с 11-го по 18-й.

Кнопка `coeffs` подпанели **Символы** (Symbolic) вызывает шаблон для вывода коэффициентов некоторого многочлена $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ в виде $(n + 1)$-мерной точки $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$.

Например,

$$coef := T1(x)\ coeffs,\ x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{-1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} \qquad coef_9 = -\frac{1}{4}$$

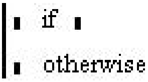
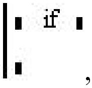
Кнопка [if] подпанели **Программирование** (Programming) вызывает шаблон $\blacksquare\ \text{if}\ \blacksquare$ для ввода условного оператора *if*. На месте правой метки вводится логическое (булево) выражение, а на месте левой метки — блок операторов, которые должны выполняться в случае истинности этого логического выражения и не выполняться в случае его ложности. Например, в результате выполнения программного модуля:

```
     | a ← 2
     | s ← 0
c := | if s = 0
     | | b ← 5
     | | a ← b
     | a
```

переменная `c` примет значение 5.

Кнопка [otherwise] вызывает шаблон $\blacksquare\ \text{otherwise}$ оператора создания дополнительной ветви в условном операторе `if`. Результатом их совместного использования является шаблон $\left|\begin{array}{l}\blacksquare\ \text{if}\ \blacksquare \\ \blacksquare\ \text{otherwise}\end{array}\right.$. Смысл меток, окружающих `if`, аналогичен уже описанному выше для условного оператора. Метка слева от `otherwise` служит для ввода блока операторов, которые будут выполняться в случае ложности логического выражения, расположенного справа от `if`; если это выражение истинно, то выполняется блок операторов, расположенный слева от `if`, а блок операторов слева от `otherwise` пропускается. Например, в результате выполнения программного модуля

```
     | a ← 0
c := | b ← 1 if a > 0
     | b ← 2 otherwise
```

переменная `c` примет значение 2. Сам шаблон  формируется следующим образом: вначале создается шаблон , синим курсором выделяется нижняя метка и затем щелчком кнопкой otherwise формируется нужный шаблон.

Программный модуль можно определить в виде некоторой функции $f(x1, x2, \ldots, xn)$, аргументами $x1, x2, \ldots, xn$ которой являются идентификаторы переменных или функций. Числовые значения этих переменных и идентификаторы функций передаются в программный модуль при обращении к нему в виде $f(a1, a2, \ldots, an)$, где ai — числовое значение или идентификатор функции. При этом сам программный модуль может располагаться в любой точке рабочего листа, которая выше или левее того места, где будет сделано к нему обращение.

Пример программного модуля, заданного в виде функции `c(x)`:

```
c(x) := | b ← 1 if x > 0
        | b ← 2 otherwise
c(0) = 2    c(3) = 1
```

В этом примере обращение к программному модулю происходит дважды, при этом переменной `x` присваиваются соответственно значения 0 и 3.

Рассмотрим еще несколько примеров:

```
         | s ← x
abs(x) := | s ← -x if x < 0    abs(-5) = 5    abs(5) = 5
         | s
```

$$abs(x) := \left|\begin{array}{l} -x \text{ if } x < 0 \\ x \text{ otherwise} \end{array}\right. \qquad abs(-5) = 5 \qquad abs(5) = 5$$

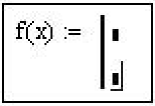
```
f(x) := |if  x < 5
        | |y ← 2
        | |x ← x²
        |oterwise
        | |y ← 4
        | |x ← x³
        |x · y
```

$f(8) = 2.048 \times 10^3 \qquad f(3) = 18$

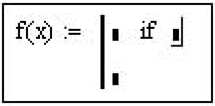
В первом примере в конце программного блока необходимо указать значение, которое блок возвращает в качестве ответа. Во втором примере возвращается x или $-x$, в зависимости от знака переменной x.

Рассмотрим процесс формирования оператора `if` в третьем примере.

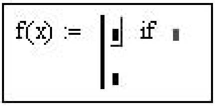
После знака := кнопкой Add Line введите вертикальную линию:

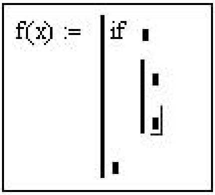


Установите синий курсор на верхнюю метку и кнопкой if введите шаблон оператора `if`:

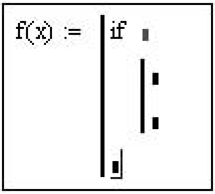


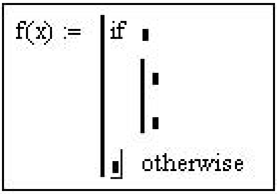
Установите синий курсор на первую метку и на месте метки кнопкой Add Line образуйте блок для оператора `if`:



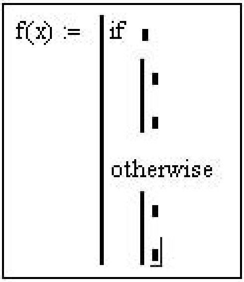


Установите синий курсор на последнюю метку и кнопкой otherwise введите оператор `otherwise`:

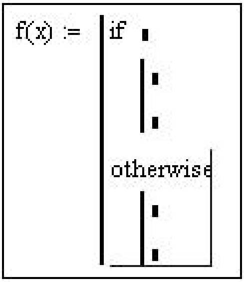


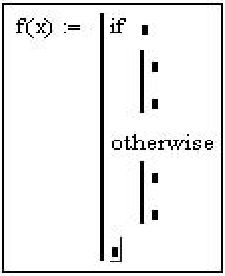


Кнопкой Add Line создайте блок для оператора `otherwise`:



Окаймляя справа синим курсором блок оператора `otherwise`, введите новую строку с меткой:





На месте меток введите соответствующие выражения.

Отметим, что возможен и другой порядок действий при формировании этого программного модуля.

Помимо знака локального присваивания :=, в Mathcad используется знак глобального присваивания ≡, который вводится кнопкой ≡ подпанели **Вычисления** (Evaluation). Глобальное присваивание действует в пределах всего Mathcad-документа, независимо от места его определения на рабочем листе. Ниже приведен пример использования глобального присваивания для переменной a:

$x := 6 \qquad y := \frac{x}{a} \qquad y = 2$

$a \equiv 3$

Хотя формула $a \equiv 3$ записана на рабочем листе последней, при вычислении переменной y использовалось значение a, равное 3. Отметим, что если для одной и той же переменной в Mathcad-документе задано локальное и глобальное присваивание, то локальное присваивание отменяет глобальное, превратив последнее в локальное:

$a := 2 \qquad x := 6$

$y := \frac{x}{a} \qquad y = 3$

$a \equiv 3$

Задачи для самостоятельного решения

Т13.1. Доказать следствия 13.1—13.4.

Т13.2. Доказать следствия 13.5.

Т13.3. Доказать следствия 13.6.

Т13.4. Получить формулу Маклорена n-го порядка с остатком в форме Пеано для функции $f(x) = \cos x + |x|^3$. Какие значения может принимать n?

Т13.5. Дано: для любого x из промежутка $X = (-1; 1)$ верно $Ae^x - \dfrac{B}{1-x} + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{6}x^3 = o(x^3)$ при $x \to 0$. Найти A, B.

Т13.6. Дано: для любого x из Af^1 верно $\sin x \cdot (A + B\cos x) - x = o(x^4)$ при $x \to 0$. Найти A и B.

Т13.7. Выяснить, что больше: ln 2 или sin 1.

Т13.8. Найти $f^{(15)}(0)$, где $f(x) = \dfrac{x^2+5}{x^2+x-12}$.

Т13.9. Найти $f^{(28)}(1)$ и $f^{(29)}(1)$, где $f(x) = \dfrac{e^{-3x+3x^2-x^3}}{4-(x-1)^{20}}$.

Т13.10. Известно, что некоторая функция $f(x)$ имеет производные любого порядка на промежутке $X = (-1; 1)$, причем в точке $x_0 = 0$ все они отличны от нуля. Пусть $\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$ — остаток n-го порядка формулы Маклорена для функции $f(x)$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{c}{x} = \dfrac{1}{n+2}$.

Т13.11. Пусть функция $f''(x)$ непрерывна на отрезке $[0; 1]$, $f(0) = f(1) = 0$ и наименьшее значение значение функции $f(x)$ на отрезке $[0; 1]$ равно -1. Доказать, что наибольшее значение функции $f''(x)$ на отрезке $[0; 1]$ не меньше 8.

Т13.12. Доказать, что число e иррациональное.

Т13.13. Найти формулу Маклорена 42-го порядка с остатком в форме Пеано для функции $f(x) = \dfrac{x}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})}$.

Т13.14. Пусть функция $f(x)$ имеет $(2n)$-ю производную $f^{(2n)}(x)$, непрерывную на Af^1. Доказать: если $f(x)$ четная, то для любого x

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n} + R_{2n}(x),\ R_{2n}(x) = o\left(x^{2n}\right) \text{ при } x \to 0;$$

если $f(x)$ нечетная, то для любого x

$$f(x)=f'(0)x+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(2n-1)}(0)}{(2n-1)!}x^{2n-1}+R_{2n-1}(x),\ R_{2n-1}(x)=o\left(x^{2n-1}\right)$$

при $x \to 0$.

Общая формулировка задач П13.1—П13.21

Найти формулу Тейлора n-го порядка для функции $f(x)$ в точке x_0 с остатком в форме Лагранжа.

П13.1. $f(x)=\text{arctg x},\ x_0=1,\ n=2$.

П13.2. $f(x)=\sqrt{x-3},\ x_0=4,\ n=2$.

П13.3. $f(x)=x^3+3x^2-2x+4,$
$x_0=-1,\ n=2.$

П13.4. $f(x)=x^4+3x^3-5x^2-x-4,\ x_0=2,\ n=3$.

П13.5. $f(x)=x^3+3x^2-2x+4,$
$x_0=-1,\ n=2.$

П13.6. $f(x)=\sin^2 x,\ x_0=\frac{\pi}{4},\ n=3$.

П13.7. $f(x)=\ln(x+3),\ x_0=-2,\ n=3$.

П13.8. $f(x)=\text{tg x},\ x_0=0,\ n=2$.

П13.9. $f(x)=\frac{1}{x^3},\ x_0=-1,\ n=3$.

П13.10. $f(x)=\frac{4x}{4x+3},\ x_0=-1,\ n=2$.

П13.11. $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}},\ x_0=8,\ n=2$.

П13.12. $f(x)=\ln\left(4x^2-3\right),\ x_0=1,\ n=2.$

П13.13. $f(x)=\cos^2 x,\ x_0=\frac{\pi}{4},\ n=3$.

П13.14. $f(x)=e^{x^2+x},\ x_0=-1,\ n=2$.

П13.15. $f(x)=\text{ctg}\, x,\ x_0=\frac{\pi}{2},\ n=2$.

П13.16. $f(x)=\frac{x}{x-1},\ x_0=2,\ n=2$.

П13.17. $f(x)=\arcsin x,\ x_0=0,\ n=3$.

П13.18. $f(x)=x^3\ln x,\ x_0=1,\ n=2$.

П13.19. $f(x)=\ln(1+\sin x),\ x_0=0,\ n=2$.

П13.20. $f(x)=e^{\sin x},\ x_0=0,\ n=2$.

П13.21. $f(x)=\frac{1}{x},\ x_0=2,\ n=3$.

Общая формулировка задач К13.1—К13.11

Определить наименьший порядок n многочлена Тейлора $T_n(x)$ в точке x_0 для функции $f(x)$, который приближает значения этой функции в заданной точке x с абсолютной погрешностью, не превосходящей α.

К13.1. $f(x) = \operatorname{tg} x,\ x = \dfrac{\pi}{10},\ x_0 = \dfrac{\pi}{6},\ \alpha = 10^{-4}$.

К13.2. $f(x) = x^{\frac{1}{4}},\ x = 83,\ x_0 = 81,\ \alpha = 10^{-6}$.

К13.3. $f(x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x} - 2\sin x,\ x = 0.1,\ x_0 = 0,\ \alpha = 10^{-5}$.

К13.4. $f(x) = e^{e^x - 1} - \dfrac{1}{1-x},\ x = 0.2,\ x_0 = 0,\ \alpha = 10^{-6}$.

К13.5. $f(x) = e^{\sin x} - \sqrt{1+x^2} - x\cos x,\ x = 0.05,\ x_0 = 0,\ \alpha = 10^{-8}$.

К13.6. $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - \arcsin(x-1) - 3\cos(x-1),\ x = 1.02,\ x_0 = 1,\ \alpha = 10^{-7}$.

К13.7. $f(x) = x^{80} - x^{40} + x^{20},\ x = 1.005,\ x_0 = 1,\ \alpha = 10^{-4}$.

К13.8. $f(x) = \arcsin x,\ x = 0.3,\ x_0 = 0,\ \alpha = 10^{-4}$.

К13.9. $f(x) = \left(x^2 - 1\right)e^{2x},\ x = -1.05,\ x_0 = -1,\ \alpha = 10^{-6}$.

К13.10. $f(x) = e^{-x},\ x = 0.25,\ x_0 = 0,\ \alpha = 10^{-3}$.

К13.11. $f(x) = \ln\left(1 + x^2\right),\ x = 0.3,\ x_0 = 0,\ \alpha = 10^{-9}$.

Ответы, указания, решения

Т13.1. Пусть выполняются условия следствия 13.1. Тогда многочлен $T_n(x)$ в точке x_0 для функции $\alpha(x)$ равен $\dfrac{\alpha^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$. Отсюда по теореме 13.1 $\alpha(x) - \dfrac{\alpha^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = o\left((x - x_0)^n\right)$ $x \to x_0$ вдоль X.

Следовательно,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} \frac{\alpha(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n}=0 \Rightarrow \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}}\left(\frac{\alpha(x)}{(x-x_0)^n}-\frac{\alpha^{(n)}(x_0)}{n!}\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} \frac{\alpha(x)}{(x-x_0)^n}=\frac{\alpha^{(n)}(x_0)}{n!},$$

что и доказывает следствие 13.1.

Следствия 13.2 и 13.4 вытекают из определения дифференциала n-го порядка и теорем 13.1 и 13.2 соответственно. Следствие 13.3 совпадает со следствием 13.1, если в качестве $\alpha(x)$ взять $f(x) - f(x_0)$.

Т13.2. Положим $b_i=\dfrac{f^{(i)}(x_0)}{i!}$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Тогда $T_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \ldots + b_n(x - x_0)^n$. Предположим, что найдется такое $i \le n$, что $a_i \ne b_i$, но $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, …, $a_{i-1} = b_{i-1}$. Поскольку $o((x - x_0)^n) \pm o((x - x_0)^n) = o((x - x_0)^n)$ (см. задачу Т6.5), то разность левых частей в (13.1) и (13.5) есть $o((x - x_0)^n)$, т. е.

$$(a_i - b_i)(x - x_0)^i + (a_{i+1} - b_{i+1})(x - x_0)^{i+1} + \ldots + (a_n - b_n)(x - x_0)^n = \\ = o((x - x_0)^n) \qquad (13.6)$$

при $x \to x_0$ вдоль X.

В то же время левая часть в (13.6) есть б. м. в точке x_0 вдоль X уровня малости (a_i-b_i, i), $i \le n$. Противоречие. Итак, доказано, что $a_i = b_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Т13.3. Докажем, например, формулу Маклорена для функции $f(x) = \ln(1 + x)$. Поскольку $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$, $f^{(2)}(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2}=\dfrac{(-1)^{2+1}\cdot 1}{(1+x)^2}$,

$$f^{(2)}(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{(-1)^{2+1}\cdot 1}{(1+x)^2},\quad f^{(i)}(x)=\frac{(-1)^{i+1}\cdot 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(i-1)}{(1+x)^i},$$

то $\dfrac{f^{(i)}(0)}{i!}=\dfrac{(-1)^{i+1}}{i}$, $\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)\,!}=\dfrac{(-1)^{n+2}}{(n+1)}\cdot\dfrac{1}{(1+c)^{n+1}}$,

откуда следует искомое представление. Остальные формулы доказываются аналогично.

T13.4. Пусть $g(x) = |x|^3$. Если $x \neq 0$, то

$$g'(x) = \begin{cases} 3x^2 \text{ при } x > 0; \\ -3x^2 \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

Кроме того, $g'_+(0) = g'_-(0) = 0$ и потому в силу утверждения задачи T7.3 $g'(0) = 0$. Аналогично показывается, что

$$g''(x) = \begin{cases} 6x \text{ при } x > 0; \\ 0 \text{ при } x = 0; \\ -6x \text{ при } x < 0, \end{cases}$$

т. е. $g''(x) = 6|x|$ и, следовательно, функция $g''(x)$ не дифференцируема в нуле (см. задачу T7.5). Итак, функция $g(x)$ представима в виде формулы Маклорена n-го порядка с остатком в форме Пеано, если и только если $n \leq 2$. При этом $g(x) - \left(0 + \frac{0 \cdot x}{1!} + \frac{0 \cdot x^2}{2!}\right) = o\left(x^2\right)$ при $x \to 0$ или $g(x) = o(x^2)$ при $x \to 0$. Но по следствию 13.6 $\cos x - 1 = o(x)$, $\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = o\left(x^2\right)$ при $x \to 0$. Отсюда

$$f(x) - 1 = o(x),\ f(x) - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = o\left(x^2\right) \text{ при } x \to 0.$$

T13.5. В силу следствия 13.6 $Ae^x - \left(A + Ax + \frac{Ax^2}{2} + \frac{Ax^3}{6}\right) = o(x^3)$ при $x \to 0$, $\frac{B}{1-x} - \left(B + Bx + Bx^2 + Bx^3\right) = o(x^3)$ при $x \to 0$. Поэтому

$$Ae^x - \frac{B}{1-x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x^3 -$$
$$-\left(A - B + (A - B)x + \left(\frac{A}{2} - B + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{A}{6} - B + \frac{5}{6}\right)x^3\right) = o\left(x^3\right) \text{ при } x \to 0.$$

Но по условию $Ae^x - \frac{B}{1-x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x^3 = o(x^3)$ при $x \to 0$.

Отсюда на основании следствия 13.5 можно заключить, что

$$\begin{cases} A-B=0 \\ \dfrac{A}{2}-B+\dfrac{1}{2}=0 \\ \dfrac{A}{6}-B+\dfrac{5}{6}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=1 \end{cases}.$$

Т13.6. $\sin x\cdot(A+B\cos x)=A\sin x+\dfrac{B}{2}\sin(2x)$. В силу следствия 13.6

$$A\sin x-\left(Ax-\frac{Ax^3}{6}\right)=o\left(x^4\right) \text{ при } x\to 0,$$

$$\frac{B}{2}\sin(2x)-\left(Bx-\frac{2}{3}Bx^3\right)=o\left(x^4\right) \text{ при } x\to 0.$$

Поэтому

$$A\sin x+\frac{B}{2}\sin(2x)-x-\left((A+B-1)x-\left(\frac{A}{6}+\frac{2}{3}B\right)x^3\right)=o\left(x^4\right) \text{ при } x\to 0.$$

Но по условию $A\sin x+\dfrac{B}{2}\sin(2x)-x=o\left(x^4\right)$ при $x\to 0$. Отсюда на основании следствия 13.5 можно заключить, что

$$\begin{cases} A+B-1=0 \\ \dfrac{A}{6}+\dfrac{2}{3}B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{4}{3} \\ B=-\dfrac{1}{3} \end{cases}.$$

Т13.7. Применим следствие 13.6 к функциям $\ln(1+x)$ и $\sin x$, положив $x=1$: найдутся такие точки $c_1, c_2\in(0;\,1)$, что

$$\ln(1+x)=1-\frac{1^2}{2}+\frac{1^3}{3}-\frac{1}{4(c+1)^4}=\frac{5}{6}-\frac{1}{4(c_1+1)^4}<\frac{5}{6},$$

$$\sin 1=1-\frac{1^3}{3!}+\frac{\sin c}{4!}=\frac{5}{6}+\frac{\sin c_2}{24}>\frac{5}{6},$$

откуда $\sin 1>\ln 2$.

Т13.8. $f(x)=\frac{\left(x^2+x-12\right)-x+17}{x^2+x-12}=1+\frac{17-x}{(x-3)(x+4)}=1-\frac{3}{x+4}+\frac{2}{x-3}=$

$$=1-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{1+\frac{x}{4}}\right)-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{3}}\right).$$

Отсюда, на основании следствия 13.6, имеем:

$$f(x)=1-\frac{3}{4}\left(1-\frac{x}{4}+\left(\frac{x}{4}\right)^2-\left(\frac{x}{4}\right)^3+\ldots+(-1)^n\left(\frac{x}{4}\right)^n\right)-$$

$$-\frac{2}{3}\left(1+\frac{x}{3}+\left(\frac{x}{3}\right)^2+\ldots+\left(\frac{x}{3}\right)^n\right)+R_n(x)=$$

$$=-\frac{5}{12}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{4}\cdot(-1)^{k+1}\cdot\left(\frac{x}{4}\right)^k-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^k\right)+R_n(x)=$$

$$=-\frac{5}{12}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3\cdot(-1)^{k+1}}{4^{k+1}}-\frac{2}{3^{k+1}}\right)x^k+R_n(x),$$

где $R_n(x)=o(x^n)$ при $x\to 0$. Следовательно, по следствию 13.5

$$\frac{f^{(15)}(0)}{15!}=\frac{3}{4^{16}}-\frac{2}{3^{16}}\quad\text{или}\quad f^{(15)}(0)=15!\left(\frac{3}{4^{16}}-\frac{2}{3^{16}}\right).$$

Т13.9. Положим: $t = x - 1$, $g(t) = f(t + 1)$.

Тогда $g(t)=\frac{e^{-t^3-1}}{4-t^{20}}=\frac{1}{4e}\cdot e^{-t^3}\cdot\frac{1}{1-\frac{t^{20}}{4}}$. На основании следствия 13.6 имеем:

$$g(t)=\frac{1}{4e}\left(1-t^3+\frac{t^6}{2!}-\frac{t^9}{3!}+\ldots+\frac{t^{24}}{8!}-\frac{t^{27}}{9!}+R_{29}(t)\right)\cdot\left(1+\frac{t^{20}}{4}+R_{39}(t)\right)=$$

$$=\frac{1}{4e}\left(1-t^3+\frac{t^6}{2!}-\frac{t^9}{3!}+\ldots+\frac{t^{24}}{8!}-\frac{t^{27}}{9!}+\frac{t^{20}}{4}-\frac{t^{23}}{4}+\frac{t^{26}}{4\cdot 2!}-\frac{t^{29}}{4\cdot 3!}+\overline{R}_{29}(t)\right),$$

где $R_{29}(t)=o(t^{29})$, $R_{39}(t)=o(t^{39})$, $\overline{R}_{29}(t)=o\left(t^{29}\right)$ при $t\to 0$.

Отсюда в силу следствия 13.5 $f^{(28)}(1) = g^{(28)}(0) = 0$,

$$\frac{f^{(29)}(1)}{29!} = \frac{g^{(29)}(0)}{29!} = \frac{1}{4e}\cdot\left(-\frac{1}{4\cdot 3!}\right),\ f^{(29)}(1) = -\frac{29!}{96e}.$$

Т13.10. Функция $g(x) = f^{(n+1)}(x)$, где $x \in X$, удовлетворяет условиям теоремы 13.2. Поэтому найдется такая точка c_1, расположенная между 0 и c, что

$$g(c) = f^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(0) + f^{(n+2)}(0)\cdot c + \frac{f^{(n+3)}(c_1)\cdot c^2}{2!}. \qquad (13.7)$$

Запишем теперь формулу Маклорена n-го и $(n + 2)$-го порядков в точке $x_0 = 0$ для функции $f(x)$:

$$f(x) = f(0) + f^{(1)}(0)\cdot x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1};$$

$$f(x) = f(0) + f^{(1)}(0)\cdot x + \ldots + \frac{f^{(n+2)}(0)}{(n+2)!}x^{n+2} + \frac{f^{(n+3)}(c_2)}{(n+3)!}x^{n+3},$$

здесь c_2 расположена между 0 и x. Отсюда

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1} + \frac{f^{(n+2)}(0)}{(n+2)!}x^{n+2} + \frac{f^{(n+3)}(c_2)}{(n+3)!}x^{n+3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(0) + \frac{f^{(n+2)}(0)}{n+2}x + \frac{f^{(n+3)}(0)}{(n+2)\,(n+3)}x^2. \qquad (13.8)$$

Сравнивая (13.7) и (13.8), получаем:

$$f^{(n+2)}(0)\cdot c + \frac{f^{(n+3)}(c_1)\cdot c^2}{2} = \frac{f^{(n+2)}(0)\cdot x}{n+2} + \frac{f^{(n+3)}(c_2)\cdot x^2}{(n+2)(n+3)}$$

Разделим обе части этого равенства на x:

$$f^{(n+2)}(0)\cdot\frac{c}{x} + \frac{f^{(n+3)}(c_1)}{2}\cdot\frac{c}{x}\cdot c = \frac{f^{(n+2)}(0)}{n+2} + \frac{f^{(n+3)}(c_2)\cdot x}{(n+2)(n+3)}. \qquad (13.9)$$

Функция $f^{(n+3)}(x)$ непрерывна на X (см. задачу Т7.2). Поэтому при $x \to 0$ $f^{(n+3)}(c_1) \to f^{(n+3)}(0)$, $f^{(n+3)}(c_2) \to f^{(n+3)}(0)$, т. к. $c_1 \to 0$, $c_2 \to 0$ при $x \to 0$. Кроме того, $\left|\frac{c}{x}\right| < 1$. Отсюда по теореме 3.2 $\frac{c}{x}\cdot c \to 0$ при $x \to 0$. Следовательно, из (13.9) видно, что $\lim\limits_{x\to 0}\left(f^{(n+2)}(0)\cdot\dfrac{c}{x}\right)=\dfrac{f^{(n+2)}(0)}{n+2}$. Но по условию $f^{(n+2)}(0)\neq 0$, откуда $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{c}{x}=\dfrac{1}{n+2}$.

Т13.11. Обозначим через x_0 точку из интервала (0; 1), в которой функция $f(x)$ принимает значение –1. По лемме 10.1 $f'(x_0)=0$. По теореме 13.2 функция $f(x)$ на промежутке [0; 1] представима по формуле Тейлора в точке x_0 с остатком второго порядка в форме Лагранжа:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(c)}{2}(x-x_0)^2=-1+0+\frac{f''(c)}{2}(x-x_0)^2,$$

где точка c расположена между x и x_0. В частности, если взять соответственно $x = 1$ и $x = 0$, то

$$\begin{cases} f(1)=-1+\dfrac{f''(c_1)}{2}(1-x_0)^2,\ c_1\in(x_0;1); \\ f(0)=-1+\dfrac{f''(c_2)}{2}x_0^2,\ c_2\in(0;x_0). \end{cases}$$

С учетом условий $f(0) = f(1) = 0$ получим

$$\begin{cases} f''(c_1)=\dfrac{2}{(1-x_0)^2}; \\ f''(c_2)=\dfrac{2}{x_0^2}. \end{cases} \tag{13.10}$$

Согласно следствию 11.5, существует точка $x^*\in[0;1]$, в которой функция $f''(x)$ принимает наибольшее значение среди всех других точек отрезка [0; 1]. Предположим, что $f''(x^*)<8$, тогда $f''(c_1)<8$, $f''(c_2)<8$ и ввиду (13.10)

$$\begin{cases} \dfrac{2}{(1-x_0)^2}=f''(c_1)<8 \\ \dfrac{2}{x_0^2}=f''(c_2)<8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-x_0)^2>\dfrac{1}{4} \\ x_0^2>\dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-x_0>\dfrac{1}{2} \\ x_0>\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0<\dfrac{1}{2} \\ x_0>\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Противоречие.

Т13.12. Предположим, что e — рациональное число, т. е. $e = \frac{p}{q}$, где p, q — натуральные числа, $p > q > 1$. Выберем некоторое натуральное число n, превосходящее p, и представим функцию e^x в виде формулы Маклорена n-го порядка с остатком в форме Лагранжа, положив $x = 1$:

$$\frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{p}{q}\right)^c, c \in (0;\ 1),$$

$$\frac{pn!}{q} = n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \ldots + \frac{n!}{n!} + \frac{n!}{(n+1)!}\left(\frac{p}{q}\right)^c.$$

Все слагаемые в правой части этого равенства, кроме последнего, являются целыми числами. Число $\frac{pn!}{q}$ также целое, поскольку $n > q$. Поэтому число $\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{p}{q}\right)^c$ должно быть целым. Но $0 < \frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{p}{q}\right)^c < \frac{1}{n+1}\cdot\frac{p}{q} < 1$. Противоречие.

Т13.13.

$$f(x) = \frac{x}{(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)\left(1+x^8\right)\left(1+x^{16}\right)}\cdot\frac{1-x}{1-x} =$$

$$= \frac{x(1-x)}{\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)\left(1+x^8\right)\left(1+x^{16}\right)} =$$

$$= \frac{x(1-x)}{\left(1-x^4\right)\left(1+x^4\right)\left(1+x^8\right)\left(1+x^{16}\right)} = \frac{x(1-x)}{1-x^{32}} = (1-x)x\cdot\frac{1}{1-x^{32}}.$$

Воспользуемся следствием 13.6:

$$f(x) = (1-x)\cdot x\cdot\left(1 + x^{32} + x^{64} + R_{95}(x)\right) = (1-x)\left(x + x^{33} + x^{65} + R_{96}(x)\right) =$$

$= x - x^2 + x^{33} - x^{34} + R_{64}(x)$, где $R_{95}(x) = o(x^{95})$, $R_{96}(x) = o(x^{96})$, $R_{64}(x) = o(x^{64})$ при $x \to 0$.

Т13.14. Указание: представить функции $f(x)$ и $f(-x)$ в виде (13.1), и в случае четности (нечетности) $f(x)$ сложить (вычесть) левые части полученных представлений.

П13.21. $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f''(x) = \frac{2}{x^3}$, $f^{(3)}(x) = -\frac{6}{x^4}$, $f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}$. Отсюда $f'(2) = -\frac{1}{4}$, $f''(2) = \frac{1}{4}$, $f^{(3)}(2) = -\frac{3}{8}$, $f^{(4)}(c) = \frac{24}{c^5}$. Поэтому по теореме 13.2

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{4 \cdot 2!}(x-2)^2 - \frac{3}{8 \cdot 3!}(x-2)^3 + \frac{24}{c^5 \cdot 4!}(x-2)^4 =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{x-2}{4} + \frac{(x-2)^2}{8} - \frac{(x-2)^3}{16} + \frac{(x-2)^4}{c^5},$$

где точка c расположена между 2 и x.

К13.11. Алгоритм решения задачи с помощью Mathcad следующий. Сформировать программный модуль `cor` для проверки, является ли текущее значение порядка n многочлена Тейлора достаточным, чтобы обеспечить заданную точность в точке x:

```
                 | j ← "the needed accuracy is reached" if |r(x)| ≤ er
cor(x, er, r) := | j ← "increase the order n at least by 1" otherwise
                 | j
```

Задать функцию $f(x)$ и построить многочлен Тейлора порядка n (в данном случае $n = 13$):

$$f(x) := \ln(1 + x^2)$$

$$T(x) := f(x)\ \text{series},\ x,\ n \rightarrow x^2 - \frac{1}{2} \cdot x^4 + \frac{1}{3} \cdot x^6 - \frac{1}{4} \cdot x^8 + \frac{1}{5} \cdot x^{10} - \frac{1}{6} \cdot x^{12}$$

Определить (в неявном виде) остаточный член формулы Тейлора и, обратившись к программному модулю `cor`, определить необходимость увеличения текущего значения порядка n:

$$R(x) := f(x) - T(x)$$

```
cor(0.3, 10^-9, R) = "increase the order n at least by 1"
```

Задать текущее значение порядка n — например, используя глобальное присваивание `n ≡ 13`. Если результат обращения к программному модулю `cor` есть "увеличить порядок n по крайней мере на 1", как в данном случае, то необходимо изменить значение n: `n ≡ 14`. И так до тех пор, пока результатом обращения к программному модулю `cor` не станет "требуемая точность достигнута".

Глава 14

Частные производные

Пусть функция $f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задана на n-мерном промежутке $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, $M_0 = (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in X$. Если зафиксировать все переменные, кроме i-ой, соответствующими координатами точки M_0, то получим функцию одной переменной $g(x_i)$: $g(x_i) = f(m_1, \ldots, m_{i-1}, x_i, m_{i+1}, \ldots, m_n)$. Производная функции $g(x_i)$ в точке m_i вдоль X_i называется частной производной функции f в точке M_0 вдоль X_i (по переменной x_i) и обозначается $f_{x_i}^{(1)}(M_0)$ или $f'_{x_i}(M_0)$.

Примеры. Пусть $f(x, y) = x^2y^3$, $M_0 = (1, 1)$. Тогда $g(x) = f(x, 1) = x^2$, $r(y) = f(1, y) = y^3$, $g'(x) = 2x$, $r'(y) = 3y^2$. Поэтому $f'_x(1, 1) = g'(1) = 2$, $f'_y(1, 1) = r'(1) = 3$. Эти же частные производные можно было бы вычислить и так:

$$f'_x(x, y) = 2xy^3,\ f'_x(1, 1) = 2,\ f'_y(x, y) = 3x^2y^2,\ f'_y(1, 1) = 3.$$

Пусть $f(x, y) = |x - y|$. Если $x > y$, то $f(x, y) = x - y$, $f'_x(x, y) = 1$, $f'_y(x, y) = -1$. Аналогично, если $x < y$, то $f'_x(x, y) = -1$, $f'_y(x, y) = 1$. Попробуем теперь вычислить частные производные в тех точках $M \in Af^2$, координаты которых равны. Пусть $M_0 = (m, m)$. Тогда $g(x) = f(x, m) = |x - m|$, откуда $g'_+(m) = 1$, $g'_-(m) = -1$ (см. задачу Т7.5). Следовательно, ввиду утверждения задачи Т7.3 функция f в точках (m, m) не имеет частных производных.

Определим теперь индуктивно частные производные k-го порядка. Если функция $f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет частные производные вдоль X_i в каждой точке из X, то $f'_{x_i}(M)$ также представляет собой функцию от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которая называется частной производной первого порядка функции f (по переменной x_i) на множестве X. Предположим, что уже определена частная производная $(k-1)$-го порядка $f^{(k-1)}_{x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_{k-1}}}(M)$ на множестве X по переменным $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{k-1}}, k \geq 2$. Тогда частная производная первого порядка функции $f^{(k-1)}_{x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_{k-1}}}(M)$ по переменной x_{i_k} называется частной производной k-го порядка функции f на множестве X по переменным $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ и обозначается $f^{(k)}_{x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}}(M)$. Отметим, что среди переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ могут быть повторяющиеся.

Пример. Вычислим все частные производные второго порядка функции $f(x, y) = x^2y^3$ из предыдущего примера:

$$f^{(2)}_{xx}(x, y) = (f'_x(x, y))'_x = (2xy^3)'_x = 2y^3;$$

$$f^{(2)}_{yy}(x, y) = (f'_y(x, y))'_y = (3x^2y^2)'_y = 6x^2y;$$

$$f^{(2)}_{xy}(x, y) = (f'_x(x, y))'_y = (2xy^3)'_y = 6xy^2;$$

$$f^{(2)}_{yx}(x, y) = (f'_y(x, y))'_x = (3x^2y^2)'_x = 6xy^2.$$

В этом примере $f^{(2)}_{xy}(x, y) \equiv f^{(2)}_{yx}(x, y)$. Оказывается, подобные тождества выполняются и в более общих ситуациях.

Теорема 14.1 (о равенстве смешанных производных). Если все частные производные k-го порядка функции $f(M)$ непрерывны на n-мерном промежутке X, то они не зависят от порядка переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$, по которым они вычисляются.

Эта теорема в частном случае доказана в задаче Т14.1.

Полным дифференциалом функции $f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется функция df от независимых переменных $M = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\Delta M = (\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n)$, равная $f'_{x_1}(M)\Delta x_1 + f'_{x_2}(M)\Delta x_2 + \ldots + f'_{x_n}(M)\Delta x_n$.

Величина $df(M_0, \Delta M)$ называется полным дифференциалом функции f в точке M_0. Будет также использоваться запись $df(M) = f'_{x_1}(M)dx_1 + f'_{x_2}(M)dx_2 + \ldots + f'_{x_n}(M)dx_n$. Напомним также обозначение, использованное в *гл. 4*:
$M_0 + \Delta M = (m_1 + \Delta x_1, m_2 + \Delta x_2, \ldots, m_n + \Delta x_n)$.

Аналогом первой части теоремы 7.2 является следующее утверждение.

Теорема 14.2. Пусть функция $f(M)$ задана на n-мерном промежутке X и $M_0 \in X$. Тогда $\Delta f(M_0, \Delta M) = df(M_0, \Delta M)$ для любой точки $M = M_0 + \Delta M \in X$, если и только если функция $f(M)$ линейна на X.

Доказательство теоремы дано в задаче Т14.7.

Однако имеется значительно более широкий класс функций, чьи приращение и полный дифференциал не обязательно равны, но мало различимы при малых приращениях аргументов.

Пусть функция $f(M)$ задана на n-мерном промежутке X и $M_0 \in X$. Функция f называется дифференцируемой в точке M_0 вдоль X, если

$$\Delta f(M_0, \Delta M) - df(M_0, \Delta M) = o(\rho(M, M_0)) \text{ при } M \to M_0 \text{ вдоль } X.$$

Если функция дифференцируема в каждой точке из X вдоль X, то она называется дифференцируемой на X.

Как показано в *гл. 7*, для дифференцируемости функции одной переменной в точке x_0 достаточно существования производной этой функции в точке x_0. Для дифференцируемости функции нескольких переменных наличия частных производных в точке M_0 недостаточно, чтобы гарантировать ее дифференцируемость в точке M_0 (см. задачу Т14.2). Однако справедлива следующая теорема.

Теорема 14.3. Пусть функция $f(M)$ задана на n-мерном промежутке X, а все ее частные производные являются непрерывными на X функциями. Тогда f дифференцируема на X.

Доказательство. Для упрощения индексации ограничимся случаем $n = 2$, поскольку доказательство теоремы для общего случая принципиально ничем не отличается от случая $n = 2$.

Пусть $M_0 = (x_0, y_0) \in X$, $P = (x_0 + \Delta x, y_0)$, $\Delta M = (\Delta x, \Delta y)$,
$M = M_0 + \Delta M = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in X$. Введем вспомогательные функции от одной переменной $g(y) = f(x_0 + \Delta x, y)$, $r(x) = f(x, y_0)$. Тогда

$$\Delta f(M_0, \Delta M) = f(M) - f(M_0) = f(M) - f(P) + f(P) - f(M_0) =$$

$$= g(y_0 + \Delta y) - g(y_0) + r(x_0 + \Delta x) - r(x_0) = \Delta g(y_0, \Delta y) + \Delta r(x_0, \Delta x).$$

Но по теореме 7.2

$$\Delta g(y_0, \Delta y) - dg(y_0, \Delta y) = \alpha(\Delta y), \text{ где } \alpha(\Delta y) = o(\Delta y) \text{ при } \Delta y \to 0,$$

$$\Delta r(x_0, \Delta x) - dr(x_0, \Delta x) = \beta(\Delta x), \text{ где } \beta(\Delta x) = o(\Delta x) \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Отсюда

$$\Delta f(M_0, \Delta M) = dg(y_0, \Delta y) + dr(x_0, \Delta x) + \alpha(\Delta y) + \beta(\Delta x) = g'(y_0)\Delta y + r'(x_0)\Delta x +$$
$$+ \alpha(\Delta y) + \beta(\Delta x) = f'_y(P)\Delta y + f'_x(M_0)\Delta x + \alpha(\Delta y) + \beta(\Delta x) =$$
$$= \left(f'_y(P) - f'_y(M_0)\right)\Delta y + (f'_y(M_0)\Delta y + f'_x(M_0)\Delta x) + \alpha(\Delta y) + \beta(\Delta x) =$$
$$= \gamma(\Delta x, \Delta y) + df(M_0, \Delta M) + \alpha(\Delta y) + \beta(\Delta x),$$

где $\gamma(\Delta x, \Delta y) = \left(f'_y(P) - f'_y(M_0)\right)\Delta y$.

Остается доказать, что $\gamma(\Delta x, \Delta y) + \alpha(\Delta y) + \beta(\Delta x) = o(\rho(M, M_0))$ при $M \to M_0$, $M \in X$. Покажем это. Отметим сразу, что $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $P \to M_0$ при $M \to M_0$. Кроме того, ввиду непрерывности функции f'_y

$$\lim_{P \to M_0} f'_y(P) = f'_y(M_0).$$

Поэтому $\lim\limits_{\substack{M \to M_0 \\ M \in X}} \dfrac{\gamma(\Delta x, \Delta y)}{\rho(M, M_0)} = \lim\limits_{P \to M_0} \left(f'_y(P) - f'_y(M_0)\right) \cdot \dfrac{\Delta y}{\rho(M, M_0)} = 0$. Последний предел равен нулю в силу следствия 3.1, поскольку функция $\dfrac{\Delta y}{\rho(M, M_0)} = \dfrac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$ ограничена. Аналогично, по следствию 3.1

$\lim\limits_{\substack{M \to M_0 \\ M \in X}} \dfrac{\alpha(\Delta y)}{\rho(M, M_0)} = \lim\limits_{\substack{M \to M_0 \\ M \in X}} \left(\dfrac{\alpha(\Delta y)}{\Delta y} \cdot \dfrac{\Delta y}{\rho(M, M_0)}\right) = 0$, $\lim\limits_{\substack{M \to M_0 \\ M \in X}} \dfrac{\beta(\Delta x)}{\rho(M, M_0)} = 0$, т. к. $\dfrac{\alpha(\Delta y)}{\Delta y} \to 0$, $\dfrac{\beta(\Delta x)}{\Delta x} \to 0$ при $M \to M_0$, а функции $\dfrac{\Delta y}{\rho(M, M_0)}$, $\dfrac{\Delta x}{\rho(M, M_0)}$ ограничены. Теорема доказана.

Следствие 14.1. Если функция $f(M)$ дифференцируема в точке M_0 вдоль n-мерного промежутка X, то она непрерывна в этой точке вдоль X.

Доказательство следствия дано в задаче Т14.3.

Аналогом теоремы 8.2 в классе функций нескольких переменных являются теорема 14.3 и следствие 14.2.

Чтобы упростить формулировки приведенных ниже утверждений, условимся считать точки t_0, M_0, T_0 внутренними точками промежутков, на которых заданы соответствующие функции.

Теорема 14.4. Пусть функции $x_1 = \varphi_1(t)$, …, $x_n = \varphi_n(t)$ дифференцируемы в точке t_0, а функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дифференцируема в точке $M_0 = (\varphi_1(t_0), \ldots$

…, $\varphi_n(t_0)$). Тогда сложная функция $y(t) = f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ дифференцируема в точке t_0, причем $y'_t(t_0) = f'_{x_1}(M_0)\cdot\varphi'_1(t_0) + \ldots + f'_{x_n}(M_0)\cdot\varphi'_n(t_0)$ или $y'_t = f'_{x_1}\cdot\varphi'_1 + \ldots + f'_{x_n}\cdot\varphi'_n$.

Доказательство теоремы дано в задаче Т14.4.

Следствие 14.2. Пусть функции $x_1 = \varphi_1(T)$, $x_2 = \varphi_2(T)$, …, $x_n = \varphi_n(T)$ дифференцируемы в точке T_0, $T = (t_1, t_2, \ldots, t_k)$, а функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дифференцируема в точке $M_0 = (\varphi_1(T_0), \varphi_2(T_0), \ldots, \varphi_n(T_0))$. Тогда сложная функция $y(T) = f(\varphi_1(T), \ldots, \varphi_n(T))$ имеет частные производные в точке T_0 по переменным t_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, которые с учетом обозначения $z = t_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$) вычисляются следующим образом:

$$y'_z(T_0) = f'_{x_1}(M_0)\cdot\varphi'_{1z}(T_0) + \ldots + f'_{x_n}(M_0)\cdot\varphi'_{nz}(T_0)$$

или

$$y'_z = f'_{x_1}\cdot\varphi'_{1z} + \ldots + f'_{x_n}\cdot\varphi'_{nz} = f'_{x_1}\cdot x'_{1z} + \ldots + f'_{x_n}\cdot x'_{nz}.$$

Доказательство следствия дано в задаче Т14.5.

Аналогом утверждения 9.1 в классе функций нескольких переменных является следующее следствие.

Следствие 14.3 (инвариантность формы первого дифференциала). Если функции $\varphi_1(T)$, …, $\varphi_n(T)$ дифференцируемы на некотором k-мерном промежутке X, $T = (t_1, t_2, \ldots, t_k)$, $t_1, t_2, \ldots, t_k$ — независимые переменные, а функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дифференцируема на множестве всех точек $M = (\varphi_1(T), \varphi_2(T), \ldots, \varphi_n(T))$, $T \in X$,
то $df(M) = f'_{x_1}(M)dx_1 + f'_{x_2}(M)dx_2 \ldots + f'_{x_n}(M)dx_n$.

Доказательство следствия дано в задаче Т14.6.

Следствие 14.3 позволяет, в частности, вычислять производные функций, заданных в неявном виде. Пусть, например, функция $z = \varphi(x)$ задана в неявном виде уравнением $x^2 + 3z^2 = 2$. Положим $F(x, z) = x^2 + 3z^2$. Тогда

$$dF(x, z) = d2 \Rightarrow F'_x dx + F'_z dz = 0 \Rightarrow 2xdx + 6zdz = 0 \Rightarrow xdx + 3z\cdot\varphi'(x)dx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z'_x = \varphi'(x) = -\frac{x}{3z}.$$

Компьютерный раздел

Кнопка подпанели **Матрицы** (Matrix), изображенной на рис. 14.1, вызывает шаблон скалярного умножения двух точек из пространства Af^n.

Рис. 14.1. Подпанель **Матрица**

На месте меток шаблона вводятся идентификаторы этих точек, результатом символьного вычисления скалярного умножения будет сумма произведений одноименных координат точек. Например,

$$M := \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad N := \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} \qquad M \cdot N \rightarrow a \cdot c + b^2 + c \cdot a$$

Кнопка Σv вызывает шаблон $\sum \blacksquare$ для определения суммы координат точки, на месте метки которого вводится идентификатор точки. Например, $\sum M \rightarrow a + b + c$.

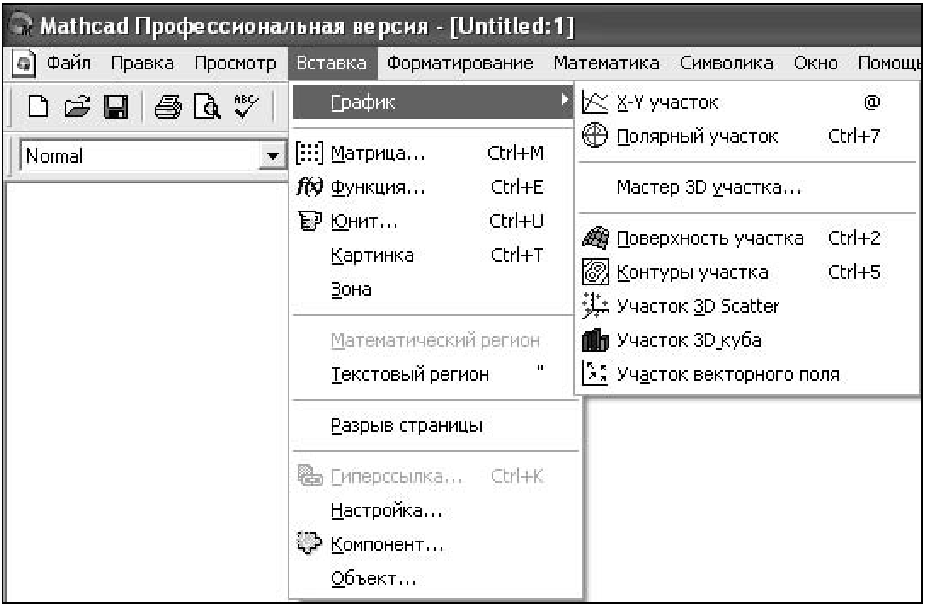


Рис. 14.2. Всплывающее меню команды **График**

Выпадающее меню **Вставка** (Insert) содержит команду **График** (Graph), вызывающую всплывающее меню (оба меню показаны на рис. 14.2) для вызова шаблонов различных типов графиков. Шаблон графика в прямоугольных координатах был описан в *гл. 4* — ему соответствует команда **X-Y участок** (X-Y Plot) всплывающего меню.

Шаблон для построения поверхностей (рис. 14.3) можно вызвать командой **Поверхность участка** (Surface Plot) всплывающего меню.

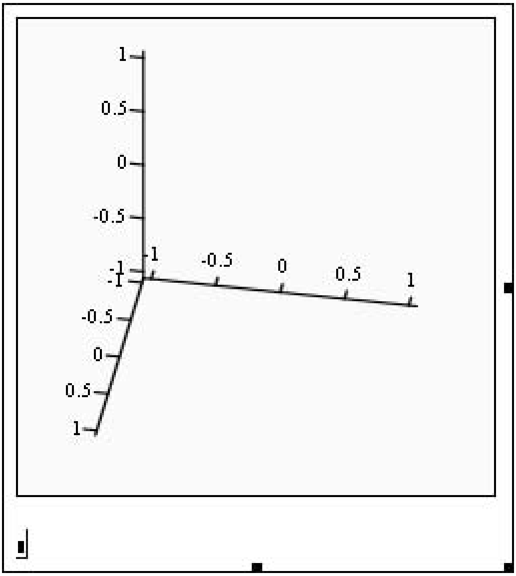


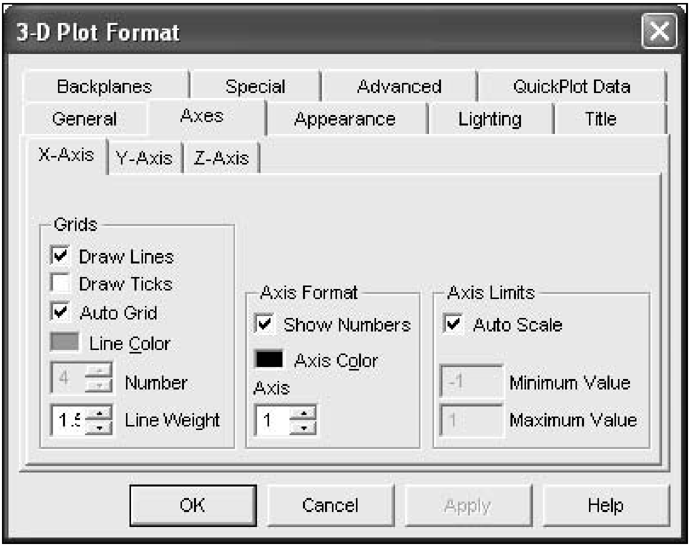
Рис. 14.3. Шаблон для построения поверхностей

Рассмотрим процесс форматирования поверхностей. Для вызова диалогового окна форматирования поверхностей **3-D Plot Format** (Формат 3-мерного графика) достаточно дважды щелкнуть на области шаблона графика. Окно **3-D Plot Format** содержит 9 вкладок.

Вкладка **Axes** (Оси) (рис. 14.4) содержит три вкладки для установки опций по каждой координате.

Группа **Grids** (Сетки) управляет линиями сетки по соответствующей координате. Опция **Draw Lines** (Нарисовать линии) задает линии сетки. При включенной опции **Draw Lines** становятся активными: поле **Line Color** (Цвет линии) — для установки цвета линий сетки; поле **Line Weight** — для установки толщины линий сетки. Опция **Draw Ticks** (Нарисовать метки) устанавливает метки на оси. Опция **Auto Grid**

(Автосетка) устанавливает автоматический выбор количества линий сетки. При отключенной опции **Auto Grid** становится активным поле **Number** для установки нужного числа линий сетки.



Grids
☑ Draw Lines
☐ Draw Ticks
☑ Auto Grid
Line Color
4 Number
1.5 Line Weight

Axis Format
☑ Show Numbers
Axis Color
Axis 1

Axis Limits
☑ Auto Scale
-1 Minimum Value
1 Maximum Value

Рис. 14.4. Вкладка **Axes** диалогового окна **3-D Plot Format**

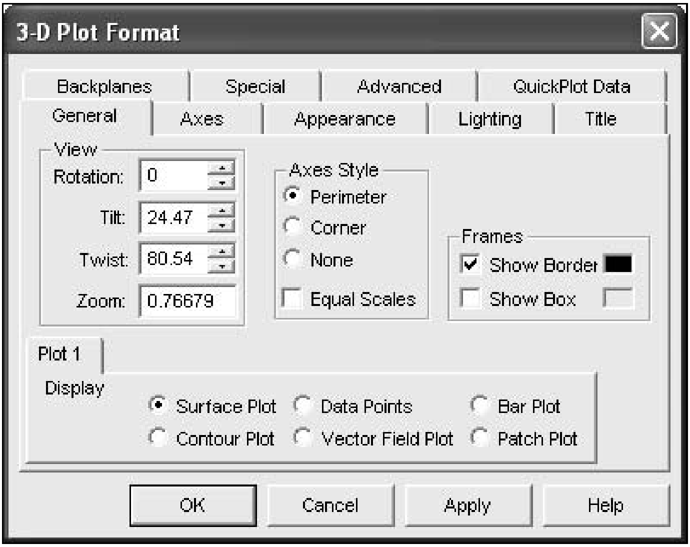
Группа **Axis Format** (Формат оси) формирует вид соответствующей оси. Опция **Show Numbers** (Показать номера) отображает нумерацию линий сетки вдоль оси. Поле **Axis Color** (Цвет оси) устанавливает цвет оси. Прокручиваемый список **Axis Weight** (Вес оси) служит для установки толщины линии оси.

Группа **Axis Limits** (Пределы оси) устанавливает диапазоны отображения осей на графике. Опция **Auto Scale** (Автошкала) устанавливает автоматический выбор этого диапазона. При отключенной опции **Auto Scale** открываются поля **Minimum Value** (Минимальное значение) и **Maximum Value** (Максимальное значение) для задания границ диапазона отображения оси на графике. Этот диапазон не идентичен диапазону, в котором строится поверхность. Установка диапазона, в котором строится поверхность, производится на вкладке **QuickPlot Data** (Данные быстрого графика).

Вкладка **General** (Общие) (рис. 14.5) управляет внешним видом поверхности и расположением координат.

Группа **View** (Вид) определяет углы поворота поверхности относительно каждой из осей: поле **Rotation** (Вращение) — относительно оси *X*, поле

Tilt — относительно оси Y, поле **Twist** — относительно оси Z; поле **Zoom** (Масштаб) определяет масштаб изображения.



View
Rotation: 0
Tilt: 24.47
Twist: 80.54
Zoom: 0.76679

Axes Style
● Perimeter
○ Corner
○ None
☐ Equal Scales

Frames
☑ Show Border ■
☐ Show Box ☐

Display
● Surface Plot ○ Data Points ○ Bar Plot
○ Contour Plot ○ Vector Field Plot ○ Patch Plot

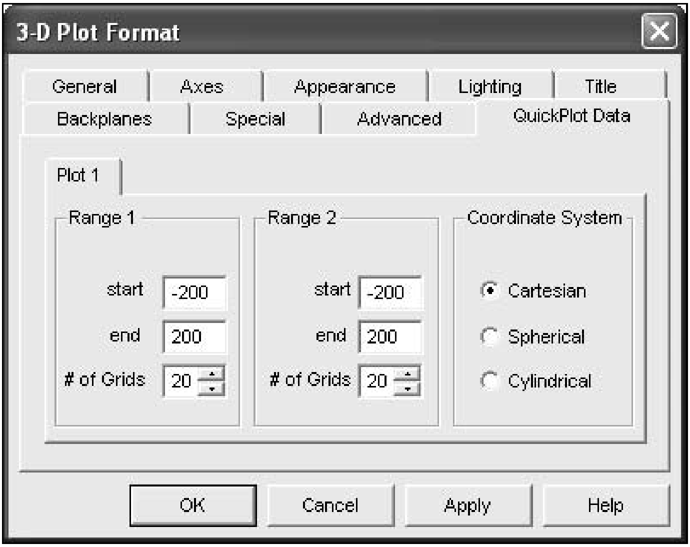
Рис. 14.5. Вкладка **General** диалогового окна **3-D Plot Format**

Группа **Axes Style** (Стиль осей) определяет расположение осей. Если выбрана опция **Corner** (Угол), то устанавливается стандартное расположение осей. Если выбрана опция **Perimeter** (Периметр), то устанавливается расположение осей по периметру. Опция **None** (Никакой) отключает показ осей на графике.

Группа **Frames** (Рамки) содержит две опции. Опция **Show Border** (Показать границу) устанавливает рамку вокруг графика. Опция **Show Box** (Показать куб) выделяет область построения поверхности в виде куба.

В одних и тех же координатах (с помощью одного шаблона) может быть построено несколько поверхностей. Вкладка **Plot <*i*>** соответствует *i*-й поверхности. На каждой вкладке **Plot <*i*>** задается тип изображаемой поверхности. Если выбрана опция **Surface Plot** (График поверхности), то строится обычная поверхность. Если выбрана опция **Contour Plot** (Контурный график), то строятся в плоскости X-Y линии уровня поверхности, причем в этом режиме на каждой линии уровня можно вывести ее числовое значение установкой опции **Numbered** (Нумерация) вкладки **Special** (Специальные). Если выбрана опция **Data Points** (Точки графика), то поверхность представляется в виде набора точек.

Вкладка **QuickPlot Data** (Координаты быстрого графика) (рис. 14.6) устанавливает систему координат и диапазоны по осям, в которых строится поверхность. Группа **Range 1** устанавливает диапазон по оси *X*. Группа **Range 2** устанавливает диапазон по оси *Y*. Поле **#of Grids** определяет дискретность представления поверхности: чем больше число, тем плавнее поверхность.



Range 1
start -200
end 200
# of Grids 20

Range 2
start -200
end 200
# of Grids 20

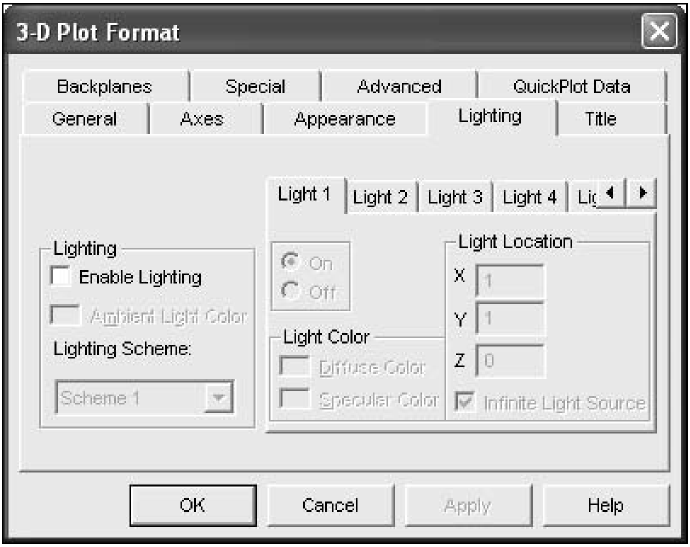
Coordinate System
● Cartesian
○ Spherical
○ Cylindrical

Рис. 14.6. Вкладка **QuickPlot Data** диалогового окна **3-D Plot Format**

Группа **Coordinate System** (Система координат) устанавливает тип системы координат. Опция **Cartesian** (Декартова) определяет декартову систему координат.

Вкладка **Title** (Заголовок) задает название графика. Если выбрана опция **Above** (Выше), то название появится над графиком; если выбрана опция **Below** (Ниже), то название появится под графиком. Опция **Hide** (Скрыть) отключает вывод названия графика.

Вкладка **Lighting** (Освещение) (рис. 14.7) устанавливает эффект подсветки поверхности от одного или нескольких источников. Для включения эффекта подсветки необходимо выбрать опцию **Enable Lighting** (Включить освещение) в группе **Lighting**. В этой же группе из раскрывающегося списка **Lighting Scheme** (Схема освещения) выбираются различные схемы подсветки в случае, если включена опция **Infinite Light Source** (Бесконечно удаленный источник) во вкладке **Light <*i*>**. Подсветка может быть от нескольких источников. Для включения источника подсветки на соответствующей кладке **Light <*i*>** выберите опцию **On**. При включенной опции **Infinite Light Source** подсветка осуществляется от бесконечно удаленного источника, а при отключенной опции **Infinite Light Source** — от точечного источника, координаты которого указываются соответственно в полях **X**, **Y**, **Z**.



☐ Enable Lighting

☐ Ambient Light Color

Lighting Scheme: Scheme 1

● On ○ Off

X 1

Y 1

Z 0

☐ Diffuse Color

☐ Specular Color

☑ Infinite Light Source

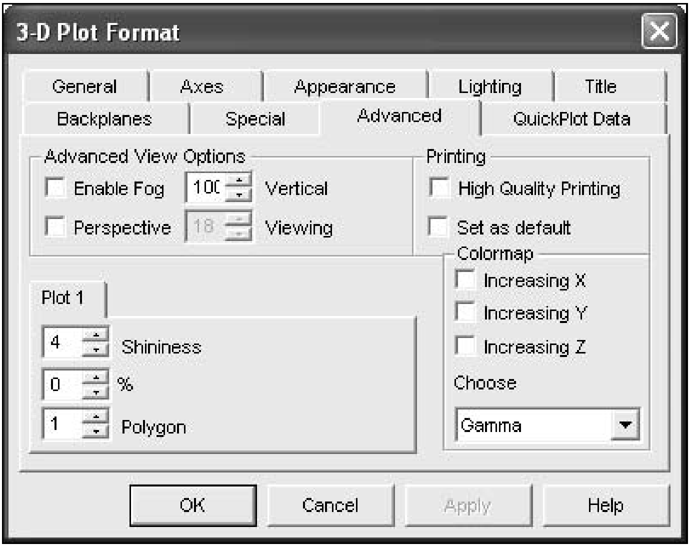
Рис. 14.7. Вкладка **Lighting** диалогового окна **3-D Plot Format**

Вкладка **Advanced** (Дополнительные) (рис. 14.8) содержит 4 группы опций.

Группа **Advanced View Options** (Дополнительные опции вида) содержит две опции. Опция **Perspective** (Перспектива) создает эффект "перспективы" поверхности, что определяется числом от 1 до 100, выбираемым в поле **Viewing Distance** (Видимая дистанция). Опция **Enable Fog** (Включить затуманненость) определяет "затуманенность" поверхности. В поле **Vertical Scale** (Вертикальная шкала) выбирается масштаб вдоль оси *Z*.

В группе **Colormap** (Палитра) в раскрывающемся списке **Choose** (Выбрать палитру) выбирается цветовая гамма поверхности.

На вкладке **Plot <*i*>** поле %**Transparency** (Прозрачность) определяет контрастность изображения (число 0 — самое контрастное, число 100 — белый фон), поле **Poligon Offset** (Выделенность ячеек) — эффект ячеистости изображения в пределах ортогональной сетки (0 — ячейки слабо выделены, 10 — ячейки сильно выделены).



Advanced View Options

☐ Enable Fog 10 Vertical

☐ Perspective 18 Viewing

Printing

☐ High Quality Printing

☐ Set as default

Colormap

☐ Increasing X

☐ Increasing Y

☐ Increasing Z

Choose Gamma

Plot 1

4 Shininess

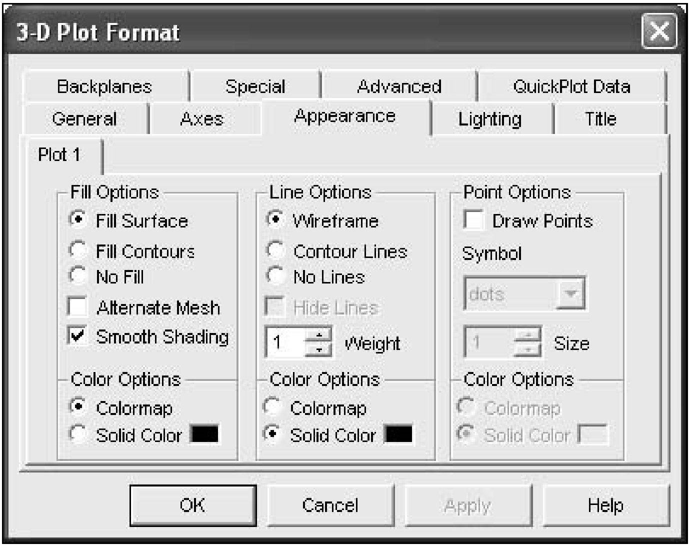
0 %

1 Polygon

Рис. 14.8. Вкладка **Advanced** диалогового окна **3-D Plot Format**

Вкладка **Appearance** (Появление) (рис. 14.9) содержит для каждой вкладки **Plot <*i*>** три группы опций. Группа **Fill Options** (Заполнить опции) определяет характер раскраски изображения. Если выбрана опция **Fill Surface** (Заполнить поверхность), то поверхность раскрашивается с плавным переходом от линии уровня к линии уровня. Если выбрана опция **Fill Contours** (Заполнить контуры), то поверхность раскрашивается с резкими границами переходов, определяемыми линиями уровня. Если выбрана опция **No Fill** (Без заполнения), то поверхность не раскрашивается вообще. При выбранной опции **Fill Surface** становятся активными опции подгруппы **Color Options** (Опции цвета). Если выбрана опция **Colormap**, то поверхность раскрашивается по цветовой схеме с учетом опций во вкладке **Lighting**. Если выбрана опция **Solid Color** (Непрерывный свет), то поверхность раскрашивается указанным в поле справа цветом без учета опций во вкладке **Lighting.**

В группе **Line Options** (Опции линии) можно выбрать одну из трех опций. Опция **Wireframe** (Сетка) выводит ортогональные линии поверхности. При этом в поле **Weight** (Вес) задается толщина линий. Подгруппа **Color Options** определяет характер раскраски ортогональных линий. Опция **Contour Lines** вместо ортогональных линий выводит линии уровня. Толщина линий определяется полем **Weight**, а раскраска — подгруппой **Color Options**. Опция **No Lines** отключает вывод линий.



Fill Options
● Fill Surface
○ Fill Contours
○ No Fill
☐ Alternate Mesh
☑ Smooth Shading
Color Options
● Colormap
○ Solid Color ■

Line Options
● Wireframe
○ Contour Lines
○ No Lines
☐ Hide Lines
1 Weight
Color Options
○ Colormap
● Solid Color ■

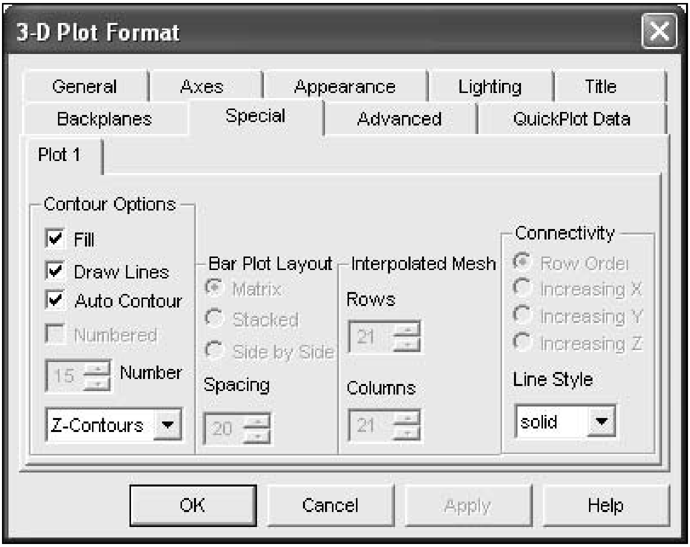
Point Options
☐ Draw Points
Symbol
dots
1 Size
Color Options
○ Colormap
● Solid Color ☐

Рис. 14.9. Вкладка **Appearance** диалогового окна **3-D Plot Format**

Группа **Point Options** содержит только одну опцию **Draw Points**, при включении которой становятся доступными и все остальные поля группы. Опция **Draw Points** в узлах ортогональной сетки ставит метки независимо от того, какая опция выбрана в группе **Line Options**.

Вкладка **Backplanes** содержит группы опций для каждой из координатных плоскостей. Группы **Grids** и **Sub-Grids** дублируют соответствующие опции установки линий сетки на вкладке **Axes**. Опция **Fill Backplane** (Заполнить фон) раскрашивает координатную плоскость указанным в поле **Color** цветом. Опция **Backplane Border** (Границы фона) ограничивает рамкой координатную поверхность.

Вкладка **Special** (рис. 14.10) содержит группу опций **Contour Options** для формирования поверхности без учета ортогональных линий. Действие каждой опции этой группы распространяется на каждую из координат, устанавливаемую в раскрывающемся списке внизу всей группы. Если установлена опция **Fill**, то поверхность отображается в заданной цветовой гамме. Эта опция дублирует опцию **Fill Surface** вкладки **Appearance**. Если установлена опция **Draw Lines**, то на поверхности выводятся линии уровня относительно выбранной координаты. Число линий уровня определяется опцией **Auto Contour**. Если опция отключена, то это число задается в поле **Number**.



Contour Options
☑ Fill
☑ Draw Lines
☑ Auto Contour
☐ Numbered
15 Number
Z-Contours

Bar Plot Layout
● Matrix
○ Stacked
○ Side by Side
Spacing 20

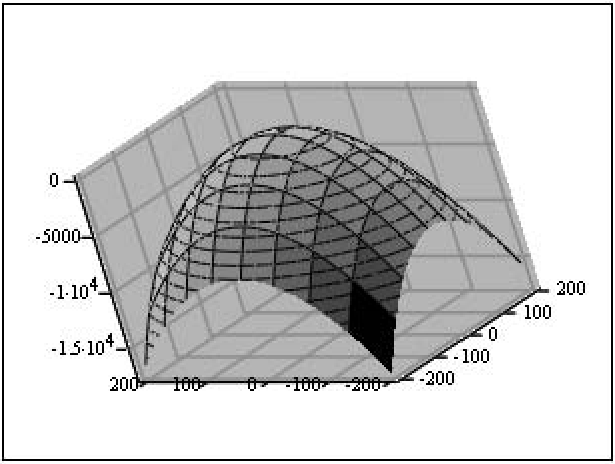
Interpolated Mesh
Rows 21
Columns 21

Connectivity
● Row Order
○ Increasing X
○ Increasing Y
○ Increasing Z
Line Style solid

Рис. 14.10. Вкладка **Special** диалогового окна **3-D Plot Format**

Построим теперь поверхность $z = f(x, y)$, где `f(x, y) := 5 · x − 0.2 · x`^{2}` + 2 · y − 0.2 · y`^{2}. Вызовите шаблон трехмерного графика и на месте метки введите идентификатор функции *f*. Для получения необходимого изображения произведите настройку параметров рисунка: на вкладке **General** диалогового окна **3D Plot Format** в группе **Display As** выберите опцию **Surface Plot**, отметьте опцию **Perimeter** в группе **Axis Style**, на вкладке **Backplanes** отметьте опцию **Fill Backplane** по каждой координате, подобрав подходящий цвет в поле **Color**; на вкладке **Appearance** выберите опции **Fill Surface**, **Wireframe**, **Colormap** (в группе **Fill Options**) и **Solid Color** (в группе **Line Options**); на вкладке **Special** включите опции **Fill**, **AutoContour**, **Draw Lines**; для каждой координаты *X*, *Y*, *Z* на вкладке **Advanced** в раскрывающемся списке **Choose Colormap** выберите `Gamma`; на вкладке **QuickPlot Data** в полях **start** установите –200, в полях **end** установите 200, на вкладках **X-Axis**, **Y-Axis**, **Z-Axis** включите опции **Show Numbers**, **Auto Grid**, **Draw Lines**, **Auto Scale** и отключите опцию **Draw Ticks**. Закройте диалоговое окно **3D Plot Format**. Щелкните на области графика и, удерживая левую кнопку мыши, вращайте график, добившись его расположения, как на рис. 14.11.

Построим теперь поверхность, координаты точек (x, y, z) которой задаются уравнениями $x = u^2$, $y = v^2$, $z = u^4 + v^4$.

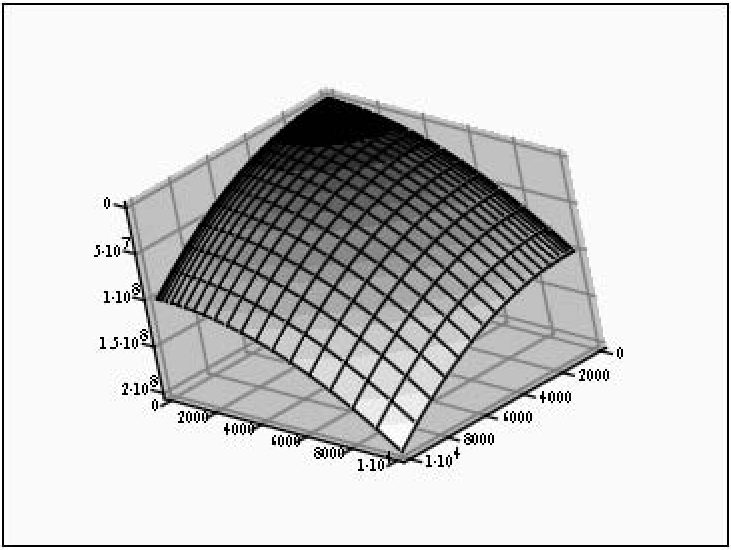


f

Рис. 14.11. График $z = f(x, y)$

На рабочем листе Mathcad-документа определите функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$:

$x(u, v) := u^2$ $y(u, v) := v^2$ $z(u, v) := u^4 + v^4$



(x,y,z)

Рис. 14.12. Поверхность, заданная уравнениями $x = u^2$, $y = v^2$, $z = u^4 + v^4$

Вызовите шаблон трехмерного графика и на месте метки введите идентификаторы x, y, z, заключив их в скобки. С помощью диалогового окна **3-D Plot Format** произведите форматирование графика так, чтобы он выглядел, как показано на рис. 14.12.

Отметим, что при форматировании рис. 14.12 на вкладке **QuickPlot Data** были заданы диапазоны изменения переменных u и v, равные [0; 100]. На осях же графика отображены диапазоны изменения переменных x, y и z.

Задачи для самостоятельного решения

T14.1. Доказать теорему 14.1.

T14.2. Доказать, что функция

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{при } (x,y)\neq(0,0);\\ 0 \quad \text{при } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

имеет в точке $M_0 = (0, 0)$ частные производные, но недифференцируема в этой точке.

T14.3. Доказать следствие 14.1.

T14.4. Доказать теорему 14.4.

T14.5. Доказать следствие 14.2.

T14.6. Доказать следствие 14.3.

T14.7. Доказать теорему 14.2.

T14.8. Дано: x, y — независимые переменные и функция $z = \varphi(x, y)$ задана в неявном виде уравнением $F(x, y, z) = 0$. Доказать, что если $F'_z \neq 0$, то

$$z'_x = \varphi'_x = -\frac{F'_x}{F'_z},\ z'_y = \varphi'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Общая формулировка задач П14.1—П14.21

Пусть x, y — независимые переменные, а функция $z = \varphi(x, y)$ задана в неявном виде уравнением $F(x, y, z) = 0$. Найти значения $\varphi'_x(M_0)$, $\varphi'_y(M_0)$ в заданной точке $M_0 = (x_0, y_0)$, если известно значение $z_0 = \varphi(M_0)$.

П14.1. $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3yxz - 4$, $M_0 = (2, 1)$, $z_0 = 1$.

П14.2. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - yx - 2$, $M_0 = (-1, 0)$, $z_0 = 1$.

П14.3. $F(x, y, z) = 3x - 2y + z - xz - 5$, $M_0 = (2, 1)$, $z_0 = -1$.

П14.4. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - z - 4$, $M_0 = (1, 1)$, $z_0 = -1$.

П14.5. $F(x, y, z) = z^3 + 3yxz + 3y - 7$, $M_0 = (1, 1)$, $z_0 = 1$.

П14.6. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6x$, $M_0 = (1, 2)$, $z_0 = 1$.

П14.7. $F(x, y, z) = xy - z^2 + 1$, $M_0 = (0, 1)$, $z_0 = -1$.

П14.8. $F(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y - 2$, $M_0 = (1, 1)$, $z_0 = 1$.

П14.9. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xz - 5$, $M_0 = (0, 2)$, $z_0 = 1$.

П14.10. $F(x, y, z) = 3x^2y^2 + 2xyz^2 - 2x^3z + 4y^3z - 4$, $M_0 = (2, 1)$, $z_0 = 2$.

П14.11. $F(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z + 2$, $M_0 = (1, 1)$, $z_0 = 1$.

П14.12. $F(x, y, z) = x + y + z + 2 - yxz$, $M_0 = (2, 1)$, $z_0 = 5$.

П14.13. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - 2$, $M_0 = (0, 1)$, $z_0 = -1$.

П14.14. $F(x, y, z) = x^3 + 2y^3 + z^3 - 3yxz - 2y - 15$, $M_0 = (1, -1)$, $z_0 = 2$.

П14.15. $F(x, y, z) = x^2 - 2xy - 3y^2 + 6x - 2y + z^2 - 8z + 20$, $M_0 = (0, -2)$, $z_0 = 2$.

П14.16. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - y + z - 3$, $M_0 = (1, 2)$, $z_0 = 0$.

П14.17. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2yx - yz - 4x - 3y - z$, $M_0 = (1, -1)$, $z_0 = 1$.

П14.18. $F(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2 + 6z + 2x - 4y + 12$, $M_0 = (0, 1)$, $z_0 = -1$.

П14.19. $F(x, y, z) = x^3 - z^3 + 3yxz - 27$, $M_0 = (3, 1)$, $z_0 = 3$.

П14.20. $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 59$, $M_0 = (3, 1)$, $z_0 = 4$.

П14.21. $F(x, y, z) = 4x^3 - 3y^3 + z^2 + 2yxz - 4xz$, $M_0 = (0, 1)$, $z_0 = \sqrt{3}$.

Общая формулировка задач K14.1—K14.10

Определить полный дифференциал функции f в точке M_0; вычислить частные производные суперпозиции функций $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$; проверить выполнение тождества $g \equiv 0$. Если функция f зависит от двух переменных x, y, то с помощью команды **Surface Plot** построить поверхность $z = f(x, y)$; если функция f зависит от трех переменных x, y, z или четырех переменных x, y, z, t, то с помощью команды **3D Scatter Plot** построить поверхность, координаты точек (x, y, z) которой заданы уравнениями $x = \varphi_1(u, v)$, $y = \varphi_2(u, v)$, $z = \varphi_3(u, v)$.

К14.1. $f(x,y,z) = x + \dfrac{x-y}{y-z}$, $M_0 = (6, -5, 1)$, $\varphi_1(u, v) = u \cdot v$, $\varphi_2(u,v) = \dfrac{u}{v}$, $\varphi_3(u, v) = u + v$, $g(x,y,z) = f'_x + f'_y + f'_z - 1$.

К14.2. $f(x,y) = \dfrac{y}{\left(x^2 - y^2\right)^5}$, $M_0 = (2, -1)$, $\varphi_1(u, v) = e^u \cdot \sin v$, $\varphi_2(u, v) = \operatorname{tg} u \cdot v^5$, $g(x,y) = \dfrac{f'_x}{x} + \dfrac{f'_y}{y} - \dfrac{f}{y^2}$.

К14.3. $f(x,y) = x^y$, $M_0 = (2, 3)$, $\varphi_1(u, v) = \arcsin(u \cdot v)$, $\varphi_2(u,v) = \operatorname{ctg}\dfrac{u}{v}$, $g(x,y) = y \cdot f''_{xy} - (1 + y\ln x)f'_x$.

К14.4. $f(x,y) = x \cdot e^{\frac{x}{y}}$, $M_0 = (1, 2)$, $\varphi_1(u, v) = \ln(\operatorname{arctg}^2(uv) + 3)$, $\varphi_2(u,v) = e^{\operatorname{arcctg}(uv)}$, $x^2 f''_{xx} + 2xyf''_{xy} + y^2 f''_{yy} = g(x,y)$.

К14.5. $f(x,y) = \cos y + (y - x)\sin y$, $M_0 = \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right)$, $\varphi_1(u,v) = \operatorname{arctg}\dfrac{u}{u+v}$, $\varphi_2(u,v) = \left(\dfrac{u}{v}\right)^{uv}$, $g(x,y) = (x - y)f''_{xy} - f'_y$.

К14.6. $f(x,y) = 4e^{-2y} + (2x + 4y - 3)e^{-y} - x - 1$, $M_0 = (2, 1)$, $\varphi_1(u,v) = \ln\left(u^2 + v^2\right)$, $\varphi_2(u,v) = u \cdot \sin^2 v$, $g(x,y) = (f'_x)^2 + f'_y + x + f$.

К14.7. $f(x,y,z,t) = \dfrac{x-y}{z-t} + \dfrac{t-x}{y-z}$, $M_0 = (1, 2, 3, 4)$, $\varphi_1(u,v) = \dfrac{u^2}{v^2}$, $\varphi_2(u, v) = u \cdot v$, $\varphi_3(u,v) = e^{uv}$, $\varphi_4(u, v) = \ln(u - v)$, $g(x,y,z,t) = f'_x + f'_y + f'_z + f'_t$.

К14.8. $f(x,y) = e^{xy}$, $M_0 = (0, 2)$, $\varphi_1(u,v) = \sqrt{2uv + u^2}$, $\varphi_2(u,v) = \cos(u + v)$, $g(x,y) = x^2 f''_{xx} - 2xyf''_{xy} + y^2 f''_{yy} + 2xyf$.

К14.9. $f(x,y)=\ln\left(x+e^{-y}\right)$, $M_0=(3,4)$, $\varphi_1(u,v)=\dfrac{u}{v}+\dfrac{v}{u}$, $\varphi_2(u,v)=u^3+3u^2v+v^3$, $g(x,y)=f'_x\cdot f''_{xy}-f'_y\cdot f''_{xx}$.

К14.10. $f(x,y,z)=\ln\left(x^3+y^3+z^3-3xyz\right)$, $M_0=(5,4,6)$, $\varphi_1(u,v)=\dfrac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}$, $\varphi_2(u,v)=\sqrt[3]{u^2+1}$, $\varphi_3(u,v)=arctg\,\dfrac{u+1}{v}$, $g(x,y,z)=f'_x+f'_y+f'_z-\dfrac{3}{x+y+z}$.

Ответы, указания, решения

Т14.1. Пусть функция $f(x,y)$ определена на двумерном промежутке X, $M_0=(x_0,y_0)\in X$. Возьмем такую точку $M=(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ из X, что $[x_0;x_0+\Delta x]\times[y_0;y_0+\Delta y]\subseteq X$. Определим выражение W следующим образом:

$$W=(f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0))-(f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)).$$

Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(x)=f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)$ на отрезке $[x_0;x_0+\Delta x]$. По теореме 10.2 существует такая точка $x_1\in(x_0;x_0+\Delta x)$, что

$\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)=\varphi'(x_1)\Delta x$. Но $\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)=W$, $\varphi'(x_1)=f'_x(x_1,y_0+\Delta y)-f'_x(x_1,y_0)$.

Поэтому $W=\left(f'_x(x_1,y_0+\Delta y)-f'_x(x_1,y_0)\right)\Delta x$.

Аналогично теорему 10.2 можно применить к функции $\psi(y)=f'_x(x_1,y)$ на отрезке $[y_0;y_0+\Delta y]$: существует такая точка $y_1\in(y_0;y_0+\Delta y)$, что $\psi(y_0+\Delta y)-\psi(y_0)=\psi'(y_1)\Delta y$ или $f'_x(x_1,y_0+\Delta y)-f'_x(x_1,y_0)=f''_{xy}(x_1,y_1)\Delta y$. Отсюда $W=f''_{xy}(M_1)\Delta x\Delta y$, $M_1=(x_1,y_1)$. Таким же способом можно показать, что для некоторой точки $M_2=(x_2,y_2)$ из $(x_0;x_0+\Delta x)\times(y_0;y_0+\Delta y)$ $W=f''_{yx}(x_2,y_2)\Delta x\Delta y$. Таким образом, $f''_{xy}(M_1)=f''_{yx}(M_2)$. Но $M_1\to M_0$, $M_2\to M_0$, при $M\to M_0$ вдоль X. Поэтому ввиду непрерывности функций f''_{xy} и f''_{yx} $f''_{xy}(M_1)\to f''_{xy}(M_0)$, $f''_{yx}(M_2)\to f''_{yx}(M_0)$ при $M\to M_0$ вдоль X. Отсюда следует равенство $f''_{xy}(M_0)=f''_{yx}(M_0)$ для любой точки $M_0\in X$.

Т14.2. Если положить $g(x) = f(x, 0)$, то $g(x) \equiv 0$. Поэтому $g'(0) = f'_x(M_0) = 0$. Аналогично показывается, что $f'_y(M_0) = 0$. Если бы функция $f(M)$ была дифференцируема в точке M_0, то

$$f(M) - f(M_0) - df(M_0, \Delta M) =$$

$$= f(M) - f(M_0) - \left(f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y\right) = f(M) - f(M_0) =$$

$$= f(M) = o(\rho(M, M_0)) \text{ при } M \to M_0.$$

В частности, если $M_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, то $\{M_n\} \to M_0$. Но $f(M_n) = \frac{1}{2}$, что и означает, что функция $f(M)$ даже не является б. м. в точке M_0. Противоречие.

Т14.3. Указание: доказательство аналогично решению задачи Т7.2.

Т14.4. Пусть $M = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$, $\Delta t = t - t_0$, $dx_i = d\varphi_i(t) = \varphi_i'(t)\Delta t$, $\alpha = o(\rho(M, M_0))$ при $M \to M_0$. Тогда

$$y'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t\to t_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\Delta t} = \lim_{t\to t_0} \frac{df(M_0, \Delta M) + \alpha}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{t\to t_0} \frac{f'_{x_1}(M_0)\cdot dx_1 + \ldots + f'_{x_n}(M_0)\cdot dx_n + \alpha}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{t\to t_0} \frac{f'_{x_1}(M_0)\cdot \varphi_1'(t_0)\Delta t + \ldots + f'_{x_n}(M_0)\cdot \varphi_n'(t_0)\Delta t + \alpha}{\Delta t} =$$

$$= f_{x_1}(M_0)\cdot \varphi_1'(t_0) + \ldots + f_{x_n}(M_0)\cdot \varphi_n'(t_0) + \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\alpha}{\Delta t}.$$

Но $M \to (\varphi_1(t_0), \ldots, \varphi_n(t_0))$ при $t \to t_0$, поскольку функции $\varphi_i(t)$ непрерывны в точке t_0 и, следовательно, $\lim\limits_{t\to t_0} \varphi_i(t) = \varphi_i(t_0)$. Поэтому

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\alpha}{\Delta t} = \lim_{M\to M_0} \left(\frac{\alpha}{\rho(M_0, M)} \cdot \frac{\rho(M_0, M)}{\Delta t}\right) =$$

$$= \lim_{M\to M_0} \frac{\alpha}{\rho(M_0, M)} \cdot \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\sqrt{(\Delta\varphi_1(t_0, \Delta t))^2 + \ldots + (\Delta\varphi_n(t_0, \Delta t))^2}}{\Delta t} =$$

$$= 0 \cdot \lim_{t\to t_0} \sqrt{\left(\frac{\varphi_1(t) - \varphi_1(t_0)}{t - t_0}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\varphi_n(t) - \varphi_n(t_0)}{t - t_0}\right)^2} =$$

$$= 0 \cdot \sqrt{(\varphi_1'(t_0))^2 + \ldots + (\varphi_n'(t_0))^2} = 0.$$

Т14.5. Для упрощения индексации ограничимся рассмотрением случая $n = k = 2$, ничем принципиально не отличающимся от общего случая. Итак, пусть $x_1 = \varphi_1(z, t)$, $x_2 = \varphi_2(z, t)$, $T_0 = (z_0, t_0)$. Рассмотрим вспомогательные функции одной переменной z: $r_1 = \varphi_1(z, t_0)$, $r_2 = \varphi_2(z, t_0)$, $g(z) = f(r_1(z), r_2(z))$. Очевидно, $r_i(z_0) = \varphi_i(T_0)$, $r_i'(z_0) = \varphi_{iz}'(T_0)$, $i = 1, 2$, $g(z) = y(z, t_0)$.

Применив теорему 14.3 к функции $g(z)$, получим:

$$y_z'(T_0) = g'(z_0) = f_{x_1}'(M_0) \cdot r_1'(z_0) + f_{x_2}'(M_0) \cdot r_2'(z_0) =$$

$$= f_{x_1}'(M_0) \cdot {\varphi_{1z}}'(T_0) + f_{x_2}'(M_0) \cdot {\varphi_{2z}}'(T_0).$$

Т14.6. Как и в решении задачи Т14.5, ограничимся случаем $n = k = 2$, сохранив смысл использованных в этом решении обозначений. Итак, пусть $y(T) = f(\varphi_1(T), \varphi_2(T))$. Тогда согласно следствию 14.2,

$$dy(T) = y_z'(T) \cdot dz + y_t'(T) \cdot dt = \left(f_{x_1}' \cdot {\varphi_{1z}}' + f_{x_2}' \cdot {\varphi_{2z}}'\right)dz + \left(f_{x_1}' \cdot {\varphi_{1t}}' + f_{x_2}' \cdot {\varphi_{2t}}'\right)dt =$$

$$= f_{x_1}'\left({\varphi_{1z}}'dz + {\varphi_{1t}}'dt\right) + f_{x_2}'\left({\varphi_{2z}}'dz + {\varphi_{2t}}'dt\right) = f_{x_1}'d\varphi_1 + f_{x_2}'d\varphi_2 = f_{x_1}'dx_1 + f_{x_2}'dx_2.$$

Т14.7. Обозначим $M_0 = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$, $\Delta M = (\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n)$. Предположим, что f линейна, т. е. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + b$. Тогда $f_{x_i}' = a_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и, следовательно,

$$df(M_0, \Delta M) = a_1\Delta x_1 + \ldots + a_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \Delta x_i .$$

Но $\Delta f(M_0, \Delta M) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(m_i + \Delta x_i) - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i m_i = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \Delta x_i$,

откуда $df(M_0, \Delta M) = \Delta f(M_0, \Delta M)$. Предположим теперь, что верно последнее равенство. Тогда $f(M_0 + \Delta M) - f(M_0) = f_{x_1}'(M_0)\Delta x_1 + \ldots + f_{x_n}'(M_0)\Delta x_n$. Если теперь положить $a_i = f_{x_i}'(M_0)$, $b = f(M_0)$, $x_i = m_i + \Delta x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b + a_1(x_1 - m_1) + \ldots + a_n(x_n - m_n)$, т. е. f — линейная функция.

Т14.8. В силу следствия 14.3 $dF(x, y, z) = F_x'dx + F_y'dy + F_z'dz$.

Но $dz = d\varphi(x, y) = \varphi_x'dx + \varphi_y'dy$. Отсюда

$$dF(x, y, z) = F_x'dx + F_y'dy + F_z'\varphi_x'dx + F_z'\varphi_y'dy = (F_x' + F_z' \cdot \varphi_x')\Delta x + (F_y' + F_z' \cdot \varphi_y')\Delta y.$$

По условию $dF \equiv 0$. Поэтому ввиду произвольности величин Δx, Δy, последнее тождество возможно только, если

$$\begin{cases} F'_x + F'_z \varphi'_x = 0; \\ F'_y + F'_z \varphi'_y = 0, \end{cases}$$

откуда при условии $F'_Z \neq 0$ следует, что $z'_x = \varphi'_x = -\dfrac{F'_x}{F'_z}$, $z'_y = \varphi'_y = -\dfrac{F'_y}{F'_z}$.

П14.21. Воспользуемся утверждением задачи Т14.8 для определения частных производных функции $\varphi(x, y)$. Для этого определим частные производные функции $F(x, y, z)$:

$F'_x = 12x^2 + 2yz - 4z$, $F'_y = -9y^2 + 2xz$, $F'_z = 2z + 2xy - 4x$. Далее,

$$\varphi'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{12x^2 + 2yz - 4z}{2z + 2xy - 4x}, \quad \varphi'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-9y^2 + 2xz}{2z + 2xy - 4x}.$$

Отсюда, с учетом того, что $z_0 = \sqrt{3}$, имеем:

$$\varphi'_x(M_0) = \varphi'_x(0{,}1) = -\frac{0 + \sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 0 - 0} = 1,$$

$$\varphi'_y(M_0) = \varphi'_y(0{,}1) = -\frac{-9 + 0}{2\sqrt{3} + 0 - 0} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Глава 15

Общая задача нелинейного программирования

В *гл. 5* описана общая задача условной оптимизации (5.1). Если конкретизировать вид множества планов X, то задача (5.1) приобретет специфические свойства, упрощающие ее решение. Это будет показано ниже на примере задачи нелинейного программирования. Но вначале сформулируем аналог леммы 10.1 в n-мерном пространстве.

Пусть функция $f(M)$ определена на множестве $X \subseteq Af^n$, содержащем точку M_0. Если M_0 — внутренняя точка множества X и все ее частные производные первого порядка в точке M_0 равны нулю, то M_0 называется стационарной точкой функции f на множестве X.

Лемма 15.1. Пусть функция $f(M)$ определена на множестве $X \subseteq Af^n$, M_0 — внутренняя точка множества X, в которой функция f имеет частные производные первого порядка. Если M_0 — локально-оптимальный план задачи (5.1), то M_0 — стационарная точка функции $f(M)$.

Доказательство. Поскольку $M_0 = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ — внутренняя точка множества X, являющаяся локально оптимальным планом задачи (5.1), то существует ее окрестность $N(M_0, \varepsilon)$, целиком содержащаяся в X, такая что M_0 — оптимальный план задачи

$$f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max \text{ (или min)}$$

на множестве планов $N(M_0, \varepsilon)$.

Выделим в окрестности $N(M_0, \varepsilon)$ n-мерный промежуток $Y = Y_1 \times \times Y_2 \times \ldots \times Y_n$ с внутренней точкой M_0 (существование такого промежутка следует из задачи T1.2). Для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ рассмотрим вспомогательную функцию одной переменной x_i $g(x_i) = f(m_1, \ldots, m_{i-1}, x_i, m_{i+1}, \ldots, m_n)$. Тогда точка $x_i = m_i$ является локально оптимальным планом задачи

$$g(x_i) \to \max \text{ (или min)}$$

на множестве планов Y_i.

Следовательно, по лемме 10.1 точка $x_i = m_i$ является стационарной точкой функции g на множестве Y_i, т. е. $g'(m_i) = 0$. Лемма доказана, поскольку

$$g'(m_i) = f'_{x_i}(m_1, \ldots, m_i, \ldots, m_n) = f'_{x_i}(M_0),\ i = 1, \ldots, n.$$

Задача условной оптимизации (5.1) с целевой функцией

$$f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max \text{ (или min)}, \tag{15.1}$$

в которой множество планов X состоит из точек, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0; \\ i = 1, 2, \ldots, m, \end{cases} \tag{15.2}$$

где $g_1, g_2, \ldots, g_m$ — непрерывные на Af^n функции, причем хотя бы одна из функций f, g_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ не является линейной, называется задачей нелинейного программирования (15.1)—(15.2).

Поскольку уравнение $g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge 0; \\ g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0, \end{cases}$$

то отсутствие равенств в системе (15.2) не ограничивает общности задачи (15.1)—(15.2).

Теорема 15.1. Если множество планов задачи (15.1)—(15.2) ограничено, функция $f(M)$ непрерывна на X и имеет все частные производные первого порядка в каждой внутренней точке множества X, то задача (15.1)—(15.2) имеет оптимальные планы, причем каждый из них является либо стационарной точкой функции f, либо граничной или изолированной точкой множества X.

Доказательство. В силу следствия 4.3 X — замкнутое множество. Поэтому по теореме 5.1 задача (15.1)—(15.2) имеет оптимальные планы. Пусть M^* — один из них. Если M^* не является ни граничной, ни изолированной точкой множества X, то M^* — внутренняя точка множества X (см. задачи Т3.3, Т3.4). Но тогда по лемме 15.1 M^* — стационарная точка функции f (поскольку каждый оптимальный план тем более является локально оптимальным). Теорема доказана.

Пример. Решить следующую задачу нелинейного программирования:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \to \min$$

$x_1^2 + x_2^2 \leq 4$.

Множество точек из Af^2, удовлетворяющих неравенству $x_1^2 + x_2^2 \leq 4$, ограничено. Поэтому в силу теоремы 15.1 оптимальные планы находятся среди граничных и стационарных точек (изолированных точек среди планов этой задачи нет). Поскольку граничные точки удовлетворяют уравнению окружности $x_1^2 + x_2^2 = 4$, то в каждой граничной точке функция f имеет следующий вид: $f = x_1^2 + (4 - x_1^2) = 4$.

Найдем стационарные точки функции f: $f'_{x_i} = 2x_i$, $i = 1{,}2$, т. е. точка $(0, 0)$ — единственная стационарная точка функции f, причем $f(0, 0) = = 0 < 4$. Поэтому $(0, 0)$ — оптимальный план исходной задачи.

Компьютерный раздел

Кнопка **while** подпанели **Программирование** (Programming) вызывает шаблон `while ▪` / `▪` оператора цикла с условием. На месте метки справа от `while` вводится логическое выражение цикла, а на месте нижней метки — блок операторов цикла (добавление меток в этом блоке осуществляется кнопкой **Add Line** подпанели **Программирование** (Programming)). Алгоритм работы оператора цикла с условием следующий. Вычисляется логическое выражение цикла, и в случае его истинности выполняется блок операторов цикла. Это повторяется до тех пор, пока логическое выражение цикла не примет ложное значение: в этом случае цикл завершает свою работу, блок операторов цикла пропускается и осуществляется переход к строке программного модуля, следующей за данным оператором цикла. Например, в результате выполнения программного модуля

```
     | s ← 0
     | n ← 3
c := | while n ≥ 1
     |    | s ← s + 1
     |    | n ← n − 1
     | s
```

переменная `c` примет значение 3.

Рассмотрим еще два примера использования оператора `while`:

```
Fact(n) :=  | $a \leftarrow 1$
            | while $n \ge 2$
            |     | $a \leftarrow a \cdot n$
            |     | $n \leftarrow n - 1$
            | $a$
```

$Fact(3) = 6$

$Fact(5) = 120$

```
f(n) :=  | $f \leftarrow n$
         | while 1
         |     | $f \leftarrow f \cdot (n - 1)$
         |     | $n \leftarrow n - 1$
         |     | return $f$ if $n = 1$
```

$f(3) = 6$

$f(5) = 120$

Алгоритм работы оператора `while` в первом примере для $n = 5$ следующий. В блок в качестве аргумента функции передается значение n (в данном случае число 5). Внутренней переменной a присваивается значение 1. Начинается выполнение цикла `while`. Проверяется условие $n \ge 2$ и, т. к. оно в данном случае истинно, выполняются операторы $a \leftarrow a \cdot n$ (для вычисления значения факториала) и $n \leftarrow n - 1$ (для принудительного уменьшения на единицу значения переменной n). Опять проверяется условие $n \ge 2$ и, т. к. оно опять истинно, то выполняются операторы $a \leftarrow a \cdot n$ и $n \leftarrow n - 1$. Этот процесс продолжается до момента достижения переменной n значения 1. Функции $Fact(n)$ присваивается последнее значение переменной a, равное $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Во втором примере определен бесконечный цикл `while`, а принудительный выход из цикла осуществляется с помощью оператора `return`.

Оператор `return` используется для выхода из блока и передачи значения из любой точки программного блока. Примеры использования оператора `return` приведены ниже:

```
f(x) :=  | return 1 if $x = 0$
         | $\frac{\sin(x)}{x}$ otherwise
```

```
f(1) = 0.841
f(0) = 1

        | return "One" if i = 1
g(i) := | return "Two" if i = 2
        | "No value !!!!" otherwise

g(1) =" One"
g(3) =" No value !!!!"
```

Подпанель **Логич** (Boolean) вызывается кнопкой ≤ панели **Математика** (Math). Пять первых кнопок служат для ввода знаков неравенств и знака логического равенства, пять последних кнопок служат для ввода операторов булевой логики. Каждая из кнопок вызывает шаблон с метками, на месте которых вводятся произвольные выражения — арифметические или логические, связанные знаком, изображенным на соответствующей кнопке.

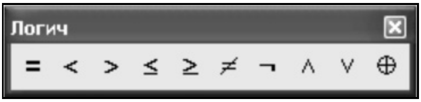


Рис. 15.1. Подпанели **Логич** (Boolean)

Рассмотрим два примера. Пусть требуется определить булеву функцию $f(x, y)$, которая принимает значения 1 или 0 в зависимости от того, равны или не равны между собой выражения $2x$ и $y - 1$. В нужном месте рабочего листа введите идентификатор функции `f(x, y)`, знак присваивания := и шаблон логического равенства ■ = ■. На месте меток введите выражения `2x` и `y - 1`:

```
f(x, y) := 2x = y - 1
```

Теперь очевидно, что `f(2, 5) = 1`, но `f(2, 6) = 0`.

Предположим, что требуется определить булеву функцию $f(x, y)$, которая принимает значения 1 или 0 в зависимости от того, удовлетворяет ли пара (x, y) по крайней мере одной из следующих систем уравнений и неравенств:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x + y \geq 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y < 0 \end{cases}.$$

Введите идентификатор функции `f(x, y)`, знак присваивания :=. Последовательные щелчки левой кнопкой мыши на значках ∧, ∨, ∧ приведут к появлению справа от знака := шаблона $\blacksquare \vee \blacksquare \vee \blacksquare \wedge \blacksquare$. Введите последовательно на месте меток выражения $x > 0$, $x + y \ge 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $y < 0$. Затем, выделив правым синим уголком выражение $x > 0 \wedge x + y \ge 1$, клавишей <)> возьмите его в скобки. Аналогично вводится выражение $x^2 + y^2 = 4 \wedge y < 0$. В результате получится:

$$f(x, y) := (x > 0 \wedge y + x \ge 1) \vee (x^2 + y^2 = 4 \wedge y < 0)$$

Теперь, например, $f(0, 1) = 0$, но $f(2, 0) = 1$.

Встроенная функция $\mathrm{rnd}(a)$ генерирует случайные числа, равномерно распределенные на отрезке [0; *a*]. Очевидно, что функция вида $\mathrm{rnd}(c - b) + b$ будет генерировать случайные числа, равномерно распределенные на отрезке [*b*; *c*].

Кнопка M<> подпанели **Матрицы** (Matrix) вызывает шаблон $\blacksquare^{\langle\blacksquare\rangle}$ для извлечения или задания столбца матрицы с предписанным номером: на месте нижней метки вводится идентификатор матрицы, а на месте верхней — номер столбца.

Например, если ORIGIN равна 1, а матрица T имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, то для извлечения второго столбца этой матрицы с помощью кнопки M<> в нужном месте рабочего листа введите выражение $T^{\langle 2 \rangle}$. После нажатия клавиши <=> получите $T^{\langle 2 \rangle} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Задачи для самостоятельного решения

Общая формулировка задач П15.1—П15.21

Найти оптимальные планы и оптимальные значения целевых функций.

П15.1.

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 9xy + 27 \to \max$$
$$\begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le 3. \end{cases}$$

П15.2. $$f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 1 \to \max$$
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 3. \end{cases}$$

П15.3. $$f(x,y) = 3 - 2x^2 - xy - y^2 \to \min$$
$$\begin{cases} x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x. \end{cases}$$

П15.4. $$f(x,y) = 10 + 2xy - y^2 \to \max$$
$$0 \leq y \leq 4 - x^2.$$

П15.5. $$f(x,y) = x^2 + xy - 2 \to \min$$
$$4x^2 - 4 \leq y \leq 0.$$

П15.6. $$f(x,y) = 2x^2y - x^3y - x^2y^2 \to \min$$
$$\begin{cases} x + y \leq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

П15.7. $$f(x,y) = 2x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4x \to \max$$
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 2x \leq y \leq 3. \end{cases}$$

П15.8. $$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - xy \to \max$$
$$2x^2 \leq y \leq 8.$$

П15.9. $$f(x,y) = x^2y \to \max$$
$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

П15.10. $$f(x,y) = 2x^2 + y^2 \to \max$$
$$x^2 + y^2 \leq 9.$$

П15.11.
$$f(x,y)=x^2-y^2\to\min$$
$$x^2+y^2\le 1.$$

П15.12.
$$f(x,y)=\sin x+\sin y+\sin(x+y)\to\min$$
$$\begin{cases}0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\\ 0\le y\le\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

П15.13.
$$f(x,y)=x^3+y^3-3xy\to\max$$
$$\begin{cases}0\le x\le 2\\ -1\le y\le 2.\end{cases}$$

П15.14.
$$f(x,y)=x^2y(4-x-y)\to\min$$
$$\begin{cases}x\ge 0\\ y\ge 0\\ x+y\le 6.\end{cases}$$

П15.15.
$$f(x,y)=\sin x+\sin y-\sin(x+y)\to\max$$
$$\begin{cases}x+y\le 2\pi\\ x\ge 0\\ y\ge 0.\end{cases}$$

П15.16.
$$f(x,y)=x^2-y^2\to\min$$
$$x^2+y^2\le 2x.$$

П15.17.
$$f(x,y)=x^2-2y^2\to\min$$
$$x^2+y^2\le 4y.$$

П15.18.
$$f(x,y)=y^4-x^4\to\min$$
$$x^2+y^2\le 9.$$

П15.19.
$$f(x,y)=y^4-x^4\to\max$$
$$x^2+y^2\le 4.$$

П15.20.
$$f(x, y) = x + 3y \to \min$$
$$\begin{cases} x + y \le 6 \\ x + 4y \ge 4 \\ y \le 2. \end{cases}$$

П15.21.
$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y \to \min$$
$$\begin{cases} -x - 3 \le y \le 0 \\ x \le 0. \end{cases}$$

Общая формулировка задач К15.1—15.11

Построить на координатной плоскости области, соответствующие множествам планов *X* задач К5.1—К5.11.

Ответы, указания, решения

П15.21. Множество планов *X* изображено в виде треугольника на рис. 15.2.

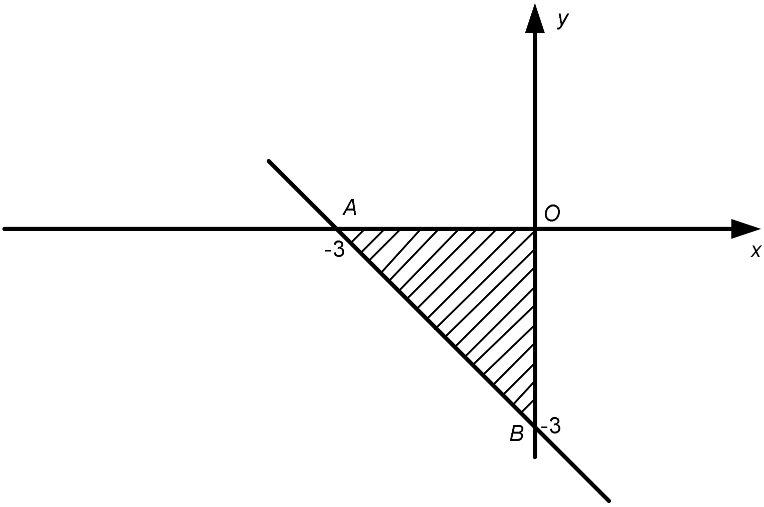


Рис. 15.2. Множество планов задачи **П15.21**

Выясним существование стационарных точек внутри данной области: $f'_x(x,y) = 2x - y + 1$, $f'_x(x,y) = 2x - y + 1$, $\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$. Итак, стационарная точка $M_1 = (-1, -1)$ является внутренней точкой множества планов, причем $f(M_1) = -1$.

Исследуем теперь функцию f в граничных точках множества планов X. На отрезке OB $x = 0$, откуда $g(y) = f(0, y) = y^2 + y$. Таким образом, необходимо решить следующую задачу условной оптимизации функции одной переменной:

$$\begin{gathered} g(y) = y^2 + y \to \min \\ -3 \le y \le 0. \end{gathered} \tag{15.3}$$

Найдем стационарные точки: $g'(y) = 2y + 1 = 0$, $y = -\frac{1}{2}$, $g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$.

В граничных точках отрезка [–3; 0] значения функции $g(y)$ равны: $g(-3) = 6$ и $g(0) = 0$. Таким образом, оптимальным планом задачи (15.3) является точка $y = -\frac{1}{2}$, которой соответствует точка $M_2 = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$ из множества X. Отметим также, что $f(M_2) = g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$.

На отрезке OA $y = 0$, откуда $t(x) = f(x, 0) = x^2 + x$, т. е. необходимо решить следующую задачу условной оптимизации функции одной переменной:

$$\begin{gathered} t(x) = x^2 + x \to \min \\ -3 \le x \le 0. \end{gathered} \tag{15.4}$$

Найдем стационарные точки: $t'(x) = 2x + 1 = 0$, $x = -\frac{1}{2}$, $t\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$.

В граничных точках отрезка [–3; 0] значения функции $t(x)$ равны: $t(-3) = 6$ и $t(0) = 0$. Таким образом, оптимальный план задачи (15.4) — это точка $x = -\frac{1}{2}$, которой соответствует точка $M_3 = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ из множества X. Отметим также, что $f(M_3) = t\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$.

На отрезке AB $y = -x - 3$, откуда

$r(x) = f(x, -x - 3) = x^2 + (-x - 3)^2 - x(-x - 3) + x + (-x - 3) = 3x^2 + 9x + 6$,

т. е. необходимо решить следующую задачу условной оптимизации функции одной переменной:

$$\begin{aligned} &r(x) = 3x^2 + 9x + 6 \to \min \\ &-3 \le x \le 0 \end{aligned} \tag{15.5}$$

Найдем стационарные точки: $r'(x) = 6x + 9 = 0$, $x = -\frac{3}{2}$, $r\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}$.

В граничных точках отрезка $[-3; 0]$ значения функции $r(x)$, фактически были уже найдены и равны $r(-3) = 6$. Таким образом, оптимальный план задачи (15.5) — это точка $x = -\frac{3}{2}$, которой соответствует точка $M_4 = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ из множества X, причем $f(M_4) = r\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}$.

Сравнивая все полученные значения функции f, заключаем, что наименьшее оптимальное значение функции равно -1, а оптимальным планом является точка $M_1 = (-1, -1)$.

К15.11. Алгоритм решения задачи с помощью Mathcad следующий.

Задать число N планов, которые будут изображены в виде точек на координатной плоскости, а также задать приблизительные диапазоны $[x_{\min}; x_{\max}]$ и $[y_{\min}; y_{\max}]$, в которых могут изменяться координаты точек, впоследствии генерируемые функцией `rnd`:

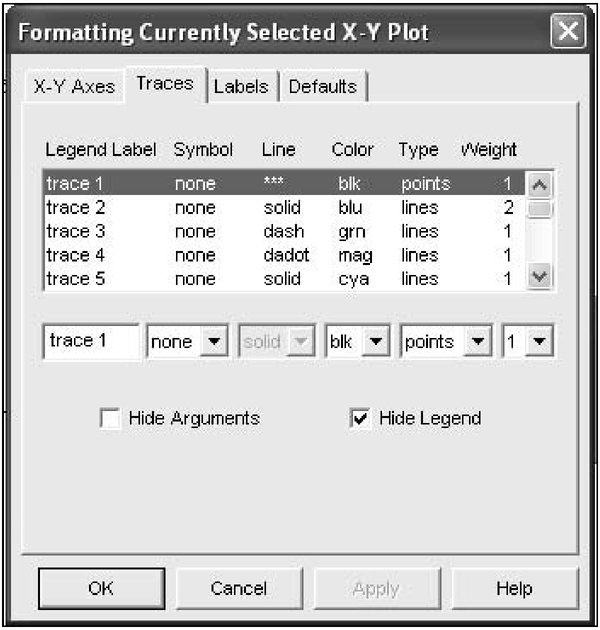
```
ORIGIN := 1      N := 10000

xmax := 10     xmin := -5     ymax := 10     ymin := -5
```

Сформировать матрицу `P`, состоящую из N строк и двух столбцов, i-я строка которой будет содержать генерируемые функцией `rnd` координаты (x_1, x_2) i-ой точки, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} 13x_1 + 6x_2 \le 90 \\ 8x_1 + 11x_2 \le 88 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}:$$

```
$P :=$
    for $i \in 1..N$
        $x_1 \leftarrow rnd(\mathrm{xmax} - \mathrm{xmin}) + \mathrm{xmin}$
        $x_2 \leftarrow rnd(\mathrm{ymax} - \mathrm{ymin}) + \mathrm{ymin}$
        while $0 = (8 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2 \le 88) \cdot (13 \cdot x_1 + 6x_2 \le 90) \cdot (x_1 \ge 0) \cdot (x_2 \ge 0)$
            $x_1 \leftarrow rnd(\mathrm{xmax} - \mathrm{xmin}) + \mathrm{xmin}$
            $x_2 \leftarrow rnd(\mathrm{ymax} - \mathrm{ymin}) + \mathrm{ymin}$
        $P_{i,1} \leftarrow x_1$
        $P_{i,2} \leftarrow x_2$
    $P$
```

Изобразить множество планов на координатной плоскости. Для этого в нужном месте рабочего листа ввести шаблон декартового графика клавишей <@>. В рамке под осью абсцисс на месте соответствующей метки ввести $P^{<1>}$, а на месте соответствующей метки слева от оси ординат — $P^{<2>}$. Установить границы `xmin`, `xmax` изменения координаты x_1 и границы `ymin`, `ymax` изменения координаты x_2.



Legend Label	Symbol	Line	Color	Type	Weight
trace 1	none	***	blk	points	1
trace 2	none	solid	blu	lines	2
trace 3	none	dash	grn	lines	1
trace 4	none	dadot	mag	lines	1
trace 5	none	solid	cya	lines	1

trace 1 | none | solid | blk | points | 1

☐ Hide Arguments

☑ Hide Legend

Рис. 15.3. Диалоговое окно
Formatting Currently Selected X-Y Plot

Произвести настройку графика с помощью диалогового окна **Formatting Currently Selected X-Y Plot**, установив параметры на вкладке **Traces** так, как это показано на рис. 15.3.

После нажатия клавиши <Enter> получится искомое изображение, показанное на рис. 15.4.

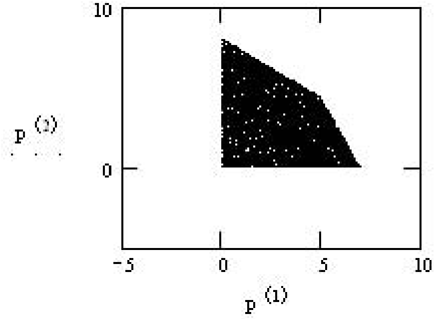
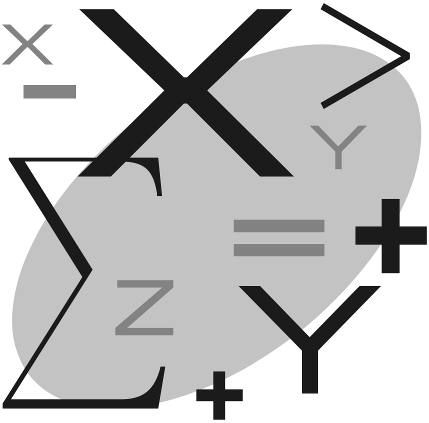


Рис. 15.4. Множество планов задачи **К15.11**



ЧАСТЬ III

Интегральное исчисление

Глава 16

Неопределенный интеграл

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на промежутке X, если для любого $x \in X$ верно $F'(x) = f(x)$.

> **Примеры.** Функция $F(x) = \ln|x|$ является первообразной для функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на промежутке $(-\infty; 0)$ и на промежутке $(0; +\infty)$. Действительно, при $x > 0$ $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, а при $x < 0$
>
> $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$.
>
> Функция $F(x) = e^x$ является первообразной для функции e^x на промежутке $X = (-\infty; +\infty)$, т. к. $(e^x)' = e^x$. Очевидно, что для любой константы c функция $e^x + c$ тоже является первообразной для функции e^x на промежутке X.

Утверждение 16.1. Пусть $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ на промежутке X. Тогда любая другая первообразная для $f(x)$ на промежутке X будет иметь вид $F(x) + c$, где c — некоторая константа.

Доказательство утверждения дано в задаче Т16.1.

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на промежутке X называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$; при этом $f(x)$ называется подынтегральной функцией, а $f(x)dx$ — подынтегральным выражением. Согласно утверждению 16.1, $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F(x)$ — любая первообразная для функции $f(x)$ на промежутке X, а C пробегает множество всех действительных чисел.

Иногда под $\int f(x)dx$ понимается не совокупность всех первообразных для функции $f(x)$, а произвольный элемент из этой совокупности, т. е.

произвольная первообразная для $f(x)$. Подобные ситуации будут оговариваться особо.

Итак, операция нахождения функции $F(x)$ по ее производной означает нахождение неопределенного интеграла от $f(x)$ и потому называется интегрированием. В силу исторических традиций под знаком интеграла пишется не только сама подынтегральная функция, а ее произведение на dx. С одной стороны, этим указывается переменная, относительно которой вычисляется интеграл: $\int xydx = \frac{x^2y}{2} + C$, $\int xydy = \frac{xy^2}{2} + C$.

С другой стороны, целесообразность такой записи раскрывается в методе подстановки (см. теорему 16.2).

Утверждение 16.2. (простейшие свойства неопределенного интеграла).

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.
2. В этих равенствах под $\int f(x)dx$ понимается произвольная первообразная для $f(x)$.
3. Если функция $F(x)$ дифференцируема на промежутке X, то на этом промежутке $\int F'(x)dx = F(x) + C$, $\int dF(x) = F(x) + C$.

Доказательство утверждения дано в задаче T16.2.

Утверждение 16.2, в частности, означает, что последовательное применение в любом порядке операций интегрирования и дифференцирования восстанавливает функцию, т. е. указанные операции взаимнообратные.

Таблица основных неопределенных интегралов.

1. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, a \neq -1.$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$
4. $\int \sin xdx = -\cos x + C.$
5. $\int \cos xdx = \sin x + C.$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

8. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \left[\begin{array}{l} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{array}\right.$.

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\begin{array}{l} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{array}\right.$.

10. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C,\ a \neq 0.$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C,\ a \neq 0.$

В этой таблице отсутствуют интегралы от некоторых основных элементарных функций, поскольку они вычисляются с помощью основных методов интегрирования. Отметим также принципиальную разницу между операциями дифференцирования и интегрирования элементарных функций. Тогда как результатом дифференцирования элементарной функции является по-прежнему элементарная функция (см. следствие 8.1), то первообразные для большинства элементарных функций уже не являются элементарными функциями, при этом соответствующие интегралы называются "неберущимися". К их числу, например, относятся интегралы Френеля $\int \sin(x^2)dx$, $\int \cos(x^2)dx$, интеграл Пуассона $\int e^{-x^2}dx$, интегралы $\int \frac{1}{\ln x}dx$, $\int \frac{\sin x}{x}dx$ и т. д.

Рассмотрим основные методы интегрирования.

I. Метод непосредственного интегрирования основан на следующей теореме.

Теорема 16.1. Пусть k — произвольное число, отличное от нуля. Функция $f(x)$ имеет первообразную на промежутке X, если и только если функция $k \cdot f(x)$ имеет первообразную на X; при этом $\int k \cdot f(x)dx = k\int f(x)dx$.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют первообразные на промежутке X, то сумма этих первообразных является первообразной для функции $f(x) + g(x)$ на промежутке X.

Доказательство теоремы дано в задаче Т16.3.

Второе утверждение теоремы 16.1 удобно записать в символьном виде:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx .$$

Это равенство не следует воспринимать буквально — оно просто заменяет соответствующую формулировку теоремы 16.1.

Пример.

$$\int\left(\frac{7x^2+x+2}{x}-\frac{5x}{x\sqrt{x}}+2\sin^2\frac{x}{2}\right)dx=\int\left(7x+1+\frac{2}{x}-\frac{5}{\sqrt{x}}+1-\cos x\right)dx=$$

$$=7\int xdx+2\int dx+2\int\frac{dx}{x}-5\int\frac{dx}{\sqrt{x}}-\int\cos xdx=$$

$$=\frac{7}{2}x^2+2x+2\ln|x|-10\sqrt{x}-\sin x+C.$$

II. Метод подстановки основан на следующей теореме.

Теорема 16.2. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке X, а функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема на промежутке T и $T \xrightarrow{\varphi} X$. Если $F(x)$ является первообразной для $f(x)$ на промежутке X, то $F(\varphi(t))$ является первообразной для функции $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ на промежутке T.

Обратно, если $F(\varphi(t))$ является первообразной для функции $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ на промежутке T и $\varphi'(t)$ непрерывна на T и отлична от нуля в каждой внутренней точке промежутка T, то $F(x)$ является первообразной для $f(x)$ на промежутке X.

Доказательство. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то $F'(x) = f(x) = f(\varphi(t))$. Но тогда по теореме 8.2

$$(F(\varphi(t)))' = F'(x)\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t),$$

т. е. $F(\varphi(t))$ — первообразная для функции $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$.

Пусть теперь $y(t) = F(\varphi(t))$ — первообразная для функции $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$, т. е. $y'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$. Функция $\varphi'(t)$ не может менять знак на промежутке T, поскольку в противном случае в некоторой внутренней точке промежутка T $\varphi'(t)$ была бы равна нулю (следствие 4.4). Поэтому либо $\varphi'(t) > 0$ на T, либо $\varphi'(t) < 0$ на T. В любом случае $\varphi(t)$ монотонна на T (следствия 11.3, 11.4). Отсюда в силу следствия 4.6 $\varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \varphi^{-1}(x)$, причем $(\varphi^{-1}(x))' = \dfrac{1}{\varphi'(t)}$ по теореме 8.3.

Но $y(\varphi^{-1}(x)) = F\left(\varphi\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right) = F(x)$. Поэтому по теореме 8.2

$$F'(x) = (y(\varphi^{-1}(x)))' = y'(t)\cdot(\varphi^{-1}(x))' = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x).$$

Теорема доказана.

Таким образом, знание одной из двух первообразных, о которых идет речь в теореме 16.2, позволяет найти другую. Ввиду этого алгоритм метода подстановки можно схематично выразить двумя способами (в зависимости от того, какая из первообразных известна):

$$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = \int f(\varphi(t))\,d\varphi(t) \overset{\varphi(t)=x}{=} \int f(x)dx = F(x) + C \overset{x=\varphi(t)}{=} F(\varphi(t)) + C;$$

$$\int f(x)dx \overset{x=\varphi(t)}{=} \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C \overset{t=\varphi^{-1}(x)}{=} F(x) + C.$$

Примеры. Вычислим интеграл $\int \operatorname{tg} t dt$ на промежутке $T = \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$:

$$\int \operatorname{tg} t dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} dt = \int \frac{(-\cos t)'}{\cos t} dt = -\int \frac{1}{\cos t} d\cos t \overset{\cos t = x}{=}$$
$$= -\int \frac{1}{x} dx = -\ln|x| + C \overset{x=\cos t}{=} -\ln|\cos t| + C.$$

Вычислим интеграл $\int \sqrt{1-x^2}dx$ на промежутке $X = [-1; 1]$,

положив $\varphi(t) = \sin t$, $t \in T = \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$

(очевидно $T \xrightarrow{\varphi} X$, $\varphi'(t) \neq 0$ при $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$):

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx \overset{x=\sin t}{=} \int\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int\cos^2 t dt =$$
$$= \int\frac{1+\cos(2t)}{2}dt = \frac{1}{2}\left(\int dt + \int\cos(2t)\,dt\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin(2t)}{2}\right) + C \overset{t=\arcsin x}{=} \frac{1}{2}\left(\arcsin x + \frac{\sin(2\arcsin x)}{2}\right) + C.$$

III. Метод интегрирования по частям основан на следующей теореме.

Теорема 16.3. Если $F(x)$ является первообразной для функции $v(x)\cdot u'(x)$ на промежутке X, то $u(x)\cdot v(x) - F(x)$ является первообразной для функции $u(x)\cdot v'(x)$ на промежутке X.

Доказательство теоремы дано в задаче Т16.4.

Утверждение теоремы 16.3 удобно записывать в символьном виде:

$\int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot u'(x)dx$ или $\int udv = uv - \int vdu$.

Эти равенства не следует воспринимать буквально — они просто заменяют словесную формулировку теоремы 16.3.

Теорема 16.3 позволяет провести частичное интегрирование, т. е. свести вычисление исходного интеграла $\int u\cdot v'dx$ к другому интегралу — $\int v\cdot u'dx$, который должен быть проще исходного. Поэтому удачный выбор сомножителя $v'(x)dx = dv(x)$ в подынтегральном выражении — критерий эффективности этого метода.

Пример. Вычислим интеграл $\int x\cdot\sin x dx$. Если $v'(x)dx = xdx = d\frac{x^2}{2}$, то

$$\int x\cdot\sin x dx = \int\sin x d\frac{x^2}{2} = \frac{\sin x\cdot x^2}{2} - \int\frac{x^2}{2}d\sin x = \frac{x^2\sin x}{2} - \int\frac{x^2\cos x}{2}dx,$$

т. е. интеграл справа оказался сложнее первоначального. Но если $v'(x)dx = \sin x dx = d(-\cos x)$, то дальнейшие вычисления быстро приводят к результату:

$$\int x\cdot\sin x dx = \int xd(-\cos x) = -x\cos x - \int -\cos x dx =$$
$$= -x\cos x + \int\cos x dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Задачи для самостоятельного решения

Т16.1. Доказать утверждение 16.1.

Т16.2. Доказать утверждение 16.2.

Т16.3. Доказать теорему 16.1.

Т16.4. Доказать теорему 16.3.

Т16.5. Доказать, что функция

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 \ \text{при}\ x > 0; \\ 0 \ \text{при}\ x = 0; \\ -1 \ \text{при}\ x < 0 \end{cases}$$

имеет первообразную на любом промежутке, не содержащем нулевую точку, и не имеет первообразной на любом промежутке, содержащем нулевую точку.

Т16.6. Пусть $F(x)$ — произвольная первообразная для функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty;\ +\infty)$. Доказать или опровергнуть следующие утверждения:

а) если $f(x)$ — периодическая функция, то и $F(x)$ — периодическая;

б) если $f(x)$ — нечетная функция, то $F(x)$ — четная функция;

в) если $f(x)$ — четная функция, то $F(x)$ — нечетная функция.

Т16.7. Требуется вычислить интеграл $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$ на промежутке $X =$ $= [-1;\ 1]$. Допустимы ли для этой цели подстановки:

а) $x = 2\sin t$ на промежутке $T = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; б) $x = \sin t$ на промежутке $T = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; в) $x = -\cos t$ на промежутке $T = [0; \pi]$; г) $x = \cos t$ на промежутке $T = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$?

Т16.8. Вычислить интеграл $\int \frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}}\,dx$,

где $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ — многочлен степени n.

Т16.9. Получить для интеграла I_n рекуррентную формулу, выражающую I_n через аналогичный интеграл I_k при $k < n$ (n — натуральное число, $n > 2$):

а) $I_n = \int x^n e^{ax} dx$, $a \neq 0$; б) $I_n = \int \sin^n x dx$.

Общая формулировка задач П16.1—П16.21

Вычислить интегралы на некотором промежутке X из области определения подынтегральной функции (к интегралам из серии а) применить метод подстановки, к интегралам из серии б) — метод интегрирования по частям).

П16.1. а) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$; б) $\int \ln(2x+3) dx$.

П16.2. а) $\int \frac{3x}{2x^2+1} dx$; б) $\int x \cdot \cos(x+6) dx$.

П16.3. а) $\int e^x \cdot \sin\left(2-3e^x\right) dx$; б) $\int \arcsin(5x) dx$.

П16.4. а) $\int \frac{\cos(3x)}{\sqrt{\sin(3x)-2}} dx$; б) $\int x \cdot e^{-6x} dx$.

П16.5. а) $\int \frac{\sqrt[5]{\ln x + 1}}{x} dx$; б) $\int (3x+2) \cdot \sin(4x) dx$.

П16.6. а) $\int \frac{x}{5^{x^2+2}} dx$; б) $\int x \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{2} dx$.

П16.7. а) $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$; б) $\int (2x+5) \cdot 3^{-x} dx$.

П16.8. а) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{3-2e^{2x}}} dx$; б) $\int \arccos(7x) dx$.

П16.9. а) $\int \frac{dx}{\sin^2(7x) \cdot \sqrt{\operatorname{ctg}(7x)}}$; б) $\int x^4 \cdot \ln x \, dx$.

П16.10. а) $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right) \operatorname{arctg}^3 x}$; б) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$.

П16.11. а) $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x+3}}$; б) $\int (x+1)\cdot \sin\frac{x}{3}\,dx$.

П16.12. а) $\int \sqrt{e^x-1}\,dx$; б) $\int x\cdot \operatorname{arcctg} x\,dx$.

П16.13. а) $\int \sqrt{9-x^2}\,dx$; б) $\int x\ln(x+2)dx$.

П16.14. а) $\int \frac{3x-5}{(x+1)^{100}}\,dx$; б) $\int x\cdot 2^{-3x}dx$.

П16.15. а) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$; б) $\int \arcsin\frac{x}{2}\,dx$.

П16.16. а) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}\,dx$; б) $\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx$.

П16.17. а) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx$; б) $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$.

П16.18. а) $\int (3e^x-1)^{10} e^x\,dx$; б) $\int \arccos(2x)\,dx$.

П16.19. а) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$; б) $\int (3x-5)\cdot \sin\frac{x}{4}\,dx$.

П16.20. а) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int x^2\cdot \operatorname{arcctg} x\,dx$.

П16.21. а) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$; б) $\int \sin(\ln x)\,dx$.

Ответы, указания, решения

Т16.1. Указание: утверждение 16.1 является переформулировкой утверждения задачи Т11.2.

Т16.2. Указание: воспользоваться определением первообразной.

Т16.3. Пусть $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, т. е. $\int f(x)dx = F(x)+C$, $k\int f(x)dx = kF(x)+C_1$. Так как $(kF(x))' = kf(x)$, то $kF(x)$ — первообразная для $kf(x)$, т. е. $\int kf(x)dx = kF(x) + C_2$. Отсюда $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, поскольку C_1 и C_2 пробегают все действительные числа.

Пусть теперь $F(x)$ — первообразная для $kf(x)$. Тогда $\frac{1}{k}F(x)$ — первообразная для $f(x)$. Дальнейшие рассуждения аналогичны предыдущим.

Эта часть теоремы 16.1 следует из определения первообразной и теоремы 8.1.

T16.4. По теореме 8.1
$(u(x)v(x) - F(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - v(x)u'(x) = u(x)v'(x)$, т. е.
$u(x)v(x) - F(x)$ — первообразная для функции $u(x)v'(x)$. Теорема доказана.

T16.5. Пусть $F(x)$ — первообразная для функции $\operatorname{sign} x$ на промежутке $<a; b>$. Если $b < 0$, то $F(x) = -x + c_1$; если $a > 0$, то $F(x) = x + c_2$. Предположим теперь, что промежуток $<a; b>$ содержит нулевую точку и функция $F(x)$ дифференцируема в этой точке. Так как $F(x)$ непрерывна в нулевой точке (см. задачу T7.2), то

$$\lim_{x\to 0+} F(x) = \lim_{x\to 0-} F(x) = F(0).$$

Но $\lim\limits_{x\to 0+} F(x) = c_2$, $\lim\limits_{x\to 0-} F(x) = c_1$, т. к. $F(x) = \begin{cases} -x + c_1 & \text{при } x \in < a;0), \\ x + c_2 & \text{при } x \in (0; b >. \end{cases}$

Следовательно, $c_1 = c_2 = c$, $F(0) = c$.

Далее, $F'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{x}{x} = 1$, $F'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0-} \frac{-x}{x} = -1$, что противоречит утверждению задачи T7.3. Таким образом, $F(x)$ не дифференцируема в точке $x = 0$ и потому не может быть первообразной для $\operatorname{sign} x$ на промежутке $<a; b>$.

Этот пример показывает, что вопрос о существовании первообразной для функции неотделим от промежутка, на котором рассматривается эта функция.

T16.6. а) Если $f(x)$ — периодическая, то ее первообразная $F(x)$ не обязательно периодическая: например, $f(x) = 1 + \sin x$ — периодическая, но ее первообразная $F(x) = x - \cos x$ таковой уже не является.

б) Пусть $F(x)$ — первообразная для нечетной функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty; +\infty)$. Положим $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t) = -t$. Тогда по теореме 16.2 функция $F(\varphi(t)) = F(-t)$ является первообразной для функции

$f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=f(-t)\cdot(-t)'=f(t)$. Таким образом, $F(-t)$ и $F(t)$ — две первообразные для $f(t)$ на промежутке $(-\infty; +\infty)$. Отсюда по утверждению 16.1 $F(t) = F(-t) + c$ для любого t. В частности, $F(0) = F(0) + c$, откуда $c = 0$, $F(t) = F(-t)$, что доказывает четность функции $F(x)$.

в) Указание: рассмотреть функцию $f(x) = x^2$.

Т16.7. а) Подстановка недопустима, поскольку областью значений функции $\varphi(t) = 2\sin t$ является отрезок $[-2; 2]$, который не совпадает с $X = [-1; 1]$.

б) Подстановка недопустима по той же причине, что и в предыдущем случае.

в) Подстановка в этом случае допустима, поскольку выполняются условия теоремы 16.2.

г) Подстановка недопустима, поскольку производная функции $\varphi(t) = \cos t$ принимает нулевое значение во внутренней точке $t = 0$ промежутка T.

Т16.8. Обозначим через $T_n(x)$ многочлен Тейлора n-го порядка в точке $x = a$ для функции $P_n(x)$. Так как производная $(n + 1)$-го порядка любого многочлена степени n равна нулю в любой точке из Af^1, то $P_n^{(n+1)}(c) = 0$ и, следовательно, по теореме 13.2 для любого $x \in Af^1$

$P_n(x)=T_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{P_n^{(i)}(a)}{i\,!}\,(x-a)^i$. Теперь применим теорему 16.1:

$$\int\frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}}\,dx=\int\sum_{i=0}^{n}\frac{P_n^{(i)}(a)}{i\,!\cdot(x-a)^{n+1-i}}\,dx=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{P_n^{(i)}(a)}{i\,!}\int\frac{1}{(x-a)^{n+1-i}}\,dx\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{P_n^{(i)}(a)}{i\,!}\int\frac{1}{(x-a)^{n+1-i}}\,dx\right)+\frac{P_n^{(n)}(a)}{n\,!}\int\frac{1}{x-a}\,dx=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{P_n^{(i)}(a)}{i\,!\cdot(x-a)^{n-i}\cdot(i-n)}+\frac{P_n^{(n)}(a)}{n\,!}\cdot\ln|x-a|+C\,.$$

Т16.9. Применим метод интегрирования по частям:

а) $I_n=\int x^n e^{ax}dx=\int\frac{x^n}{a}\,de^{ax}=\frac{1}{a}\left(x^n e^{ax}-\int e^{ax}dx^n\right)=\frac{1}{a}\left(x^n e^{ax}-\int nx^{n-1}e^{ax}dx\right)=$

$=\frac{1}{a}x^n e^{ax}-\frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx=\frac{1}{a}x^n e^{ax}-\frac{n}{a}I_{n-1}\,.$

б) $I_n = \int \sin^n x\,dx = \int \sin^{n-1} x\, d(-\cos x) = -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + \int \cos x\, d\sin^{n-1} x =$

$= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x\,dx =$

$= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cdot (1-\sin^2 x)\,dx =$

$= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \sin^n x\,dx =$

$= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$.

Итак, $I_n = -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$,

$nI_n = -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1)I_{n-2}$, $I_n = \dfrac{-\cos x \cdot \sin^{n-1} x}{n} + \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$.

П16.21. а) Пусть промежуток X есть $(0; 1)$. Положим $x = \operatorname{tg} t$, $T = \left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Так как $(\operatorname{tg} t)' = \dfrac{1}{\cos^2 t} \neq 0$ при $t \in T$, то по теореме 16.2

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} \overset{x=\operatorname{tg} t}{=} \int \frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{\operatorname{tg}^2 t\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} = \int \frac{dt}{\sin^2 t \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}} =$$

$$= \int \frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t} = \int \frac{d\sin t}{\sin^2 t} \overset{\sin t = y}{=} \int \frac{dy}{y^2} =$$

$$= -\frac{1}{y} + C \overset{y=\sin t}{=} -\frac{1}{\sin t} + C \overset{t=\operatorname{tg} x}{=} -\frac{1}{\sin(\operatorname{tg} x)} + C\,.$$

б) Вычислим $\int \sin(\ln x)dx$ методом интегрирования по частям.

Пусть $u = \sin(\ln x)$, $v = x$. Тогда

$$\int \sin(\ln x)dx = x \cdot \sin(\ln x) - \int \frac{\cos(\ln x)}{x} x\,dx = x \cdot \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx\,.$$

Интеграл $\int \cos(\ln x)dx$ в свою очередь тоже вычислим методом интегрирования по частям: пусть $u = \cos(\ln x)$, $v = x$, тогда

$$\int \cos(\ln x)dx = x \cdot \cos(\ln x) + \int \frac{\sin(\ln x)}{x}\, x\, dx = x \cdot \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\, dx\,.$$

В итоге имеем

$$\int \sin(\ln x)dx = x \cdot \sin(\ln x) - x \cdot \cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)\, dx\,.$$

Отсюда

$$2\int \sin(\ln x)dx = x \cdot \sin(\ln x) - x \cdot \cos(\ln x) + 2C\,,$$

$$\int \sin(\ln x)dx = \frac{x}{2} \cdot \bigl(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\bigr) + C\,.$$

Глава 17

Определенный интеграл

Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a; b]$, $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ — некоторое множество точек этого отрезка, называемое его разбиением, где $a = x_0 < x_1 <\ldots< x_{n-1} < x_n = b$.

Обозначим через $m_i(f)$ и $M_i(f)$ соответственно точные нижнюю и верхнюю грани множества значений функции $f(x)$ на i-м частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Составим две суммы, соответствующие разбиению T:

$$S_T(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)\Delta x_i\,,\ S^T(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)\Delta x_i\,,\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1}\,.$$

Первая из этих сумм называется нижней суммой Дарбу, вторая — верхней суммой Дарбу.

Чтобы избежать громоздких обозначений, условимся в записи $m_i(f)$, $M_i(f)$, $S^T(f)$, $S_T(f)$ не указывать скобок с именем функции f в тех случаях, когда из контекста ясно, какой функции эти обозначения соответствуют.

На рис. 17.1 показан пример разбиения $T = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, которому соответствуют нижняя сумма Дарбу, равная площади "вписанной" в кривую $y = f(x)$ ступенчатой фигуры (граница отмечена "ворсом" вовнутрь), и верхняя сумма Дарбу, равная площади "описанной" около кривой $y = f(x)$ ступенчатой фигуры (граница отмечена "ворсом" наружу).

Очевидно, $S^T - S_T = \sum\limits_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i \geq 0\,.$

Будем говорить, что разбиение P мельче разбиения T, если P получено из T добавлением конечного числа новых точек отрезка $[a; b]$.

Лемма 17.1.

1. Если разбиение P мельче разбиения T, то $S_T \leq S_P \leq S^P \leq S^T$.

2. Для любых двух разбиений P и Q отрезка $[a; b]$ верно $S_P \leq S^Q$.

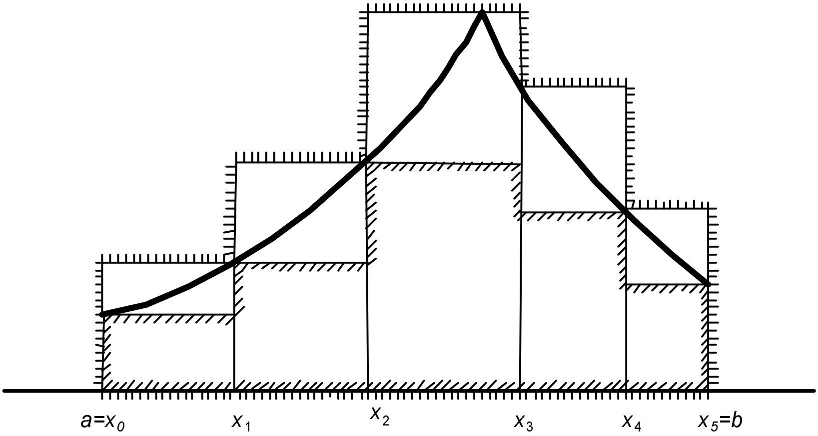


Рис. 17.1. Нижняя и верхняя суммы Дарбу

Доказательство. 1. Без ограничения общности доказательства можно считать, что разбиение P получено из разбиения T добавлением одной новой точки, т. е. $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_n\}$, $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, y, x_k, \ldots, x_n\}$. Обозначим через m, l, r — точные нижние грани значений функции f соответственно на частичных отрезках $[x_{k-1}, x_k]$, $[x_{k-1}, y]$, $[y, x_k]$. Тогда $S_P - S_T = l(y - x_{k-1}) + r(x_k - y) - m(x_k - x_{k-1})$.

Очевидно, $m \le l$, $m \le r$. Поэтому

$$S_P - S_T \ge m(y - x_{k-1}) + m(x_k - y) - m(x_k - x_{k-1}) = 0.$$

Аналогично доказывается, что $S^T - S^P \ge 0$.

2. Обозначим $R = P \cup Q$. Тогда в силу предыдущего утверждения $S_P \le S_R \le S^R \le S^Q$. Лемма доказана.

Обозначим через $S_* = S_*(f)$ точную верхнюю грань множества нижних сумм Дарбу, а через $S^* = S^*(f)$ — точную нижнюю грань множества верхних сумм Дарбу функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Из леммы 17.1 следует, что все числа из промежутка $[S_*; S^*]$ и только они разделяют два множества — множества всех нижних и всех верхних сумм Дарбу функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, т. е. для любых разбиений P и T отрезка $[a; b]$ $S_P \le S_* \le S^* \le S^T$.

Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a; b]$. Если $S_* = S^*$, то единственное число (оно совпадает с S_* и S^*), разделяющее множества нижних и верхних сумм Дарбу функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, называется определенным интегралом этой функции на отрезке $[a; b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$. При этом сама функция $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a; b]$.

Что касается рис. 17.1, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ в этом случае равен площади криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$ и графиком функции $y = f(x)$.

Числа a и b в интеграле $\int\limits_a^b f(x)dx$ называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования. По аналогии с неопределенным интегралом, $f(x)$ называется подынтегральной функцией, а $f(x)dx$ — подынтегральным выражением. Кроме того, полагают, что

$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx, \quad \int\limits_a^a f(x)dx = 0.$$

Теорема 17.1 (критерий интегрируемости). Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a; b]$. Тогда $f(x)$ интегрируема на этом отрезке, если и только если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется разбиение T отрезка $[a; b]$, при котором $S^T(f) - S_T(f) < \varepsilon$.

Доказательство. Если $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, то $I = S_* = S^* = \int\limits_a^b f(x)dx$. Поскольку S_* и S^* — точные грани сумм Дарбу функции $f(x)$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся такие разбиения Q и P отрезка $[a; b]$, что $S_Q > I - \frac{\varepsilon}{2}$, $S^P < I + \frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть $T = P \cup Q$. Тогда по лемме 17.1 $S_Q \le S_T \le I \le S^T \le S^P$.

Отсюда $S^T - S_T = (S^T - I) + (I - S_T) \le (S^P - I) + (I - S_Q) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Предположим теперь, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется разбиение Q отрезка $[a; b]$ такое, что $S^Q - S_Q < \varepsilon$. Если $f(x)$ не интегрируема на отрезке $[a; b]$, то $S_* \ne S^*$. По определению для любого разбиения T отрезка $[a; b]$ $S^T \ge S^*$, $S_* \ge S_T$. Поэтому $S^T - S_T \ge S^* - S_*$, т. е. нашлось такое $\varepsilon = S^* - S_* > 0$, что $S^T - S_T \ge \varepsilon$ для любого разбиения T. Противоречие. Теорема доказана.

Следствие 17.1 (линейность определенного интеграла).

1. Пусть k — произвольное число, не равное нулю. Тогда функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, если и только если функция $kf(x)$ интегрируема на этом отрезке, при этом $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.
2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a; b]$, то $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

Доказательство следствия дано в задаче Т17.1.

Это следствие можно обобщить следующим образом: если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a; b]$, k и m — произвольные, не равные нулю числа, то

$$\int_a^b (kf(x) \pm mg(x))dx = k\int_a^b f(x)dx \pm m\int_a^b g(x)dx.$$

Следствие 17.2 (аддитивность определенного интеграла). Пусть $a < c < b$. Тогда функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, если и только если $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a; c]$ и $[c; b]$; при этом

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Доказательство следствия дано в задаче Т17.2.

Следствие 17.3. Если значения функций $f(x)$ и $g(x)$ отличаются только в конечном числе точек отрезка $[a; b]$, то интегрируемость одной из этих функций влечет интегрируемость другой, при этом $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

Или в эквивалентной формулировке: если значения подынтегральной функции изменить в конечном числе точек, то величина определенного интеграла не изменится.

Доказательство следствия дано в задаче Т17.3.

Следствие 17.4 (классы интегрируемых функций).

1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она интегрируема на этом отрезке.
2. Если функция $f(x)$ монотонна и ограничена на отрезке $[a; b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

3. Если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a; b]$ и имеет на этом отрезке конечное число точек разрыва, то $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$.

Доказательство следствия дано в задаче Т17.4.

Компьютерный раздел

Встроенная функция `csort(M, n)` (или `rsort(M, n)`) переставляет строки (столбцы) матрицы `M` так, что во вновь полученной матрице элементы столбца с номером n (строки с номером n) расположатся в порядке возрастания числовых значений. Например, если `ORIGIN` = 0 и $M = \begin{pmatrix} a & 3 \\ b & 5 \\ c & 1 \end{pmatrix}$, то матрица `csort(M, 1)` будет равна $\begin{pmatrix} c & 1 \\ a & 3 \\ b & 5 \end{pmatrix}$; а если `ORIGIN` = 1 и $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, то матрица `rsort(M, 2)` будет равна $\begin{pmatrix} c & a & b \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Встроенная функция `runif(n, a, b)` генерирует вектор `n` случайных чисел, равномерно распределенных на отрезке $[a; b]$.

Кусочно элементарные функции удобно задавать в Mathcad с помощью оператора цикла `for` и условного оператора `if`. Рассмотрим в качестве примера функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } 0 \le x < 0.2; \\ 2x \text{ при } 0.2 \le x < 0.4; \\ 4x \text{ при } 0.4 \le x < 0.6; \\ 6x \text{ при } 0.6 \le x < 0.8; \\ 8x \text{ при } 0.8 \le x < 1. \end{cases}$$

С помощью кнопок `for` и `if` подпанели **Программирование** (Programming) эта функция определяется так:

```
f(x) := for  i ∈ 0..4
         x · i  if  0.2 · i ≤ x < 0.2 · (i + 1)
```

График функции `f(x)` показан на рис. 17.2.

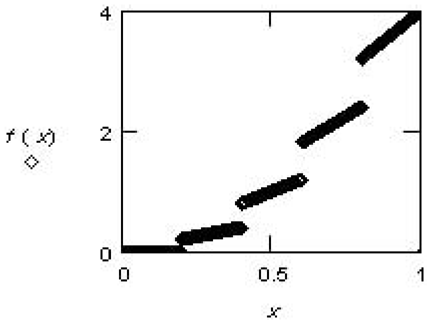


Рис. 17.2. График функции `f(x)`

Задачи для самостоятельного решения

Т17.1. Доказать следствие 17.1.

Т17.2. Доказать следствие 17.2.

Т17.3. Доказать следствие 17.3.

Т17.4. Доказать следствие 17.4.

Т17.5. Доказать, что функция Дирихле (см. задачу Т3.8) не интегрируема ни на каком отрезке [*a*; *b*].

Т17.6. Доказать, что для любого числа $k \neq 0$ $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$.

Т17.7. Доказать: если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке [*a*; *b*] и $f(x) \geq 0$ при любом $x \in [a; b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

Т17.8. Доказать: если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке [*a*; *b*] и при любом $x \in [a; b]$ $m \leq f(x) \leq M$, то $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$.

Т17.9. Доказать: если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке [*a*; *b*] и $f(x) \leq g(x)$ при любом $x \in [a; b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Т17.10. Доказать: если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке [*a*; *b*], то и функция $|f(x)|$ интегрируема на этом отрезке, причем

$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$. Можно ли утверждать, что из интегрируемости функции $|f(x)|$ на отрезке $[a; b]$ следует интегрируемость функции $f(x)$ на этом отрезке?

Т17.11. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Доказать, что если $\int_a^b f(x)\,dx > 0$, то существует отрезок $[\alpha; \beta] \subseteq [a; b]$ такой, что $f(x) > 0$ при любом $x \in [\alpha; \beta]$.

Т17.12. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Доказать, что если $f(x) \ge 0$ при любом $x \in [a; b]$ и $f(c) > 0$ для некоторой точки $c \in [a; b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

Т17.13. Доказать, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a; b]$, то и функция $f(x) \cdot g(x)$ интегрируема на этом отрезке.

Т17.14. Привести пример не интегрируемой на отрезке функции, квадрат которой интегрируем на этом отрезке.

Т17.15. Доказать, что для любых интегрируемых на отрезке $[a; b]$ функций $f(x)$ и $g(x)$ верно $\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$.

Общая формулировка задач К17.1—К17.10

Для функции $f(x)$, определенной на отрезке $[a; b]$, вычислить суммы Дарбу и проиллюстрировать их геометрический смысл (см. рис. 17.1) с помощью графических и анимационных средств Mathcad; дать наглядное изображение того, как меняются суммы Дарбу относительно интеграла $\int_a^b f(x)dx$. Предполагается, что для каждого $n = 2, 3, \ldots, N$ суммы Дарбу должны соответствовать разбиению $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ отрезка $[a; b]$, генерируемому встроенной функцией `runif`.

К17.1. $f(x) = x^3 + 2$, $a = 2$, $b = 5$.

К17.2. $f(x) = 2^x + 2$, $a = -5$, $b = -2$.

К17.3. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $a = 1$, $b = 6$.

К17.4. $f(x) = \frac{1}{3^x}$, $a = 2$, $b = 6$.

К17.5. $f(x) = \operatorname{tg} x$, $a = 0$, $b = \frac{\pi}{3}$.

К17.6. $f(x) = \sin x$, $a = \frac{\pi}{2}$, $b = \pi$.

К17.7. $f(x) = \arccos x$, $a = -1$, $b = 1$.

К17.8. $f(x) = (x - 5)^2$, $a = 0$, $b = 4$.

К17.9. $f(x) = \operatorname{arcctg} x$, $a = 0$, $b = 15$.

К17.10. $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, $a = \frac{1}{8}$, $b = 1$.

Ответы, указания, решения

Т17.1. 1. Очевидны следующие соотношения:

$$m_i(kf) = \begin{cases} k \cdot m_i(f) & \text{при } k > 0, \\ k \cdot M_i(f) & \text{при } k < 0, \end{cases} \quad M_i(kf) = \begin{cases} k \cdot M_i(f) & \text{при } k > 0, \\ k \cdot m_i(f) & \text{при } k < 0 \end{cases}$$

(здесь $m_i(u)$ и $M_i(u)$ обозначают соответственно точные нижнюю и верхнюю грани множества значений функции $u(x)$ на i-ом частичном отрезке разбиения T). Отсюда

$$S_*(kf) = \begin{cases} k \cdot S_*(f) & \text{при } k > 0, \\ k \cdot S^*(f) & \text{при } k < 0, \end{cases} \quad S^*(kf) = \begin{cases} k \cdot S^*(f) & \text{при } k > 0, \\ k \cdot S_*(f) & \text{при } k < 0. \end{cases}$$

Это означает, что функции $f(x)$ и $k \cdot f(x)$ либо одновременно интегрируемы, либо не интегрируемы на отрезке $[a; b]$. В случае интегрируемости

$$S_*(f) = S^*(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

Поэтому $S_*(k \cdot f) = S^*(k \cdot f) = k\int_a^b f(x)dx$ или $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.

2. Пусть P и Q — произвольные разбиения отрезка $[a; b]$, $T = P \cup Q$. Очевидно, $m_i(f) + m_i(g)$ является нижней гранью (не обязательно точной) множества значений функции $f(x) + g(x)$ на i-м частичном отрезке разбиения T. Поэтому $m_i(f) + m_i(g) \le m_i(f + g)$ и, следовательно, $S_T(f) + S_T(g) \le S_T(f + g)$.

Отсюда по лемме 17.1 $S_P(f) + S_Q(g) \le S_T(f + g) \le S_*(f + g)$. Но тогда ввиду произвольности разбиений P и Q $S_*(f) + S_*(g) \le S_*(f + g)$. Аналогично доказывается, что $S^*(f) + S^*(g) \ge S^*(f + g)$.

По условию $S_*(f)=S^*(f)=\int_a^b f(x)dx$, $S_*(g)=S^*(g)=\int_a^b g(x)dx$. Вместе с предыдущими двумя неравенствами это означает, что

$$S_*(f+g)=S^*(f+g)=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

или

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx.$$

Т17.2. Пусть T — некоторое разбиение отрезка $[a; b]$, содержащее точку c. Тогда T порождает два разбиения T_1 и T_2 отрезков $[a; c]$ и $[c; b]$ соответственно, где $T = T_1 \cup T_2$. По определению сумм Дарбу $S_T = S_{T_1} + S_{T_2}$, $S^T = S^{T_1} + S^{T_2}$, откуда $S^T - S_T = (S^{T_1} - S_{T_1}) + (S^{T_2} - S_{T_2})$.

Последнее равенство означает, что из неравенства $S^T - S_T < \varepsilon$ следует $S^{T_i} - S_{T_i} < \varepsilon$, $i = 1, 2$, а из неравенств $S^{T_i} - S_{T_i} < \frac{\varepsilon}{2}$, $i = 1, 2$, следует $S^T - S_T < \varepsilon$.

Поэтому по теореме 17.1 интегрируемость $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ эквивалентна интегрируемости $f(x)$ на отрезках $[a; c]$ и $[c; b]$.

Остается показать, что если интегралы $I_1 = \int_a^c f(x)dx$, $I_2 = \int_c^b f(x)dx$ существуют, то $\int_a^b f(x)dx = I_1 + I_2$, т. е. $I_1 + I_2$ является тем единственным числом, которое разделяет множества нижних и верхних сумм Дарбу функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Пусть Q — произвольное разбиение отрезка $[a; b]$, а разбиение T получено из Q добавлением точки c (в том случае, если точка c не встречалась в разбиении Q). Разбиение T порождает два разбиения T_1 и T_2 отрезков $[a; c]$ и $[c; b]$ соответственно, $T = T_1 \cup T_2$. По определению $S_{T_i} \le I_i \le S^{T_i}$, $i = 1, 2$. Отсюда

$$S_T = S_{T_1} + S_{T_2} \le I_1 + I_2 \le S^{T_1} + S^{T_2} = S^T$$

и, следовательно, $S_Q \le I_1 + I_2 \le S^Q$, поскольку в силу леммы 17.1 $S_Q \le S_T \le S^T \le S^Q$. Следствие доказано.

Т17.3. Достаточно показать, что если $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, а значения функций $f(x)$ и $g(x)$ отличаются только в одной точке c этого отрезка, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b g(x)dx$. Пусть для определенности $g(c) > f(c)$. Обозначим $r(x) = g(x) - f(x)$. Очевидно, все нижние суммы Дарбу функции $r(x)$ на отрезке $[a; b]$ равны нулю, т. е. $S_*(r) = 0$. Возьмем теперь произвольное число $\varepsilon > 0$ и рассмотрим такое разбиение T отрезка $[a; b]$, не содержащее точки c, для которого длина любого частичного отрезка меньше $\dfrac{\varepsilon}{r(c)}$. Тогда

$$S^T(r) - S_T(r) = S^T(r) = r(c) \cdot \Delta x_k < r(c) \cdot \frac{\varepsilon}{r(c)} = \varepsilon,$$

где Δx_k — длина k-го частичного отрезка, содержащего точку c.

Отсюда в силу теоремы 17.1 $r(x)$ интегрируема на $[a; b]$, причем $\int\limits_a^b r(x)dx = S_* = S^* = 0$. Но тогда по следствию 17.1

$$\int\limits_a^b g(x)dx = \int\limits_a^b (f(x) + r(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b r(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Т17.4. 1. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Согласно следствию 5.1, найдется такое число $\delta > 0$, что на любом отрезке, содержащемся в $[a; b]$ и имеющем длину меньше δ, амплитуда функции $f(x)$ будет меньше $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Обозначим $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ — разбиение, для которого длина любого частичного отрезка меньше δ. Тогда

$$S^T(f) - S_T(f) < \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \Delta x_i \right) = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Интегрируемость функции $f(x)$ теперь следует из теоремы 17.1.

2. Без ограничения общности можно считать, что $f(x)$ не убывает на отрезке $[a; b]$. Если $f(a) = f(b)$, то для любого разбиения T отрезка $[a; b]$ $S^T(f) = S_T(f)$ и, следовательно, $S^*(f) = S_*(f)$. Пусть $f(b) > f(a)$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ Обозначим $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ — такое разбие-

ние отрезка $[a; b]$, для которого длина каждого частичного отрезка будет меньше $\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Тогда

$$S^T(f)-S_T(f)=\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)=$$

$$=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\cdot\big(f(b)-f(a)\big)=\varepsilon\,.$$

Остальное теперь следует из теоремы 17.1.

3. Пусть $c_0, c_1, \ldots, c_k$ — точки разрыва функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Для каждого i, $1 \le i \le k$, определим функцию $g_i(x)$ на отрезке $[c_{i-1}; c_i]$ следующим образом: $g_i(x) = f(x)$ для любого $x \in (c_{i-1}; c_i)$, $g_i(c_{i-1})$ и $g_i(c_i)$ равны пределам функции $f(x)$ в точках c_{i-1} и c_i вдоль $[c_{i-1}; c_i]$. Очевидно, функция $g_i(x)$ непрерывна на $[c_{i-1}; c_i]$ и, следовательно, интегрируема на этом отрезке. Но тогда интегрируема на $[c_{i-1}; c_i]$ и функция $f(x)$ (следствие 17.3), поскольку ее значения отличаются от значений функции $g_i(x)$ не более, чем в двух точках (на концах отрезка). Аналогично доказывается, что функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a; c_0]$ и $[c_k; b]$. Интегрируемость функции $f(x)$ на всем отрезке $[a; b]$ следует теперь из следствия 17.2, т. к.

$[a; b] = [a; c_0] \cup [c_0; c_1] \cup \ldots \cup [c_k; b]$.

T17.5. Пусть $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ — произвольное разбиение отрезка $[a; b]$. Поскольку любой частичный отрезок $[x_{i-1}; x_i]$ содержит как рациональные, так и иррациональные числа, то суммы Дарбу для функции Дирихле, соответствующие разбиению T, суть $S_T=\sum_{i=1}^{n}0\cdot\Delta x_i=0$, $S^T=\sum_{i=1}^{n}1\cdot\Delta x_i=b-a$. Поэтому $S_* = 0$, $S^* = (b-a)$, $S^* \ne S_*$. Следовательно, функция Дирихле не интегрируема на отрезке $[a; b]$.

T17.6. Пусть $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ — произвольное разбиение отрезка $[a; b]$. Тогда $S_T(f)=S^T(f)=\sum_{i=1}^{n}k\Delta x_i=k\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=k(b-a)$. Поэтому

$$S_*(f)=S^*(f)=\int_a^b f(x)dx=k(b-a)\,.$$

Т17.7. Указание: точная нижняя грань значений данной функции на любом частичном отрезке неотрицательна, а поэтому нижние суммы Дарбу также неотрицательны.

Т17.8. Пусть $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ — произвольное разбиение отрезка $[a; b]$. Так как при любом i, $1 \le i \le n$, $m \le m_i(f) \le M_i(f) \le M$, то

$$S_T(f) \ge m \cdot \Delta x_i = m\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = m(b-a),\ S^T(f) \le \sum_{i=1}^{n} M \cdot \Delta x_i = M(b-a).$$

Т17.9. Указание: применить утверждение задачи 17.7 к функции $g(x) - f(x)$.

Т17.10. Согласно теореме 17.1, для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение T отрезка $[a; b]$, что $S^T(f) - S_T(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(M_i(f) - m_i(f)\right) \Delta x_i < \varepsilon$.

Если функция $f(x)$ принимает на i-м частичном отрезке только неотрицательные или только неположительные значения, то $M_i(f) - m_i(f) = M_i(|f|) - m_i(|f|)$. Если $f(x)$ принимает на i-м частичном отрезке значения разных знаков, то $m_i(f) < 0 \le m_i(|f|)$. Если при этом $-m_i(f) \le M_i(f)$, то $M_i(|f|) = M_i(f)$ и, следовательно, $M_i(|f|) - m_i(|f|) < M_i(f) - m_i(f)$. Если же $-m_i(f) > M_i(f)$, то $M_i(|f|) = -m_i(f)$ и, следовательно, $M_i(|f|) - m_i(|f|) \le M_i(|f|) - 0 = -m_i(f) \le M_i(f) - m_i(f)$ ($M_i(f) \ge 0$).

В любом случае $M_i(|f|) - m_i(|f|) \le M_i(f) - m_i(f)$. Поэтому

$$S^T(|f|) - S_T(|f|) = \sum_{i=1}^{n} \left(M_i(|f|) - m_i(|f|)\right) \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} \left(M_i(f) - m_i(f)\right) \Delta x_i < \varepsilon.$$

Интегрируемость функции $|f(x)|$ теперь следует из теоремы 17.1.

Обратное утверждение в общем случае неверно. Рассмотрим, например, функцию $f(x)$, заданную на произвольном отрезке $[a; b]$, так:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число,} \\ -1, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

Ясно, что $|f(x)| \equiv 1$ для всех $x \in [a; b]$. Поэтому функция $|f(x)|$ интегрируема на $[a; b]$ в силу следствия 17.4. Однако сама функция $f(x)$ интегрируемой на отрезке $[a; b]$ не является (см. задачу Т17.5).

Т17.11. Указание: поскольку $\int\limits_a^b f(x)dx > 0$, то найдется точка c отрезка $[a; b]$ такая, что $f(c) > 0$. Дальше воспользоваться теоремой 4.2.

Т17.12. По теореме 4.2 существует такой отрезок $[\alpha; \beta] \subseteq [a; b]$ — окрестность точки c, что $f(x) > 0$ для любого $x \in [\alpha; \beta]$. Но по теореме 5.1 существует точка $c^* \in [\alpha; \beta]$, в которой функция f принимает наименьшее значение среди всех других значений этой функции на этом отрезке. Отсюда $\int\limits_\alpha^\beta f(x)dx \geq f(c^*)(\beta - \alpha) > 0$ (см. задачу Т17.8). Поэтому в силу следствия 17.2

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^\alpha f(x)dx + \int\limits_\alpha^\beta f(x)dx + \int\limits_\beta^b f(x)dx > 0,$$

т. к. $\int\limits_a^\alpha f(x)dx \geq 0$, $\int\limits_\beta^b f(x)dx \geq 0$ (см. задачу Т17.7).

Т17.13. Так как функции $f(x)$ и $g(x)$ ограничены, то найдется такое число c, что все значения функций $\bar{f}(x) = f(x) + c$, $\bar{g}(x) = g(x) + c$ на отрезке $[a; b]$ будут положительными. Ввиду следствия 17.1 можно заключить, что функции $\bar{f}(x)$, $\bar{g}(x)$, $cf(x)$, $cg(x)$, c^2 интегрируемы на отрезке $[a; b]$.

Поэтому интегрируемость функции $\bar{f}(x)$, $\bar{g}(x)$ будет означать (в силу того же следствия) интегрируемость функции $f(x) \cdot g(x)$, поскольку $f(x) \cdot g(x) = \bar{f}(x) \cdot \bar{g}(x) - cf(x) - cg(x) - c^2$.

Пусть A — некоторая верхняя грань множеств значений функций $\bar{f}(x)$ и $\bar{g}(x)$ на отрезке $[a; b]$. Согласно теореме 17.1, в силу интегрируемости функций $\bar{f}(x)$ и $\bar{g}(x)$ на отрезке $[a; b]$ для любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся такие разбиения P и Q, что $S^P(\bar{f}) - S_P(\bar{f}) < \frac{\varepsilon}{2A}$, $S^Q(\bar{g}) - S_Q(\bar{g}) < \frac{\varepsilon}{2A}$. Аналогичные неравенства будут верны и для разбиения $T = P \cup Q$ (лемма 17.1).

Очевидно, $m_i(\bar{f}) \cdot m_i(\bar{g})$ является нижней гранью (не обязательно точной) множества значений функции $\bar{f}(x) \cdot \bar{g}(x)$ на i-м частичном отрезке разбиения T. Следовательно, $\sum\limits_{i=1}^n m_i(\bar{f}) \cdot m_i(\bar{g}) \Delta x_i \leq \sum\limits_{i=1}^n m_i(\bar{f} \cdot \bar{g})\, \Delta x_i = S_T(\bar{f} \cdot \bar{g})$.

Аналогично показывается, что $S^T(\bar{f}\cdot\bar{g}) \le \sum\limits_{i=1}^{n} M_i(\bar{f})\cdot M_i(\bar{g})\cdot \Delta x_i$.

В итоге имеем: $S^T(\bar{f}\cdot\bar{g}) - S_T(\bar{f}\cdot\bar{g}) \le \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i \left(M_i(\bar{f})\cdot M_i(\bar{g}) - m_i(\bar{f})\cdot m_i(\bar{g})\right)$.

Но

$$M_i(\bar{f})\cdot M_i(\bar{g}) - m_i(\bar{f})\cdot m_i(\bar{g}) =$$

$$= M_i(\bar{f})\cdot M_i(\bar{g}) - m_i(\bar{f})\cdot M_i(\bar{g}) + M_i(\bar{g})\cdot m_i(\bar{f}) - m_i(\bar{f})\cdot m_i(\bar{g}) =$$

$$= M_i(\bar{g})\left(M_i(\bar{f}) - m_i(\bar{f})\right) + m_i(\bar{f})\left(M_i(\bar{g}) - m_i(\bar{g})\right) \le$$

$$\le A\left(M_i(\bar{f}) - m_i(\bar{f}) + M_i(\bar{g}) - m_i(\bar{g})\right).$$

Поэтому $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i \left(M_i(\bar{f})\cdot M_i(\bar{g}) - m_i(\bar{f})\cdot m_i(\bar{g})\right) \le A\sum\limits_{i=1}^{n}\left(M_i(\bar{f}) - m_i(\bar{f})\right)\Delta x_i +$

$$+ A\sum_{i=1}^{n}\left(M_i(\bar{g}) - m_i(\bar{g})\right)\Delta x_i =$$

$$= A\left(S^T(\bar{f}) - S_T(\bar{f}) + S^T(\bar{g}) - S_T(\bar{g})\right) < A\cdot\frac{\varepsilon}{2A} + A\cdot\frac{\varepsilon}{2A} = \varepsilon.$$

Интегрируемость функции $\bar{f}(x)\cdot\bar{g}(x)$ следует теперь из теоремы 17.1.

Т17.15. Рассмотрим функцию $F(x) = (f(x) - \lambda g(x))^2$, где λ — любое число. Так как $F(x) \ge 0$, то в соответствии с утверждением задачи Т17.7

$$\int_a^b (f(x) - \lambda g(x))^2\,dx \ge 0 \text{ или } \lambda^2\int_a^b g^2(x)dx - 2\lambda\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b f^2(x)dx \ge 0.$$

В левой части последнего неравенства находится квадратный трехчлен относительно λ. Квадратный трехчлен будет неотрицательным при любом λ, если и только если его дискриминант неположителен, т. е.

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 - \int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx \le 0.$$

Отсюда

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\cdot\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}.$$

К17.1—К17.10. Приведем общий алгоритм решения этих задач с помощью Mathcad.

Ввести исходные данные: функцию $f(x)$, отрезок $[a; b]$, число N генерируемых разбиений, предусмотрев при этом параметр FRAME для анимации графиков: $N := \mathrm{FRAME} \cdot 10 + K$. Задать функции для вычисления сумм Дарбу:

$$ST(x) := \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \qquad st(x) := \sum_{i=1}^{N} f(x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Сгенерировать разбиение отрезка $[a; b]$:

$$T := \mathrm{runif}(N, a, b) \quad T := \mathrm{csort}(T, 0) \quad x_0 := a \quad x_N := b$$

$$i := 1..N - 1 \quad x_i := T_{i-1}$$

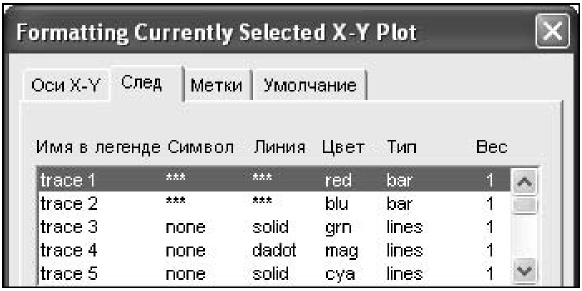
Задать кусочно элементарные функции $S(y)$, $s(y)$ для получения геометрической иллюстрации сумм Дарбу (с учетом монотонности функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ — см. решение задачи Т17.4):

$s(y) :=$ for $i \in 1 .. N$ $\qquad$ $S(y) :=$ for $i \in 1 .. N$

I. $\qquad f(x_{i-1})$ if $x_{i-1} \le y \le x_i$ $\qquad$ $f(x_i)$ if x_{i-}

$_1 \le y \le x_i$

Построить графики функций $S(y)$, $s(y)$, $f(y)$. Произвести настройку графиков, установив параметры вкладки **След** (Traces) так, как это показано на рис. 17.3.



Имя в легенде	Символ	Линия	Цвет	Тип	Вес
trace 1	***	***	red	bar	1
trace 2	***	***	blu	bar	1
trace 3	none	solid	grn	lines	1
trace 4	none	dadot	mag	lines	1
trace 5	none	solid	cya	lines	1

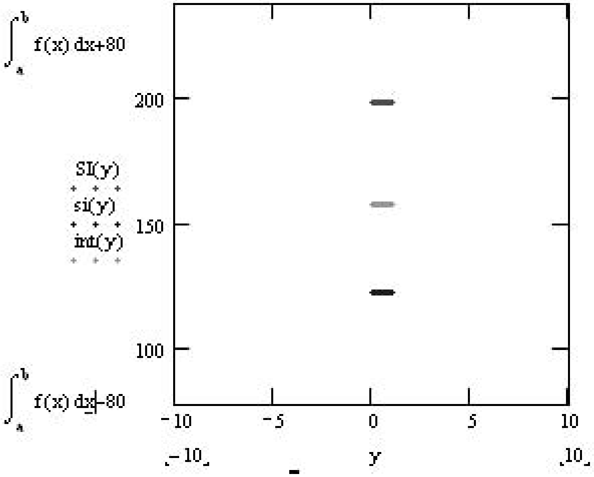
Рис. 17.3. Параметры вкладки **След**

"Графически" изобразить изменение верхней и нижней сумм Дарбу относительно интеграла $\int_a^b f(x)dx$. Например, это можно сделать так:

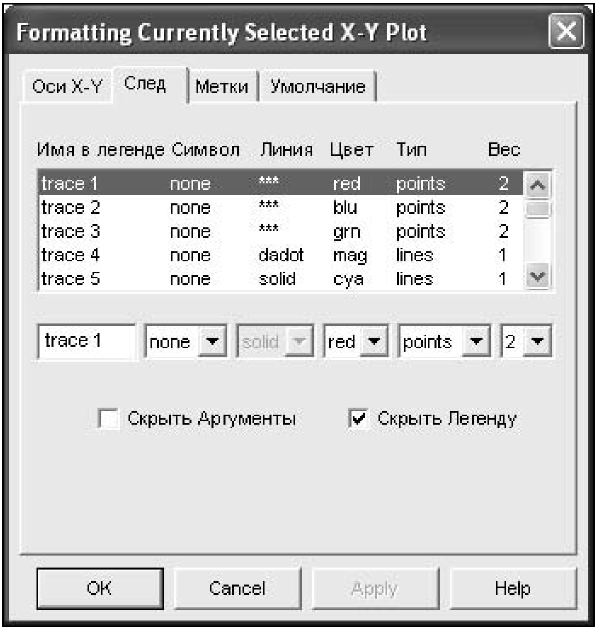
$$SI(y) := \mathrm{if}(0 \le y \le 1, ST(x), 0)$$

$$si(y) := \mathrm{if}(0 \le y \le 1, st(x), 0)$$

$$\mathrm{int}(y) := if\left(0 \le y \le 1, \int_a^b f(x)dx,\ 0\right)$$



(настройка графика произведена в соответствии с параметрами рис. 17.4). Анимировать графики.



Имя в легенде	Символ	Линия	Цвет	Тип	Вес
trace 1	none	***	red	points	2
trace 2	none	***	blu	points	2
trace 3	none	***	grn	points	2
trace 4	none	dadot	mag	lines	1
trace 5	none	solid	cya	lines	1

trace 1 none solid red points 2

☐ Скрыть Аргументы ☑ Скрыть Легенду

Рис. 17.4. Настройка графика

Глава 18

Интеграл с переменным верхним пределом

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$. Тогда она интегрируема и на любом отрезке $[a; x]$, где $x \in [a; b]$ (следствие 17.2). Поэтому на отрезке $[a; b]$ можно определить функцию $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(x)dx$, которая называется интегралом с переменным верхним пределом. (Хотя аргументы функций $f(x)$ и $\Phi(x)$ не связаны между собой, но ради удобства для их обозначения используется одна и та же буква x.)

Лемма 18.1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то существует такая точка $c \in [a; b]$, что $\int\limits_a^b f(x)dx = c(b-a)$.

Доказательство леммы дано в задаче Т18.1.

Следующая теорема показывает, что операция интегрирования с переменным верхним пределом "улучшает свойства" подынтегральной функции.

Теорема 18.1. 1. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, то функция $\Phi(x)$ непрерывна на этом отрезке.

2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то функция $\Phi(x)$ дифференцируема на этом отрезке, причем $\Phi'(x) = f(x)$.

Доказательство. 1. Пусть x_0 — произвольная точка из $[a; b]$. Рассмотрим приращение функции $\Phi(x)$ в этой точке: для любого $x \in [a; b]$

$$\Phi(x) - \Phi(x_0) = \begin{cases} \int\limits_a^{x_0} f(x)dx + \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx - \int\limits_a^{x_0} f(x)dx = \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx \text{ при } x_0 < x, \\ \int\limits_a^{x} f(x)dx - \left(\int\limits_a^{x} f(x)dx + \int\limits_x^{x_0} f(x)dx \right) = \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx \text{ при } x_0 > x. \end{cases}$$

Так как $f(x)$ ограничена на отрезке $[a; b]$, то существуют такие числа m и M, что $m \le f(x) \le M$ для любого $x \in [a; b]$.

Но тогда $m(x-x_0) \le \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx \le M(x-x_0)$ при $x_0 < x$ и $M(x-x_0) \le$ $\le \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx \le m(x-x_0)$ при $x_0 > x$ (см. задачу Т17.8). Но $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in[a;b]}} M(x-x_0) =$ $= \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in[a;b]}} m(x-x_0) = 0$. Отсюда, согласно утверждению задачи Т3.9, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in[a;b]}} \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in[a;b]}} (\Phi(x) - \Phi(x_0)) = 0$, что и означает непрерывность функции $\Phi(x)$ в точке x_0.

2. По лемме 18.1 существует такая точка c, расположенная между x и x_0, что $\Phi(x) - \Phi(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx = f(c)(x-x_0)$. Отсюда

$$\Phi'(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in[a;b]}} \frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in[a;b]}} \frac{f(c)(x-x_0)}{x-x_0} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in[a;b]}} f(c).$$

Но $c \to x_0$ при $x \to x_0$ вдоль $[a; b]$ и $f(c) \to f(x_0)$ при $c \to x_0$ вдоль $[a; b]$ (ввиду непрерывности функции $f(x)$).

Следовательно, $\Phi'(x_0) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in[a;b]}} f(c) = f(x_0)$. Теорема доказана.

Итак, если функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то $\Phi(x)$ будет для нее первообразной на этом отрезке. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Следствие 18.1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то $\int f(x)dx = \int\limits_{a}^{x} f(x)dx + C$ на отрезке $[a; b]$.

Требование непрерывности функции $f(x)$ в этом следствии существенно. Например, функция $\operatorname{sign}(x)$ (см. задачу Т16.5) не имеет первообразной на отрезке $[-a; a]$, хотя интеграл $\int\limits_{-a}^{a} \operatorname{sign}(x)dx$ существует ввиду следствия 17.4.

Следствие 18.2 (Формула Ньютона—Лейбница). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и $F(x)$ — произвольная первообразная для $f(x)$ на этом отрезке. Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Доказательство следствия дано в задаче Т18.2.

Для краткости записи формулы Ньютона—Лейбница используется также обозначение $F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b$.

Основные методы вычисления определенных интегралов от непрерывных функций аналогичны соответствующим методам, описанным в *гл. 16*.

1. Метод непосредственного интегрирования основан на формуле Ньютона—Лейбница.

   Пример. $\int\limits_1^2 \frac{1}{x}dx = \ln|x|\,\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.

2. Метод подстановки основан на следующем утверждении.

   Следствие 18.3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, а функция $\varphi'(t)$ непрерывна на отрезке $[\alpha;\ \beta]$ и $[\alpha;\beta]\xrightarrow{\varphi}[a;b]$. Тогда

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,d\varphi(t) = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx. \qquad (18.1)$$

   Доказательство. Поскольку функции $f(x)$ и $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ непрерывны соответственно на отрезках $[a;\ b]$ и $[\alpha;\ \beta]$ (теорема 4.1), то по следствию 17.4 интегралы в (18.1) существуют, причем функция $F(x) = \int\limits_a^x f(x)dx$ является первообразной для функции $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ (теорема 18.1). Но тогда по теореме 16.2 функция $F(\varphi(t))$ является первообразной для функции $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha;\ \beta]$. Отсюда по следствию 18.2 $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx$. Следствие доказано.

   Формулой (18.1) можно пользоваться "слева направо" или "справа налево" в зависимости от того, какой из интегралов в (18.1) вычисляется проще. Рассмотрим оба способа на примерах.

Примеры. Вычислим интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{tg}\, t\, dt$. Пусть φ($t$) = cos t. Тогда $\left[0; \frac{\pi}{3}\right] \xrightarrow{\varphi} \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Далее: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{tg}\, t\, dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{\cos t}\, dt = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\cos t)'}{\cos t}\, dt = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos t}\, d\cos t$.

Если $f(x) = \frac{1}{x}$, то $f(\varphi(t)) = \frac{1}{\cos t}$. Поэтому, согласно (18.1),

$$-\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos t}\, d\cos t = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} f(\varphi(t))d\varphi(t) \overset{\varphi(t)=x}{=} -\int\limits_{\varphi(0)}^{\varphi\left(\frac{\pi}{3}\right)} \frac{1}{x}\, dx =$$

$$= -\int\limits_1^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x}\, dx = \ln|x|\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2.$$

Вычислим интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dt$. Пусть φ($t$) = sin t. Тогда $\left[0; \frac{\pi}{2}\right] \xrightarrow{\varphi} [0; 1]$, причем $1 = \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $0 = \varphi(0)$. Поэтому в соответствии с (18.1) имеем:

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \int\limits_{\varphi(0)}^{\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)} \sqrt{1-x^2}\, dx \overset{x=\sin t}{=} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot (\sin t)'\, dt =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t} \cdot \cos t\, dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cdot \cos t\, dt =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t)\, dt\right) = \frac{1}{2}\left(t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\sin(2t)}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

1. Метод интегрирования по частям основан на следующем утверждении.

   Следствие 18.4. Если функции $u'(x)$ и $v'(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$, то

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\cdot u'(x)\,dx \quad \text{или}$$

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu\,. \qquad (18.2)$$

   Доказательство следствия дано в задаче Т18.3.

   Как и в случае неопределенного интеграла, успех применения формулы (18.2) зависит от правильного выбора сомножителя $v'(x)dx = dv(x)$ в подынтегральном выражении.

   Пример.

$$\int_1^e x^2 \ln x dx = \int_1^e \ln x \frac{(x^3)'}{3} dx = \frac{1}{3}\int_1^e \ln x dx^3 = \frac{1}{3}\left(x^3 \ln x\Big|_1^e - \int_1^e x^3 (\ln x)' dx \right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(e^3 - \int_1^e x^2 dx \right) = \frac{1}{3}\left(e^3 - \frac{x^3}{3}\Bigg|_1^e \right) = \frac{1}{9}\left(2e^3 + 1\right).$$

2. Напомним, что функция $f(x)$ называется четной (нечетной), если для любого x из ее области определения $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$).

   Следствие 18.5. Если функция $f(x)$ непрерывна на симметричном отрезке $[-a; a]$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx, \text{ если } f \text{ четная;} \\ 0, \text{ если } f \text{ нечетная.} \end{cases}$$

   Доказательство следствия дано в задаче Т18.4.

   Примеры. $\int_{-2}^{2} \cos^{75} x \cdot \sin^{33} x\, dx = 0$; $\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx = 2\int_0^1 e^{-x^2} dx$.

В заключение главы дадим определение интеграла функции $f(x)$ на бесконечном промежутке. Предположим, что интеграл с переменным верхним пределом $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(x)dx$ определен при любом $x \geq a$. Тогда интегралом $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ с бесконечным верхним пределом (несобственным интегралом) называется предел функции $\Phi(x)$ на бесконечности вдоль промежутка $[a; +\infty)$: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ x\in[a;+\infty)}} \Phi(x)$.

Если этот предел существует, то соответствующий несобственный интеграл называется сходящимся; в противном случае говорят, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится.

Аналогично определяется несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом: если функция $\Psi(x)=\int\limits_x^a f(x)dx$ определена при любом $x \leq a$, то интегралом $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ называется предел функции $\Psi(x)$ на бесконечности вдоль промежутка $(-\infty; a]$. Полагают также, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$ при условии, что оба интеграла справа существуют. Последнее определение не зависит от выбора точки c.

Условимся обозначать через $F(+\infty)$ и $F(-\infty)$ пределы функции $F(x)$ на бесконечности вдоль $[a; +\infty)$ и $(-\infty; a]$ соответственно.

Непосредственно из определения несобственных интегралов и следствия 18.2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 18.6. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке X и $F(x)$ — произвольная первообразная для $f(x)$ на этом промежутке. Тогда если $X = [a; +\infty)$ ($X = (-\infty; a]$, $X = (-\infty; +\infty)$), то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a)$ (соответственно $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx = F(a) - F(-\infty)$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(-\infty)$).

Компьютерный раздел

Для символьных вычислений (т. е. построения аналитических выражений) используется подпанель **Вычисления** (Symbolic), показанная на рис. 11.1, которая вызывается кнопкой 🎓 панели **Математика** (Math). Подпанель **Вычисления** (Symbolic) содержит 24 кнопки. Кнопка → вызывает шаблон $\blacksquare \to$ знака символьного вывода. На месте метки вводится выражение, которое необходимо вычислить (или представить) в символьном виде. Можно также сначала ввести выражение, а затем комбинацией клавиш <Ctrl>+<.> ввести знак → символьного вывода. Предположим, например, что надо в символьном виде вычислить неопределенный интеграл. Для этого кнопкой ∫ подпанели **Матанализ** (Calculus) вызовите шаблон $\int \blacksquare\, d\blacksquare$ вычисления неопределенного интеграла. На месте левой метки этого шаблона введите подынтегральную функцию x^3, на месте правой — переменную интегрирования x. С помощью кнопки → введите знак символьного вычисления: $\int x^3 dx \to$. После нажатия клавиши <Enter> на экране получите $\int x^3 dx \to \frac{1}{4} \cdot x^4$.

Рассмотрим пример символьного вычисления определенного интеграла $\int_a^b x^n dx$. В нужном месте рабочего листа введите идентификатор функции $f(a, b, n)$ трех переменных a, b, n; затем — знак присваивания := и далее — шаблон $\int_{\blacksquare}^{\blacksquare} \blacksquare\, d\blacksquare$ для вычисления определенных интегралов (этот шаблон вызывается кнопкой $\int_a^b$ подпанели **Матанализ** (Calculus)). На месте соответствующих меток введите пределы интегрирования a и b, подынтегральную функцию x^n и переменную интегрирования x. Выделив правым уголком выражение справа от знака присваивания :=, введите знак символьного вывода →. После нажатия клавиши <Enter> на экране получите следующее выражение:

$$f(a, b, n) := \int_a^b x^n dx \to b^n \cdot \frac{b}{(n+1)} - a \cdot \frac{a^n}{(n+1)}$$

Это выражение можно упростить, если перед вводом знака →, выделив правым уголком интеграл, щелчком по кнопке simplify подпанели **Вычисления** (Symbolic) введете ключевое слово `simplify`:

$$f(a, b, n) := \int_a^b x^n dx\ simplify \to \frac{\left[b^{(n+1)} - a^{(n+1)}\right]}{(n+1)}$$

Теперь можно вычислять значения этого интеграла при любых a, b, n, не прибегая каждый раз к повторному интегрированию. Так, например, если a и b равны 3 и 7, а n пробегает все значения от 4 до 7 с шагом 0.5, то

$$a := 3 \qquad b := 7 \qquad n := 4,\ 4.5..7$$

$$f(a,\ b,\ n) =$$

3312.8
8008.41
19486.667
47693.436
117336.571
290013.597
719780

Важное замечание: если некоторой переменной a уже было присвоено числовое значение, но впоследствии эта переменная должна участвовать в качестве параметра в символьных вычислениях, то необходимо переопределить эту переменную следующим образом: `a := a`. Следующие два примера демонстрируют принципиальность этого замечания.

$$a := 0 \qquad n := 4$$

$$\int_a^b x^n dx \ \text{simplify} \rightarrow \frac{1}{5} \cdot b^5$$

$$a := 0 \qquad n := 4$$

$$n := n \qquad a := a$$

$$\int_a^b x^n dx \ \text{simplify} \rightarrow \frac{\left[b^{(n+1)} - a^{(n+1)}\right]}{(n+1)}.$$

Задачи для самостоятельного решения

T18.1. Доказать лемму 18.1.

T18.2. Доказать следствие 18.2.

T18.3. Доказать следствие 18.4.

T18.4. Доказать следствие 18.5.

Т18.5. Найти причину противоречия, возникающего в следующих рассуждениях. Пусть $F(x)=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}$. Так как

$$F'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2}\cdot\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)'=\frac{\left(1-x^2\right)^2}{\left(1-x^2\right)^2+4x^2}\cdot\frac{\left(1-x^2\right)-x(-2x)}{\left(1-x^2\right)^2}=\frac{1}{1+x^2},$$

то, согласно следствию 18.2,

$$\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx=F(x)\Big|_0^{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}\Bigg|_0^{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)-\operatorname{arctg}(0)\right)=-\frac{\pi}{6}.$$ Но с другой стороны, $\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx>0$ в силу утверждения задачи Т17.7. Противоречие.

Т18.6. Пусть $f(x)=\begin{cases}\frac{\operatorname{arctg}x}{x} & \text{при } x\neq 0\\ 1 & \text{при } x=0\end{cases}$, $g(t)=\begin{cases}\frac{\mathrm{t}}{2\sin t} & \text{при } t\neq 0\\ \frac{1}{2} & \text{при } t=0\end{cases}$.

Доказать:

$$\int\limits_0^1 f(x)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}g(t)dt.$$

Т18.7. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0;\pi]$ и $\int\limits_0^{\pi}f(\sin x)dx=a$. Найти $\int\limits_0^{\pi}x\cdot f(\sin x)dx$.

Т18.8. Пусть $f(x)>0$ при любом $x\in[a;b]$, а функции $\sqrt{f(x)}$, $\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ интегрируемы на $[a;b]$. Доказать, что

$$\int\limits_a^b f(x)dx\cdot\int\limits_a^b\frac{1}{f(x)}dx\geq(b-a)^2,$$

причем равенство достигается, если f является константой на отрезке $[a;b]$.

Т18.9. Доказать, что если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-a;\ a]$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a}\left(f(x)+f(-x)\right)dx.$$

Т18.10. Доказать, что если $f''(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, то

$$\int_{a}^{b} x\cdot f''(x)dx = \left(bf'(b)-f(b)\right)-\left(af'(a)-f(a)\right).$$

Общая формулировка задач П18.1—П18.21

Вычислить определенные интегралы.

П18.1. а) $\int_{0}^{\sqrt{3}} t\cdot\sqrt[3]{1+t^2}\,dt$; б) $\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$.

П18.2. а) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cdot\cos^2 t\,dt$; б) $\int_{0}^{\ln 2}\frac{dx}{e^x\left(3+e^{-x}\right)}$.

П18.3. а) $\int_{0}^{12\sqrt{3}}\frac{12t^5dt}{\sqrt{1+t^6}}$; б) $\int_{3}^{8}\frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$.

П18.4. а) $\int_{1}^{e}\frac{1+\ln t}{t}\,dt$; б) $\int_{0}^{4}\frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$.

П18.5. а) $\int_{0}^{1}\frac{t^3}{t^8+1}\,dt$; б) $\int_{1}^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\,dx$.

П18.6. а) $\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\pi^2}\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$; б) $\int_{0}^{\ln 2}\frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}$.

П18.7. а) $\int_{1}^{2}\frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2}\,dt$; б) $\int_{\frac{2}{3}}^{\frac{7}{3}}\frac{xdx}{\sqrt{2+3x}}$.

П18.8. а) $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{1+t^6}\,dt$; б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x\,dx$.

П18.9. а) $\int\limits_{1}^{e} \frac{\sin(\ln t)}{t}\,dt$; б) $\int\limits_{-3}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$.

П18.10. а) $\int\limits_{1}^{\sqrt{e}} \frac{dt}{t\sqrt{1-\ln^2 t}}$; б) $\int\limits_{4}^{9} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx$.

П18.11. а) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos t\cdot\sin^3 t\,dt$; б) $\int\limits_{\ln 3}^{0} \frac{1-e^x}{1+e^x}dx$.

П18.12. а) $\int\limits_{0}^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} \frac{tdt}{\cos^2\left(t^2\right)}$; б) $\int\limits_{0}^{13} \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}\,dx$.

П18.13. а) $\int\limits_{1}^{e} \frac{\ln^2 t}{t}\,dt$; б) $\int\limits_{1}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$.

П18.14. а) $\int\limits_{1}^{\sqrt{2}} \frac{tdt}{\sqrt{4-t^2}}$; б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos^3(2x)\,dx$.

П18.15. а) $\int\limits_{0}^{1} \frac{tdt}{e^{3t^2}}$; б) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$.

П18.16. а) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{\operatorname{tg}(t+1)}{\cos^2(t+1)}\,dt$; б) $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x-e^{-x}}$.

П18.17. а) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{(\arccos t)^3\,dt}{\sqrt{1-t^2}}$; б) $\int\limits_{2\sqrt{3}}^{6} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$.

П18.18. а) $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{1-\cos t}{(t-\sin t)^2}\,dt$; б) $\int\limits_{0}^{5} \frac{xdx}{\sqrt{3x+1}}$.

П18.19. а) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} t}{1+t^2}\,dt$; б) $\int\limits_{\ln 5}^{\ln 12} \frac{dx}{\sqrt{e^x+4}}$.

П18.20. а) $\int\limits_1^{e} \frac{t^2+\ln^2 t}{t}\,dt$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\,dx$.

П18.21. а) $\int\limits_0^{1} \frac{(t^2+1)dt}{(t^3+3t+1)^2}$; б) $\int\limits_0^{3} \frac{x^3 dx}{\sqrt{9+x^2}}$.

Общая формулировка задач К18.1—К18.10

К18.1. $\int x^5 \cdot \ln\left|a^2-x^2\right| dx$.

К18.2. $\int x \cdot \ln(a+bx)dx$.

К18.3. $\int e^{ax} \cdot \cos(bx)dx$.

К18.4. $\int e^{ax} \cdot \cos^3 dx$.

К18.5. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(ax)dx$.

К18.6. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(ax)\cdot\cos^a x\,dx$ при $a = 2,\ 2.2,\ 2.4,\ 2.6,\ 2.8,\ 3$.

К18.7. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx$ при $p = 0.1,\ 0.2,\ 0.3,\ 0.4,\ 0.5$.

К18.8. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)(a^n+x^n)}$ при $a = 5,\ 5.5,\ 6,\ 6.5,\ 7,\ n = 3,\ 4,\ 5$.

К18.9. $\int\limits_0^{4} f(x)\,dx$, где $f(x) = \begin{cases} \sin(\sin x) & \text{при } 0 \le x \le \pi; \\ e^{x^2} & \text{при } \pi < x \le 4. \end{cases}$

К18.10. $\int\limits_1^6 f(x)\,dx$, где $f(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{1+x}{x}} & \text{при } 1\le x\le 5;\\ \ln^3 x & \text{при } 5<x\le 6.\end{cases}$

Ответы, указания, решения

Т18.1. В силу теоремы 5.1 существуют оптимальные планы x_* и x^* задачи (10.1), решаемой соответственно на минимум и максимум на отрезке $X = [a; b]$; пусть $m = f(x_*)$, $M = f(x^*)$. Согласно утверждению задачиТ17.8,

$$m(b-a)\le\int\limits_a^b f(x)dx\le M(b-a)\text{, т. е. } m\le\frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a}\le M.$$

Отсюда по следствию 4.5 найдется такая точка $c\in[x_*; x^*]$, в которой значение $f(c)$ равно $\dfrac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a}$. Лемма доказана.

Т18.2. По теореме 18.1 функция $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(x)dx$ является первообразной для функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Но тогда, согласно утверждению 16.1, $\Phi(x) = F(x) + c$ на промежутке $[a; b]$. Отсюда

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\Phi(b)=\Phi(b)-\Phi(a)=\big(F(b)+c\big)-\big(F(a)+c\big)=F(b)-F(a).$$

Т18.3. Интегралы в (18.2) существуют в силу следствия 17.4. На основании следствий 17.1 и 18.2 имеем:

$$\int\limits_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx+\int\limits_a^b v(x)\cdot u'(x)dx=\int\limits_a^b(u(x)\cdot v'(x)+u'(x)\cdot v(x))\,dx=\int\limits_a^b(u(x)\cdot v(x))'dx=$$
$$=u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b.$$

Т18.4. По следствию 17.2

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx=\int\limits_{-a}^{0} f(x)dx+\int\limits_0^a f(x)dx. \tag{18.3}$$

Положим $\varphi(t) = -t$. Очевидно, $[-a;\ 0]\xrightarrow{\varphi}[0;a]$, $\varphi(-a) = a$, $\varphi(0) = 0$. Поэтому на основании следствия 18.3 имеем:

$$\int\limits_{-a}^{0} f(x)dx = \int\limits_{a}^{0} f(-t)\cdot(-1)\cdot dt = \int\limits_{0}^{a} f(-t)dt = \begin{cases} \int\limits_{0}^{a} f(t)dt, & \text{если } f(t) \text{ четная;} \\ -\int\limits_{0}^{a} f(t)dt, & \text{если } f(t) \text{ нечетная.} \end{cases}$$

Остальное теперь следует из равенства (18.3).

T18.5. На промежутке $\left[0;\sqrt{3}\right]$ функция $F(x)$ не является первообразной для функции $\dfrac{1}{1+x^2}$, поскольку точка $x = 1$ этого промежутка даже не входит в область определения функции $F(x)$ (хотя, например, на промежутке $(-1;\ 1)$ $F(x)$ является первообразной для $\dfrac{1}{1+x^2}$). Поэтому применение следствия 18.2 неправомерно.

T18.6. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0;\ 1]$, поскольку $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1 = f(0)$. Если теперь $\varphi(t) = \operatorname{tg}\dfrac{t}{2}$, то $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]\xrightarrow{\varphi}[0;1]$, $0 = \varphi(0)$, $1 = \varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ и, следовательно, применимо следствие 18.3:

$$\int\limits_{\varphi(0)}^{\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)} f(x)dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)' dt.$$

Так как $\left(\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}\right)' = \dfrac{1}{2\cos^2\dfrac{t}{2}}$, $f\left(\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}\right) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}\right)}{\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}} & \text{при } t \neq 0; \\ 1 \ \text{при } t = 0, \end{cases}$

$$\frac{\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}\right)}{\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}} = \frac{t\cos\dfrac{t}{2}}{2\sin\dfrac{t}{2}},$$ то

$$f\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)' = \begin{cases} \dfrac{t}{4\sin\dfrac{t}{2}\cdot\cos\dfrac{t}{2}} & \text{при } t\neq 0, \\ \dfrac{1}{2} \ \text{при } t=0, & \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{t}{2\sin t} & \text{при } t\neq 0, \\ \dfrac{1}{2} \ \text{при } t=0, & \end{cases} = g(t)$$

и, следовательно, $\int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)dt$.

Т18.7. Положим $x = \varphi(t) = \pi - t$ и применим следствие 18.3:

$$\int\limits_0^{\pi} x\cdot f(\sin x)dx = \int\limits_{\pi}^{0} (\pi - t)\cdot f\big(\sin(\pi - t)\big)\cdot(\pi - t)'\,dt = \int\limits_0^{\pi}(\pi - t)\cdot f(\sin t)dt =$$

$$= \pi\int\limits_0^{\pi} f(\sin t)dt - \int\limits_0^{\pi} t\cdot f(\sin t)\,dt = \pi a - \int\limits_0^{\pi} x\cdot f(\sin x)dx\,.$$

Отсюда $2\int\limits_0^{\pi} x\cdot f(\sin x)dx = \pi a$, $\int\limits_0^{\pi} x\cdot f(\sin x)dx = \dfrac{\pi a}{2}$.

Т18.8. Указание: воспользоваться неравенством из задачи Т17.15.

Т18.9. В решении задачи Т18.4 показано, что $\int\limits_{-a}^{0} f(x)dx = \int\limits_0^{a} f(-x)dx$.

Поэтому

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)dx + \int\limits_0^{a} f(x)dx = \int\limits_0^{a} f(-x)dx + \int\limits_0^{a} f(x)dx = \int\limits_0^{a}\big(f(-x)+f(x)\big)dx\,.$$

Т18.10. Воспользуемся следствием 18.4:

$$\int\limits_a^b x\cdot f''(x)dx = \int\limits_a^b x\cdot df'(x) = x\cdot f'(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'(x)dx = b\cdot f'(b) - a\cdot f'(a) - f(x)\Big|_a^b =$$

$$= \big(b\cdot f'(b) - f(b)\big) - \big(a\cdot f'(a) - f(a)\big).$$

П18.21. а) $\int\limits_0^1 \dfrac{t^2+1}{\left(t^3+3t+1\right)^2}\,dt = \dfrac{1}{3}\int\limits_0^1 \dfrac{3t^2+3}{\left(t^3+3t+1\right)^2}\,dt = \dfrac{1}{3}\int\limits_0^1 \dfrac{d\left(t^3+3t+1\right)}{\left(t^3+3t+1\right)^2}$.

Пусть $\varphi(t) = x^3 + 3x + 1$. Тогда $[0;1]\xrightarrow{\varphi}[1;5]$.

Поэтому

$$\frac{1}{3}\int\limits_0^1 \frac{1}{\left(t^3+3t+1\right)^2}\, d\left(t^3+3t+1\right) \overset{\varphi(t)=x}{=} \frac{1}{3}\int\limits_1^5 \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{3x}\bigg|_1^5 = -\frac{1}{15}+\frac{1}{3}=\frac{4}{15}.$$

б) $\int\limits_0^3 \frac{x^3dx}{\sqrt{9+x^2}}$. Пусть $\varphi(t)=3\operatorname{tg} t$, тогда $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]\xrightarrow{\varphi}[0;3]$; при этом 0 = 3tg 0, $3=3\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$. Поэтому в соответствии с (18.1) имеем:

$$\int\limits_0^3 \frac{x^3dx}{\sqrt{9+x^2}} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(3\operatorname{tg} t)^3\cdot(3\operatorname{tg} t)'\,dt}{\sqrt{9+(3\operatorname{tg} t)^2}} = 3^4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^3 t}{\sqrt{9+9\operatorname{tg}^2 t}}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t} = 3^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^3 t}{\frac{1}{\cos t}}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t} =$$

$$= 27\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 t}{\cos^4 t}\,dt = 27\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t}{\cos^4 t}\sin t\,dt = 27\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2 t}{\cos^4 t}(-\cos t)'\,dt =$$

$$= 27\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 t}-\frac{1}{\cos^4 t}\right) d\cos t.$$

Пусть теперь ψ(*t*) = cos *t*. Тогда $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]\xrightarrow{\psi}\left[1;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Поэтому

$$27\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 t}-\frac{1}{\cos^4 t}\right) d\cos t \overset{\psi(t)=x}{=} 27\int\limits_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right) dx = 27\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}\right)\bigg|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= 27\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{8}{3\cdot 2\sqrt{2}}+1-\frac{1}{3}\right) = 9\left(2-\sqrt{2}\right).$$

Глава 19

Приложения определенных интегралов

Рассмотрим некоторый процесс, в течение которого изменяются характеристики Θ и Ω. Пусть характеристика Ω (например, доходность акций, издержки производства, прибыль) зависит от характеристики Θ (соответственно времени, объема продукции, производительности) с диапазоном изменения $[a; b]$, а неизвестная функция $V(x)$ выражает эту зависимость следующим образом: $V(x)$ равно количеству Ω, накопленному в процессе изменения Θ от a до x, причем $V(a) = 0$. Пусть известна интегрируемая на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$, выражающая скорость накопления Ω, т. е. $f(x)$ равна мгновенному приросту (или интенсивности прироста) Ω в момент достижения Θ величины x (приближенно $f(x)$ равно приросту характеристики Ω при увеличении на одну единицу величины x характеристики Θ). Покажем, как может быть вычислено общее количество $V(b)$ характеристики Ω, накопленное в ходе изменения характеристики Θ от a до b.

Пусть $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ — произвольное разбиение отрезка $[a; b]$. Так как скорость $f(x)$ накопления характеристики Ω на отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ заключена между величинами $m_i(f)$ и $M_i(f)$, то

$$m_i(f)\cdot\Delta x_i \le V(x_i)-V(x_{i-1}) \le M_i(f)\cdot\Delta x_i ,$$

$$S_T(f)=\sum_{i=1}^{n} m_i(f)\cdot\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n}\bigl(V(x_i)-V(x_{i-1})\bigr) \le \sum_{i=1}^{n} M_i(f)\cdot\Delta x_i = S^T(f) .$$

Но $\sum\limits_{i=1}^{n}\bigl(V(x_i)-V(x_{i-1})\bigr)=V(b)-V(a)$, поэтому $S_T(f)\le V(b)-V(a)\le S^T(f)$ и, следовательно, ввиду произвольности выбора разбиения T

$$V(b)=V(b)-V(a)=S_* = S^* = \int_a^b f(x)dx .$$

Рассмотрим несколько конкретных примеров использования такой интерпретации определенного интеграла.

Пример 1. Пусть даны отрезок времени [0; T] и скорость $I(t)$ денежного потока некоторого инвестиционного проекта, $t \in [0; T]$. Мгновенной дисконтированной стоимостью этого потока в момент времени t называется величина капитала $f(t)$, положенного в банк (в начальный момент $t = 0$) под проценты и выросшего к моменту времени t до величины $I(t)$. По формуле непрерывных процентов (см. гл. 2) $I(t) = e^{\frac{r \cdot t}{100}} \cdot f(t)$, где r — банковская процентная ставка. Отсюда $f(t) = I(t) \cdot e^{\frac{-r \cdot t}{100}}$. Поэтому величина $V(t) = \int\limits_0^T I(t) \cdot e^{\frac{-r \cdot t}{100}} dt$ есть суммарная дисконтированная стоимость заданного денежного потока, "накопленная" за время T. Другими словами, суммарная дисконтированная стоимость — это сумма денег, которую следует положить в банк, чтобы обеспечить заданную скорость $I(t)$ денежного потока.

Пример 2. Рассмотрим простейшую модель управления запасами. Пусть на складе хранится партия товара объемом N. Известны издержки C хранения единицы товара в единицу времени, а также интенсивность $i(t)$ расхода складского запаса в каждый момент времени t, $i(t) \geq 0$. Необходимо определить полные издержки хранения товара до полного его исчерпывания на складе.

Так как $i(t)$ — мгновенная скорость расхода товара в момент времени t, то $V(t) = \int\limits_0^t i(t) dt$ — количество израсходованного товара за промежуток времени [0; t], $N - V(t)$ — объем товара, оставшегося на складе к моменту времени t. Следовательно, $C(N - V(t))$ — мгновенные издержки (скорость их накопления) в момент времени t. Если обозначить через u время, за которое произойдет полное исчерпывание товара на складе (очевидно, $N - V(u) = 0$), то полные издержки Q хранения партии товара будут составлять $Q = \int\limits_0^u C(N - V(t)) dt$.

Пример 3. Криволинейной трапецией называется область $\Im$ на координатной плоскости, ограниченная двумя непересекающимися на интервале (a; b) непрерывными кривыми $y = u(x)$, $y = v(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$ (рис. 19.1).

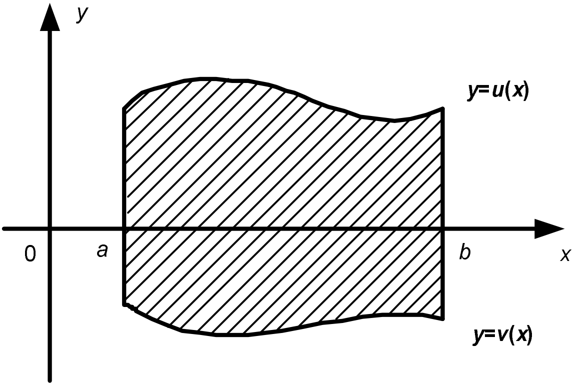


Рис. 19.1. Криволинейная трапеция

Если в "момент времени" $x \in [a; b]$ длина переменного отрезка $[v(x); u(x)]$, равная $u(x) - v(x)$, есть "мгновенная скорость" прироста площади, то площадь $\Im$ всей трапеции можно интерпретировать как суммарный "размер" части плоскости, покрываемой движущимся отрезком $[v(x); u(x)]$, когда x пробегает отрезок $[a; b]$. Тогда площадь $\Im$ равна $\int\limits_a^b (u(x) - v(x))dx$.

Задачи для самостоятельного решения

Т19.1. Пусть производная второго порядка $f''(x)$ неотрицательна на отрезке $[a; b]$. Доказать, что $\frac{1}{b-a} \cdot \int\limits_a^b f(x)dx \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

Т19.2. Пусть $y = f(x)$ — непрерывная возрастающая на промежутке $[0; +\infty)$ функция с областью значений $[0; +\infty)$, $x = g(y) = f^{-1}(y)$ — обратная ей функция на этом промежутке, a и b — произвольные положительные числа. Доказать, что если кривая $y = f(x)$ пересекает прямую $y = b$, то $\int\limits_0^a f(x)dx + \int\limits_0^b g(y)dy \geq ab$.

Общая формулировка задач П19.1—П19.4

Пусть функция $I(t)$ выражает мгновенную прибыль в ден. ед./год (в момент времени t) инвестиционного проекта, требующего I_0 ден. ед. начальных инвестиций. Определить чистую текущую ценность проекта за промежуток времени в T лет, равную разности между суммарной дисконтированной стоимостью $V(t)$ денежного потока $I(t)$ при банковской ставке r% годовых и величиной I_0.

Отметим, что чистая текущая ценность проекта показывает, на сколько меньше ден. ед. начальных инвестиций требует данный проект по сравнению с банковским депозитом, размер которого в момент времени t будет равен ожидаемой прибыли проекта в этот же момент времени t, $t \in [0; T]$. Если чистая текущая ценность положительна, то деньги выгоднее вкладывать в проект, нежели в банк.

П19.1. $T = 8$, $I(t) = 10 - t$, $r = 10\%$, $I_0 = 38$.

П19.2. $T = 10$, $I(t) = 7 - t/2$, $r = 8\%$, $I_0 = 20$.

П19.3. $T = 12$, $I(t) = 8 - t/3$, $r = 9\%$, $I_0 = 18$.

П19.4. $T = 15$, $I(t) = 11 - t/5$, $r = 7\%$, $I_0 = 14$.

Общая формулировка задач П19.5—П19.8

Участок земли сдается в аренду. Функция $I(t)$ выражает ренту в ден. ед./год, получаемую от участка в момент времени t. Учитывая, что начальная продажная стоимость участка равна $I(0)$ ден. ед., определить выгоду от сдачи земли в аренду на срок T лет по сравнению с вложением денег, полученных от продажи участка, на банковский депозит под r % годовых.

П19.5. $T = 50$, $I(t) = (t+3)e^{-0.5t}$, $r = 10\%$.

П19.6. $T = 60$, $I(t) = (2t+1)e^{-\frac{t}{3}}$, $r = 9\%$.

П19.7. $T = 70$, $I(t) = (3t+2)e^{-\frac{3t}{4}}$, $r = 8\%$.

П19.8. $T = 80$, $I(t) = (2t+5)e^{-\frac{t}{2}}$, $r = 7\%$.

Общая формулировка задач П19.9—П19.12

На складе хранится товар объемом N, C — издержки хранения единицы товара в единицу времени, $i(t)$ — интенсивность расхода складского запаса в момент времени t. Определить полные издержки хранения товара до полного его исчерпывания на складе.

П19.9. $N = 1000$, $C = 4$, $i(t) = 3t^2$.

П19.10. $N = 880$, $C = 2$, $i(t) = 4t + 4$.

П19.11. $N = 810$, $C = 2.3$, $i(t) = 2t + 3$.

П19.12. $N = 750$, $C = 1.5$, $i(t) = 2t +5$.

Общая формулировка задач П19.13—П19.16

Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y = u(x)$, $y = v(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$.

П19.13. $y = 2^x$, $y = 2x - x^2$, $x = 0$, $x = 2$.

П19.14. $y = x^2$, $y = x - 3$, $x = -1$, $x = 2$.

П19.15. $y = x^3 + 1$, $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 3$.

П19.16. $y = 2 - x^2$, $y = 4 - x$, $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$.

Общая формулировка задач П19.17—П19.21

Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми $y = u(x)$, $y = v(x)$.

П19.17. $xy = 2$, $x + y = 5$.

П19.18. $y = x^3$, $y = x$.

П19.19. $y = x^2$, $y = \sqrt[3]{x}$.

П19.20. $y = x^2$, $y = 8 - x^2$.

П19.21. а) Прибыль от сдачи объекта в аренду на период в 100 лет выражается функцией $5e^{-0.7t}$ ден. ед./год, где $t \in [0; 100]$. Однако для начала эксплуатации объекта требуются начальные инвестиции в размере 5 ден. ед. Определить чистую текущую ценность этого объекта при банковской процентной ставке в 10% годовых.

б) На складе хранится 400 ед. товара. Издержки хранения единицы этого товара в сутки равны 3 ден. ед. Интенсивность расхода складского запаса этого товара на k-е сутки равна $2k$. Определить полные издержки хранения товара до полного его исчерпывания на складе.

в) Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми $u(x) = x^2$, $v(x) = \sqrt{x}$.

г) Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривыми

$$v(x) = 0,\ u(x) = \begin{cases} x \text{ при } x \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right]; \\ -2x^2 + 2x \text{ при } x \in \left(\dfrac{1}{2}; 1\right] \end{cases}$$

и прямыми $x = 0$, $x = 1$.

Ответы, указания, решения

Т19.1. В силу утверждения задачи Т7.2 функции $f'(x)$ и $f(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$. Докажем вначале, что график функции $y = f(x)$ находится не ниже любой касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 \in [a; b]$. Так как уравнение касательной имеет вид $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ *(см. гл. 7)*, то достаточно показать выполнимость неравенства

$$f(x_1) \geq f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0) \tag{19.1}$$

для любых точек x_0 и x_1 из $[a; b]$.

В силу теоремы 10.2 существует точка x_2, расположенная между x_0 и x_1, такая, что $f(x_1) - f(x_0) = f'(x_2)(x_1 - x_0)$.

Поэтому (19.1) равносильно неравенству

$$f'(x_2)(x_1 - x_0) \geq f'(x_0)(x_1 - x_0). \tag{19.2}$$

Опять-таки, в силу теоремы 10.2 существует такая точка x_3, расположенная между x_0 и x_2, что $f'(x_2) - f'(x_0) = f''(x_3)(x_2 - x_0)$. Поэтому (19.2) равносильно неравенству $f''(x_3)(x_2 - x_0)(x_1 - x_0) \geq 0$. Последнее неравенство верно, поскольку $(x_2 - x_0)(x_1 - x_0) \geq 0$ (ибо точки x_2, x_1 расположены по одну сторону от x_0) и $f''(x_3) \geq 0$ по условию.

Итак, можно утверждать, в частности, что график функции $y=f(x)$ расположен не ниже касательной, проведенной к этому графику в точке с абсциссой $x_0=\frac{a+b}{2}$ (рис. 19.2).

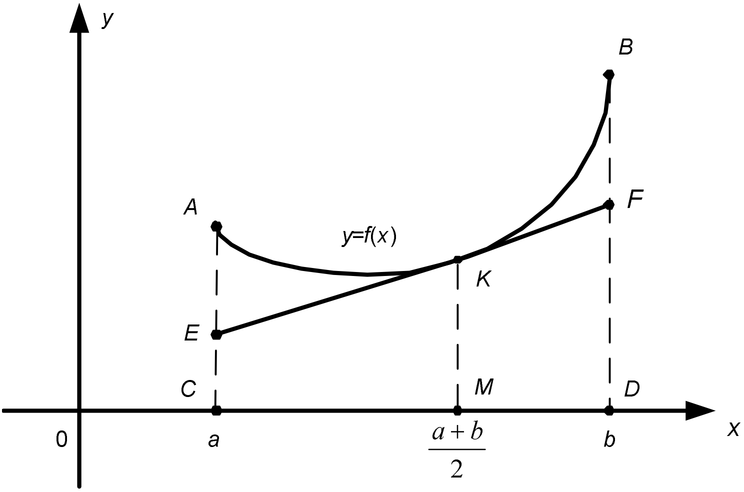


Рис. 19.2. График функции $y=f(x)$ и касательная к нему

Очевидно, что площадь криволинейной трапеции $ABDC$, равная $\int\limits_a^b f(x)dx$, не меньше площади трапеции $CEFD$, равной $|CD|\cdot|KM|$ (KM — средняя линия трапеции, CD — ее высота). Но $|CD|=b-a$, $|KM|=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

Отсюда $\int\limits_a^b f(x)dx \ge (b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

Т19.2. В силу следствия 4.6 $g(y)$ — непрерывная и возрастающая на промежутке $[0;+\infty)$ функция. Поэтому функции $f(x)$ и $g(y)$ интегрируемы на отрезках $[0;a]$ и $[0;b]$ соответственно (следствие 17.4). Обозначим через $C=(c,b)$ точку пересечения кривой $y=f(x)$ с прямой $y=b$. Тогда интеграл $\int\limits_0^b g(y)dy$ равен площади криволинейной трапеции OCB, где $O=(0,0)$, $B=(0,b)$, интеграл $\int\limits_0^a f(x)dx$ равен площади криволинейной трапеции OAD, где $A=(a,0)$, D — точка пересечения кривой $y=f(x)$ с прямой $x = a$. На рис. 19.3 и 19.4 видно, что и при $a < c$, и при $a > c$ объединение криволинейных трапеций OAD и OCB целиком содержит прямоугольник площади ab, ограниченный прямыми $y = 0$, $y = b$, $x = 0$, $x = a$, что и завершает доказательство неравенства.

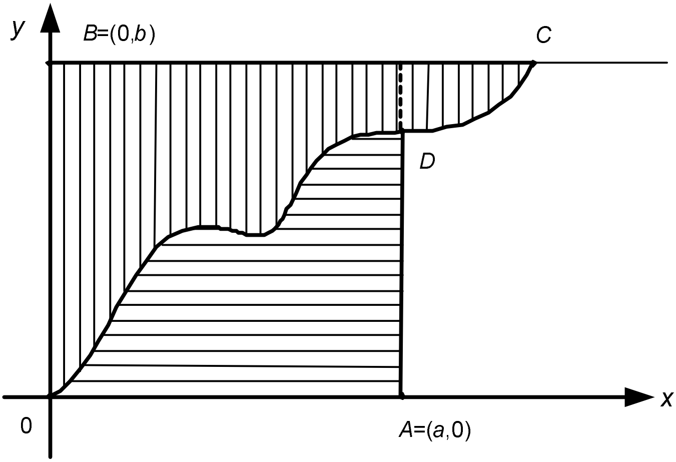


Рис. 19.3. Криволинейные трапеции при $a < c$

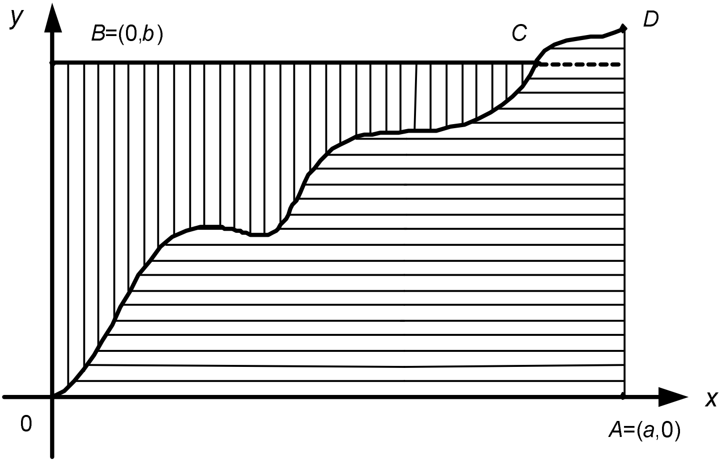


Рис. 19.4. Криволинейные трапеции при $a > c$

П19.21. а) Определим суммарную дисконтированную стоимость данного денежного потока:

$$V(100)=\int_0^{100}5e^{-0.7t}\cdot e^{-0.1t}dt=5\int_0^{100}e^{-0.8t}dt=5\frac{e^{-0.8t}}{-0.8}\bigg|_0^{100}\approx\frac{25}{4}e^0=6.25 \text{ ден. ед.}$$

Поэтому чистая текущая ценность проекта составит 6.25 – 5 = 1.25 ден. ед.

б) Определим количество израсходованного товара за время t: $V(t)=\int_0^t 2t\,dt=t^2$. Определим время, за которое будет исчерпан весь товар на складе: $400=V(t)$, $400=t^2$, $t=20$. Определим полные издержки хранения всей партии товара:

$$Q=\int_0^{20}3(400-t^2)dt=3\left(400t-\frac{t^3}{3}\right)\bigg|_0^{20}=16\,000 \text{ ден. ед.}$$

в) Изобразим искомую фигуру на координатной плоскости (рис. 19.5).

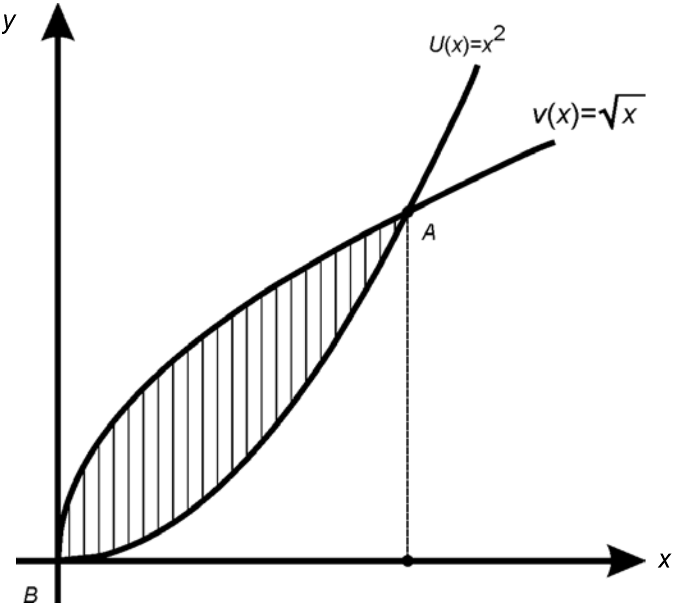


Рис. 19.5. Криволинейная трапеция *BAB*

Точки пересечения кривых $v(x)$ и $u(x)$ $B = (0, 0)$ и $A = (1, 1)$ определяются посредством решения уравнения $u(x) = v(x)$:

$$x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 = x \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3(x-1) = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, y = 0 \\ x = 1, y = 1 \end{array} \right. .$$

Площадь криволинейной трапеции BAB равна:

$$\int_0^1 \left(v(x) - u(x)\right) dx = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \left. \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right) \right|_0^1 = \left. \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^3}{3} \right) \right|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

г) Изобразим искомую криволинейную трапецию на координатной плоскости (рис. 19.6).

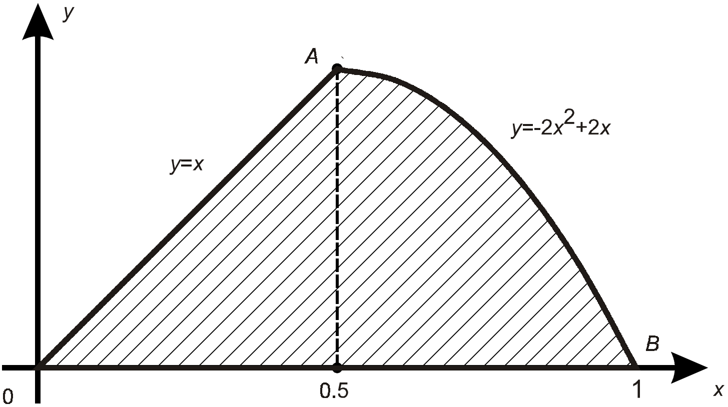


Рис. 19.6. Криволинейная трапеция OAB

Площадь криволинейной трапеции OAB равна:

$$\int_0^1 u(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} xdx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (-2x^2 + 2x)dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^{\frac{1}{2}} + \left. \left(x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right) \right|_{\frac{1}{2}}^1 =$$

$$= \frac{1}{8} + \left(1 - \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} \right) \right) = \frac{7}{24}.$$

Глава 20

Двойной интеграл

Множество, состоящее только из внутренних точек, называется открытым. Следуя традиции, в пространстве Af^2 открытые и замкнутые множества будем называть областями (соответственно открытыми и замкнутыми).

Пусть функция $f(x, y)$ определена и ограничена на ограниченной замкнутой области $\mathfrak{I}$. Поместим эту область в некоторый двумерный промежуток — прямоугольник $\mathfrak{R} = [a; b] \times [c; d]$ (это всегда можно сделать ввиду утверждения задачи T1.3). Если теперь $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $P = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$ — разбиения отрезков $[a; b]$, $[c; d]$ соответственно ($a = x_0 < x_1 <\ldots< x_{n-1} < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 <\ldots< y_{m-1} < y_m = d$), то пара множеств (T, P) называется разбиением прямоугольника $\mathfrak{R}$, а двумерные промежутки $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{k-1}, y_k]$ — (i, k)-ми прямоугольниками этого разбиения. Если (i, k)-й прямоугольник имеет непустое пересечение с областью $\mathfrak{I}$, то это пересечение назовем частичной областью с координатой (i, k), соответствующей разбиению (T, P), а ее площадь обозначим s_{ik}; если же (i, k)-й прямоугольник не "задевает" области $\mathfrak{I}$, то считаем, что частичной области с координатой (i, k) просто не существует. Условимся также обозначать множество всех координат существующих частичных областей, соответствующих разбиению (T, P), через $j(T, P)$. На рис. 20.1 отсутствуют частичные области с координатами (4, 1) и (4, 4); таким образом, $j(T, P)$ содержит все пары (i, k), $1 \le i \le 4$, $1 \le k \le 4$, кроме (4, 1), (4, 4).

Обозначим через $m_{ik}(f)$ и $M_{ik}(f)$ соответственно точные нижнюю и верхнюю грани множества значений функции $f(x, y)$ на частичной области с координатой (i, k), $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, m$. Составим две суммы, соответствующие разбиению (T, P):

$$S_{T,P}(f) = \sum_{(i,k)\in j(T,P)} m_{ik}(f) \cdot s_{ik}\,, \qquad S^{T,P}(f) = \sum_{(i,k)\in j(T,P)} M_{ik}(f) \cdot s_{ik}\,.$$

Первая из этих сумм называется нижней суммой Дарбу, вторая — верхней суммой Дарбу функции f на области $\Im$.

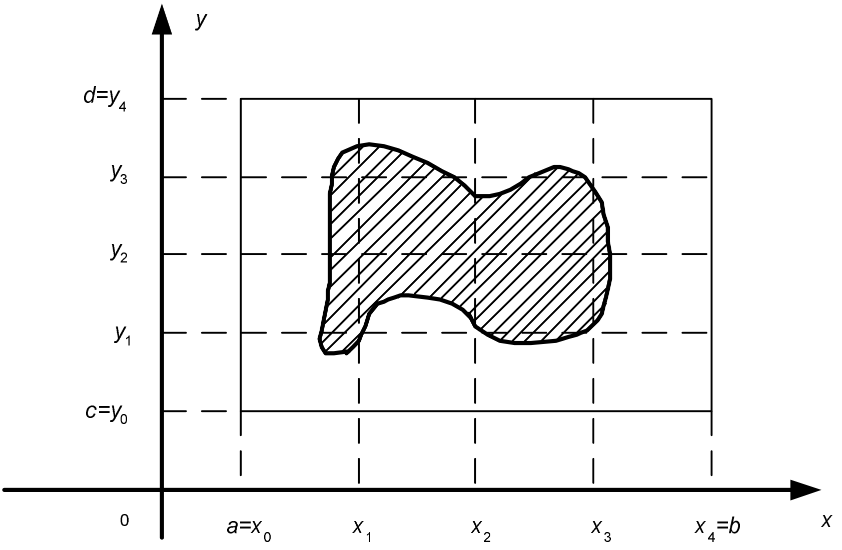


Рис. 20.1. Разбиение области $\Im$

Чтобы избежать громоздких выражений, условимся обозначения $m_{ik}(f)$, $M_{ik}(f)$, $S_{T,P}(f)$, $S^{T,P}(f)$ записывать короче m_{ik}, M_{ik}, $S_{T,P}$, $S^{T,P}$ в тех случаях, когда из контекста ясно, о какой функции f идет речь.

Геометрически сумма $S_{T,P}$ равна объему цилиндрического ступенчатого бруса (ступеньки — параллелепипеды или их фрагменты, опирающиеся на частичные области), "вписанного" в цилиндрическую фигуру, ограниченную снизу областью $\Im$ и сверху — поверхностью $z = f(x, y)$, а сумма $S^{T,P}$ равна объему цилиндрического ступенчатого бруса, "описанного" около этой цилиндрической фигуры. На рис. 20.2 показан фрагмент из двух ступенек — параллелепипедов $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и $ABCDA_2B_2C_2D_2$, объемы которых равны $m_{ik} \cdot s_{ik}$ и $M_{ik} \cdot s_{ik}$ соответственно.

Очевидно, $S^{T,P} - S_{T,P} = \sum\limits_{(i,k)\in j(T,P)} \left(M_{ik} - m_{ik}\right) \cdot s_{ik} \geq 0$.

Будем говорить, что разбиение (Q, R) прямоугольника $\Re$ мельче его разбиения (T, P), если (Q, R) получается из (T, P) добавлением конечного числа новых точек.

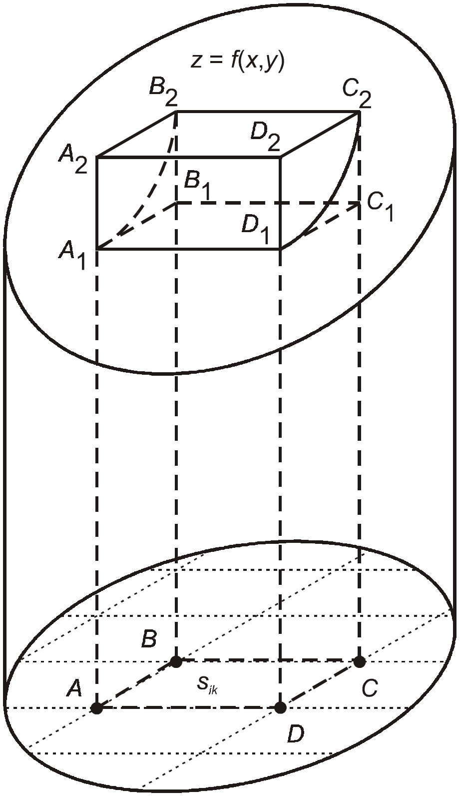


Рис. 20.2. Геометрическая интерпретация верхней и нижней сумм Дарбу

Лемма 20.1.

1. Если разбиение (Q, R) мельче разбиения (T, P), то $S_{T, P} \le S_{Q, R} \le S^{Q, R} \le S^{T, P}$.
2. Для любых двух разбиений (Q, R) и (L, M) прямоугольника $\mathfrak{R}$ верно $S_{Q, R} \le S^{L, M}$.

Доказательство. 1. Без ограничения общности доказательства можно считать, что разбиение (Q, R) получено из (T, P) добавлением одной новой точки, т. е. $P = R = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$, $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $Q = \{x_0, x_1, \ldots, x_{r-1}, z, x_r, \ldots, x_n\}$.

Измельчение разбиения (T, P) точкой z может лишь затронуть частичные области этого разбиения с координатами (r, k), где $1 \le k \le m$. Рассмотрим одну из таких частичных областей:

$\mathfrak{I}_{rk} = \mathfrak{I} \cap ([x_{r-1}; x_r] \times [y_{k-1}, y_k]);$

обозначим также

$\Im'_{rk} = \Im \cap ([x_{r-1}; z] \times [y_{k-1}; y_k])$, $\Im''_{rk} = \Im \cap ([z; x_r] \times [y_{k-1}; y_k])$.

Возможны два случая:

а) $\Im'_{rk} \neq \varnothing$, $\Im''_{rk} \neq \varnothing$ (рис. 20.3); б) одно из множеств $\Im'_{rk}$, $\Im''_{rk}$ пусто (рис. 20.4).

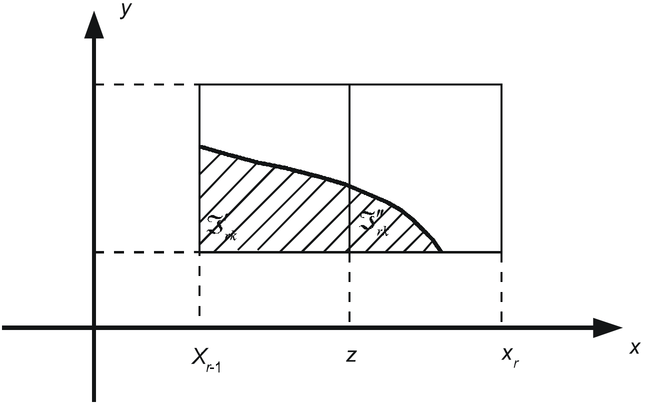


Рис. 20.3. Частичные области $\Im'_{rk}$, $\Im''_{rk}$

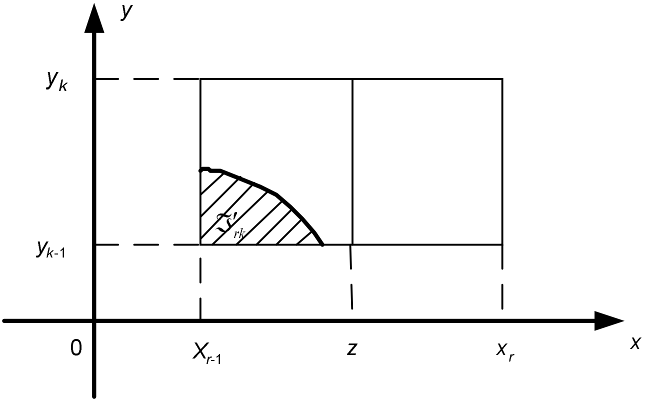


Рис. 20.4. Частичная область $\Im'_{rk}$ ($\Im''_{rk}$ — пустое множество)

Пусть имеет место ситуация а). Обозначим *a*, *b*, *c* — точные нижние грани множества значений функции *f* на областях $\Im_{rk}$, $\Im'_{rk}$, $\Im''_{rk}$, с площадями s_{rk}, s'_{rk} , s''_{rk} соответственно. Так как $a \le b$, $a \le c$, то $b \cdot s'_{rk} + c \cdot s''_{rk} - a \cdot s_{rk} \ge a\left(s'_{rk} + s''_{rk} - s_{rk}\right) = 0$.

В ситуации б) при $\Im''_{rk} = \varnothing$ (полагаем, что в этом случае $s''_{ik} = 0$) $a = b$, $s_{rk} = s'_{rk}$ и, следовательно, $b \cdot s'_{rk} + c \cdot s''_{rk} - a \cdot s_{rk} = 0$.

В итоге имеем: $S_{Q,R} - S_{T,P} = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\left(b \cdot s'_{rk} + c \cdot s''_{rk}\right) - a \cdot s_{rk}\right) \ge 0$.

Аналогично показывается, что $S^{Q,\,R} \le S^{T,\,P}$.

2. В силу предыдущего утверждения

$S_{Q,\,R} \le S_{Q \cup L,\,R \cup M} \le S^{Q \cup L,\,R \cup M} \le S^{L,\,M}$.

Лемма доказана.

Обозначим через $S_{**} = S_{**}(f)$ — точную верхнюю грань множества нижних сумм Дарбу, а через $S^{**} = S^{**}(f)$ — точную нижнюю грань множества верхних сумм Дарбу функции $f(x, y)$ на области $\Im$. Из леммы 20.1 следует, что все числа из промежутка $[S_{**}; S^{**}]$ и только они разделяют два множества — множества всех нижних и всех верхних сумм Дарбу функции f на области $\Im$, т. е. для любых разбиений (T, P) и (Q, R) прямоугольника $\Re$, содержащего $\Im$, $S_{T,\,P} \le S_{**} \le S^{**} \le S^{Q,\,R}$.

Итак, пусть функция $f(x, y)$ определена и ограничена на ограниченной замкнутой области $\Im$. Если $S_{**} = S^{**}$, то единственное число (оно совпадает с S_{**} и S^{**}), разделяющее множества нижних и верхних сумм Дарбу функции f на области $\Im$, называется двойным интегралом функции $f(x, y)$ на области $\Im$ и обозначается $\iint\limits_{\Im} f(x, y)dxdy$. При этом сама функция $f(x, y)$ называется интегрируемой на области $\Im$.

С геометрической точки зрения, в случае $f(x, y) \ge 0$ (см. рис. 20.2) число $\iint\limits_{\Im} f(x, y)dxdy$ равно объему цилиндрической фигуры, ограниченной снизу областью $\Im$, а сверху поверхностью $z = f(x, y)$.

Аналогом теоремы 17.1 является следующее утверждение.

Теорема 20.1 (критерий интегрируемости). Пусть функция $f(x, y)$ определена и ограничена на ограниченной замкнутой области $\Im$. Зафиксируем прямоугольник $\Re$, содержащий область $\Im$. Тогда $f(x, y)$ интегрируема на области $\Im$, если и только если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется разбиение (T, P) прямоугольника $\Re$, при котором $S^{T,\,P} - S_{T,\,P} < \varepsilon$.

Доказательство теоремы дано в задаче Т20.1.

Следствие 20.1 (линейность двойного интеграла).

Пусть k — произвольное, не равное нулю число. Тогда функция $f(x, y)$ интегрируема на области $\Im$, если и только если функция $k \cdot f(x, y)$ интегрируема на этой области; при этом $\iint\limits_{\Im} k \cdot f(x,y)dxdy = k\iint\limits_{\Im} f(x,y)dxdy$.

Если функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы на области $\Im$, то

$$\iint\limits_{\Im}\big(f(x,y)+g(x,y)\big)dxdy = \iint\limits_{\Im} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{\Im} g(x,y)dxdy.$$

Доказательство следствия дано в задаче Т20.2.

Следствие 20.2. Если функция $f(x, y)$ непрерывна на ограниченной замкнутой области $\Im$, то она интегрируема на этой области.

Доказательство следствия дано в задаче Т20.3.

Рассмотрим замкнутую область $\Im$ — криволинейную трапецию, содержащуюся в прямоугольнике $\Re = [a; b] \times [c; d]$ и ограниченную прямыми $x = a$, $x = b$ и непрерывными кривыми $y = u(x)$, $y = v(x)$, где $u(x) \le v(x)$ при всех $x \in [a; b]$ (рис. 20.5).

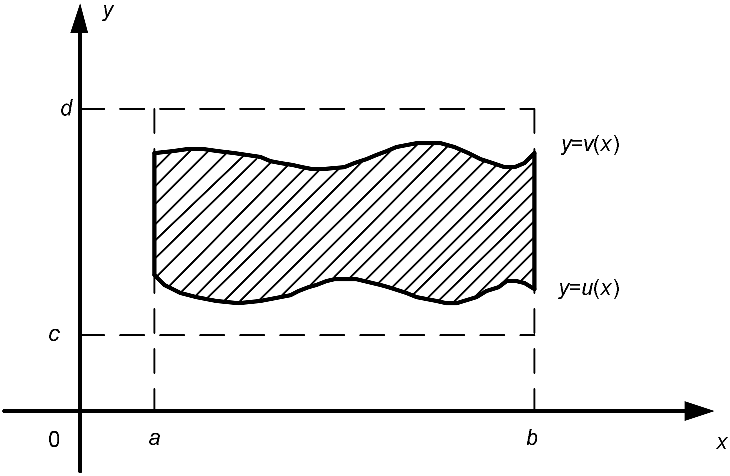


Рис. 20.5. Криволинейная трапеция $\Im$

Пусть функция $f(x, y)$ определена и ограничена на этой области $\mathfrak{I}$. Определим функцию $\bar{f}(x,y)$ на прямоугольнике $\mathfrak{R}$:

$$\bar{f}(x,y)=\begin{cases} f(x,y), \text{ если } (x,y)\in\mathfrak{I}, \\ 0, \text{ если } (x,y)\in\mathfrak{R}\setminus\mathfrak{I}. \end{cases}$$

Лемма 20.2. Функция $f(x, y)$ интегрируема на области $\mathfrak{I}$, если и только если функция $\bar{f}(x,y)$ интегрируема на области $\mathfrak{R}$, при этом

$$\iint\limits_{\mathfrak{R}} \bar{f}(x,y)dxdy=\iint\limits_{\mathfrak{I}} f(x,y)dxdy.$$

Доказательство леммы дано в задаче T20.5.

Теорема 20.2 (о повторном интегрировании). Пусть замкнутая область $\mathfrak{I}$ — криволинейная трапеция, ограниченная прямыми $x = a$, $x = b$ и непрерывными кривыми $y = u(x)$, $y = v(x)$, где $u(x) \le v(x)$ при всех $x \in [a; b]$ (рис. 20.5). Если функция $f(x, y)$ интегрируема на области $\mathfrak{I}$ и при каждом $x \in [a; b]$ существует определенный интеграл $G(x)=\int\limits_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)dy$, то

$$\iint\limits_{\mathfrak{I}} f(x,y)dxdy=\int\limits_{a}^{b}\left(\int\limits_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)dy\right)dx.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{R} = [a; b] \times [c; d]$ — прямоугольник, содержащий область $\mathfrak{I}$, (T, P) — произвольное его разбиение, $T = \{x_0, x_1 ,\ldots, x_n\}$, $P = \{y_0, y_1,\ldots, y_m\}$. Так как для любой точки (x, y) (i, k)-го прямоугольника верно $m_{ik}\left(\bar{f}\right)\le \bar{f}(x,y)\le M_{ik}\left(\bar{f}\right)$, то согласно утверждению задачи T17.8,

$$m_{ik}\left(\bar{f}\right)\cdot\Delta y_k \le \int\limits_{y_{k-1}}^{y_k}\bar{f}(x,y)\,dy \le M_{ik}\left(\bar{f}\right)\cdot\Delta y_k \text{ при любом } x\in[x_{i-1}; x_i].$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{m} m_{ik}\left(\bar{f}\right)\cdot\Delta y_k \le \sum_{k=1}^{m}\int\limits_{y_{k-1}}^{y_k}\bar{f}(x,y)\,dy \le \sum_{k=1}^{m} M_{ik}\left(\bar{f}\right)\cdot\Delta y_k \text{ при любом } x\in[x_{i-1}; x_i].$$

Но для каждого такого x в силу следствия 17.2 и определения функции $\bar{f}(x,y)$

$$\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{y_{k-1}}^{y_k}\bar{f}(x,y)\,dy=\int\limits_{c}^{d}\bar{f}(x,y)\,dy=\int\limits_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)dy=G(x).$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{m} m_{ik}\left(\bar{f}\right)\cdot \Delta y_k \le G(x) \le \sum_{k=1}^{m} M_{ik}\left(\bar{f}\right)\cdot \Delta y_k \text{ при любом } x \in [x_{i-1}; x_i].$$

Если обозначить теперь через $m_i(G)$ и $M_i(G)$ точные нижнюю и верхнюю грани множества значений функции $G(x)$ на i-м частичном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$, то

$$\sum_{k=1}^{m} m_{ik}\left(\bar{f}\right)\cdot \Delta y_k \le m_i(G) \le M_i(G) \le \sum_{k=1}^{m} M_{ik}\left(\bar{f}\right)\cdot \Delta y_k .$$

Отсюда имеем:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} m_{ik}\left(\bar{f}\right)\cdot \Delta y_k\right)\cdot \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} m_i(G)\cdot \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i(G)\cdot \Delta x_i \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} M_{ik}\left(\bar{f}\right)\cdot \Delta y_k\right)\cdot \Delta x_i$$

$$S_{T,P}\left(\bar{f}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} m_{ik}\left(\bar{f}\right) s_{ik} \le S_T(G) \le S^T(G) \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} M_{ik}\left(\bar{f}\right)\cdot s_{ik} \le S^{T,P}\left(\bar{f}\right)$$

$$S_{T,P}\left(\bar{f}\right) \le S_T(G) \le S^T(G) \le S^{T,P}\left(\bar{f}\right).$$

Поскольку разбиение (T, P) прямоугольника $\mathfrak{R}$ было выбрано произвольным, можно воспользоваться утверждениями задач T4.11, T4.12, из которых следует:

$$S_{**}\left(\bar{f}\right) \le S_*(G) \le S^*(G) \le S^{**}\left(\bar{f}\right). \tag{20.1}$$

По условию $f(x, y)$ интегрируема на $\mathfrak{I}$, отсюда $\bar{f}$ интегрируема на области $\mathfrak{R}$ (лемма 20.2), т. е. $S_{**}\left(\bar{f}\right) = S^{**}\left(\bar{f}\right)$ и, следовательно, ввиду равенства (20.1) $S_*(G) = S^*(G) = S_{**}\left(\bar{f}\right) = S^{**}\left(\bar{f}\right)$. Таким образом, с учетом леммы 20.2 имеем:

$$\iint\limits_{\mathfrak{I}} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{\mathfrak{R}} \bar{f}(x, y)dxdy = \int_a^b G(x)dx = \int_a^b\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y)dy\right)dx .$$

Теорема доказана.

Теорему 20.2 можно "симметрично" переформулировать следующим образом.

Теорема 20.3. Пусть дана замкнутая область $\Im$, ограниченная прямыми $y = c$, $y = d$ и непрерывными кривыми $x = t(y)$, $x = w(y)$, где $w(y) \geq t(y)$ при всех $y \in [c; d]$ (рис. 20.6). Если функция $f(x, y)$ интегрируема на области $\Im$ и при каждом $y \in [c; d]$ существует определенный интеграл

$$T(y) = \int_{t(y)}^{w(y)} f(x, y)dx\text{, то } \iint_{\Im} f(x, y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{t(y)}^{w(y)} f(x, y)dx \right) dy.$$

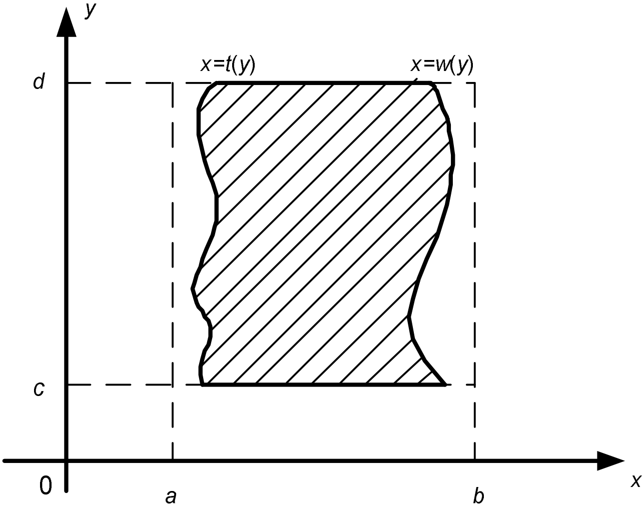


Рис. 20.6. Область интегрирования $\Im$

Компьютерный раздел

Для вычисления двойных интегралов используется кнопка $\int_a^b$ подпанели **Матанализ** (Calculus): двойной щелчок этой кнопкой вызывает шаблон $\int_{\blacksquare}^{\blacksquare}\int_{\blacksquare}^{\blacksquare}\blacksquare\, d\blacksquare\, d\blacksquare$, на месте меток которого вводятся пределы интегрирования, подынтегральная функция и переменные интегрирования. При этом следует помнить, что первая переменная интегрирования относится к внутреннему интегралу. Например, запись $\int\limits_0^1\int\limits_2^3 f(x,y)dydx$ означает, что переменная y относится к внутреннему интегралу $\int\limits_2^3 f(x,y)dy$.

Если предполагается, что результатом вычисления интеграла будет константа, то для вычисления этого интеграла в Mathcad целесообразно использовать знак равенства =. Если же предполагается, что результатом вычисления интеграла будет функция, зависящая от некоторой переменной или параметра, то следует для его вычисления использовать знак символьного вывода →. Например:

$$\int_0^1\int_0^1 x\cdot y^2dydx = \frac{1}{6} \qquad \int_0^a\int_0^b x\cdot y^2dydx = \frac{1}{6}\cdot a^2\cdot b^3$$

$$\int_0^a\int_0^b x\cdot y^2dxdy \rightarrow \frac{1}{6}\cdot a^3\cdot b^2$$

Кнопка solve подпанели **Символы** (**Symbolic**) *(см. "Компьютерный раздел" гл. 11)* служит для символьного решения уравнений. В случае многозначности решений какого-либо уравнения символьный результат будет представлен вектором, координаты которого — решения этого уравнения. Пусть, например, требуется решить уравнение $x^2+y^2+z^2=1$ относительно z и в дальнейшем использовать символьный результат решения. Введите идентификатор функции $f(x, y)$ двух переменных x, y и знак присваивания :=. Затем кнопкой solve вызовите шаблон ▪ solve,▪ →. На месте левой метки шаблона введите выражение $x^2+y^2+z^2=1$, на месте правой — переменную z. После нажатия клавиши <Enter> на экране получите следующее выражение:

$$r(x,y) := x^2+y^2+z^2=1 \quad solve, z \rightarrow \begin{bmatrix} \left(-x^2-y^2+1\right)^{\frac{1}{2}} \\ -\left(-x^2-y^2+1\right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

Теперь можно вычислять значения переменной z при различных значениях переменных x и y. Например, если $x = y = 0.5$, то

$$r(0.5,\ 0.5) = \begin{pmatrix} 0.707 \\ -0.707 \end{pmatrix}$$

Можно также получить координаты вектора $r(x,\ y)$ по отдельности:

$$r(x,y)_1 \rightarrow \left(-x^2-y^2+1\right)^{\frac{1}{2}} \qquad r(x,y)_2 \rightarrow -\left(-x^2-y^2+1\right)^{\frac{1}{2}}$$

Задачи для самостоятельного решения

Т20.1. Доказать теорему 20.1.

Т20.2. Доказать следствие 20.1.

Т20.3. Доказать следствие 20.2.

Т20.4. Пусть непрерывная кривая $y = w(x)$ содержится в прямоугольнике $\mathfrak{R} = [a; b] \times [c; d]$ (рис. 20.7), а P — произвольное фиксированное разбиение отрезка $[c; d]$. Доказать, что существует такое число $\delta > 0$, что для любого разбиения T отрезка $[a; b]$, для которого $\max(T) < \delta$, сумма площадей всех (i, k)-х прямоугольников разбиения (T, P), имеющих общие точки с кривой $y = w(x)$, не превосходит $2(b - a) \cdot \max(P)$ (где через $\max(T)$ ($\max(P)$) обозначена длина наибольшего из частичных отрезков разбиения T (P)).

Т20.5. Доказать лемму 20.2.

Т20.6. Пусть $\mathfrak{I} = [a; b] \times [c; d]$ и функции $f(x)$ и $g(y)$ непрерывны соответственно на отрезках $[a; b]$ и $[c; d]$. Доказать, что

$$\iint\limits_{\mathfrak{I}} f(x) \cdot g(y)\, dxdy = \int\limits_a^b f(x)dx \cdot \int\limits_c^d g(y)dy.$$

Т20.7. Пусть $f(x, y) = F''_{xy}(x, y)$, $\mathfrak{I} = [a; b] \times [c; d]$. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{\mathfrak{I}} f(x, y)\, dxdy$ при условии, что $f(x, y)$ интегрируема на области $\mathfrak{I}$.

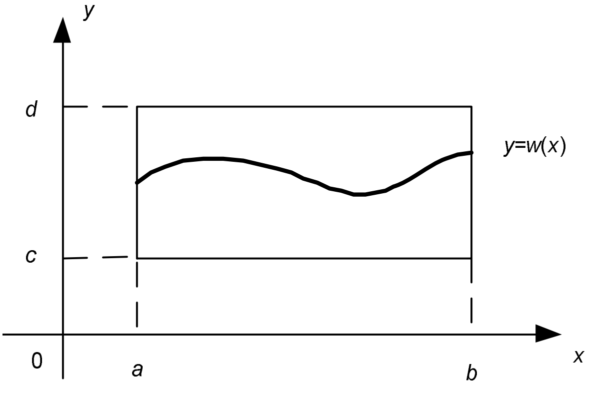


Рис. 20.7. Кривая $y = w(x)$ в прямоугольнике $\mathfrak{R}$

Т20.8. Пусть m, n — два натуральных числа, одно из которых нечетно. Доказать, что если область $\Im$ задается неравенством $x^2 + y^2 \le R^2$, то $\iint\limits_{\Im} x^m y^n \, dxdy = 0$.

Т20.9. Доказать, что площадь криволинейной трапеции $\Im$ равна $\iint\limits_{\Im} dxdy$.

Т20.10. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на области $\Im$, ограниченной прямыми $y = x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = r$, $r > 0$ (рис. 20.8). Доказать, что

$$\int_0^r \left(\int_0^x f(x, y) dy \right) dx = \int_0^r \left(\int_y^r f(x, y) dx \right) dy .$$

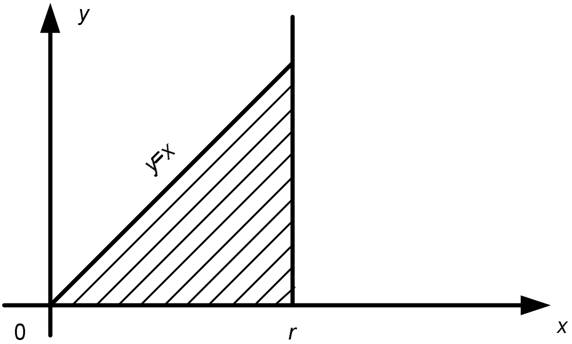


Рис. 20.8. Область интегрирования $\Im$

Т20.11. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0; r]$. Доказать, что

$$\int_0^r \left(\int_0^y f(x) dx \right) dy = \int_0^r (r - x) f(x) dx .$$

Общая формулировка задач П20.1—П20.21

Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Im} f(x, y) \, dxdy$.

П20.1. $f(x, y) = \dfrac{1}{(x + y)^2}$, $\Im = [3; 4] \times [1; 2]$.

П20.2. $f(x, y) = 5x^2y - 2y^3$, $\Im = [2; 5] \times [1; 3]$.

П20.3. $f(x, y) = \dfrac{x^2}{1 + y^2}$, $\Im = [0; 1] \times [0; 1]$.

П20.4. $f(x, y) = y^2\sqrt{1 - x^2}$, область $\Im$ — круг радиусом 1 с центром в точке (0, 0).

П20.5. $f(x, y) = x^2 + y$, область $\Im$ ограничена параболами $y = x^2$, $x = y^2$.

П20.6. $f(x, y) = \dfrac{x^2}{y^2}$, область $\Im$ ограничена прямыми $x = 2$, $y = x$, $x = 1$ и гиперболой $y = \dfrac{1}{x}$.

П20.7. $f(x, y) = \cos(x + y)$, область $\Im$ ограничена прямыми $x = 0$, $y = \pi$, $y = x$.

П20.8. $f(x, y) = x\cos(x + y)$, область $\Im$ ограничена прямыми $y = 0$, $x = \pi$, $y = x$.

П20.9. $f(x, y) = 2x + y$, область $\Im$ ограничена прямыми $x = 0$, $y = 0$, $y + x = 3$.

П20.10. $f(x, y) = x + 6y$, область $\Im$ ограничена прямыми $y = x$, $y = 5x$, $x = 1$.

П20.11. $f(x, y) = 1$, область $\Im$ ограничена кривыми $y = 3\sqrt{x}$, $y = \dfrac{3x^2}{8}$.

П20.12. $f(x, y) = x + y + 3$, область $\Im$ ограничена прямыми $x = 0$, $y = 0$, $y + x = 2$.

П20.13. $f(x, y) = x + 6y$, область $\Im$ ограничена прямыми $y = x$, $x = 2$, $y = 3x$.

П20.14. $f(x, y) = x^2 + 2y$, $\Im = [0; 2] \times [0; 1]$.

П20.15. $f(x, y) = x$, точки (x, y) области $\Im$ удовлетворяют неравенствам $y \le 2$, $y \ge x^2$.

П20.16. $f(x, y) = x$, область $\Im$ ограничена прямой $y = 0$ и кривой $y = \sqrt{4 - x^2}$.

П20.17. $f(x,y)=x^2$, точки (x,y) области $\Im$ удовлетворяют неравенствам $x\le 2, y\le x,\ y\ge\dfrac{1}{x}$.

П20.18. $f(x, y) = 1$, точки (x, y) области $\Im$ удовлетворяют неравенствам $y\ge x^2-3x,\ y\le -3x+4$.

П20.19. $f(x,y)=x-2y$, область $\Im$ ограничена прямыми $x = 0$, $y = 7 - x$, $y=\dfrac{1}{2}x+1$.

П20.20. $f(x, y) = 2$, область $\Im$ ограничена кривыми $y=x^2$, $y=x^2-2$ и прямыми $x = 0$, $x = 2$.

П20.21. $f(x,y)=\sqrt{1-y}$, точки (x, y) области $\Im$ удовлетворяют неравенствам $y\ge x, y\ge -x, 0\le y\le 1$.

Общая формулировка задач К20.1—К20.11

Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Im} r(x,y)dxdy$, где точки (x, y) области интегрирования $\Im$ удовлетворяют неравенствам $f(x, y)\ge 0$ и $g(x, y)\le 0$.

К20.1. $f(x, y) = x - y^2 + 8$, $g(x, y) = x^3 + y^3 + x + y - 25$, $r(x, y) = y \sin x + y^2$.

К20.2. $f(x, y) = x + y - 4$, $g(x, y) = x^3 + y^2 + x - y - 10$, $r(x, y) = x^4 - \ln(x^2 + y^2 + 1)$.

К20.3. $f(x, y) = 3y + x - 4$, $g(x, y) = x^2 + y^3 + x + y - 10$, $r(x, y) = x^2 + y^2$.

К20.4. $f(x, y) = y - x^2 + 4$, $g(x, y) = x^2 + y^3 + x + y - 20$, $r(x, y) = \cos^3(xy)$.

К20.5. $f(x, y) = y - 4x^2$, $g(x, y) = x^2 + y^3 + 2x + 6y - 20$, $r(x, y) = \operatorname{arctg}^8(x^2y)$.

К20.6. $f(x, y) = x - 4y^2$, $g(x, y) = x^3 + y^2 + 6x + 2y - 20$,
$r(x,y)=\dfrac{1}{\ln^3(x^4+y^4+5)}$.

К20.7. $f(x, y) = x - y^2 + 2$, $g(x, y) = x^2 + y^2 + x + y - 25 + xy$,
$r(x,y)=e^{x^2\cdot\sin(x+y)}$.

K20.8. $f(x, y) = y - x^2 + 3$, $g(x, y) = x^2 + y^2 + x + y - 25 + xy$,

$$r(x, y) = \frac{e^{y^2}}{x^2 + y^4 + 1}.$$

K20.9. $f(x, y) = x - y^2$, $g(x, y) = xy^4 + x + y - 25$, $r(x, y) = \dfrac{1}{\sin^2(x^2 + y^2) + 1}$.

K20.10. $f(x, y) = y^2 - x$, $g(x, y) = x^4y + x + y - 13$, $r(x, y) = \dfrac{xe^{-y^2}}{\sin^2 x + 5}$.

K20.11. $f(x, y) = x - y^2 + 4$, $g(x, y) = x^2 + y^2 + x + y - 25$, $r(x, y) = xy$.

Ответы, указания, решения

T20.1. Указание: доказательство проводится по аналогии с доказательством теоремы 17.1.

T20.2. Указание: доказательство проводится по аналогии с доказательством следствия 17.1.

T20.3. Пусть $\mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{R}$, $\mathfrak{R} = [a; b] \times [c; d]$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Согласно следствию 5.1, найдется такое число $\delta > 0$, что для любых двух точек A, B из $\mathfrak{I}$, расстояние между которыми меньше 2δ, верно $\dfrac{|f(A) - f(B)|}{(b-a)(d-c)} < \varepsilon$. Это означает, что если (T, P) — произвольное разбиение прямоугольника $\mathfrak{R}$, при котором диагональ любого (i, k)-го прямоугольника меньше 2δ, то амплитуда функции f на произвольной частичной области, соответствующей разбиению (T, P), будет меньше $\dfrac{\varepsilon}{(b-a)(d-c)}$. Отсюда имеем:

$$S^{T,P} - S_{T,P} = \sum_{(i,k)\in j(T,P)} \left(M_{ik} - m_{ik}\right) \cdot s_{ik} < \sum_{(i,k)\in j(T,P)} \frac{\varepsilon}{(b-a)(d-c)} \cdot s_{ik} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{(b-a)(d-c)} \cdot \sum_{(i,k)\in j(T,P)} s_{ik} \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{(b-a)(d-c)} \cdot (b-a)(d-c) = \varepsilon.$$

Интегрируемость функции $f(x, y)$ следует теперь из теоремы 20.1.

Т20.4. Пусть $\min(P)$ — длина наименьшего из частичных отрезков разбиения P. Согласно следствию 5.1, существует такое число $\delta > 0$, что амплитуда функции $w(x)$ будет меньше $\min(P)$ на любом вложенном в $[a; b]$ отрезке, длина которого меньше δ. Пусть $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ — произвольное разбиение отрезка $[a; b]$, для которого $\max(T) < \delta$. Тогда для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ кривая $y = w(x)$ может пересечь не более двух (i, k)-х прямоугольников разбиения (T, P), расположенных один над другим и имеющих общую горизонтальную границу (в противном случае амплитуда функции w на отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ превосходит число $\min(P)$). Поэтому суммарная площадь прямоугольников, пересекаемых кривой $y = w(x)$, не превзойдет величины $\sum\limits_{i=1}^{n} 2\max(P)\cdot\Delta x_i = 2\max(P)\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i = 2\max(P)\cdot(b-a)$.

Т20.5. Предварительно оговорим все обозначения, касающиеся разбиения (T, P) прямоугольника $\mathfrak{R}$, о котором дальше пойдет речь в доказательстве. Во-первых, поскольку область, на которой рассматривается функция $\bar{f}(x, y)$, является прямоугольником, то частичные области соответствующие разбиению (T, P), в данном случае совпадают с (i, k)-ми прямоугольниками. Поэтому, чтобы избегать путаницы с частичными областями для функции $f(x, y)$, рассматриваемой на области $\mathfrak{I}$, условимся площади (i, k)-х прямоугольников обозначать p_{ik} (в отличие от площадей s_{ik} частичных областей, определяемых областью $\mathfrak{I}$).

Во-вторых, все (i, k)-е прямоугольники можно разбить на три группы: 1) содержащиеся целиком в области $\mathfrak{I}$; 2) не имеющие общих точек с областью $\mathfrak{I}$; 3) имеющие общие точки хотя бы с одной из кривых $y = u(x)$, $y = v(x)$ и не попадающие в первые две группы. Множества координат прямоугольников из этих групп обозначим соответственно J_1, J_2, J_3.

Предположим вначале интегрируемость функции f на области $\mathfrak{I}$. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$ и обозначим через W амплитуду функции $\bar{f}(x, y)$ на области $\mathfrak{R}$. Согласно теореме 20.1, существует разбиение (T, P) прямоугольника $\mathfrak{R}$, для которого $S^{T,P}(f) - S_{T,P}(f) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Поскольку это неравенство сохраняет свою силу и для более мелких разбиений (лемма 20.1), то будем считать, что для разбиения (T, P) $\max(P) < \dfrac{\varepsilon}{8W(b-a)}$ и $\max(T) < \delta$, где δ выбирается в соответствии с утверждением задачи Т20.4: сумма площадей всех (i, k)-х прямоугольников, где $(i, k) \in J_3$, не должна превосходить $2\cdot 2(b-a)\cdot\max(P) < \dfrac{\varepsilon}{2W}$.

Если $(i, k) \in J_1$, то $M_{ik}\left(\bar{f}\right)= M_{ik}(f)$, $m_{ik}\left(\bar{f}\right)= m_{ik}(f)$, $p_{ik} = s_{ik}$. Если $(i, k) \in J_2$, то $M_{ik}\left(\bar{f}\right)= m_{ik}\left(\bar{f}\right)= 0$. Если $(i, k) \in J_3$, то $M_{ik}\left(\bar{f}\right)- m_{ik}\left(\bar{f}\right)\geq M_{ik}(f)- m_{ik}(f)$. Отсюда имеем:

$$\left(S^{T,P}\left(\bar{f}\right)- S_{T,P}\left(\bar{f}\right)\right)-\left(S^{T,P}(f)- S_{T,P}(f)\right)= \sum_{(i,k)\in J_3}\left(M_{ik}\left(\bar{f}\right)- m_{ik}\left(\bar{f}\right)\right)\cdot p_{ik} -$$

$$- \sum_{(i,k)\in J_3}\left(M_{ik}(f)- m_{ik}(f)\right)\cdot s_{ik} \leq \sum_{(i,k)\in J_3}\left(M_{ik}\left(\bar{f}\right)- m_{ik}\left(\bar{f}\right)\right)\cdot p_{ik} \leq W\cdot \sum_{(i,k)\in J_3} p_{ik} < W\cdot\frac{\varepsilon}{2W}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно,

$$S^{T,P}\left(\bar{f}\right)- S_{T,P}\left(\bar{f}\right)=\left(S^{T,P}\left(\bar{f}\right)- S_{T,P}\left(\bar{f}\right)\right)-\left(S^{T,P}(f)- S_{T,P}(f)\right)+$$

$$+\left(S^{T,P}(f)- S_{T,P}(f)\right)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

что и означает интегрируемость функции $\bar{f}(x, y)$ на области $\Re$ в силу теоремы 20.1.

Предположим теперь интегрируемость функции $\bar{f}(x, y)$ на области $\Re$, и пусть (T, P) — произвольное разбиение прямоугольника $\Re$. Очевидно, для любого $(i, k) \in J_3$ либо $M_{ik}(f)< M_{ik}\left(\bar{f}\right)= 0$, либо $0\leq M_{ik}(f)= M_{ik}\left(\bar{f}\right)$. В любом из этих случаев $M_{ik}(f)\cdot s_{ik}\leq M_{ik}\left(\bar{f}\right)\cdot p_{ik}$. Если $(i, k) \in J_1$, то $M_{ik}(f)\cdot s_{ik} = M_{ik}\left(\bar{f}\right)\cdot p_{ik}$. Если $(i, k) \in J_2$, то $M_{ik}\left(\bar{f}\right)= 0$, и частичной области с координатой (i, k) (относительно $\Im$) просто не существует. Отсюда заключаем, что $S^{T,P}(f)\leq S^{T,P}\left(\bar{f}\right)$ и, следовательно, $S^{**}(f)\leq S^{**}\left(\bar{f}\right)$. Аналогично показывается, что $S_{**}\left(\bar{f}\right)\leq S_{**}(f)$.

В итоге, $S_{**}\left(\bar{f}\right)\leq S_{**}(f)\leq S^{**}(f)\leq S^{**}\left(\bar{f}\right)$. Но ввиду интегрируемости функции $\bar{f}$ $S_{**}\left(\bar{f}\right)= S^{**}\left(\bar{f}\right)$. Поэтому $S_{**}\left(\bar{f}\right)= S_{**}(f)= S^{**}(f)= S^{**}\left(\bar{f}\right)$ или $\iint\limits_{\Re}\bar{f}(x, y)dxdy = \iint\limits_{\Im} f(x, y)dxdy$.

T20.6. Согласно следствию 20.2, функция $f(x) \cdot g(y)$ интегрируема на области $\Im$. Поскольку в данной задаче $v(x) = d$, $u(x) = c$, то по теореме 20.2

$$\iint\limits_{\Im} f(x)\cdot g(y)\, dxdy = \int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x)g(y)dy\right)dx. \qquad (20.2)$$

По следствию 17.4 функция $g(y)$ интегрируема на отрезке $[c; d]$, причем, ввиду следствия 17.1, $\int\limits_c^d f(x)g(y)dy = f(x)\cdot\int\limits_c^d g(y)dy$ при каждом x из $[a; b]$.

В силу того же следствия 17.1 $\int\limits_a^b\left(f(x)\cdot\int\limits_c^d g(y)dy\right)dx = \int\limits_c^d g(y)dy\cdot\int\limits_a^b f(x)dx$, что вместе с (20.2) означает равенство

$$\iint\limits_{\Im} f(x)\cdot g(y)\,dxdy = \int\limits_a^b f(x)dx\cdot\int\limits_c^d g(y)dy\,.$$

T20.7. Воспользуемся теоремой 20.2 и следствиями 20.1, 17.1, 18.2:

$$\iint\limits_{\Im} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d F''_{xy}(x,y)dy\right)dx = \int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d \left(F'_x(x,y)\right)'_y\,dy\right)dx = \int\limits_a^b F'_x\ (x,y)\Big|_c^d\,dx =$$

$$= \int\limits_a^b (F'_x(x,d)-F'_x(x,c))\,dx = \int\limits_a^b F'_x(x,d)\,dx - \int\limits_a^b F'_x(x,c)\,dx = F(x,d)\Big|_a^b - F(x,c)\Big|_a^b =$$

$$= F(b,d)-F(a,d)-F(b,c)+F(a,c)\,.$$

T20.8. Пусть для определенности n нечетно. В данной задаче $y = v(x) = \sqrt{R^2-x^2}$, $y = u(x) = -\sqrt{R^2-x^2}$, $a = -|R|$, $b = |R|$.

Поэтому по теореме 20.2

$$\iint\limits_{\Im} x^m y^n dxdy = \int\limits_{-|R|}^{|R|}\left(\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} x^m y^n dy\right)dx = \int\limits_{-|R|}^{|R|} x^m\left(\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} y^n dy\right)dx = 0\,,$$

т. к. по следствию 18.5 $\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} y^n dy = 0$ (функция y^n нечетная).

T20.9. Указание. Это можно объяснить двумя способами: а) $\iint\limits_{\Im} dxdy$ равен объему цилиндрического бруса, опирающегося на область $\Im$ и ограниченного сверху плоскостью $z = 1$; б) воспользоваться теоремой 20.2 и формулой площади криволинейной трапеции из *гл. 19*.

T20.10. Указание: применить теоремы 20.2 и 20.3.

Т20.11. Как следует из вида повторного интеграла $\int\limits_0^r\left(\int\limits_0^y f(x)dx\right)dy$, его областью интегрирования является треугольник $\Im$, ограниченный горизонтальными прямыми $y = 0$, $y = r$ и прямыми $t(y) = 0$, $w(y) = y$. Отсюда, в силу теорем 20.2, 20.3 и следствия 17.1, получаем

$$\int\limits_0^r\left(\int\limits_0^y f(x)dx\right)dy=\iint\limits_{\Im} f(x)dxdy=\int\limits_0^r\left(\int\limits_x^r f(x)dy\right)dx=\int\limits_0^r f(x)\cdot\left(\int\limits_x^r dy\right)dx=\int\limits_0^r f(x)\cdot y\Big|_x^r dx=$$

$$=\int\limits_0^r (r-x)f(x)dx\,.$$

П20.21. Изобразим область $\Im$ на координатной плоскости (рис. 20.9).

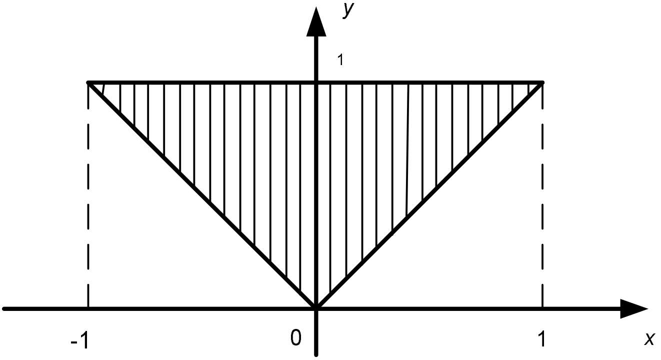


Рис. 20.9. Область интегрирования $\Im$

Вначале решим задачу с помощью теоремы 20.2. Поскольку в данном случае $-1 \le x \le 1$, $v(x) = 1$, $u(x)=\begin{cases} x & \text{при } 0\le x\le 1;\\ -x & \text{при } -1\le x\le 0,\end{cases}$

то $\iint\limits_{\Im}\sqrt{1-y}\;dxdy=\int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_{u(x)}^{v(x)}\sqrt{1-y}\;dy\right)dx=\int\limits_{-1}^{0}\left(\int\limits_{u(x)}^{v(x)}\sqrt{1-y}\;dy\right)dx+$

$$+\int\limits_0^1\left(\int\limits_{u(x)}^{v(x)}\sqrt{1-y}\;dy\right)dx=\int\limits_{-1}^{0}\left(\int\limits_{-x}^{1}\sqrt{1-y}\;dy\right)dx+\int\limits_0^1\left(\int\limits_x^1\sqrt{1-y}\;dy\right)dx=$$

$$= \int\limits_{-1}^{0}\left(-\frac{2}{3}(1-y)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{-x}^{1} dx + \int\limits_{0}^{1}\left(-\frac{2}{3}(1-y)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{x}^{1} dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0}\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\,dx + \int\limits_{0}^{1}\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{4}{15}(1+x)^{\frac{5}{2}}\Bigg|_{-1}^{0} - \frac{4}{15}(1-x)^{\frac{5}{2}}\Bigg|_{0}^{1} = \frac{4}{15}+\frac{4}{15}=\frac{8}{15}.$$

Эту же задачу можно решить и с помощью теоремы 20.3. Поскольку в данном случае $w(y) = y$, $t(y) = -y$, $0 \le y \le 1$, то

$$\iint\limits_{\Im}\sqrt{1-y}\,dxdy = \int\limits_{0}^{1}\left(\int\limits_{t(y)}^{w(y)}\sqrt{1-y}\,dx\right)dy = \int\limits_{0}^{1}\left(\int\limits_{-y}^{y}\sqrt{1-y}\,dx\right)dy = \int\limits_{0}^{1}\sqrt{1-y}\cdot\left(x\Big|_{-y}^{y}\right)dy =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} 2y\sqrt{1-y}\,dy.$$

Пусть $y = \varphi(t) = 1 - t^2$. Тогда $[0;\ 1]\xrightarrow{\varphi}[0;\ 1]$, причем $\varphi(0) = 1$, $\varphi(1) = 0$. Поэтому в соответствии с формулой (18.1) имеем:

$$\int\limits_{0}^{1} 2y\sqrt{1-y}\,dy = \int\limits_{\varphi(1)}^{\varphi(0)} 2y\sqrt{1-y}\,dy = \int\limits_{1}^{0} 2(1-t^2)\sqrt{1-1+t^2}\,(1-t^2)'dt = \int\limits_{0}^{1} 4t^2(1-t^2)dt =$$

$$= 4\int\limits_{0}^{1}(t^2-t^4)dt = 4\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_{0}^{1} = 4\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) = \frac{8}{15}.$$

К20.11. Алгоритм решения задачи с помощью Mathcad следующий.

Определить функции, задающие область интегрирования $\Im$:

```
f(x, y) := x − y^2 + 4        g(x, y) := x^2 + y^2 + x + y − 25.
```

С помощью встроенных функций `maximize`, `minimize` *(см. "Компьютерный раздел" гл. 5)* определить границы *a* и *b* изменения переменной *x* и границы *c* и *d* изменения переменной *y*:

```
ORIGIN := 1      Ab(x, y) := x     Or(x, y) := y     x := 0     y := 0
Given
    f(x, y) ≥ 0 g(x, y) ≤ 0    z := minimize(Ab, x, y) a := Ab(z1, z2)
  a = −4
Given
    f(x, y) ≥ 0 g(x, y) ≤ 0    z := maximize(Ab, x, y) b := Ab(z1, z2)
  b = 4.55
```

```
Given

    f(x, y) ≥ 0 g(x, y) ≤ 0    z := minimize(Or, x, y) c := Or(z1, z2)

  c = −2.825

Given

    f(x, y) ≥ 0 g(x, y) ≤ 0    z := maximize(Or, x, y) d := Or(z1, z2)

  d = 2.719
```

С помощью встроенной функции `rnd`, генерирующей равномерно распределенные случайные числа, сформировать матрицу P, i-я строка которой будет содержать сгенерированные функцией `rnd` координаты (x, y) i-й точки, принадлежащей области $\Im$:

```
    N := 4000

         for  i ∈ 1..N
             x ← rnd(b − a) + a
             y ← rnd(d − c) + c
             while  0 = (g(x, y) ≤ 0) · (f(x, y) ≥ 0)
P :=             x ← rnd(b − a) + a
                 y ← rnd(d − c) + c
             P_{i,1} ← x
             P_{i,2} ← y
         P
```

Построить область интегрирования $\Im$:

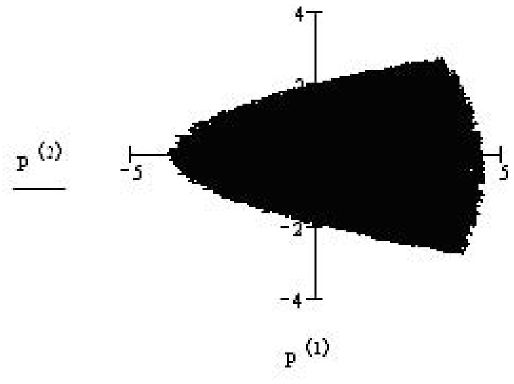


Рис. 20.10. Область интегрирования $\Im$

Вид области $\Im$ подсказывает, что для вычисления исходного двойного интеграла следует воспользоваться именно теоремой 20.3 о повторном интегрировании. Поэтому необходимо определить кривые $x = t(y)$, $x = w(y)$, ограничивающие область $\Im$:

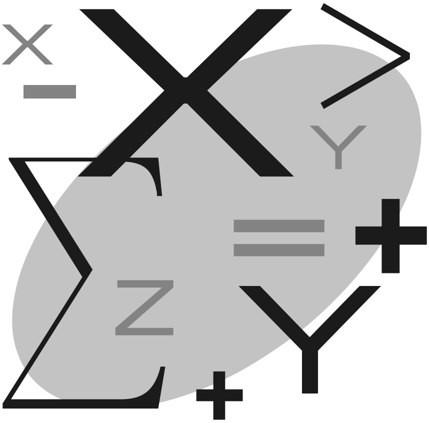
$$x := x \qquad y := y$$

$$w(y) := g(x, y) = 0 \ solve, x \leftarrow \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(101 - 4 \cdot y^2 - 4 \cdot y\right)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{-1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(101 - 4 \cdot y^2 - 4 \cdot y\right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

$$t(y) := f(x, y) = 0 \ solve, x \rightarrow y^2 - 4$$

Вычислить исходный интеграл:

$$\int_{c}^{d} \int_{t(y)}^{w(y)_1} x \cdot y \ dxdy = -6.323$$



ЧАСТЬ IV

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Глава 21

Дифференциальные уравнения: общие понятия

Пусть в некотором экономическом процессе взаимодействуют две его характеристики Θ и Ω, а неизвестная функция $y(x)$ выражает зависимость между их величинами. Математическая модель подобного процесса зачастую представляется в виде уравнения, связывающего функцию $y(x)$ и ее производные различных порядков. Такое уравнение называется дифференциальным. Простейшие дифференциальные уравнения были рассмотрены в *гл. 16* — это уравнения вида $y'(x) = f(x)$, где $f(x)$ — известная функция, выражающая мгновенную скорость изменения характеристики Ω относительно изменения характеристики Θ. Решением такого уравнения является неопределенный интеграл $\int f(x)dx$.

Итак, любое дифференциальное уравнение имеет вид

$$f(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \ \ldots, y^{(n)}) = 0\,, \tag{21.1}$$

где f — известная функция, аргументами которой являются независимая переменная x и неизвестные функция $y = y(x)$ и ее производные $y^{(1)}, y^{(2)}, \ \ldots, y^{(n)}$ различных порядков. Порядок наивысшей производной, входящей в уравнение (21.1), называется порядком этого уравнения. Например, $y^{(3)} + x^2 y^{(1)} - 4y^5 = 0$ — дифференциальное уравнение третьего порядка.

Решением дифференциального уравнения (21.1) на промежутке X называется такая функция $y = \varphi(x)$, для которой при подстановке $\varphi(x)$, $\varphi^{(1)}(x)$, $\varphi^{(2)}(x)$, $\ldots, \varphi^{(n)}(x)$ в (21.1) соответственно вместо y, $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $\ldots, y^{(n)}$, получается верное равенство при любом $x \in X$; при этом график функции $y = \varphi(x)$ называется интегральной кривой уравнения (21.1) на промежутке X. В дальнейшем, если не оговорено особо, предполагается, что решения дифференциального уравнения рассматриваются на некотором фиксированном промежутке X.

Однако не всегда процесс решения уравнения (21.1) приводит к получению функции $y = \varphi(x)$ в явном виде. Во многих ситуациях удается только свести уравнение (21.1) к уравнению вида $F(x, y) = 0$, не содержащему производных, решение $y = \varphi(x)$ которого является решением исходного уравнения (21.1). В этом случае уравнение $F(x, y) = 0$ называется интегралом дифференциального уравнения (21.1).

Пример 1. Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$. Запишем его в виде (21.1): $f(y, y') = 0$, где $f(y, y') = y' - 3\sqrt[3]{y^2}$. Убедимся, что функция $y = x^3$ является решением этого уравнения на промежутке $X = (-\infty; +\infty)$: $y' = 3x^2$, $y' - 3\sqrt[3]{y^2} = 3x^2 - 3\sqrt[3]{x^6} = 0$ для любого $x \in X$. Таким же образом проверяется, что и функция $y = (x - C)^3$, где C — любая константа, является решением этого дифференциального уравнения. В частности, при $C = 0$ получаем решение $y = x^3$.

Пример 2. Пусть $F(x, y) = \ln y - \ln x + xy - 2$. Убедимся, что уравнение $F(x, y) = 0$ является интегралом дифференциального уравнения $x(1 + xy)y' = y(1 - xy)$. Действительно, как было показано в *гл. 14*, $y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}$. Но $F'_x = y - \frac{1}{x} = \frac{xy - 1}{x}$, $F'_y = \frac{1}{y} + x = \frac{xy + 1}{y}$.

Отсюда $y'_x = \frac{(1 - xy)y}{(1 + xy)x}$. Подставив y'_x в исходное дифференциальное уравнение, получим верное равенство при любом $x \in (0; +\infty)$.

Таким же образом проверяется, что уравнение $F(x, y) = C$ при любом значении константы C является интегралом исходного дифференциального уравнения. В частности, при $C = 0$ имеем интеграл $F(x, y) = 0$.

Пример 3. Проверим, что функция $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ при любых значениях констант C_1 и C_2 является решением уравнения $y'' + y = 0$: $y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$, $y'' = -C_1 \cos x - C_2 \sin x$, $y'' + y = 0$ при любом $x \in Af^1$. Это решение является общим решением уравнения.

Если константам C_1 и C_2 придать конкретные числовые значения, то получим частные решения исходного дифференциального уравнения.

На основании рассмотренных примеров можно предварительно сделать несколько выводов:

- общее решение $y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$ дифференциального уравнения (21.1) зависит от независимых констант $C_1, C_2, \ldots, C_n$, число которых равно порядку уравнения; частные решения получаются из общего при конкретных числовых значениях констант $C_1, C_2, \ldots, C_n$;
- общее решение дифференциального уравнения (21.1) может быть задано в неявном виде уравнением $F(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0$, называемым общим интегралом соответствующего дифференциального уравнения; частные интегралы получаются из общего при конкретных числовых значениях констант $C_1, C_2, \ldots, C_n$;

Строгие определения общего решения и общего интеграла дифференциального уравнения первого порядка $g(x, y, y') = 0$ будут даны в конце главы. А пока предположим, что это уравнение можно разрешить относительно производной y'. Тогда оно примет вид

$$y' = f(x, y). \tag{21.2}$$

Чтобы получить геометрическую интерпретацию этого уравнения, будем рассматривать $f(x, y)$, как функцию двух независимых переменных x и y, определенную на открытой области $\mathfrak{I}$. Через каждую точку $(x_0, y_0) \in \mathfrak{I}$ проведем прямую l_{x_0, y_0} с угловым коэффициентом $k_0 = f(x_0, y_0)$. В результате получим так называемое поле направлений интегральных кривых. Геометрический смысл уравнения (21.2) состоит в том, что любая его интегральная кривая $y = \varphi(x)$ в каждой своей точке (x_0, y_0), где $y_0 = \varphi(x_0)$, касается прямой l_{x_0, y_0}, поскольку $\varphi'(x_0) = f(x_0, \varphi(x_0)) = f(x_0, y_0) = k_0$ (рис. 21.1).

Будем говорить, что уравнение (21.2) обладает свойством локальной единственности решения (сокращенно, СЛЕ) в точке (x_0, y_0), если через эту точку проходит хотя бы одна интегральная кривая уравнения (21.2), и в некоторой окрестности $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ точки x_0 все интегральные кривые этого уравнения, проходящие через (x_0, y_0), совпадают.

Теорема 21.1. Если функции $f(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ непрерывны на открытой области $\mathfrak{I}$, то уравнение (21.2) обладает СЛЕ в каждой точке этой области.

Решение $y = \varphi(x)$ уравнения (21.2) называется особым, если это уравнение не обладает СЛЕ ни в одной точке интегральной кривой $y = \varphi(x)$.

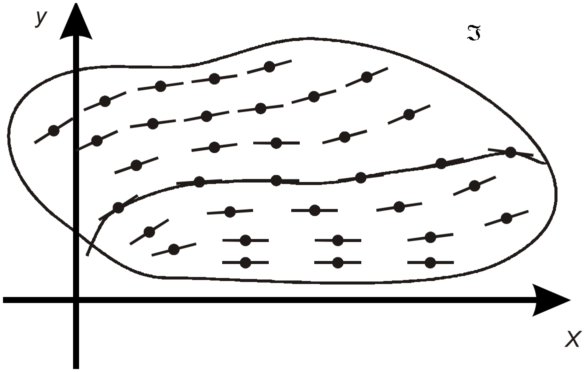


Рис. 21.1. Поле направлений интегральных кривых

Рассмотрим уравнение $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$ из примера 1. Помимо общего решения $y = (x - C)^3$, его решением является также функция $y = 0$, которая не может быть получена из общего ни при каком значении константы C. Так как $f'_y(x, y) = \dfrac{2}{\sqrt[3]{y}}$, то по теореме 21.1 в любой точке, не принадлежащей прямой $y = 0$, уравнение $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$ обладает СЛЕ (это можно видеть на рис. 21.2). С другой стороны, $y = 0$ является особым решением этого уравнения, поскольку через каждую точку $(x_0, 0)$ проходят интегральные кривые, не совпадающие ни в какой ее сколь угодно малой окрестности: например, интегральные кривые $y = 0$ и $\varphi(x) = (x - x_0)^3$.

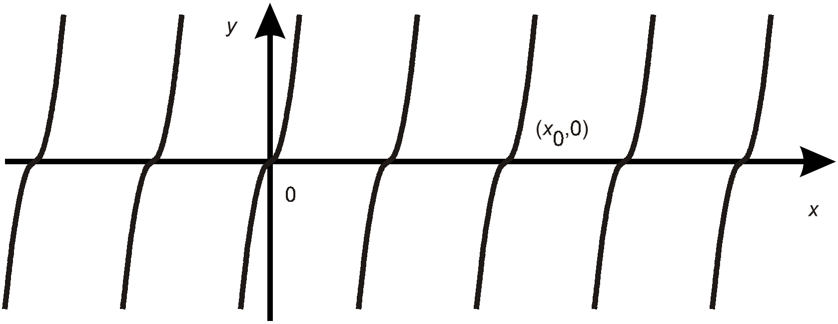


Рис. 21.2. Интегральные кривые уравнения $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$

Теорема 21.2 известна и в другой формулировке. Задачей Коши с начальными условиями (x_0, y_0), где x_0, y_0 — наперед заданные числа, называется задача нахождения решения $y = \varphi(x)$ уравнения (21.2), удовлетворяющего условию $y_0 = \varphi(x_0)$:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{21.3}$$

Теорему 21.2 теперь можно переформулировать так: если функции $f(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ непрерывны на открытой области $\Im$, то для любой точки $(x_0, y_0) \in \Im$ задача Коши (21.3) имеет решения, при этом в некоторой окрестности $(x_0 - \varepsilon;\ x_0 + \varepsilon)$ точки x_0 все такие решения совпадают.

Теперь мы готовы дать более строгое определение общего решения и общего интеграла уравнения (21.2). Пусть в каждой точке открытой области $\Im$ уравнение (21.2) обладает СЛЕ. Общим решением этого уравнения на области $\Im$ называется функция $y = \psi(x, C)$ такая, что при любом допустимом значении c_0 параметра C $y = \psi(x, c_0)$ является интегральной кривой (частным решением) уравнения (21.2), проходящей через некоторую точку области $\Im$, и для любой точки (x_0, y_0) из области $\Im$ можно подобрать такое значение c_0 параметра C, при котором $y = \psi(x, c_0)$ будет интегральной кривой уравнения (21.2), проходящей через точку (x_0, y_0). Уравнение $F(x, y, C) = 0$, задающее общее решение уравнения (21.2) неявно, называется общим интегралом этого уравнения.

> **Пример 4.** Общим решением уравнения $y' = 1$ на всей координатной плоскости является функция $y = x + C$. Действительно, $(x + C)' = 1$ при любом x. В то же время для любой точки (x_0, y_0) функция $y = x + y_0 - x_0$ является решением задачи Коши (21.3).

Компьютерный раздел

С помощью диалогового окна форматирования поверхностей (трехмерных графиков) можно строить поле векторов, которое задается двумя матрицами X и Y одинакового размера $m \times n$. При этом поле векторов будет выглядеть следующим образом: прямоугольная область графика условно разбивается на квадраты n горизонтальными и m вертикальными линиями и в каждом (i, k)-м квадрате изображается вектор, коллинеарный вектору $(X_{i,k}, Y_{i,k})$ (на позиции (i, k) матрицы X находится первая координата вектора, на позиции (i, k) матрицы Y — вторая). Шаблон построения поверхности (рис. 21.3) вызывается кнопкой подпанели **Графики** (Graph). На месте единственной метки вводится пара (*X*, *Y*) идентификаторов матриц, содержащих координаты векторов.

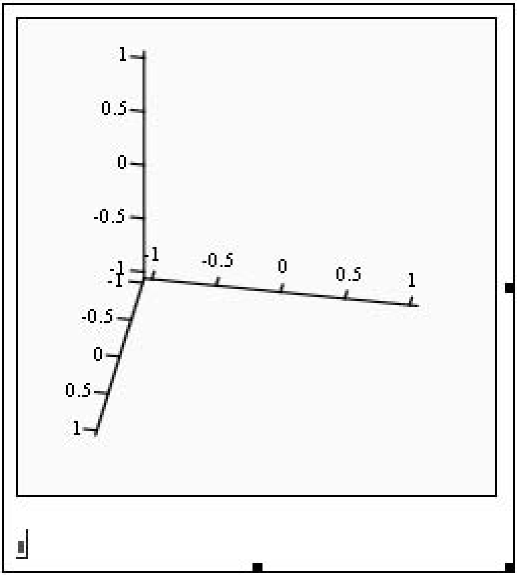


Рис. 21.3. Шаблон построения поверхности

Диалоговое окно форматирования **3-D Plot Format** вызывается двойным щелчком левой кнопки мыши на области графика и содержит 9 вкладок. Для построения поля векторов важны две вкладки: **General** (рис. 21.4) и **Axes** (рис. 21.5).

На вкладке **General** в группе **Plot 1 Display** (Представить как) выбирается опция **Vector Field Plot** (График векторного поля). Настройка осей и прямоугольной сетки на графике осуществляется с помощью вкладки **Axes**.

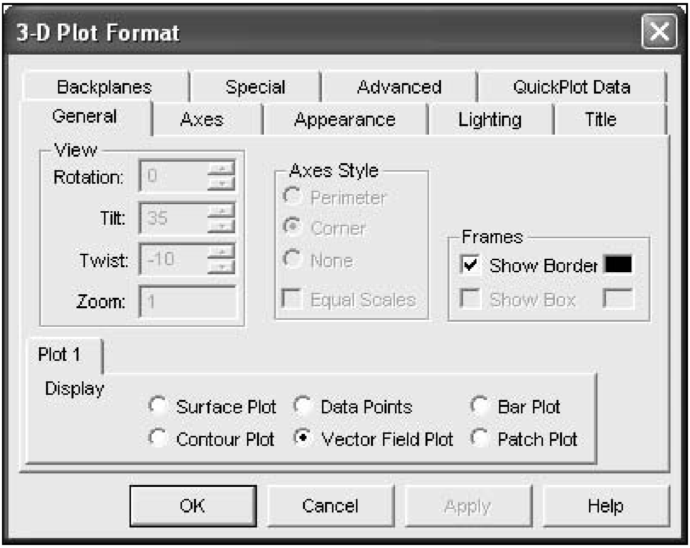
Рассмотрим пример построения поля векторов, координаты которых задаются функциями $kx(x, y) = 1$ и $ky(x, y) = \frac{y}{4}$, а диапазоны изменения переменных x и y равны [–5; 5] и [–7; 7] соответственно. Сформируйте матрицы X и Y следующим образом:

$$a := -5 \qquad b := 5 \qquad c := -7 \qquad d := 7$$

$$kx(x, y) := 1 \qquad ky(x, y) := \frac{y}{4}$$

$i := a..b \quad j := c..d$

$X_{i-a,j-c} := kx(i,\ j) \quad Y_{i-a,j-c} := ky(i,\ j)$



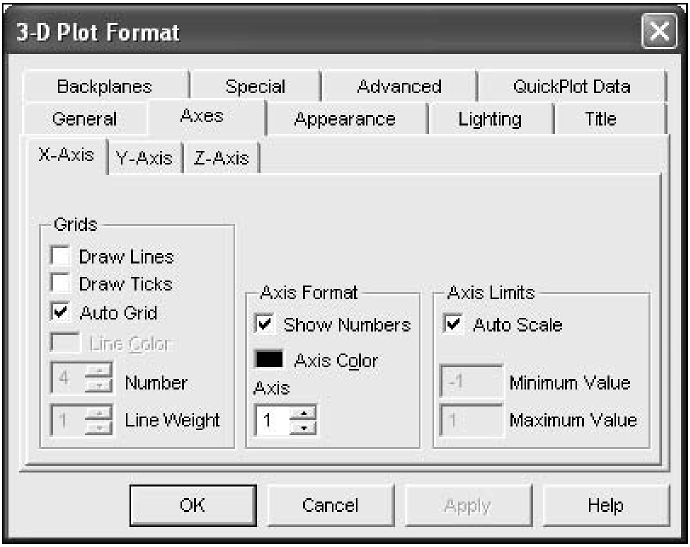
Rotation: 0
Tilt: 35
Twist: -10
Zoom: 1

○ Perimeter
● Corner
○ None
☐ Equal Scales

☑ Show Border
☐ Show Box

○ Surface Plot ○ Data Points ○ Bar Plot
○ Contour Plot ● Vector Field Plot ○ Patch Plot

Рис. 21.4. Окно форматирования **3-D Plot Format**, вкладка **General**



☐ Draw Lines
☐ Draw Ticks
☑ Auto Grid
☐ Line Color
4 Number
1 Line Weight

☑ Show Numbers
Axis Color
Axis 1

☑ Auto Scale
-1 Minimum Value
1 Maximum Value

Рис. 21.5. Окно форматирования **3-D Plot Format**, вкладка **Axes**

Вызовите шаблон построения поверхностей и на месте метки введите (X, Y). Щелкните левой кнопкой мыши вне графика, и поле векторов будет построено (рис. 21.6).

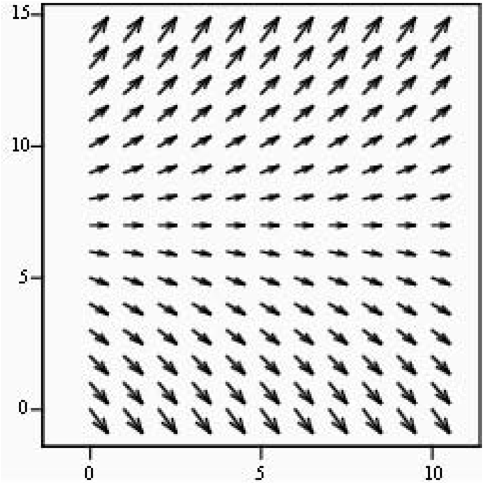


Рис. 21.6. Поле векторов

Задачи для самостоятельного решения

Т21.1. Показать, что уравнение $x^2 + y^4 - Cy^2 = 0$ является общим интегралом дифференциального уравнения $xy = (x^2 - y^4)y'$.

Т21.2. Показать, что уравнение $e^{\frac{y}{x}} - Cy = 0$ является общим интегралом дифференциального уравнения $xyy' - y^2 = x^2 y'$.

Т21.3. Показать, что функция $y = \sqrt[3]{C + 3\operatorname{arctg} e^x}$ является общим решением уравнения $(1 + e^{2x})y^2 y' = e^x$ на всей координатной плоскости за исключением точек, лежащих на прямой $y = 0$.

Т21.4. Показать, что функция $y = x^2\left(1 + Ce^{\frac{1}{x}}\right)$ является общим решением уравнения $x^2y' + (1 - 2x)y = x^2$ на области $\Im$, состоящей из всех точек координатной плоскости, не принадлежащих прямой $x = 0$.

Т21.5. Найти особые решения дифференциального уравнения $y' = \sqrt{1 - y^2}$. Изобразить интегральные кривые этого уравнения на координатной плоскости.

Т21.6. Пусть функции $f(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ непрерывны на открытой области $\Im$. Доказать, что $y = \varphi(x)$ является интегральной кривой уравнения (21.2), проходящей через точку $(x_0, y_0) \in \Im$, если и только если $\varphi(x)$ непрерывна на некотором отрезке, содержащем x_0, и является решением интегрального уравнения

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx \tag{21.4}$$

на этом отрезке.

Общая формулировка задач К21.1—К21.11

Построить поле направлений интегральных кривых дифференциального уравнения и использовать его затем для приближенного изображения интегральных кривых.

К21.1. $y' - \sqrt[3]{y^2} = 0$.

К21.2. $2xy' = \dfrac{y^2}{x}$.

К21.3. $xy' = 1 - y$.

К21.4. $(1 + e^x)y' = ye^x$.

К21.5. $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$.

К21.6. $y' + \dfrac{y}{x} = 1 + 2\ln x$.

К21.7. $xy' + 2\sqrt{xy} = y$.

К21.8. $xy' + y - y^2 = 0$.

К21.9. $y' + 3y - e^{2x}y^2 = 0$.

К21.10. $xy' = e^{-x} - y$.

К21.11. $3xy' + y = 0$.

Ответы, указания, решения

Т21.1. Пусть $F(x, y, C) = x^2 + y^4 - Cy^2$. Тогда $F'_x = 2x$,

$$F'_y = 4y^3 - 2Cy = 2y(2y^2 - C), \quad y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = \frac{x}{y(C - 2y^2)}.$$

Подставим y'_x в заданное дифференциальное уравнение:

$$xy = \frac{(x^2 - y^4)x}{y(C - 2y^2)} \Rightarrow Cy^2 - 2y^4 = x^2 - y^4 \Rightarrow y^4 + x^2 - Cy^2 = 0 \Rightarrow F(x, y, C) = 0.$$

Т21.3. Запишем данное дифференциальное уравнение в виде $y' = f(x, y)$, где $f(x, y) = \dfrac{e^x}{y^2(1 + e^{2x})}$. Так как функции $f(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ непрерывны на области $\Im$, содержащей все точки координатной плоскости, кроме точек прямой $y = 0$, то по теореме 21.1 это дифференциальное уравнение обладает СЛЕ на области $\Im$.

Пусть $\psi(x, C) = \sqrt[3]{C + 3\operatorname{arctg} e^x}$. Возьмем произвольную константу C_0. Тогда

$$\psi'(x, C_0) = \frac{3e^x}{3\sqrt[3]{(C_0 + 3\operatorname{arctg} e^x)^2}\,(1 + e^{2x})},$$

$$f(x, \psi(x, C_0)) = \frac{e^x}{\sqrt[3]{(C_0 + 3\operatorname{arctg} e^x)^2}\,(1 + e^{2x})}.$$

Очевидно, что $\psi'(x, C_0) = f(x, \psi(x, C_0))$, т. е. $\psi(x, C_0)$ — решение данного уравнения.

Пусть теперь (x_0, y_0) — произвольная точка области $\Im$. Решая уравнение $y_0 = \sqrt[3]{C + 3\operatorname{arctg} e^{x_0}}$, найдем значение параметра C и обозначим его C_0: $C_0 = y_0^3 - 3\operatorname{arctg}\left(e^{x_0}\right)$. Частное решение $\psi(x) = \psi(x, C_0)$ будет решением задачи Коши с начальным условием $\psi(x_0) = y_0$. Действительно, $\psi(x_0) = \psi(x_0, y_0^3 - 3\operatorname{arctg} e^{x_0}) = \sqrt[3]{y_0^3 - 3\operatorname{arctg} e^{x_0} + 3\operatorname{arctg} e^{x_0}} = y_0$.

Т21.5. Пусть $f(x, y) = \sqrt{1 - y^2}$. Так как $f'_y = \dfrac{-y}{\sqrt{1 - y^2}}$ непрерывна при $|y| < 1$, то по теореме 21.1 уравнение $y' = \sqrt{1 - y^2}$ обладает СЛЕ в каждой точке (x, y), в которой $|y| < 1$. Но, как легко проверить, функции $y = \pm 1$ тоже являются решениями уравнения $y' = \sqrt{1 - y^2}$. Более того, это особые решения, поскольку через каждую точку $(x_0, \pm 1)$ проходят интегральные кривые, не совпадающие ни в какой ее сколь угодно малой окрестности: например, интегральные кривые $y = 1$ и $x = \arcsin y + x_0 - \dfrac{\pi}{2}$ проходят через точку $(x_0, 1)$ (рис. 21.7).

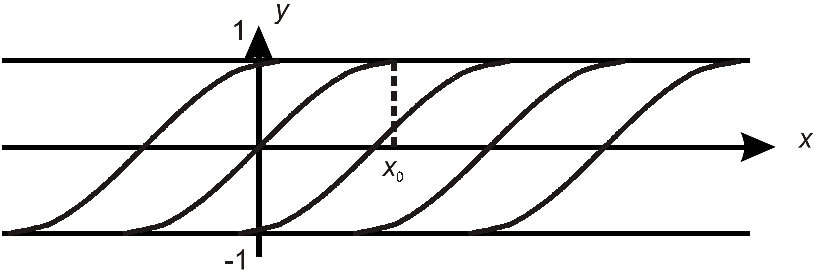


Рис. 21.7. Интегральные кривые уравнения $y' = \sqrt{1 - y^2}$

Т21.6. Предположим вначале, что $y = \varphi(x)$ — частное решение уравнения (21.2) на отрезке X, содержащем x_0, и $\varphi(x_0) = y_0$. Тогда $\varphi'(x) = f\left(x, \varphi(x)\right)$ при $x \in X$. Непрерывность $\varphi(x)$ на X следует из утверждения задачи Т7.2.

Воспользуемся следствием 18.2:

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(x,\varphi(x))dx = \int\limits_{x_0}^{x} \varphi'(x)dx = \varphi(x)\Big|_{x_0}^{x} = \varphi(x)-\varphi(x_0) = \varphi(x) - y_0\,,$$

т. е. $\varphi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x,\varphi(x))dx$ при $x \in X$, и, следовательно, $\varphi(x)$ — решение уравнения (21.4) на отрезке X.

Обратно, пусть $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке X, содержащем x_0, и $\varphi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x,\varphi(x))dx$ при $x \in X$. Поскольку $\Im$ — открытая область, то существует окрестность N точки (x_0, y_0), целиком содержащаяся в $\Im$. Выберем теперь такой отрезок $[a; b] \subseteq Af^1$, что $x_0 \in [a; b]$ и $(x, \varphi(x)) \in N$, при $x \in [a; b]$, т. е. кривая $y = \varphi(x)$ не выходит за пределы окрестности N. Ввиду непрерывности $\varphi(x)$ на $[a; b]$ и $f(x, y)$ на N, функция $f(x, \varphi(x))$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ (теорема 4.1). Поэтому функция $\Phi(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(x,\varphi(x))dx$ дифференцируема на $[a; b]$ (теорема 18.1), причем

$$\Phi'(x) = f(x,\varphi(x))\,,\ x \in [a; b].$$

Отсюда $\varphi'(x) = (y_0 + \Phi(x))' = \Phi'(x) = f(x,\varphi(x))$, $x \in [a; b]$, и, следовательно, при $x \in [a; b]$ $y = \varphi(x)$ — интегральная кривая уравнения (21.2), проходящая через точку (x_0, y_0) (в самом деле, $\varphi(x_0) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x_0} f(x,\varphi(x))dx = y_0$).

К21.11. При построении поля направлений в этой задаче следует учесть неопределенность функции $f(x,y) = -\dfrac{y}{3x}$ в точках $(0; y)$ следующим образом:

$$kx(x, y) := \left|\begin{matrix} 1 & \mathit{if} & x \neq 0 \\ 0 & \mathit{if} & x = 0 \end{matrix}\right. \qquad ky(x, y) := \left|\begin{matrix} -\dfrac{y}{x \cdot 3} & \mathit{if} & x \neq 0 \\ 0 & \mathit{if} & x = 0 \end{matrix}\right.$$

Необходимо также предусмотреть возможность вычисления функции $f(x, y)$ в различных точках с заданным шагом изменения $\frac{1}{k}$:

$a := -2.$ $\quad b := 2$ $\quad c := -2.$ $\quad d := 2$

$k := 4$ $\quad i := a,\ a + \frac{1}{k}..b$ $\quad j := c,\ c + \frac{1}{k}..d$

$Z_{(i-a)\cdot k,(j-c)\cdot k} := kx(i, j)$ $\quad U_{(i-a)\cdot k,(j-c)\cdot k} := ky(i, j)$

Шаг $\frac{1}{k}$ можно варьировать для получения более отчетливого изображения поля направлений, которое получено на рис. 21.8 при шаге $\frac{1}{4}$.

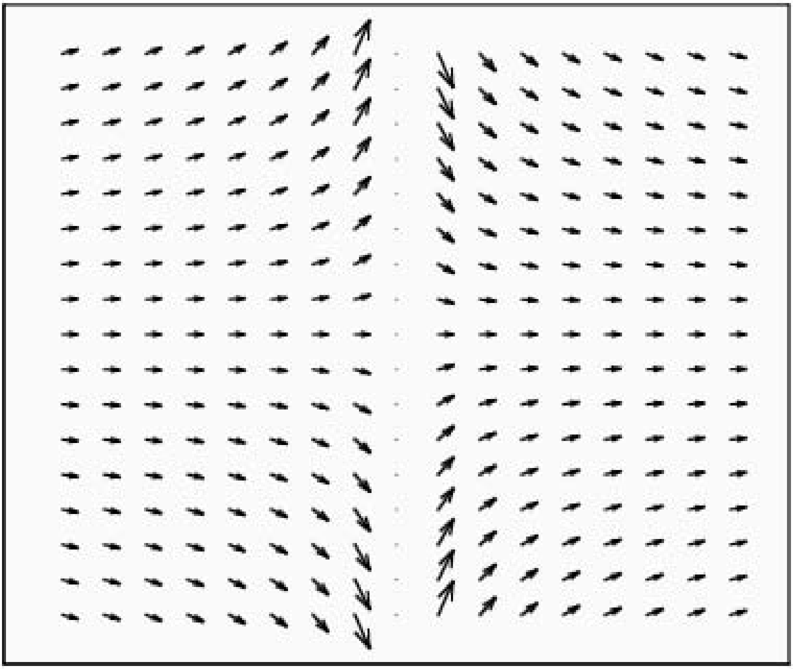


Рис. 21.8. Поле направлений интегральных кривых

Интегральные кривые исходного уравнения изображены на рис. 21.9.

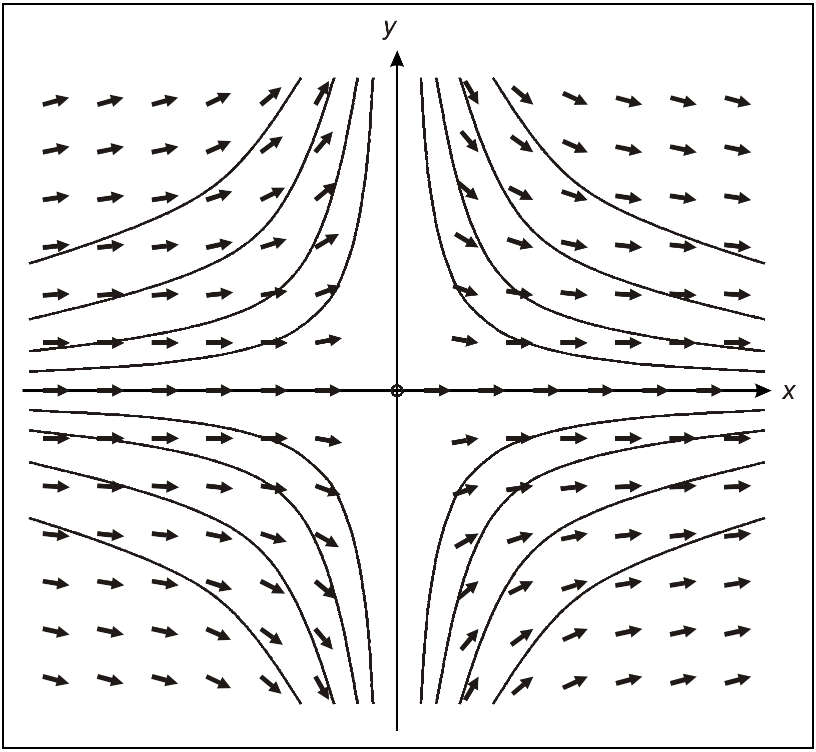


Рис. 21.9. Интегральные кривые

Глава 22

Дифференциальные уравнения первого порядка

Общность содержания этой главы не будет ущемлена, если все функции будут рассматриваться на открытых областях, являющихся прямоугольниками.

Итак, всюду в этой главе считается, что функции $M(x, y)$, $N(x, y)$, $r(x, y)$ определены на открытом прямоугольнике $\mathfrak{R}$, причем все частные производные первого порядка функций M и N непрерывны на $\mathfrak{R}$.

Предположим, что дифференциальное уравнение первого порядка можно записать в симметричной относительно переменных x и y форме:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \tag{22.1}$$

В частности, уравнение (21.2) всегда можно представить в таком виде, поскольку $y' = \dfrac{dy}{dx}$. Уравнение (22.1) называется точным на прямоугольнике $\mathfrak{R}$, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $U(x, y)$ в каждой точке $(x, y) \in \mathfrak{R}$. Поскольку такое уравнение равносильно уравнению $dU(x, y) = 0$, то $U(x, y) = C$ — общий интеграл точного уравнения.

Теорема 22.1. Уравнение (22.1) является точным на прямоугольнике $\mathfrak{R} = (a; b) \times (c; d)$, если и только если $M'_y(x, y) = N'_x(x, y)$ в каждой точке $(x, y) \in \mathfrak{R}$.

Доказательство. Предположим вначале, что уравнение (22.1) точное, т. е. существует такая функция $U(x, y)$, что $U'_x(x, y) = M(x, y)$, $U'_y(x, y) = N(x, y)$ для любой точки $(x, y) \in \mathfrak{R}$.

Отсюда $U''_{xy}(x, y) = M'_y(x, y)$, $U''_{yx}(x, y) = N'_x(x, y)$. Но ввиду теоремы 14.1 $U''_{xy}(x, y) = U''_{yx}(x, y)$. Поэтому $M'_y(x, y) = N'_x(x, y)$.

Предположим теперь, что $M'_y(x, y) = N'_x(x, y)$ в каждой точке $(x, y) \in \Re$. Обозначим неопределенный интеграл $\int M(x, y)dx$ на интервале $(a; b)$ через $F(x, y)$, а неопределенный интеграл $\int (N(x, y) - F'_y(x, y))dy$ на интервале $(c; d)$ — через $G(x, y)$. Докажем, что полный дифференциал функции $U(x, y) = F(x, y) + G(x, y)$ совпадает с левой частью уравнения (22.1) для $(x, y) \in \Re$.

Убедимся вначале, что $U'_y(x, y) = N(x, y)$.

Так как $U'_y(x, y) = F'_y(x, y) + G'_y(x, y)$, то согласно утверждению 16.1,

$G'_y(x, y) = N(x, y) - F'_y(x, y)$.

Следовательно, $U'_y(x, y) = F'_y(x, y) + N(x, y) - F'_y(x, y) = N(x, y)$.

Остается показать, что $U'_x(x, y) = M(x, y)$.

Убедимся, что функция $G(x, y)$ не зависит от x. Действительно,

$$(N(x, y) - F'_y(x, y))'_x = N'_x(x, y) - F''_{yx}(x, y) = N'_x(x, y) - F''_{xy}(x, y) =$$

$$= N'_x(x, y) - \left(\left(\int M(x, y)dx\right)'_x\right)'_y = N'_x(x, y) - M'_y(x, y) = 0.$$

Отсюда, ввиду следствия 11.2, функция $N(x, y) - F'_y(x, y)$ не зависит от x и, следовательно, это же справедливо и для интеграла $G(x, y)$ от этой функции. Поэтому

$U'_x(x, y) = F'_x(x, y) + G'_x(x, y) = F'_x(x, y) = M(x, y)$.

Теорема доказана.

Теорема 22.1 дает метод определения общего интеграла $U(x, y) = C$ точного уравнения, согласно которому $U(x, y)$ определяется следующей формулой:

$$U(x, y) = F(x, y) + G(x, y) = \int M(x, y)dx + \int \left(N(x, y) - F'_y(x, y)\right)dy. \qquad (22.2)$$

Пример. Рассмотрим уравнение

$(2xy + 3y^2)dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)dy = 0$.

В данном случае $M(x, y) = 2xy + 3y^2$, $M'_y = 2x + 6y$,

$N(x, y) = x^2 + 6xy - 3y^2$, $N'_x = 2x + 6y$.

Так как в каждой точке $(x, y) \in Af^2$ $M'_y = N'_x$, то исходное уравнение, ввиду теоремы 22.1, является точным. Используем формулу (22.2) для его решения:

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx = \int \left(2xy + 3y^2\right)dx = x^2y + 3y^2x + C_1,$$

$$F'_y(x,y) = x^2 + 6xy,$$

$$N(x,y) - F'_y(x,y) = (x^2 + 6xy - 3y^2) - (x^2 + 6xy) = -3y^2,$$

$$G(x,y) = \int -3y^2dy = -y^3 + C_2,$$

$$U(x,y) = F(x,y) + G(x,y) = x^2y + 3y^2x - y^3 + C_3.$$

Итак, $x^2y + 3y^2x - y^3 + C_3 = 0$ — общий интеграл исходного уравнения.

Так как свойство уравнения (22.1) "быть точным" зависит от вида коэффициентов при дифференциалах dx и dy, то возможна "корректировка" этих коэффициентов для преобразования неточного уравнения в точное. Одним из таких "корректировщиков" является интегрирующий множитель.

Функция $r(x, y)$, не равная тождественно нулю на прямоугольнике $\Re$, называется интегрирующим множителем уравнения (22.1), если уравнение

$$r(x,y)\cdot M(x,y)dx + r(x,y)\cdot N(x,y)dy = 0 \qquad (22.3)$$

точное.

В общем случае интегрирующий множитель определить невозможно. Однако в некоторых частных ситуациях это удается сделать благодаря специфическому виду коэффициентов уравнения.

1. Пусть $M(x, y) = m(x)$, $N(x, y) = n(y)$. Тогда уравнение (22.1) называется уравнением с разделенными переменными x и y. Такое уравнение является точным, поскольку $m'_y(x) = n'_x(y) = 0$, а его общий интеграл имеет вид $\int m(x)dx + \int n(y)dy = C$ (см. формулу (22.2)).
2. Пусть функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ представлены в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одного аргумента: $M(x, y) = m_1(x) \cdot n_1(y)$, $N(x, y) = m_2(x) \cdot n_2(y)$. В этом случае уравнение (22.1) называется уравнением с разделяющимися переменными.

Интегрирующий множитель такого уравнения равен

$$r(x,y)=\frac{1}{n_1(y)\cdot m_2(x)},$$

поскольку в этом случае уравнение (22.3) приобретает вид

$$\frac{m_1(x)}{m_2(x)}dx+\frac{n_2(y)}{n_1(y)}dy=0,$$

т. е. становится точным (с разделенными переменными), а его общий интеграл будет равен

$$\int\frac{m_1(x)}{m_2(x)}dx+\int\frac{n_2(y)}{n_1(y)}dy=C.$$

Пример. Рассмотрим уравнение $y'=xy^2+2xy$. Приведем его к виду (22.1): $xy(y+2)dx-dy=0$. Это уравнение с разделяющимися переменными: $m_1(x)=x$, $n_1(y)=y(y+2)$, $m_2(x)=1$, $n_2(y)=-1$. Поэтому его интегрирующий множитель равен $\frac{1}{y(y+2)}$. Домножив на него, получим точное уравнение (с разделенными переменными): $xdx-\frac{1}{y(y+2)}dy=0$. Определим его общий интеграл:

$$\int xdx-\int\frac{1}{y(y+2)}dy=C\Rightarrow\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y+2}\right)dy=C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y}{y+2}\right|=C.$$

3. Функция $f(x, y)$ называется однородной порядка k на прямоугольнике $\Re$, если для любой точки $(x, y)\in\Re$ и при любом допустимом значении параметра t $f(tx, ty)=t^kf(x, y)$.

   Например, функция $f(x,y)=\frac{2x}{y}\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{5y}{x}\right)$ является однородной порядка 0, т. к. $f(tx,ty)=\frac{2tx}{ty}\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{5ty}{tx}\right)=\frac{2x}{y}\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{5y}{x}\right)=f(x,y)\cdot t^0$. В то же время функция $f(x, y)=x^3-5x^2y+16xy^2$ является однородной порядка 3, поскольку $f(tx, ty)=(tx)^3-5(tx)^2(ty)+16(tx)(ty)^2=t^3\cdot f(x, y)$.

Теорема 22.2. Если в уравнении (22.1) $M(x, y)$ и $N(x, y)$ — однородные функции одинакового порядка и функция $xM(x, y)+yN(x, y)$

не равна тождественно нулю на прямоугольнике $\Re$, то $r(x,y) = \dfrac{1}{xM(x,y)+yN(x,y)}$ является интегрирующим множителем уравнения (22.1), а его общий интеграл имеет вид

$$\ln|x| + \int \frac{N(1,u)}{M(1,u)+uN(1,u)}\,du = C\,, \tag{22.4}$$

где $u = \dfrac{y}{x}$.

Доказательство теоремы дано в задаче Т22.1.

Пример. Рассмотрим уравнение $\left(y+\sqrt{x^2-y^2}\right)dx - xdy = 0$. Функции $M(x,y) = y+\sqrt{x^2-y^2}$, $N(x,y) = -x$ являются однородными первого порядка. Так как $M(1,u) = u+\sqrt{1-u^2}$, $N(1,\ u) = -1$, то воспользуемся для его решения формулой (22.4):

$$\ln|x| + \int -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = C \Rightarrow \ln|x| - \arcsin u = C \Rightarrow \ln|x| - \arcsin\left(\frac{y}{x}\right) = C\,.$$

Уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)\,, \tag{22.5}$$

где $p(x)$, $q(x)$ — функции, определенные на интервале $(a;\ b)$, называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Запишем это уравнение в симметричной форме:

$$(p(x)y - q(x))dx + dy = 0. \tag{22.6}$$

Теорема 22.3. Уравнение (22.6) имеет интегрирующий множитель $r(x) = e^{\int p(x)dx}$, а его общий интеграл имеет вид $yr(x) = \int r(x)q(x)dx + C$.

Доказательство теоремы дано в задаче Т22.2.

Пример. Рассмотрим уравнение $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$. Это линейное уравнение первого порядка. В данном случае $p(x) = \cos x$ и, следовательно, интегрирующий множитель равен $r(x) = e^{\int \cos x\,dx} = e^{\sin x}$.

Отсюда получаем общий интеграл исходного уравнения:

$$ye^{\sin x} = \int e^{-\sin x}\cdot e^{\sin x}dx + C \Rightarrow ye^{\sin x} - x = C\,.$$

Как видно из теоремы 22.3, интегрирующий множитель линейного уравнения первого порядка зависит только от переменной x. Однако существуют более широкие классы дифференциальных уравнений, чьи интегрирующие множители обладают подобными свойствами. Один из таких классов описан в теореме 22.4.

Теорема 22.4. Если функция

$$\frac{M'_y(x,y)-N'_x(x,y)}{N(x,y)} \qquad \left(\text{или } \frac{M'_y(x,y)-N'_x(x,y)}{M(x,y)}\right)$$

является функцией $g(x)$ одной переменной x (или функцией $f(y)$ одной переменной y), то уравнение (22.1) имеет интегрирующий множитель $r(x)=e^{\int g(x)dx}$ (или $r(y)=e^{-\int f(y)dy}$).

Доказательство теоремы дано в задаче Т22.3.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\left(1-\frac{x}{y}\right)dx+\left(2xy+\frac{x}{y}+\frac{x^2}{y^2}\right)dy=0 \text{ при } x>0.$$

Выясним, удовлетворяет ли оно условиям теоремы 22.4:

$$M'_y(x,y)=\frac{x}{y^2}\,,\; N'_x(x,y)=2y+\frac{1}{y}+\frac{2x}{y^2}\,,$$

$$\frac{M'_y(x,y)-N'_x(x,y)}{N(x,y)}=\frac{-2y-\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}}{x\left(2y+\frac{1}{y}+\frac{x}{y^2}\right)}=-\frac{1}{x}=g(x)\,.$$

В соответствии с теоремой 22.4 исходное уравнение имеет интегрирующий множитель $r(x)=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{-\ln x}=\frac{1}{x}$.

Умножив исходное уравнение на $\frac{1}{x}$, получим точное уравнение $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)dx+\left(2y+\frac{1}{y}+\frac{x}{y^2}\right)dy=0$, чей общий интеграл найдем с помощью формулы (22.2):

$$U(x,y)=F(x,y)+G(x,y)\,,$$

$$F(x,y)=\int M(x,y)dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)dx=\ln x-\frac{x}{y}+C_1\,,$$

$$F'_y(x,y)=\frac{x}{y^2},\ N(x,y)-F'_y(x,y)=2y+\frac{1}{y}+\frac{x}{y^2}-\frac{x}{y^2}=2y+\frac{1}{y},$$

$$G(x,y)=\int\left(2y+\frac{1}{y}\right)dy=y^2+\ln|y|+C_2,$$

$$U(x,y)=F(x,y)+G(x,y)=\ln|y|+\ln x+y^2-\frac{x}{y}+C_1+C_2.$$

Отсюда $\ln x|y|+y^2-\frac{x}{y}=C$ — общий интеграл исходного уравнения.

Компьютерный раздел

Встроенная функция `Odesolve(x, b, N)` предназначена для численного решения задачи Коши. Эта функция имеет 3 аргумента: `x` — идентификатор независимой переменной искомой функции $y(x)$, `b` — концевую точку промежутка $X=[a;b>$, на котором решается дифференциальное уравнение, `N` — число точек, которые разбивают промежуток X на интервалы для реализации алгоритма приближенного решения. Последний параметр контролирует точность такого решения: чем больше `N`, тем выше точность. Этот параметр можно опускать, по умолчанию он равен $[(b-a)\cdot 10]$.

Функция `Odesolve` должна завершать так называемый блок решения *(см. также "Компьютерный раздел" гл. 5)*, начинающийся ключевым словом `Given`. Между ключевым словом и функцией `Odesolve` должны находиться собственно дифференциальное уравнение и его начальные условия; при этом в качестве точки x_0 может браться только концевая точка a промежутка $X=[a;b>$. Например, если задана задача Коши $\begin{cases} y'=y \\ y(0)=1 \end{cases}$, то решить ее можно на любом промежутке $[0;b>$. Соответствующий блок решения в Mathcad-документе будет выглядеть так:

```
Given
     y(0) = 1
     y'(x) = y(x)
y := Odesolve (x, b, 300)
```

(значение параметра `b` должно предшествовать этому блоку).

Отметим, что для обозначения производных можно использовать как символ $\frac{d^n}{dx^n}$, вводимый кнопкой $\frac{d^n}{dx^n}$ подпанели **Матанализ** (Calculus), так и символ $'$, вводимый комбинацией клавиш <Ctrl> + <F7>.

Поскольку в данной главе рассматриваются только дифференциальные уравнения первого порядка, то дальше функцию `Odesolve` будем рассматривать применительно к задаче Коши первого порядка (21.3).

Блок решения с функцией `Odesolve` имеет несколько существенных отличий от блоков решения с функциями `minimize` и `maximize`, описанными в *гл. 5*. Так, если блокам с `minimize` и `maximize` обязательно предшествуют начальные — стартовые — значения независимых переменных (выбираемых, как правило, наугад), то в блоке `Odesolve` эту роль играет начальное условие $y(a) = y_0$. При этом внутри блока, кроме дифференциального уравнения и его начальных условий, не должно быть других уравнений или неравенств. И наконец, `Odesolve` решает задачу Коши с параметрами, только если перед блоком заданы их конкретные значения. Например, блок

$$b := 6$$

Given

$$y'(x) = y(x)$$

$$y(0) = c$$

$$y := \mathrm{Odesolve}(x, b, 300)$$

не решит задачу Коши, поскольку значение параметра c не задано.

В то же время оптимальное решение $g(a)$ блока

$$\mathrm{ORIGIN} := 1$$

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x, a) := x_1 \cdot x_2$$

Given

$$x_1 + x_2 = a$$

$$g(a) := \mathrm{maximize}(f, x)$$

зависит от параметра a, значение которого заранее не задано, и функцию $g(a)$ можно дальше использовать в Mathcad-документе.

Например, так:

```
a := 10..12
       f(g(a), a) =
       ┌────────┐
       │     25 │
       ├────────┤
       │  30.25 │
       ├────────┤
       │     36 │
       └────────┘
```

В блоке решения дифференциальное уравнение не обязательно должно быть записано в виде $y' = f(x, y)$ — достаточно, если уравнение в принципе будет разрешимо относительно y'. Например, уравнение $\sin(y') = y' + 3$ не разрешимо относительно y' и потому оно не может быть решено с помощью функции `Odesolve`.

В заключение продемонстрируем на примере влияние параметра N на точность вычислений. Рассмотрим задачу Коши $\begin{cases} y' = \cos x \\ y(0) = 0 \end{cases}$. Функция $y = \sin x$ — ее точное аналитическое решение. Теперь решим эту задачу с помощью `Odesolve` при $N = 10$ и при $N = 100$:

```
N := 10
Given
  y'(x) = cos x        y(0) = 0
  y := Odesolve (x, 30, N)
N := 100
Given
  y'(x) = cos x        y(0) = 0
  r := Odesolve (x, 30, N)
```

Как можно видеть на графике (рис. 22.1), при $N = 10$ численное решение `y(x)` значительно отличается от точного аналитического решения `sin x`, а при $N = 100$ они практически совпадают.

Параметр `N` иногда можно опускать, не нанося ущерба точности вычислений. Это связано с тем, что в Mathcad предусмотрены два алгоритма реализации функции `Odesolve`. Первый алгоритм использует фиксированную длину шага интегрирования, второй — адаптивный — выбирает текущую длину шага в зависимости от поведения функции на предыдущих шагах. Выбор алгоритма осуществляется щелчком правой кнопки мыши на идентификаторе `Odesolve`, вызывающем контекстное меню (рис. 22.2). Затем остается только установить флажок напротив названия алгоритма.

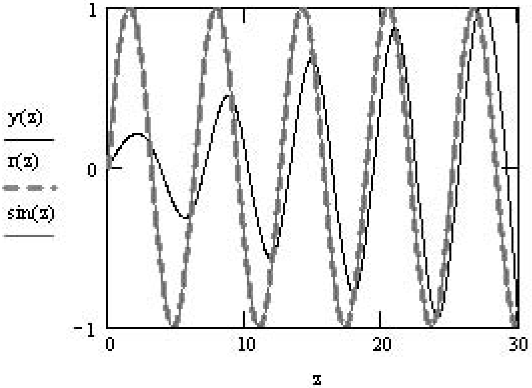


Рис. 22.1. Графики численного и аналитического решения

Рис. 22.2. Контекстное меню

Задачи для самостоятельного решения

Т22.1. Доказать теорему 22.2.

Т22.2. Доказать теорему 22.3.

Т22.3. Доказать теорему 22.4.

Т22.4. Доказать, что интегрирующий множитель линейного уравнения (22.6) можно получить с помощью теоремы 22.4.

Т22.5. Найти функции, имеющие постоянную эластичность.

Т22.6. Если функции $p(x)$ и $q(x)$ непрерывны на интервале $(a; b)$, то линейное дифференциальное уравнение (22.5) обладает СЛЕ в каждой точке $(x; y) \in (a; b) \times (-\infty; +\infty)$. Доказать это.

Т22.7. Найти кривую, проходящую через точку $A = (2, 4)$, если известно, что угловой коэффициент касательной к этой кривой в любой ее точке $M = (x, y)$ в 3 раза больше углового коэффициента прямой, проходящей через точку касания M и начало координат.

Т22.8. Найти кривую, проходящую через точку $A = (1, 0)$, если известно, что отрезок, отсекаемый на оси $0y$ касательной к этой кривой в любой ее точке $M = (x, y)$, равен расстоянию от точки касания M до начала координат.

Т22.9. Найти кривую, если известно, что отрезок касательной к этой кривой в любой ее точке $M = (x, y)$, заключенный между осями координат, делится точкой касания M пополам.

Т22.10. Пусть функция $f(x, y)$ является однородной порядка k на открытом прямоугольнике $\mathfrak{R}$. Доказать, что если $f(x, y)$ дифференцируема на $\mathfrak{R}$, то $x_0 f'_x(x_0, y_0) + y_0 f'_y(x_0, y_0) = kf(x_0, y_0)$ для каждой точки $(x_0, y_0) \in \mathfrak{R}$.

Т22.11. Дано: функции $M(x, y)$, $N(x, y)$ — однородные порядка k на открытом прямоугольнике $\mathfrak{R}$ и $M'_y(x, y) = N'_x(x, y)$ для любой точки $(x, y) \in \mathfrak{R}$. Доказать, что общий интеграл уравнения (22.1) имеет вид $xM(x, y) + yN(x, y) = C$.

Общая формулировка задач П22.1—П22.21

Найти общие решения или общие интегралы дифференциальных уравнений.

П22.1. а) $xy' = \dfrac{y}{\ln x}$; б) $3y' = \dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{9y}{x} + 9$.

П22.2. а) $x^2 y' + y^2 = 0$; б) $xy' = x \cdot \sin^2\left(\dfrac{y}{x}\right) + y$.

П22.3. а) $(1 + y^2)dx - xydy = 0$; б) $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$.

П22.4. а) $x^3 y' + y = 0$; б) $(x + 2y)dx - xdy = 0$.

П22.5. а) $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$; б) $y^2 + x^2 y' = xy \cdot y'$.

П22.6. а) $(xy^2 + x)dx + (y + x^2 y)dy = 0$; б) $xy' - y = x \cdot tg\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

П22.7. а) $(1 + x^2)y \cdot y' = x(1 + y^2)$; б) $xy' - y = (x + y)\ln\left(\dfrac{x + y}{x}\right)$.

П22.8. а) $(xy^2 + x)dx + (y - x^2 y)dy = 0$; б) $xy' = y - x \cdot e^{\frac{y}{x}}$.

П22.9. а) $(1 + e^{2x})y^2 \cdot y' = e^x$; б) $x^2 y' = y(x + y)$.

П22.10. а) $ydx + \left(\sqrt{xy} - \sqrt{x}\right)dy = 0$; б) $2x^3 y' = y(2x^2 - y^2)$.

П22.11. а) $y' + y = \dfrac{e^{-x}}{1 - x}$; б) $(e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x\cos y)dy = 0$.

П22.12. а) $y' + y \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}$; б) $y' = \dfrac{y - 3x^2}{4y - x}$.

П22.13. а) $y' - \dfrac{x}{x^2 + 1} y = x$; б) $e^{-y}dx + (2y - xe^{-y})dy = 0$.

П22.14. а) $y' - y \operatorname{tg} x = \dfrac{2x}{\cos x}$; б) $x + ye^x + (y + e^x)y' = 0$.

П22.15. а) $y'\cos x + y\sin x = 1$;

б) $(2x + y + 3x^2 \sin y)dx + (x + x^3 \cos y + 2y)dy = 0$.

П22.16. а) $y' - \dfrac{2x}{1 + x^2} y = 1 + x^2$; б) $(3x^2 y + \sin x)dx + (x^3 - \cos y)dy = 0$.

П22.17. а) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$; б) $\left(2x \cdot \ln y + \dfrac{y^2}{\cos^2 x}\right)dx + \left(\dfrac{x^2}{y} + \operatorname{tg} x + e^y\right)dy = 0.$

П22.18. а) $y'x - y - x^2 = 0$; б) $\left(2x + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + \left(1 - \dfrac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}dy = 0$.

П22.19. а) $y' - y = e^x$; б) $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$.

П22.20. а) $y'\operatorname{ctg} x - y = 1$; б) $ye^x dx + (y + e^x)dy = 0$.

П22.21. а) $y' + \dfrac{y}{x^2 - x} = \dfrac{x^2(2x-1)}{x^2 - x}$; б) $2x^2 y' = x^2 + y^2$;

в) $4(x^2 y + y)dy + \sqrt{5 + y^2}\ dx = 0$; г) $(x^2 + y - 4)dx + (x + y + e^y)dy = 0$.

Общая формулировка задач К22.1—К22.10

Решить указанную задачу Коши на промежутке [*a*; *b*> с помощью функции `Odesolve`. Сопоставить на графике найденное приближенное решение *y* = *g*(*x*) с точным аналитическим решением *y* = *f*(*x*). Варьируя параметр `N`, добиться совпадения кривых *y* = *g*(*x*) и *y* = *f*(*x*).

К22.1. $\begin{cases} y' \cdot x^2 + y \cdot x + 1 = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$, $[a; b] = [1; 20]$, $f(x) = -\dfrac{\ln x}{x}$.

К22.2. $\begin{cases} y' \cdot x = 2(y + x^4) \\ y(1) = 0 \end{cases}$, $[a; b] = [1; 5]$, $f(x) = x^4 - x^2$.

К22.3. $\begin{cases} y' \cdot x - 2y + x^2 = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$, $[a; b] = [1; 10]$, $f(x) = -x^2 \ln x$.

К22.4. $\begin{cases} x \cdot y' + y = \sin x \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{2}{\pi} \end{cases}$, $[a; b] = \left[\dfrac{\pi}{2}; 60\right]$, $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x}$.

К22.5. $\begin{cases} y' - tgx \cdot y - 2\cos^2 x = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$, $[a; b) = \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \dfrac{6\sin x - 2\sin^3 x}{3\cos x}$.

К22.6. $\begin{cases} y'(x^2 + 1) + 4yx = 3 \\ y(0) = 0 \end{cases}$, $[a; b] = [0; 20]$, $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x}{(x^2 + 1)^2}$.

К22.7. $\begin{cases} (1 - x)(y' + y) = e^{-x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$, $[a; b] = [0; 0.99999]$, $f(x) = e^{-x} \ln\left(\dfrac{1}{1 - x}\right)$.

К22.8. $\begin{cases} xy' + y + xe^{-x^2} = 0 \\ y(1) = \dfrac{1}{2e} \end{cases}$, $[a; b] = [1; 2]$, $f(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{2x}$.

К22.9. $\begin{cases} y'(1-x^2) + xy - 1 = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$, $[a; b] = [0; 1]$, $f(x) = x + \sqrt{1-x^2}$.

К22.10. $\begin{cases} y' - 3x^2 y = x^2 e^{x^3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$, $[a; b] = [0; 3]$, $f(x) = \dfrac{x^3 e^{x^3}}{3}$.

Ответы, указания, решения

Т22.1. Воспользуемся однородностью функций M и N:

$$M(x, y) = M\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}\right) = x^k M\left(1, \frac{y}{x}\right), \quad N(x, y) = N\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}\right) = x^k N\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Поэтому уравнение (22.3) можно записать так $\left(r(x, y) = \dfrac{1}{x \cdot M(x, y) + y \cdot N(x, y)}\right)$:

$$\left(x^k \cdot M\left(1, \frac{y}{x}\right) + x^k \cdot N\left(1, \frac{y}{x}\right) dy\right) \cdot \frac{r(x, y)}{x^k} = 0 \Rightarrow \frac{M\left(1, \frac{y}{x}\right) dx + N\left(1, \frac{y}{x}\right) dy}{xM\left(1, \frac{y}{x}\right) + yN\left(1, \frac{y}{x}\right)} = 0.$$

Отсюда, полагая $u = \dfrac{y}{x}$ и учитывая равенство $d(ux) = udx + xdu$, получим

$$\frac{M(1, u)\, dx + N(1, u)\, d(ux)}{xM(1, u) + uxN(1, u)} = 0 \Rightarrow \frac{(M(1, u) + uN(1, u))\, dx + xN(1, u)\, du}{x \cdot (M(1, u) + uN(1, u))} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} dx + \frac{N(1, u)}{M(1, u) + uN(1, u)} du = 0 \Rightarrow \ln|x| + \int \frac{N(1, u)}{M(1, u) + uN(1, u)} du = C.$$

Т22.2. Покажем, что полный дифференциал функции $yr(x)-\int r(x)q(x)dx$ совпадает с левой частью уравнения (22.6), умноженной на $r(x)=e^{\int p(x)dx}$:

$$d\left(yr(x)-\int r(x)q(x)dx\right)=d\left(yr(x)\right)-d\int r(x)q(x)dx=r(x)dy+ydr(x)-r(x)q(x)dx=$$

$$=r(x)dy+\left(yr(x)p(x)-r(x)q(x)\right)dx,$$

поскольку

$$dr(x)=de^{\int p(x)dx}=(e^{\int p(x)dx})'_x dx=e^{\int p(x)dx}\cdot(\int p(x)dx)'_x\cdot dx=$$

$$=e^{\int p(x)dx}\cdot p(x)dx=r(x)p(x)dx.$$

Т22.3. Докажем точность уравнения

$e^{\int g(x)dx}\cdot M(x,y)\,dx+e^{\int g(x)dx}\cdot N(x,y)\,dy=0$:

$$\left(e^{\int g(x)dx}\cdot M(x,y)\right)'_y=e^{\int g(x)dx}\cdot M'_y(x,y)=r(x)\cdot M'_y(x,y),$$

$$\left(e^{\int g(x)dx}\cdot N(x,y)\right)'_x=\left(e^{\int g(x)dx}\right)'_x\cdot N(x,y)+e^{\int g(x)dx}\cdot N'_x(x,y)=$$

$$=g(x)\cdot e^{\int g(x)dx}\cdot N(x,y)+e^{\int g(x)dx}\cdot N'_x(x,y)=r(x)\left(g(x)\cdot N(x,y)+N'_x(x,y)\right)=$$

$$=r(x)\left(\frac{M'_y(x,y)-N'_x(x,y)}{N(x,y)}\cdot N(x,y)+N'_x(x,y)\right)=r(x)\cdot M'_y(x,y).$$

Остальное следует из теоремы 22.1.

Т22.4. Положим $M(x,y)=p(x)\cdot y-q(x)$, $N(x,y)=1$. Тогда

$M'_y(x,y)=(p(x)\cdot y-q(x))'_y=p(x)$, $N'_x(x,y)=0$,

$\dfrac{M'_y(x,y)-N'_x(x,y)}{N(x,y)}=\dfrac{p(x)-0}{1}=p(x)$ — функция одной переменной, что и требовалось доказать.

Т22.5. Согласно теореме 12.1, $E_f(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}\cdot x$. Пусть $E_f(x)=k$. Тогда искомая функция $y=f(x)$ является решением дифференциального уравнения $k=\dfrac{y'}{y}\cdot x$. Это уравнение с разделяющимися переменными.

Решим его:

$$k = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{k}{x} dx = \frac{1}{y} dy \Rightarrow \int \frac{k}{x} dx - \int \frac{1}{y} dy = C_1 \Rightarrow k \ln|x| - \ln|y| = \ln|C_2| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{x^k}{C_2}\right| = \ln|y| \Rightarrow |y| = \left|\frac{x^k}{C_2}\right| \Rightarrow y = \pm\frac{x^k}{C_2} \Rightarrow y = Cx^k.$$

Т22.6. Представим уравнение (22.5) в виде $y' = f(x,y)$, где $f(x, y) = -p(x) \cdot y + q(x)$. Очевидно, функции $f'_y = -p(x)$ и $f(x, y)$ непрерывны на открытом прямоугольнике $(a; b) \times (-\infty; +\infty)$. Поэтому выполняются условия теоремы 21.1, из которой следует утверждение задачи.

Т22.7. Угловой коэффициент касательной, проведенной к искомой кривой $y = f(x)$ в точке $M = (x, y)$, равен $f'(x)$ *(см. гл. 7)*, а угловой коэффициент прямой, проходящей через точку M и начало координат, равен $\frac{f(x)}{x}$. Согласно условию, $f'(x) = \frac{3f(x)}{x}$, т. е. искомая функция является решением дифференциального уравнения $y' = \frac{3y}{x}$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Решим его:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{3dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = \ln|x^3| + \ln|C_1| \Rightarrow |y| = |C_1 x^3| \Rightarrow y = C_2 x^3.$$

Поскольку точка $A = (2, 4)$ принадлежит кривой $y = f(x)$, то $4 = f(2)$, т. е. $4 = C_2 \cdot 2^3$, $C_2 = \frac{1}{2}$. Отсюда $y = \frac{x^3}{2}$ — уравнение искомой кривой.

Т22.8. Уравнение касательной, проведенной к искомой кривой $y = f(x)$ в точке $M = (x, y)$, имеет вид $Y = f'(x)(X - x) + f(x)$. Поэтому ордината точки пересечения этой касательной с осью $0y$ равна $f'(x)(0 - x) + f(x) = f(x) - xf'(x)$. Расстояние от точки M до начала координат равно $\sqrt{x^2 + y^2}$. По условию задачи $|f(x) - xf'(x)| = \sqrt{x^2 + f^2(x)}$. Поэтому искомая функция $f(x)$ является решением дифференциального уравнения $|y - xy'| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Преобразуем это уравнение к виду (22.1): $\left(y \pm \sqrt{x^2 + y^2}\right) dx - xdy = 0$. Это дифференциальное однородное уравнение первого порядка с функциями при дифференциалах dx и dy.

Решим его:

т. к. $M(x,y)=y\pm\sqrt{x^2+y^2}$, $M(1,u)=u\pm\sqrt{1+u^2}$, $N(x,y)=-x$, $N(1,u)=-1$, то по теореме 22.2 общий интеграл этого уравнения имеет вид:

$$\ln|x|+\int\pm\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\,du=C_1\Rightarrow\ln|x|\pm\ln\left(\sqrt{1+u^2}+u\right)=C_1\Leftrightarrow$$

$$\ln|x|+\ln\left(\sqrt{1+u^2}\pm u\right)=\ln|C_2|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ln\left|x\left(\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\pm\frac{y}{x}\right)\right|=\ln|C_2|\Rightarrow\ln\left|\sqrt{x^2+y^2}\pm y\right|=\ln|C_2|\Rightarrow$$

$$\sqrt{x^2+y^2}\pm y=C_3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=C_3\pm y\Rightarrow x^2+y^2=C_3^2\pm 2C_3y+y^2\Rightarrow x^2=C_3^2\pm 2C_3y\,.$$

Поскольку точка A = (1, 0) принадлежит кривой $y=f(x)$, то $0=f(1)$, т. е. $1=C_3^2$, $x^2=1\pm 2y$. Отсюда $y=\pm\left(\frac{x^2-1}{2}\right)$ — искомые кривые.

Т22.9. Ответ: $y=\frac{C}{x}$. Указание: искомые функции являются решениями дифференциального уравнения $y'=-\frac{y}{x}$.

Т22.10. Пусть $(x_0,y_0)\in\Re$. Положим $x=\varphi(t)=tx_0$, $y=\psi(t)=ty_0$, $t_0=1$. Поскольку (x_0,y_0) — внутренняя точка множества $\Re$ ($\Re$ — открытый прямоугольник), то по теореме 14.3 функция $z(t)=f(\varphi(t),\psi(t))$ дифференцируема в точке t_0, причем

$$z'(t_0)=f'_x(M_0)\cdot\varphi'(t_0)+f'_y(M_0)\cdot\psi'(t_0)=f'_x(x_0,y_0)\cdot x_0+f'_y(x_0,y_0)\cdot y_0\,.$$

Но ввиду однородности функции f

$z(t)=f(\varphi(t),\psi(t))=f(tx_0,ty_0)=t^kf(x_0,y_0)$,

откуда $z'(t)=kt^{k-1}f(x_0,y_0)\Rightarrow z'(t_0)=kf(x_0,y_0)$. Утверждение доказано.

Т22.11. Поскольку выполняются условия теоремы 22.1, то для определения общего интеграла $U(x, y) = C$ уравнения (22.1) можно воспользоваться формулой (22.2). В силу утверждения задачи Т22.10

$$xM'_x(x, y) + yM'_y(x, y) = kM(x, y), \quad xN'_x(x, y) + yN'_y(x, y) = kN(x, y). \qquad (22.7)$$

Так как $M'_y(x, y) = N'_x(x, y)$, то из (22.7) следует

$$xM'_x(x, y) + yN'_x(x, y) + M(x, y) = (k+1)M(x, y) \text{ или}$$

$$(xM(x, y))'_x + yN'_x(x, y) = (k+1)M(x, y).$$

Отсюда

$$F(x, y) = \int M(x, y)dx = \frac{1}{k+1}\int (xM(x, y) + yN(x, y))'_x dx =$$

(утверждение 16.2)

$$= \frac{1}{k+1}(xM(x, y) + yN(x, y)) + C_1$$

и, следовательно, с учетом (22.7)

$$F'_y(x, y) = \frac{1}{k+1}(xM'_y(x, y) + N(x, y) + yN'_y(x, y)) =$$

$$= \frac{1}{k+1}(xN'_x(x, y) + yN'_y(x, y) + N(x, y)) = \frac{1}{k+1}((k+1)(N(x, y)) = N(x, y).$$

Поэтому $\int \left(N(x, y) - F'_y(x, y)\right)dy = 0$. Итак, общий интеграл уравнения (22.1) имеет вид $F(x, y) = C_2$ или

$$xM(x, y) + yN(x, y) = (k+1)C_2 \Rightarrow xM(x, y) + yN(x, y) = C_3.$$

П22.21. а) Это линейное уравнение первого порядка. Его интегрирующий множитель $r(x) = e^{\int \frac{1}{x^2 - x}dx}$ (теорема 22.3). Найдем первообразную для функции $\frac{1}{x^2 - x}$:

$$\frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{x^2 - x}\,dx = \int\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right)dx = \ln|x-1| - \ln|x| =$$

$$= \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|.$$

По теореме 22.3 найдем общий интеграл исходного уравнения:

$$r = e^{\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|} = \left|\frac{x-1}{x}\right|;$$

$$y \cdot \left|\frac{x-1}{x}\right| = \int \left|\frac{x-1}{x}\right| \cdot \frac{x^2(2x-1)}{x(x-1)}\,dx + C \Rightarrow y \cdot \frac{x-1}{x} = \int \frac{(x-1)x^2(2x-1)}{x^2(x-1)}\,dx + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y \cdot \frac{x-1}{x} = \int (2x-1)\,dx + C \Rightarrow y \cdot \frac{x-1}{x} = x^2 - x + C \Rightarrow y = x^2 + \frac{Cx}{x-1}.$$

б) Представим исходное уравнение в симметричной форме:

$$2x^2\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \Rightarrow (x^2+y^2)dx - 2x^2dy = 0.$$

Функции $M(x, y) = x^2 + y^2$, $N(x, y) = -2x^2$ — однородные порядка 2. Поэтому общий интеграл исходного уравнения найдем по теореме 22.2:

$$\ln|x| + \int \frac{-2}{1+u^2-2u}\,du = C \Rightarrow \ln|x| - 2\int \frac{1}{(u-1)^2}\,d(u-1) = C \Rightarrow \ln|x| + \frac{2}{u-1} = C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|x| + \frac{2x}{y-x} = C.$$

в) Это уравнение с разделяющимися переменными. Преобразуем его в уравнение с разделенными переменными:

$$4y(x^2+1)dy + \sqrt{5+y^2}\,dx = 0 \Rightarrow \frac{4y}{\sqrt{5+y^2}}\,dy + \frac{1}{x^2+1}\,dx = 0.$$

Найдем теперь его общий интеграл:

$$\int \frac{4y}{\sqrt{5+y^2}}\,dy + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = C \Rightarrow 2\int \frac{d(5+y^2)}{\sqrt{5+y^2}} + \operatorname{arctg} x = C \Rightarrow 4\sqrt{5+y^2} +$$

$$+ \operatorname{arctg} x = C.$$

г) Так как $M(x, y) = x^2 + y - 4$, $M'_y = 1$, $N(x,y) = x + y + e^y$, $N'_x(x,y) = 1$, $M'_y = N'_x$, то в силу теоремы 22.1 исходное уравнение является точным, а его общий интеграл $U(x, y) = C$ можно найти с помощью формулы (22.2):

$$F(x,y) = \int (x^2 + y - 4)dx = \frac{x^3}{3} + yx - 4x + C_1,\ F'_y(x,y) = x,$$

$$N(x, y) - F'_y(x, y) = y + e^y,\ G(x, y) = \int (y + e^y)dy = \frac{y^2}{2} + e^y + C_2,$$

$$U(x, y) = F(x, y) + G(x, y) = \frac{x^3}{3} + yx - 4x + \frac{y^2}{2} + e^y + C_3.$$

Следовательно, общий интеграл исходного уравнения имеет вид

$$\frac{x^3}{3} + yx - 4x + \frac{y^2}{2} + e^y = C.$$

К22.1—К22.10. Указания. При построении графиков на месте соответствующих меток *(см. "Компьютерный раздел" гл. 4)* следует указать границы a и b изменения переменной x вдоль оси $0x$. Границы изменения графиков вдоль оси $0y$ рекомендуется предварительно очистить с помощью клавиши <Delete> — тогда Mathcad самостоятельно подберет нужный диапазон.

Глава 23

Дифференциальные уравнения высших порядков

Предположим, что уравнение n-го порядка (21.1) можно разрешить относительно производной $y^{(n)}$. Тогда оно принимает вид

$$y^{(n)} = f(x, y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n-1)}). \tag{23.1}$$

В пределах этой главы будем отождествлять понятия решения и интегральной кривой дифференциального уравнения (23.1).

Для упрощения дальнейших формулировок будем допускать некоторую вольность языка, говоря, что интегральная кривая $y = \varphi\ (x)$ уравнения (23.1) проходит через заданную точку $(x_0, y_0, y_{01}, \ldots, y_{0n-1})$, если

$$\varphi(x_0) = y_0,\ \varphi^{(1)}(x_0) = y_{01},\ \varphi^{(2)}(x_0) = y_{02},\ \ldots,\ \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{0\,n-1}. \tag{23.2}$$

Если рассматривать правую часть в (23.1), как функцию $n + 1$ независимых переменных $x, y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n-1)}$, определенную на открытом множестве $\Im \in Af^{n+1}$, то можно определить свойство локальной единственности решения — СЛЕ (для частного случая $n = 1$ оно было введено в *гл. 21*): уравнение (23.1) обладает СЛЕ в точке $(x_0, y_0, y_{01}, \ldots, y_{0\,n-1}) \in \Im$, если через эту точку проходит хотя бы одна интегральная кривая уравнения (23.1), причем для некоторой окрестности $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ точки x_0 все интегральные кривые этого уравнения, проходящие через точку $(x_0, y_0, y_{01}, \ldots, y_{0\,n-1})$, совпадают.

Теорема 23.1. Если функции $f, f'_y, f'_{y^{(1)}}, \ldots, f'_{y^{(n-1)}}$ непрерывны на открытом множестве $\Im \subseteq Af^{n+1}$, то уравнение (23.1) обладает СЛЕ в каждой точке этого множества.

Эта теорема известна и в другой формулировке. Задачей Коши с начальными условиями $(x_0, y_0, y_{01}, \ldots, y_{0\,n-1})$ называется задача нахождения решения $y = \varphi(x)$ уравнения (21.3), удовлетворяющего условиям (23.2).

Записывается эта задача так:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y^{(1)}, \ \dots, y^{(n-1)}), \\ y(x_0) = y_0, y^{(i)}(x_0) = y_{0i}, i = 1,2 \ \dots, n-1. \end{cases} \qquad (23.3)$$

Переформулируем теперь теорему 23.1: если функции $f, f'_y, f'_{y^{(1)}}, \ \dots, f'_{y^{(n-1)}}$ непрерывны на открытом множестве $\Im \subseteq Af^{n+1}$, то для любой точки $(x_0, y_0, y_{01}, \dots, y_{0\,n-1}) \in \Im$ задача Коши (23.3) имеет решения, при этом в некоторой окрестности $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ точки x_0 все такие решения совпадают.

Теперь мы готовы дать строгое определение общего решения и общего интеграла дифференциального уравнения n-го порядка. Пусть в каждой точке открытого множества $\Im$ уравнение (23.1) обладает СЛЕ. Общим решением этого уравнения на множестве $\Im$ называется функция $\psi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ такая, что при любых допустимых значениях $c_1, c_2, \dots, c_n$ параметров $C_1, C_2, \dots, C_n$, функция $\varphi(x) = \psi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ является интегральной кривой (частным решением) уравнения (23.1), проходящей через некоторую точку области $\Im$, и для любой точки $(x_0, y_0, y_{01}, \dots, y_{0\,n-1})$ из области $\Im$ можно указать такие значения $c_1, c_2, \dots, c_n$ параметров $C_1, C_2, \dots, C_n$, при которых функция $y = \psi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ будет интегральной кривой уравнения (23.1), проходящей через точку $(x_0, y_0, y_{01}, \dots, y_{0\,n-1})$. Соотношение $F(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$, неявно определяющее общее решение уравнения (23.1), называется общим интегралом этого уравнения.

Пример. Покажем, что функция $\psi(x, C_1, C_2) = \dfrac{x^4}{12} + C_1 x + C_2$ является общим решением дифференциального уравнения второго порядка $y'' = x^2$ на множестве $\Im = Af^1 \times Af^1 \times Af^1$. Очевидно, в каждой точке $\Im$ уравнение $y'' = x^2$ обладает СЛЕ в силу теоремы 23.1, поскольку $f(x, y, y^{(1)}) = x^2$ и, следовательно, $f'_y = f'_{y^{(1)}} = 0$ при любом x.

Далее, $\psi'_x(x, C_1, C_2) = \dfrac{x^3}{3} + C_1$, $\psi''_x(x, C_1, C_2) = x^2$, т. е. $\psi(x, C_1, C_2)$ является решением исходного уравнения при любых значениях параметров C_1, C_2.

Зафиксируем теперь произвольную точку $(x_0, y_0, y_{01}) \in \Im$.

Составим и решим следующую систему уравнений относительно c_1, c_2:

$$\begin{cases} \psi(x_0, c_1, c_2) = y_0, \\ \psi'(x_0, c_1, c_2) = y_{01} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_0^4}{12} + c_1 x_0 + c_2 = y_0, \\ \dfrac{x_0^3}{3} + c_1 = y_{01} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = y_{01} - \dfrac{x_0^3}{3}, \\ c_2 = y_0 - \dfrac{x_0^4}{12} - x_0\left(y_{01} - \dfrac{x_0^3}{3}\right). \end{cases}$$

Таким образом, при этих значениях c_1, c_2 однозначно определяемых числами y_0, y_{01}, x_0, функция $y = \psi(x, c_1, c_2)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} y^{(2)} = x^2, \\ y(x_0) = y_0,\ y^{(1)}(x_0) = y_{01}. \end{cases}$$

В *гл. 22* дано определение линейного дифференциального уравнения первого порядка. Распространим его на общий случай.

Дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y^{(1)} + p_0(x)y = q(x), \qquad (23.4)$$

где $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_{\text{n}-1}(x), q(x)$ — функции, определенные на интервале $(a; b)$, называется линейным. Если в (23.4) $q(x) \equiv 0$ на интервале $(a; b)$, то это уравнение называется линейным однородным дифференциальным уравнением.

Обозначим левую часть уравнения (23.4) через $L[y]$. Структура общего решения уравнений $L[y] = 0$ и $L[y] = q(x)$ будет дана в *гл. 38* на базе линейной алгебры. Здесь же ограничимся следующим утверждением.

Теорема 23.2.

1. Если функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ являются решениями уравнения $L[y] = 0$ на интервале $(a; b)$, то для любых чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ функция $\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \ldots + \alpha_m\varphi_m(x)$ также будет решением этого уравнения на интервале $(a; b)$.

2. Если функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ являются решениями соответственно уравнений $L[y] = q_1(x)$ и $L[y] = q_2(x)$ на интервале $(a; b)$, то функция $\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ является решением уравнения $L[y] = q_1(x) + q_2(x)$ на этом же интервале.

Доказательство теоремы дано в задаче Т23.2.

Иногда решение уравнений высших порядков с помощью специальных подстановок можно свести к решению уравнений более низкого порядка. В этом случае говорят, что уравнение допускает понижение порядка. Даже в тех ситуациях, когда полученное в результате понижений порядка уравнение приходится решать численно, делается это эффективнее, чем для первоначального уравнения.

Рассмотрим три типа уравнений, допускающих понижение порядка.

1. Пусть дано уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$. Тогда

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx = \int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1x + C_2$$

и т. д., пока не придем к общему решению исходного уравнения.

Например, рассмотрим уравнение $y^{(2)} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. Тогда

$$y^{(1)} = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx + C_1 = \operatorname{tg} x + C_1,$$

$$y = \int \operatorname{tg} x\, dx + \int C_1 dx + C_2 = \int \frac{1}{\cos x} d(-\cos x) + C_1x + C_2 = -\ln|\cos x| +$$

$$+ C_1x + C_2.$$

2. Если уравнение не содержит искомой функции y и ее производных до $(k-1)$-го порядка включительно, т. е. имеет вид $f(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$, то порядок уравнения может быть понижен заменой $y^{(k)}(x) = u(x)$. После такой замены уравнение принимает вид $f(x, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(n-k)}) = 0$.

Пример. Рассмотрим уравнение $x^3y'' + x^2y' = 1$, которое не содержит y. Сделаем замену $y' = u$, тогда уравнение примет вид $x^3u' + x^2u = 1$. Последнее уравнение перепишем в виде $u' + \dfrac{u}{x} = \dfrac{1}{x^3}$ — это линейное уравнение первого порядка. Его интегрирующий множитель равен $r(x)=e^{\int\frac{dx}{x}}=|x|$, а общий интеграл имеет следующий вид (см. теорему 22.3):

$$u\cdot|x|=\int\frac{|x|}{x^3}\,dx+C_1\Rightarrow u\cdot x=\int\frac{x}{x^3}\,dx+C_1\Rightarrow u\cdot x=-\frac{1}{x}+C_1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u=-\frac{1}{x^2}+\frac{C_1}{x},$$

Отсюда

$$y'=-\frac{1}{x^2}+\frac{C_1}{x}\Rightarrow y=\int-\frac{1}{x^2}\,dx+\int\frac{C_1}{x}\,dx+C_2\Rightarrow y=\frac{1}{x}+C_1\ln|x|+C_2\,.$$

3. Пусть дифференциальное уравнение не содержит явно независимой переменной x, т. е. имеет вид

$$f(y, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}) = 0. \qquad (23.5)$$

Порядок этого уравнения можно понизить с помощью замены $y' = p(y)$. В этом случае все производные $y^{(2)}, y^{(3)}, \ldots, y^{(n)}$ следует выразить через производные функции $p(y(x))$ по переменной y. На основании теорем 8.1 и 8.2 любая производная $y^{(i)}$ может быть выражена через производные функции p по переменной y, порядок которых не превосходит i. Так, например, $y^{(2)}=\left(p(y(x))\right)'_x=p'_y\cdot y'_x=p'_y\cdot p$; если обозначить p'_y через $q(y)$, то

$$y^{(3)}=\left(q\cdot p\right)'_x=q'_x\cdot p+q\cdot p'_x=q'_y\cdot y'_x\cdot p+q\cdot p'_y\cdot y'_x=p''_{yy}\cdot p^2+(p'_y)^2\cdot p\,.$$

Пример. Рассмотрим уравнение $y''\mathrm{tg}\,y=2y'y'$, не содержащее явно независимой переменной x. С помощью замены $y'=p(y)$ сведем его к уравнению первого порядка: $p'_y\cdot p\cdot\mathrm{tg}\,y=2p^2$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Найдем его общий интеграл:

$$\frac{dp}{dy}\cdot p\cdot\mathrm{tg}\,y=2p^2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{dp}{p}=2\mathrm{ctg}\,y\,dy,\\ p=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\displaystyle\int\frac{dp}{p}=2\int\mathrm{ctg}\,dy,\\ \dfrac{dy}{dx}=0\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\ln|p|=2\displaystyle\int\frac{d\sin y}{\sin y},\\ y=C\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\ln|p| = 2\ln|\sin y| + C_1,\\ y = C\end{array}\right. \Rightarrow\left[\begin{array}{l}\ln|p| = \ln\left(\sin^2 y\right) + \ln|C_2|,\\ y = C\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\ln|p| = \ln\left|C_2\sin^2 y\right|,\\ y = C\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}|p| = \left|C_2\sin^2 y\right|,\\ y = C\end{array}\right. \Rightarrow\left[\begin{array}{l}p = \pm C_2\sin^2 y,\\ y = C\end{array}\right. \Rightarrow\left[\begin{array}{l}p = C_3\sin^2 y,\\ y = C\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y' = C_3\sin^2 y,\\ y = C\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{dy}{dx} = C_3\sin^2 y,\\ y = C\end{array}\right. \Rightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{dy}{\sin^2 y} = C_3 dx,\\ y = C\end{array}\right. \Rightarrow\left[\begin{array}{l}\displaystyle\int\frac{dy}{\sin^2 y} = C_3\int dx,\\ y = C\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}-\operatorname{ctg} y = C_3 x + C_4,\\ y = C.\end{array}\right.$$

Компьютерный раздел

Встроенная функция `rkfixed(init, a, b, N, D)` реализует для численного решения задачи Коши (23.3) алгоритм Рунге—Кутты четвертого порядка с фиксированным шагом интегрирования. Эта функция имеет 5 аргументов: `init` — начальные условия в виде n-мерной точки $\begin{pmatrix} y_0 \\ y_{01} \\ \vdots \\ y_{0\,n-1}\end{pmatrix}$, $a = x_0$ и b — концевые точки промежутка $X = [a; b]$, на котором решается задача Коши, $N + 1$ — число точек, которые разбивают промежуток X на равные интервалы для реализации алгоритма приближенного решения, D — идентификатор функции $D(x, Y)$. Функция $D(x, Y)$ формируется следующим образом. Если $n = 1$, то $D(x, Y) = f(x, Y_0)$; здесь аргумент y функции $f(x, y)$ заменяется нулевой координатой Y_0 некоторой одномерной точки Y (при `ORIGIN` = 0).

Если $n > 1$, то

$$D(x,Y) = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_{n-1} \\ f(x, Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}) \end{pmatrix} \text{— } n\text{-мерная точка;}$$

здесь аргументы $y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n-1)}$ функции $f(x, y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n-1)})$ соответственно заменяются координатами $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ некоторой n-мерной точки Y.

Результатом решения задачи Коши с помощью функции `rkfixed` является таблица (матрица) размера $(N + 1) \times (n + 1)$, где n — порядок дифференциального уравнения. Нулевой столбец этой таблицы содержит значения независимой переменной x — точки разбиения промежутка $[a; b]$; первый столбец — значения искомой функции в этих точках; $(i + 1)$-й столбец — значения i-ой производной искомой функции в этих точках, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$.

Функция `rkfixed` имеет два существенных преимущества по сравнению с функцией `Odesolve`: а) `rkfixed` можно использовать в программных модулях; б) она позволяет получать решения, зависящие от параметров.

Рассмотрим пример решения с помощью `rkfixed` задачи Коши

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 10 \end{cases}, \quad f(x, y, y') = -100y,$$

на промежутке $X = [a; b]$. С помощью диалогового окна **Вставить матрицу** (Insert Matrix) введите двухмерную точку начальных условий *init*, двумерную точку-функцию $D(x, Y)$, концевые точки промежутка X, функцию $f(x, y, y')$:

$$init := \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} \quad a := 0 \quad b := 2 \cdot \pi \quad f(x, y, y') := -100 \cdot y \quad D(x, Y) := \begin{pmatrix} Y_1 \\ f(x, Y_0, Y_1) \end{pmatrix}$$

Найдите решение исходной задачи Коши, зависящее от параметра N — числа точек разбиения отрезка $[a; b]$:

$$S(N) := \mathrm{rkfixed}(init, a, b, N, D) \quad x(N) := S(N)^{\langle 0 \rangle} \quad y(N) := S(N)^{\langle 1 \rangle}$$

Теперь функцию `S(N)` можно использовать дальше в любом месте этого Mathcad-документа. Так, на рис. 23.1 показаны графики `S(N)` при $N = 50$ и $N = 500$. Существенное различие кривых на графике объясняется недостаточной точностью найденного решения при $N = 50$. При $N = 500$ график функции `S(N)` совпадает с точным решением этой задачи — функцией $y = \sin(10x)$.

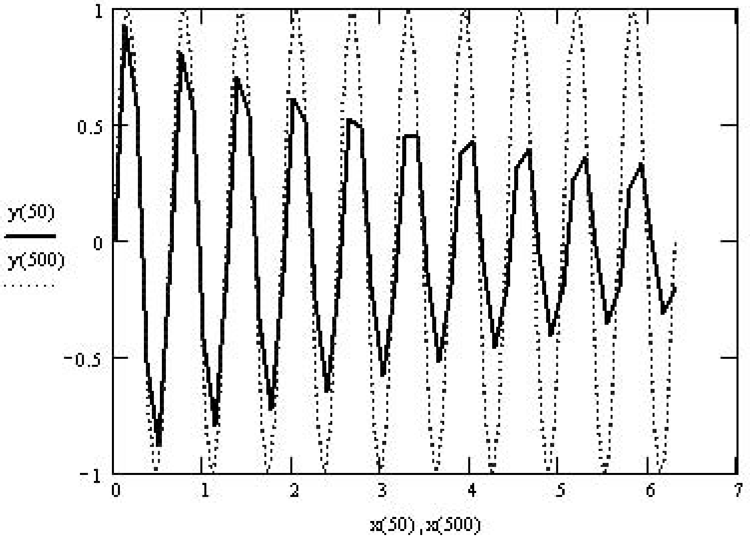


Рис. 23.1. Графики `S(N)` при $N = 50$ и $N = 500$

Поскольку применение `rkfixed` приводит только к таблице значений искомой функции в $N + 1$ точках, то значения этой функции в других точках промежутка X остаются недоступными. Однако этот недостаток преодолевается с помощью встроенной функции `interp(lspline(U, V), U, V, x)` кубической интерполяции данных, содержащихся в массивах `U` и `V`, где `U` и `V` — n-мерные точки, пары одноименных координат которых задают расположение n точек на плоскости (координаты в `U` должны быть упорядочены по возрастанию). Применительно к результату функции `rkfixed`, встроенная функция `interp` "доопределяет" найденное дискретное решение задачи Коши во всех точках промежутка X. Так, если

`S := rkfixed(init, a, b, 500, D)`   U := $S^{<0>}$ V := $S^{<1>}$

`g(x) := interp(lspline(U, V), U, V, x)`

то значения найденного функцией `rkfixed` решения можно уже вычислять в любых точках отрезка [a; b]. Например, `g(2.79) = 0.366`. Функция `g(x)` и множество точек, заданных координатами `U` и `V`, показаны на рис. 23.2.

Кнопка return подпанели **Программирование** (Programming) вызывает шаблон return ▪ оператора прерывания программного модуля; при этом подпрограмма-функция примет значение переменной (или константы), имя (или значение) которой будет введено на месте метки этого шаблона.

Например, в результате выполнения программного модуля

```
     | a ← 15
     | b ← 20
c := | for  i ∈ 1..10
     |   return  a  if  i = 5
     | b
```

значение переменной *c* будет равно 15 (а не 20).

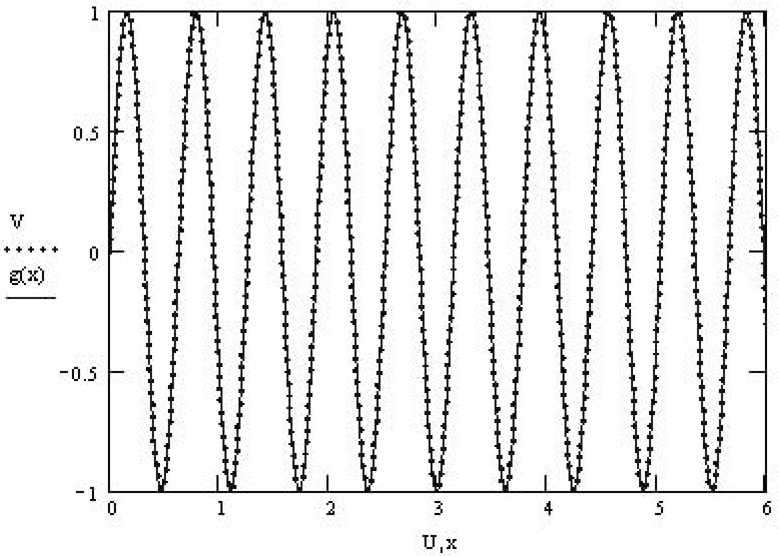


Рис. 23.2. Функция `g(x)` и множество точек, заданных координатами *U* и *V*

Задачи для самостоятельного решения

Т23.1. Если функции $p_0(x)$, $p_1(x)$, …, $p_{n-1}(x)$, $q(x)$ непрерывны на интервале $(a; b)$, то уравнение (23.4) обладает СЛЕ в каждой точке $(n + 1)$-мерного промежутка $(a; b) \times (-\infty; +\infty) \times \ldots \times (-\infty; +\infty)$. Доказать это.

Т23.2. Доказать теорему 23.2.

Т23.3. Показать, что функция $\psi(x, C_1, C_2) = C_1\cos x + C_2\sin x$ является общим решением дифференциального уравнения $y'' + y = 0$ на множестве $\Im = Af^1 \times Af^1 \times Af^1$.

Общая формулировка задач П23.1—П23.21

Найти общие решения или общие интегралы дифференциальных уравнений.

П23.1. $2xy'y'' = (y')^2 - 1$.

П23.2. $y''x \ln x = y'$.

П23.3. $xy'' - y' = x^2 e^x$.

П23.4. $xy'' = y'$.

П23.5. $y'' = y' + x$.

П23.6. $x(y'' + 1) + y' = 0$.

П23.7. $y''\mathrm{tg}\, x = y' + 1$.

П23.8. $y''\mathrm{ctg}\, x = 2 - y'$.

П23.9. $y^{(3)} + y^{(2)}\mathrm{tg}\, x = \dfrac{1}{\cos x}$.

П23.10. $y^{(3)} - y^{(2)} \cdot \dfrac{1}{x} = 0$.

П23.11. $y \cdot y'' + (y')^2 = 0$.

П23.12. $(y')^2 + y \cdot y'' = y \cdot y'$.

П23.13. $y \cdot y'' - (y')^2 = 0$.

П23.14. $(y + y') \cdot y'' = (y')^2$.

П23.15. $y'' = y' \cdot e^y$.

П23.16. $2y \cdot y'' = (y')^2$.

П23.17. $(y'')^2 = y'$.

П23.18. $y'' + \dfrac{2}{1-y}(y')^2 = 0$.

П23.19. $y''(1+y) = 5(y')^2$.

П23.20. $y''(2y+3) - 2(y')^2 = 0$.

П23.21. а) $y^{(3)} \cdot \operatorname{ctg} x + y^{(2)} = 1$; б) $y'' \cdot y^3 = -1$.

Общая формулировка задач К23.1—К23.11

Решить задачу Коши $\begin{cases} f(x, y, y') = y'' \\ y(a) = y_0, y'(a) = y_{01} \end{cases}$ на промежутке $[a; b]$ с помощью функции `rkfixed` и произвести интерполяцию полученных результатов. Определить значение параметра N, при котором найденное приближенное решение в середине промежутка $[a; b]$ будет удовлетворять неравенству $|y'' - f(x, y, y')| < \varepsilon$. Построить график найденного решения.

К23.1. $\begin{cases} y'' = y' \cdot e^y \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$, $[a; b] = [0; 0.9]$, $\varepsilon = 0.01$.

К23.2. $\begin{cases} y'' = -\dfrac{y'^2}{2y} \\ y(0) = 1, y'(0) = 1 \end{cases}$, $[a; b] = [0; 20]$, $\varepsilon = 10^{-6}$.

К23.3. $\begin{cases} y'' = -\dfrac{1}{2y^3} \\ y(0) = \dfrac{1}{2}, y'(0) = \sqrt{2} \end{cases}$, $[a; b] = [0; 8]$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

К23.4. $\begin{cases} y'' = \sqrt{y'} \\ y(0) = \dfrac{2}{3}, y'(0) = 1 \end{cases}$, $[a; b] = [0; 30]$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

К23.5. $\begin{cases} y'' = \dfrac{-2y'^2}{1-y} \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$, $[a; b] = [0; 9]$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

К23.6. $\begin{cases} y'' = \dfrac{2y'^2}{y-1} \\ y(0) = 2, y'(0) = 2 \end{cases}$, $[a; b] = [0; 0.4]$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

К23.7. $\begin{cases} y'' = -y \cdot y'^3 \\ y(0) = 1, y'(0) = 2 \end{cases}$, $[a; b] = [0; 12]$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

К23.8. $\begin{cases} y'' = \dfrac{y'^2 + y'}{1+y} \\ y(0) = 2, y'(0) = 2 \end{cases}$, $[a; b] = [0; 8]$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

К23.9. $\begin{cases} y'' = \dfrac{y'}{\sqrt{y}} \\ y(0) = 1, y'(0) = 2 \end{cases}$, $[a; b] = [0; 10]$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

К23.10. $\begin{cases} y'' = \dfrac{y'^2}{y} + 2y' \ln y \\ y(0) = 1, y'(0) = 1 \end{cases}$, $[a; b] = [0; 1]$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

К23.11. $\begin{cases} y'' = -100y \\ y(0) = 0, y'(0) = 10 \end{cases}$, $[a; b] = [0; 2\pi]$, $\varepsilon = 10^{-2}$.

Ответы, указания, решения

Т23.1. Указание: представить уравнение (23.4) в виде (23.1) и затем воспользоваться теоремой 23.1.

Т23.2. Если $\varphi(x)$ — функция, имеющая n-ю производную $\varphi^{(n)}(x)$ на интервале $(a; b)$, то под $L[\varphi]$ будем подразумевать функцию

$\varphi^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)\varphi^{(n-1)}(x) + \ldots + p_1(x)\varphi^{(1)}(x) + p_0(x)\varphi(x)$. Запись $L[\varphi] \equiv r(x)$ будет означать, что $L[\varphi] = r(x)$ для любого $x \in (a; b)$.

С помощью теоремы 8.1 непосредственно проверяются следующие свойства:

$$L[\alpha \cdot \varphi] \equiv \alpha \cdot L[\varphi], \quad L[\varphi + \psi] \equiv L[\varphi] + L[\psi]. \tag{23.6}$$

Из этих свойств следует первое утверждение теоремы 23.2. Далее, если $L[\varphi_i] \equiv q_i(x)$, $i = 1, 2$, то $L[\varphi_1] + L[\varphi_2] \equiv q_1(x) + q_2(x)$. Следовательно, в силу второго свойства из (23.6) $L[\varphi_1 + \varphi_2] \equiv q_1(x) + q_2(x)$. Теорема доказана.

П23.21. а) Сделаем замену $y^{(2)} = u$, тогда $u'\text{ctg}\, x + u = 1$ или $u' + \text{tg}\, x \cdot u = \text{tg}\, x$. Это линейное уравнение первого порядка. Решим его, опираясь на теорему 22.3:

$$r = e^{\int \text{tg}x\, dx} = e^{-\ln|\cos x|} = \frac{1}{|\cos x|}\text{, поскольку}$$

$$\int \text{tg}\, x\, dx = \int \frac{1}{\cos x} d(-\cos x) = -\int \frac{1}{\cos x} d(\cos x) = -\ln|\cos x|;$$

$$\frac{u}{|\cos x|} = \int \frac{1}{|\cos x|} \cdot \text{tg}\, x\, dx \Rightarrow \frac{u}{\cos x} = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx \Rightarrow \frac{u}{\cos x} = -\int \frac{d \cos x}{\cos^2 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{u}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} + C_1 \Rightarrow u = 1 + C_1 \cos x \Rightarrow y^{(2)} = 1 + C_1 \cos x.$$

Теперь перейдем к решению последнего уравнения:

$$y^{(1)} = \int (1 + C_1 \cos x)\, dx \Rightarrow y^{(1)} = x + C_1 \sin x + C_2 \Rightarrow y = \int (x + C_1 \sin x + C_2)\, dx \Rightarrow$$

$$y = \frac{x^2}{2} - C_1 \cos x + C_2 x + C_3.$$

б) Сделаем замену $y' = p(y)$, тогда

$$y^3 (p'_y \cdot p) = -1 \Rightarrow \frac{dp}{dy} \cdot p = -\frac{1}{y^3} \Rightarrow \int p dp = \int -\frac{1}{y^3} dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2 = \frac{1}{y^2} + 2C_1 \Rightarrow p = \pm \frac{\sqrt{1 + 2C_1 y^2}}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{1 + 2C_1 y^2}}{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pm \int \frac{y dy}{\sqrt{1 + 2C_1 y^2}} = \int dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pm \frac{1}{4C_1} \int \frac{d(1 + 2C_1 y^2)}{\sqrt{1 + 2C_1 y^2}} = \int dx \Rightarrow \pm \frac{1}{2C_1} \cdot \sqrt{1 + 2C_1 y^2} + C_2 = x.$$

К23.11. Приведем алгоритм решения задачи с помощью Mathcad.

Ввести исходные данные — аргументы встроенной функции `rkfixed`:

$$init := \begin{pmatrix}0\\10\end{pmatrix} \quad a := 0 \quad b := 2\cdot\pi \quad f(x, y, y') := -(100\cdot y) \quad D(x, Y) := \begin{pmatrix}Y_1\\ f(x, Y_0, Y_1)\end{pmatrix}$$

Решить задачу Коши и произвести интерполяцию полученного решения:

$$S(N) := \mathrm{rkfixed}(init,\ a,\ b,\ N,\ D) \qquad x(N) := S(N)^{\langle 0\rangle} \qquad y(N) := S(N)^{\langle 1\rangle}$$

$$g(t,\ N) := \mathrm{interp}(\mathrm{cspline}(x(N),\ y(N)),\ x(N),\ y(N),\ t)$$

Найти N, при котором найденная функция $y = g(t,\ N)$ в точке $t = \frac{a+b}{2}$ удовлетворяет неравенству $\left|y'' - f(x, y, y')\right| < \varepsilon$:

$$\varepsilon := 0.01 \qquad raz(t, N) := \frac{d^2}{dt^2}g(t, N) - f\left(t, g(t, N), \frac{d}{dt}g(t, N)\right)$$

$$N := \left| \begin{array}{l} for\ \ N \in 10, 60..310 \\ \quad return\ \ N\ \ if\ \ \left|raz\left(\frac{a+b}{2}, N\right)\right| < \varepsilon \\ \text{" TO BE continued"} \end{array}\right. \qquad N = 160$$

Построить график решения (рис. 23.3).

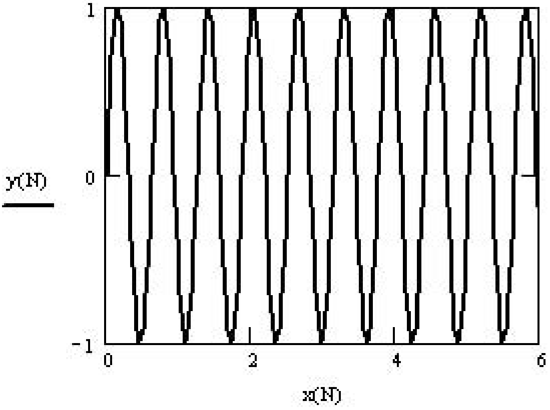


Рис. 23.3. График решения задачи К23.11

Глава 24

Устойчивость решений дифференциальных уравнений

В *гл. 21* говорилось, что задача Коши (21.3) с начальными условиями $(x_0, y_0) \in \Im$ — в случае непрерывности функций $f(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ на открытой области $\Im$ — имеет решение $y = \varphi(x)$, причем это решение единственно в некоторой окрестности $(a; b)$ точки x_0. Если изменять начальные условия (x_0, y_0), то будут меняться и соответствующие им решения. Возникает важный для приложений вопрос: как они будут меняться? Действительно, если какая-либо экономическая задача приводит к решению задачи Коши, то начальные значения определяются из практики и за их абсолютную точность ручаться нельзя. И если при одном и том же значении x_0 сколь угодно малые изменения y_0 способны сильно изменять ("отклонять") решения, то математическая модель реального экономического процесса не состоятельна. Следующее утверждение говорит о невозможности таких отклонений в пределах упомянутой выше окрестности $(a; b)$ точки x_0.

Теорема 24.1 (о локальной устойчивости). Пусть $y = \varphi(x)$ — интегральная кривая уравнения (21.2), проходящая через точку (x_0, y_0). Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что интегральная кривая $y = \overline{\varphi}(x)$ уравнения (21.2), проходящая через любую точку $\left(x_0, \overline{y_0}\right)$, для которой $\left|\overline{y_0} - y_0\right| < \delta$, будет "отстоять" от кривой $y = \varphi(x)$ менее чем на ε, т. е. $\left|\overline{\varphi}(x) - \varphi(x)\right| < \varepsilon$ для любого $x \in (a; b)$ (рис. 24.1).

Однако для приложений интерес представляет устойчивость решения на бесконечных промежутках. В связи с этим возникают следующие понятия.

ε-коридором функции $y = f(x)$ на промежутке $X \subseteq Af$[1] называется множество всех таких точек (x, y) координатной плоскости, что $x \in X$, $f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon$ (рис. 24.2).

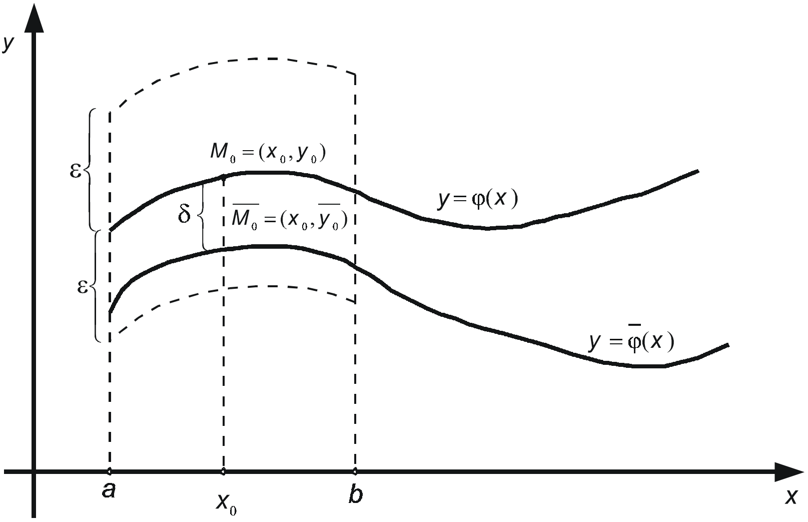


Рис. 24.1. Локальная устойчивость решения $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения на интервале (a; b)

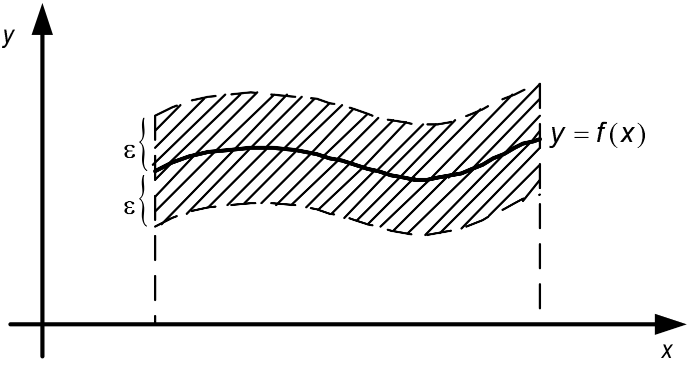


Рис. 24.2. ε-коридор функции $y = f(x)$

Решение $y = \varphi(x)$ уравнения (21.2) на промежутке $[x_0; +\infty)$ называется устойчивым по Ляпунову, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что любое другое решение $y = \overline{\varphi}(x)$ уравнения (21.2) на промежутке $[x_0; +\infty)$, удовлетворяющее неравенству $\left|\overline{\varphi}(x_0) - \varphi(x_0)\right| < \delta$, попадает в ε-коридор функции $\varphi(x)$ на промежутке $[x_0; +\infty)$. Устойчивость по Ляпунову означает, что решения, близкие по начальным значениям к решению $y = \varphi(x)$, остаются близкими и при всех $x \geq x_0$. (сравните рис. 24.1 и 24.3).

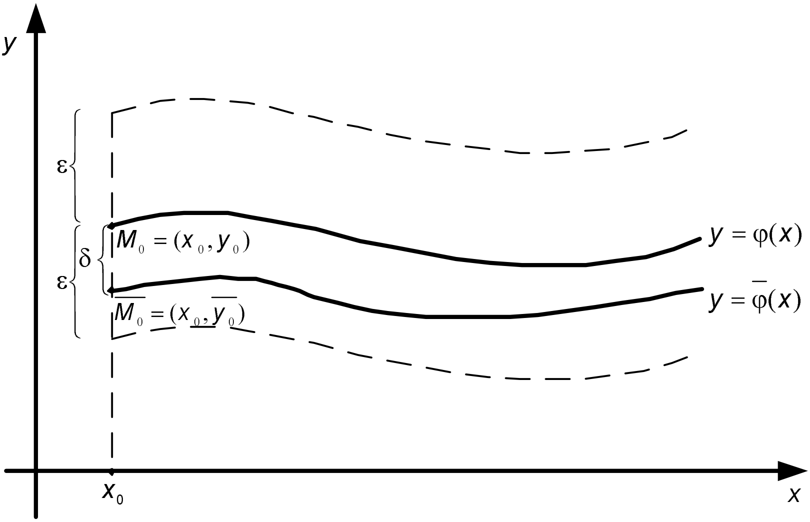


Рис. 24.3. Устойчивость по Ляпунову ($y_0 = \varphi(x_0)$, $\overline{y}_0 = \overline{\varphi}(x_0)$)

Перед тем как ввести более сильное понятие асимптотической устойчивости, рассмотрим один наглядный пример. Настенные часы идут с определенным размахом маятника, хотя при запуске их маятник можно по разному отклонить от вертикального положения. Если при запуске часов маятник отклонить недостаточно сильно, то после небольшого числа колебаний он остановится. Если же начальное отклонение достаточно велико, то через короткое время амплитуда колебаний маятника станет вполне определенной, и часы будут идти с этой амплитудой колебаний практически бесконечно долго. Таким образом, дифференциальное уравнение, описывающее движение маятника, имеет два так называемых стационарных решения: положение равновесия $y = 0$, соответствующее отсутствию хода, и периодическое решение $y = a\sin(bx + c)$, соответствующее нормальному ходу часов. Всякое другое решение — а таких решений бесконечно много, — очень быстро приближается к одному из двух стационарных и по истечении некоторого времени становится практически неотличимым от него. Поэтому каждое из двух стационарных решений является асимптотически устойчивым.

Решение $y = \varphi(x)$ уравнения (21.2) на промежутке $[x_0; +\infty)$ называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и существует такое число $\delta > 0$, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\overline{\varphi}(x) - \varphi(x)\right| = 0$ для любого решения $y = \overline{\varphi}(x)$ уравнения (21.2) на промежутке $[x_0; +\infty)$, удовлетворяющего неравенству $\left|\overline{\varphi}(x_0) - \varphi(x_0)\right| < \delta$. Это означает, что все решения, близкие по начальным условиям к асимптотически устойчивому решению, не только остаются близкими к нему при $x \geq x_0$, но и неограниченно сближаются с ним при $x \to +\infty$.

Пример. Исследуем на устойчивость решение $y = 0$ уравнения $y' = 0$ на промежутке $[0; +\infty)$. Общее решение этого дифференциального уравнения имеет вид $y = C$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \varepsilon$. Рассмотрим модуль разности решений $y = \varphi(x)$ и $y = \overline{\varphi}(x)$, где $\varphi(x) = 0$, $\overline{\varphi}(x) = c$, $0 < |c| < \delta$: $|\overline{\varphi}(x) - \varphi(x)| = |c| < \varepsilon$ для любого $x \geq 0$. Согласно определению, это означает устойчивость по Ляпунову решения $y = \varphi(x)$. Асимптотической устойчивости нет, поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty} |\overline{\varphi}(x) - \varphi(x)| = |c| > 0$ (рис. 24.4).

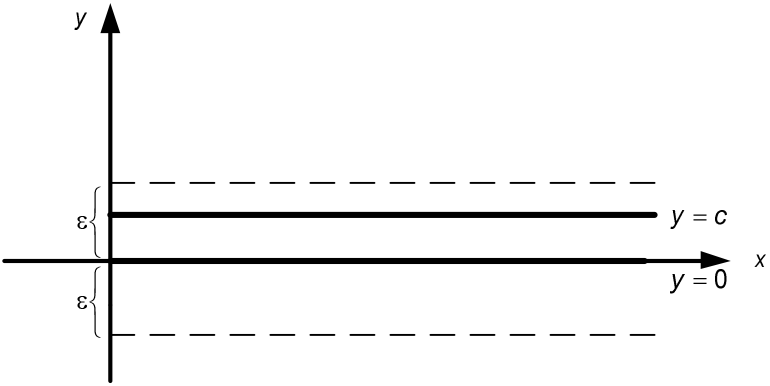


Рис. 24.4. Отсутствие асимптотической устойчивости

Компьютерный раздел

Встроенная функция `rkadapt(init, a, b, Ac, D, Nmax, lstep)` служит для численного решения задачи Коши (23.3) и реализует адаптивный алгоритм Рунге—Кутты четвертого порядка с переменным шагом интегрирования. Эта функция имеет 7 аргументов. Аргументы `init`, `a`, `b`, `D` имеют тот же смысл, что и соответствующие аргументы функции `rkfixed` *(см. "Компьютерный раздел" гл. 23)*. Параметр `Ac` задает точность, с которой алгоритмом выбирается длина шага — как правило, это число порядка 10^{-7}. Параметр `Nmax` задает максимальное допустимое число шагов алгоритма. Параметр `lstep` формирует таблицу результатов таким образом, чтобы разность между двумя последовательными числами в нулевом столбце таблицы (этот столбец содержит значения независимой переменной x) была не менее `lstep`; при этом вывод остальных промежуточных результатов, полученных алгоритмом, игнорируется. В случае `lstep` = 0 в таблицу выводятся все точки промежутка X, построенные алгоритмом. Следующий пример решения задачи Коши $\begin{cases} y' = 2y - yx^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ показывает две таблицы результатов применения функции соответственно при `lstep` = 10^{-4} и `lstep` = 1:

$y0 := 1 \quad \varepsilon := 1 \quad x0 := 0 \quad b := 5$

$f(x, y) := y \cdot (2 - x^3) \qquad D(x, Y) := f(x, Y_0)$

$S := \mathrm{rkadapt}(y0, x0, b, 10^{-5}, D, 10000, 10^{-4})$

$S =$

	0	1
0	0	1
1	0.05	1.105
2	0.299	1.814
3	0.565	3.019
4	0.807	4.518
5	1.039	5.968
6	1.281	6.611
7	1.465	5.92
8	1.64	4.352
9	1.817	2.479
10	1.903	1.696
11	1.988	1.075
12	2.062	0.674
13	2.127	0.421
14	2.187	0.261
15	2.246	0.153

$S := \mathrm{rkadapt}(y0, x0, b, 10^{-5}, D, 10000, 1)$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1.039 & 5.968 \\ 2.062 & 0.674 \\ 3.067 & 1.133 \times 10^{-7} \\ 4.07 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Во втором случае результаты вычислений в точках $x = 0.05$, $x = 0.299$, $x = 0.565$, $x = 0.807$ проигнорированы. Еще раз отметим, что `lstep` не влияет на реальное число шагов алгоритма в процессе его выполнения.

Задачи для самостоятельного решения

Т24.1. Показать, что решение $y = 0$ уравнения $y' = -y$ на промежутке $[0; +\infty)$ асимптотически устойчиво.

Т24.2. Показать, что решение $y = 0$ уравнения $y' = y$ на промежутке $[0; +\infty)$ не является устойчивым по Ляпунову.

Общая формулировка задач К24.1—К24.11

С помощью анимации графиков решений задачи Коши $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = \bar{y}_0 \end{cases}$ на промежутке $[x_0; b]$, найденных функцией `rkadapt` при различных значениях $\bar{y}$ и b, выяснить эмпирически, является ли решение задачи Коши $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ на промежутке $[x_0; +\infty)$ устойчивым по Ляпунову или асимптотически устойчивым.

К24.1. $f(x, y) = \dfrac{2y}{x}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$.

К24.2. $f(x, y) = \dfrac{-3y}{x}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$.

К24.3. $f(x, y) = 1 + x - y$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

К24.4. $f(x, y) = \sin^2 y$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

К24.5. $f(x, y) = x(y - 1)$, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$.

К24.6. $f(x, y) = x(y - 1)$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$.

К24.7. $f(x, y) = (2 - x^3)y$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

К24.8. $f(x, y) = (2 - x^3)y$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$.

К24.9. $f(x,y) = y^3 - y$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

К24.10. $f(x,y) = y^3 - y$, $x_0 = 0$, $y_0 = -1$.

К24.11. а) $f(x,y) = \dfrac{y}{3(x-1)}$, $x_0 = 2$, $y_0 = 0$.

б) $f(x,y) = 4y - yx^2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

Ответы, указания, решения

Т24.1. Исходное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Решим его:

$$\frac{dy}{dx} = -y \Rightarrow \int\frac{dy}{y} = -\int dx \Rightarrow \ln|y| + C_1 = -x \Rightarrow -x = \ln|yC_2| \Rightarrow |C_2 y| = e^{-x}$$

$$\Rightarrow y = C_3 \cdot e^{-x}.$$

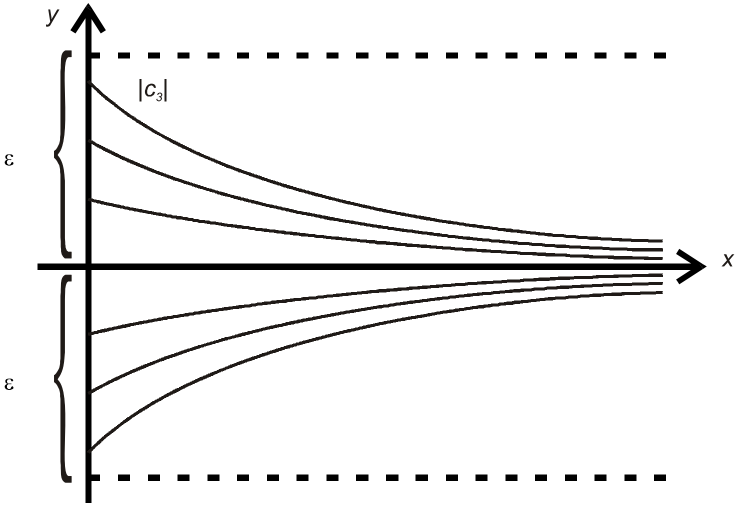


Рис. 24.5. Асимптотически устойчивое решение

Возьмем произвольное число ε > 0 и положим δ = ε. Рассмотрим модуль разности решений $y = \varphi(x)$ и $y = \overline{\varphi}(x)$, где $\varphi(x) = 0$, $\overline{\varphi}(x) = c_3 \cdot e^{-x}$,

$0 < |c_3| < \delta = \varepsilon$: $|\overline{\varphi}(x) - \varphi(x)| = |c_3| \cdot e^{-x} < \varepsilon$ для любого $x \geq 0$. Согласно определению, это означает устойчивость по Ляпунову решения $y = \varphi(x)$. Кроме того, $\lim\limits_{x \to +\infty} |\overline{\varphi}(x) - \varphi(x)| = \lim\limits_{x \to +\infty} |c_3| \cdot e^{-x} = 0$. Поэтому решение $y = \varphi(x)$ асимптотически устойчиво (рис. 24.5).

Т24.2. Указания: общее решение исходного уравнения имеет вид $y = Ce^x$. Эти решения не могут содержаться целиком в ε-коридоре функции $y = 0$ ни при каких положительных значениях ε и $|C|$ (рис. 24.6).

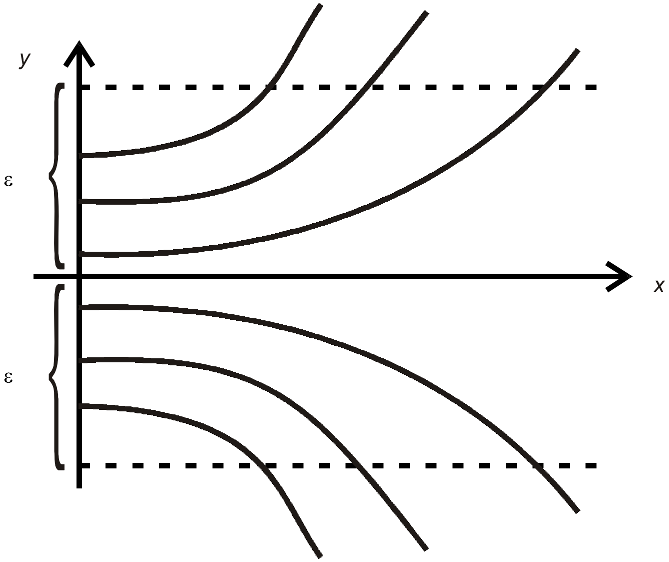


Рис. 24.6. Отсутствие устойчивости решения $y = 0$ по Ляпунову

К24.1—К24.10. Указания. Поскольку, в силу теоремы 24.1, любое решение задачи Коши (при некоторых дополнительных условиях — см. начало главы) локально устойчиво, то для эмпирической проверки устойчивости этого решения необходимо одновременно с уменьшением разности $|\overline{y}_0 - y_0|$ увеличивать промежуток $[x_0; b]$, на котором выполняется алгоритм функции `rkadapt`. При этом скорость приближения $\overline{y}_0$ к y_0 и скорость увеличения b должны зависеть от встроенной переменной `FRAME` *(см. "Компьютерный раздел" гл. 7)*. Сами эти зависимости следует варьировать с целью получения исчерпывающей анимационной картины поведения исследуемого решения.

На месте меток для ввода диапазона изменения графиков вдоль оси $0x$ следует ввести идентификаторы x_0 и b; диапазон изменения графиков вдоль оси $0y$ регулируется исходя из вида решения задачи Коши (сравни рис. 24.8 и 24.7).

К24.1. Ответ: не устойчиво.

К24.2. Ответ: асимптотически устойчиво.

К24.3. Ответ: асимптотически устойчиво.

К24.4. Ответ: не устойчиво.

К24.5. Ответ: не устойчиво.

К24.6. Ответ: не устойчиво.

К24.7. Ответ: асимптотически устойчиво.

К24.8. Ответ: асимптотически устойчиво.

К24.9. Ответ: асимптотически устойчиво.

К24.10. Ответ: не устойчиво.

К24.11. а) Алгоритм решения задачи с помощью Mathcad следующий. Ввести исходные данные:

$$x0 := 0 \quad y0 := 0 \quad b0 := 50 \ \varepsilon := 1$$

$$f(x, y) := \frac{y}{3 \cdot (x - 1)} \qquad D(x, Y) := f(x, Y_0)$$

Задать зависимости изменения переменных b, $y0 + h$ и решить задачу Коши:

$$b := b0 + 2^{FRAME+10} \qquad h := \frac{\varepsilon}{2^{FRAME+1}} \qquad S(y0, b) := rkadapt(y0, x0, b, 10^{-5}, D, 5000, 10^{-3})$$

Построить график решения и его ε-коридор (рис. 24.7). Произвести анимацию графиков.

б) Алгоритм решения задачи с помощью Mathcad следующий. Ввести исходные данные, задать зависимости изменения переменных b, $y0 + h$ и решить задачу Коши:

$$x0 := 0 \quad y0 := 0 \quad b0 := 10 \quad \varepsilon := 1$$

$$f(x, y) := y \cdot 4 - y \cdot x^2 \qquad D(x, Y) := f(x, Y_0)$$

$$b := b0 + 4 \cdot FRAME \qquad h := \frac{\varepsilon}{2^{FRAME+1}}$$

$$S(y0, b) := rkadapt(y0, x0, b, 10^{-5}, D, 1000, 10^{-7})$$

Построить график решения и его ε-коридор (рис. 24.8). Произвести анимацию графиков.

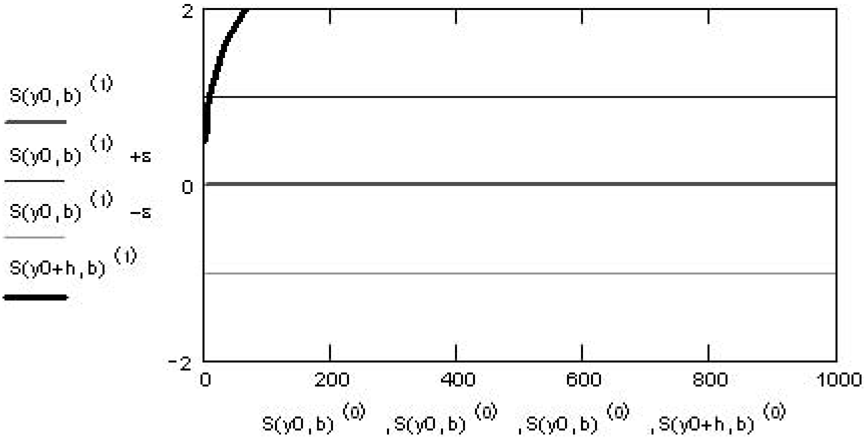


Рис. 24.7. График решения и его ε-коридор

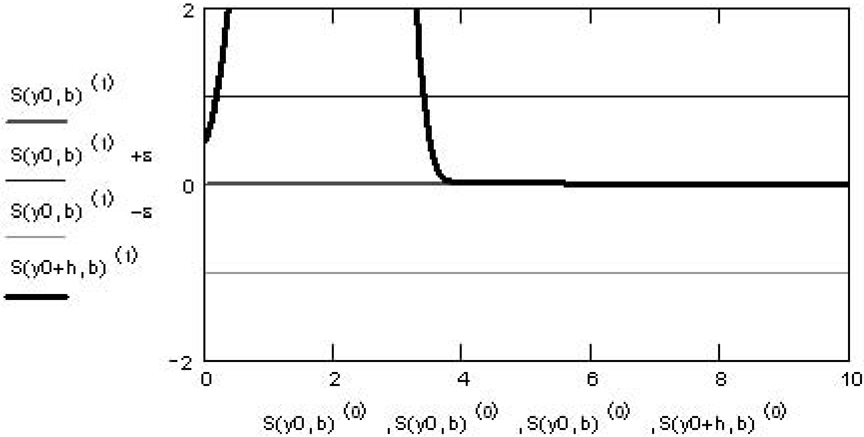
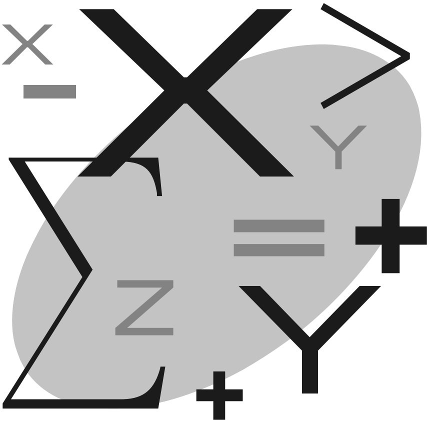


Рис. 24.8. График решения и его ε-коридор



ЧАСТЬ V

Ряды

Глава 25

Ряды: основные понятия и свойства

Теория рядов составляет основу численных методов и алгоритмов компьютерной математики.

Пусть дана числовая последовательность $\{a_n\}$. Образуем новую числовую последовательность $\{S_n\}$, которая определяется так: $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Последовательность $\{S_n\}$ называется числовым рядом, ее член S_n — n-й частичной суммой ряда, число a_n — n-м членом ряда, а сам ряд обозначается

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \text{ или } \sum_{n=1}^{\infty} a_n . \tag{25.1}$$

Если последовательность $\{S_n\}$ сходится (к числу S), то ряд (25.1) называется сходящимся (к S); при этом число, к которому ряд сходится, называется его суммой. Таким образом, запись $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$ эквивалентна равенству $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Если последовательность $\{S_n\}$ расходится, то ряд (25.1) называется расходящимся.

Пример. Ряд $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n\cdot(n+1)} + \ldots$ сходится и сумма его равна 1. Действительно,

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}, \quad \lim_{n\to\infty} S_n = 1.$$

Теорема 25.1. Добавление или удаление конечного числа членов не влияют на сходимость ряда. При этом сумма сходящегося ряда изменяется на величину, равную сумме добавляемых или удаляемых членов соответственно.

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n$ получен из ряда (25.1) удалением r членов, сумма которых равна D. Обозначим S'_n и S_n n-ые частичные суммы этих рядов соответственно. Очевидно, если k — наибольший из номеров удаленных членов ряда (25.1), то для любого натурального m

$$S_{k+m} - D = \mathrm{S}'_{k-r+m}. \tag{25.2}$$

Согласно утверждениям задач T2.4 и T2.9, последовательности

$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ и $S_{k+1}, S_{k+2}, \ldots, S_{k+m}, \ldots$

расходятся или сходятся (к одному и тому же числу) одновременно. Аналогичный вывод справедлив и по отношению к последовательностям

$S'_1, S'_2, \ldots, S'_n, \ldots$ и $S'_{k+1}, S'_{k+2}, \ldots, S'_{k+m}, \ldots$

Отсюда, учитывая соотношение (25.2), имеем следующую цепочку равносильных равенств:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \Leftrightarrow \lim_{m\to\infty} S_{k+m} = S \Leftrightarrow \lim_{m\to\infty} S'_{k-r+m} = S - D \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} S'_n = S - D .$$

Теорема доказана.

Теорема 25.2 (необходимое условие сходимости). Если ряд (25.1) сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Обратное утверждение не всегда верно.

Доказательство. Пусть S — сумма ряда (25.1), S_n — его n-я частичная сумма. Тогда $a_n = S_{n+1} - S_n$.

По теореме 2.2 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_{n+1} - \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S - S = 0$.

Предположим теперь, что $a_n = \dfrac{1}{n}$. В этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Так как $\{S_{2n}\} \to S$ (см. задачу T2.4), то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(S_{2n} - S_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} - \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S - S = 0$.

Но с другой стороны, $S_{2n} - S_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} > n \cdot \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2}$. Противоречие. Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится. Теорема доказана.

Итак, последовательность $\{a_n\}$ членов сходящегося ряда необходимо стремится к нулю. Однако для сходимости произвольного ряда этого условия недостаточно: важно, чтобы последовательность $\{a_n\}$ стремилась к нулю достаточно быстро. Условия, обеспечивающие достаточную скорость стремления к нулю последовательности $\{a_n\}$, будут рассмотрены в *гл. 26*.

Рассмотрим теперь последовательность функций $\{u_n(x)\}$, определенных на некотором множестве $D \subseteq Af^1$. Образуем новую последовательность $\{S_n(x)\}$, которая определяется так: $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) +\ldots+ u_n(x)$. Последовательность функций $\{S_n(x)\}$ называется функциональным рядом, выражение $S_n(x)$ — n-й частичной суммой ряда, $u_n(x)$ — n-м членом ряда, а сам ряд обозначается

$$u_1(x) + u_2(x) +\ldots+ u_n(x) +\ldots \text{ или } \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x). \qquad (25.3)$$

При фиксированной точке $x_0 \in D$, из ряда (25.3) получается числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$. Если этот ряд сходится, то точка x_0 называется точкой сходимости ряда. Множество всех точек сходимости называется областью сходимости функционального ряда. Говорят, что ряд (25.3) сходится на множестве X, если X содержится в его области сходимости. Если при этом для каждого $x_0 \in X$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = S(x_0)$, то функция $S(x)$ называется суммой ряда (25.3), а сам ряд — сходящимся к функции $S(x)$ на множестве X (такая сходимость называется поточечной). Символически это записывается так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x), x \in X.$$

Рассмотрим геометрическую прогрессию — функциональный ряд (25.3), в котором $u_n(x) = ax^{n-1}$, $a \neq 0$. Пусть $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) +\ldots+ u_n(x)$ и $x_0 \neq 1$. Очевидно, $S_n(x_0)$ — это сумма первых n членов геометрической прогрессии со знаменателем x_0. Известна формула: $S_n(x_0) = a\dfrac{x_0^n - 1}{x_0 - 1}$. Поэтому при

$$|x_0| < 1 \quad \lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = \frac{a}{x_0 - 1} \cdot \lim_{n\to\infty} (x_0^n - 1) = \frac{a}{x_0 - 1} \cdot (0 - 1) = \frac{a}{1 - x_0}.$$

Однако при $|x_0| > 1$ верно $\left|ax_0^{n-1}\right| \geq |a| > 0$. Поэтому последовательность $\left\{\left|ax_0^{n-1}\right|\right\}$ и, следовательно, $\left\{ax_0^{n-1}\right\}$ (см. задачу Т2.3) не может сходиться к нулю. Но тогда, в силу теоремы 25.2, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ax_0^{n-1}$ расходится.

Итак, областью сходимости исходного ряда является интервал (–1; 1), причем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ax^{n-1} = \dfrac{a}{1-x}$, $x \in (-1; 1)$.

Поточечная сходимость ряда (25.3) к функции $S(x)$ на множестве X означает, что в произвольно взятой точке $x_0 \in X$ n-ые частичные суммы этого ряда при достаточно больших значениях n будут отличаться от $S(x_0)$ на сколь угодно малое заданное число. При этом в другой точке множества X для достижения столь же малой разности может понадобиться большее число членов в частичных суммах. Другими словами, сходимость в различных точках из X может быть "неравномерной". В связи со сказанным возникает следующее понятие.

Ряд (25.3) называется равномерно сходящимся на множестве X к функции $S(x)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое натуральное число N, что любая частичная сумма $S_n(x)$ с номером $n > N$, окажется в ε-коридоре функции $S(x)$ на множестве X, т. е. $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ для любых $x \in X$ и $n > N$.

Число N, о котором говорится в этом определении, зависит только от ε; если бы речь шла о поточечной сходимости, то N зависело бы не только от ε, но и от выбора точки x в X. Поэтому очевидно, что равномерная сходимость к функции $S(x)$ автоматически означает поточечную сходимость к этой же функции (см. определение сходящейся последовательности в *гл. 2*).

Пример. Пусть $u_n(x) = x^n - x^{n-1}$. Покажем, что ряд (25.3) сходится на отрезке [0; 1] поточечно, но не сходится на нем равномерно.

Так как $S_n(x) = (x - 1) + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \ldots + (x^n - x^{n-1}) = x^n - 1$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = S(x_0) = \lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = \lim_{n\to\infty}(x_0^n - 1) = \begin{cases} -1 \text{ при } x_0 \in [0;\ 1) \\ 0 \text{ при } x_0 = 1 \end{cases}.$$

На рис. 25.1 штриховкой отмечен ε-коридор функции $S(x)$ на отрезке [0; 1] для $\varepsilon = 0.25$. Поскольку функции $S_n(x) = x^n - 1$ непрерывны на отрезке [0; 1], то, как видно на рис. 25.1, ни одна из них не может целиком содержаться в "разрывном" 0.25-коридоре функции $S(x)$.

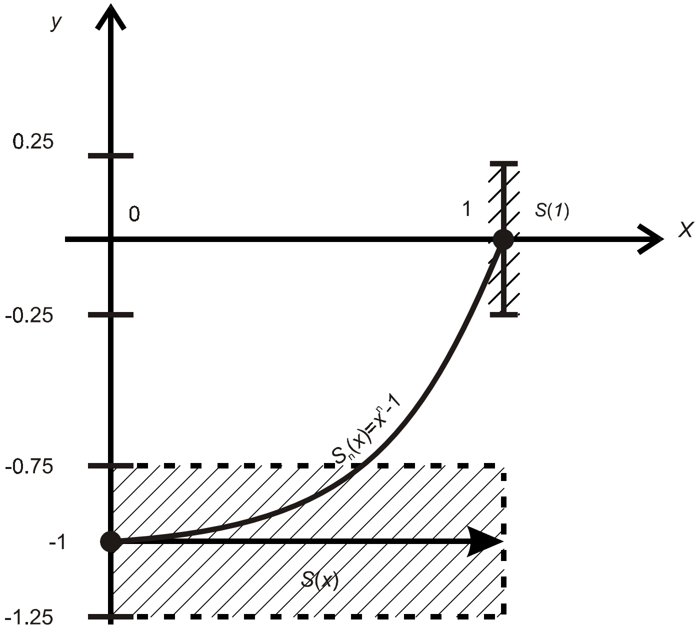


Рис. 25.1. Неравномерная сходимость ряда на отрезке [0; 1]

Ряд $u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) +\ldots+ u_{n+i}(x) +\ldots$ называется n-м остатком ряда (25.3).

Следствие 25.1. Ряд (25.3) равномерно сходится на множестве X, если и только если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число N, что сумма $R_n(x)$ любого его n-го остатка, для которого $n > N$, окажется в ε-коридоре функции $y = 0$ на множестве X, т. е. $|R_n(x)| < \varepsilon$ для любых $x \in X$ и $n > N$.

Доказательство следствия дано в задаче Т25.3.

Компьютерный раздел

Кнопка simplify подпанели **Символы** (Symbolic) (см. рис. 1.1) вызывает шаблон одноименной команды, которая используется для упрощения выражений. Пусть, к примеру, требуется упростить выражение

$\dfrac{a^3-b^3}{a-b}-ab+\dfrac{b^2}{3}$. В нужном месте рабочего листа введите это выражение и добейтесь, чтобы синий курсор принял форму правого уголка. Затем щелкните по кнопке simplify. После нажатия клавиши <Enter> получите:

$$\frac{a^3-b^3}{a-b}-a\cdot b+\frac{b^2}{3}\ \text{simplify}\ \rightarrow\ a^2+\frac{4}{3}\cdot b^2$$

Кнопка expand подпанели **Символы** (Symbolic) вызывает шаблон одноименной команды, которая используется для представления выражений в "развернутом" виде. Пусть, например, требуется разложить синус тройного угла. Введите выражение sin(3x) и добейтесь, чтобы синий курсор принял форму правого уголка. Щелкните кнопкой expand и в появившемся шаблоне удалите правую метку (эта метка используется в очень редких случаях и потому здесь не рассматривается). После нажатия клавиши <Enter> получите:

$$\sin(3\cdot x)\ \text{expand}\ \rightarrow\ 4\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)^2-\sin(x)$$

Вот еще один пример применения команды `expand`:

$$(a+b+c)^2\ \text{expand}\ \rightarrow\ a^2+2\cdot a\cdot b+2\cdot a\cdot c+b^2+2\cdot b\cdot c+c^2$$

Кнопка factor подпанели **Символы** (Symbolic) вызывает шаблон одноименной команды, которая служит для разложения выражений на множители. Порядок использования этой кнопки аналогичен кнопке expand. Приведем два примера ее применения:

$$4\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)^2-\sin(x)\ \text{factor}\ \rightarrow\ \sin(x)\cdot(2\cdot\cos(x)-1)\cdot(2\cdot\cos(x)+1)$$

$$a^2+2\cdot a\cdot b+2\cdot a\cdot c+b^2+2\cdot b\cdot c+c^2\ \text{factor}\ \rightarrow\ (a+b+c)^2$$

Кнопка collect подпанели **Символы** (Symbolic) вызывает шаблон одноименной команды, которая раскладывает выражения по степеням той переменной, чей идентификатор вводится на месте правой метки шаблона, вызываемого этой кнопкой. Порядок использования этой кнопки аналогичен предыдущим кнопкам. Приведем пример применения этой кнопки:

$$(a+b+c)^2\ \text{collect},\ b\ \rightarrow\ b^2+(2\cdot a+2\cdot c)\cdot b+(a+c)^2$$

$$(a+b+c)^2\ \text{collect},\ c\ \rightarrow\ c^2+(2\cdot a+2\cdot b)\cdot c+(a+b)^2$$

Кнопка substitute подпанели **Символы** (Symbolic) вызывает шаблон ▮ substitute, ▮ = ▮ одноименной команды, которая обеспечивает подстановку значений переменных в выражение. Собственно выражение вводится на месте левой метки, а на месте правых меток вводится выражение вида $x = a$, где x — идентификатор переменной, вместо которой в выражение будет подставлено значение a (константа или другое выражение). Через запятую после $x = a$ можно при необходимости вводить и другие подобные выражения. Так, если выражение $(a + b + c)^2$ требуется вычислить при $a = 1$, $b = y$, $c = x$, то на рабочем листе это будет выглядеть так:

$$(a + b + c)^2 \text{ substitute}, \ a = 1, \ b = y, \ c = x \rightarrow (1 + y + x)^2$$

Вот еще один пример применения этой команды:

$$(a + b + c)^2 \text{ substitute}, \ a + b + c = 3 \rightarrow 9$$

Кнопки подпанели **Символы** (Symbolic) можно эффективно использовать совместно с программными модулями в тех случаях, когда необходимо произвести многократно повторяющиеся символьные вычисления выражения при различных значениях входящих в него параметров. Рассмотрим пример вычисления сумм k-х степеней членов арифметической прогрессии с разностью d и первым членом 1 при $k = 1$, $k = 2$. Программный модуль, формирующий эти суммы, выглядит так:

$$f(m, d) := \left| \begin{array}{l} \text{for } k \in 1..2 \\ \quad a_{k-1} \leftarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{m} (1 + n \cdot d)^k \\ a \end{array} \right.$$

Теперь можно использовать функцию $f(m, d)$ для вычислений искомых сумм:

$$f(m, d) \rightarrow \begin{bmatrix} m + \frac{1}{2} d(m+1)^2 - \frac{1}{2}(m+1)d \\ m + d(m+1)^2 - (m+1)d + \frac{1}{3} d^2(m+1)^3 - \frac{1}{2} d^2(m+1)^2 + \frac{1}{6} d^2(m+1) \end{bmatrix}$$

$$f(m, d) \text{ factor} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot m \cdot (d \cdot m + 2 + d) \\ \frac{1}{6} \cdot m \cdot (6 + 6 \cdot d \cdot m + 6 \cdot d + 2 \cdot d^2 \cdot m^2 + 3 \cdot d^2 \cdot m + d^2) \end{bmatrix}$$

$$f(m, d) \text{ expand} \rightarrow \begin{bmatrix} m + \frac{1}{2} \cdot d \cdot m^2 + \frac{1}{2} \cdot d \cdot m \\ m + d \cdot m^2 + d \cdot m + \frac{1}{3} \cdot d^2 \cdot m^3 + \frac{1}{2} \cdot d^2 \cdot m^2 + \frac{1}{6} d^2 \cdot m \end{bmatrix}$$

$$f(m, d)\ collect, m \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot d \cdot m^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot d + 1\right) \cdot m \\ \frac{1}{3} \cdot d^2 \cdot m^3 + \left(\frac{1}{2} \cdot d^2 + d\right) \cdot m^2 + \left(\frac{1}{6} \cdot d^2 + d + 1\right) \cdot m \end{bmatrix}$$

$$f(m, d)\ substitute, m = 10, d = 3 \rightarrow \begin{pmatrix} 175 \\ 3805 \end{pmatrix}$$

$$f(m, d)\ substitute, m = 10, d = r \rightarrow \begin{pmatrix} 10 + 55 \cdot r \\ 10 + 110 \cdot r + 385 \cdot r^2 \end{pmatrix}$$

$$f(10, 3) = \begin{pmatrix} 175 \\ 3805 \end{pmatrix}$$

Задачи для самостоятельного решения

Т25.1. Доказать следующие утверждения:

а) если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ и c — произвольное число, то $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot S$;

б) если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = T$, то $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = S + T$;

в) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ расходится.

Т25.2. Пусть $\{r_n\}$ — числовая последовательность сумм остатков ряда (25.1). Доказать, что ряд (25.1) сходится, если и только если $\lim\limits_{n \to \infty} r_n = 0$.

Т25.3. Доказать следствие 25.1.

Т25.4. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ равномерно сходится на любом отрезке $[-q; q]$, где $0 < q < 1$, но не является равномерно сходящимся на интервале $(-1; 1)$.

Т25.5. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{n-1}}{n}-\frac{x^{n}}{n+1}\right)$ равномерно сходится на отрезке $[-1;\ 1]$.

Т25.6. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(n\alpha)$ при различных значениях параметра α.

Т25.7. Доказать расходимость ряда (25.1), если

$$a_n=\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-\ldots\sqrt{2}}}}}_{n\text{ корней}}.$$

Общая формулировка задач К25.1—К25.11

Найти суммы рядов при указанных значениях параметров i и k.

К25.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^k}$, $k=1, 2, 4, 6, 8$.

К25.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^k}$, $k=1, 2, 3$.

К25.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$, $k=1, 2, 4, 6, 8$.

К25.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^k}$, $k=1, 2, 4, 6, 8$.

К25.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{ni}}{k^{n-1}}$, $k=1, 2, 3, 4, 5, 6$, $i=4, 5, 6, 7$.

К25.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{kn+1}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+i)}$, $k=1, 2, 3, 4$, $i=3, 4, 5, 6$.

К25.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{kn^2+in+1}{(n+2)\cdot(n+4)\cdot\ldots\cdot(n+2i)}$, $k=1, 2, 3$ $i=4, 5, 6$.

К25.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^k+1}{(n+1)^2\cdot(n+2)^2\cdot\ldots\cdot(n+k+1)^2}$, $k = 1, 2, 3, 4$.

К25.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+i)^k}$, $k = 2, 4, 6,\ i = 1, 2, 3$.

К25.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^i+1}{(n+2)^2\cdot(n+4)^2\cdot\ldots\cdot(n+2k)^2}$, $i = 2, 4,\ k = 3, 5$.

К25.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^k}{r^{ni}}$, $k = 0, 1, 2,\ i = 1, 2, 3$.

Ответы, указания, решения

Т25.1. Указание: рассмотреть частичные суммы соответствующих рядов и воспользоваться теоремой 2.2 и утверждением задачи Т2.6.

Т25.2. В силу теоремы 25.1 сходимость любого остатка $a_{n+1} + a_{n+2} +\ldots$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ к сумме r_n означает сходимость и самого ряда. Пусть $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, $S_n = a_1 + a_2 +\ldots +a_n$, тогда $r_n = S - S_n$. Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} S - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0\,.$$

Т25.3. Указания. Во-первых, поточечная сходимость ряда (25.3) в силу теоремы 25.1 равносильна поточечной сходимости любого его остатка. Во-вторых, по той же теореме 25.1 $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$, где $S(x)$ — сумма ряда (25.3), $S_n(x)$ — его n-я частичная сумма. Следовательно, неравенства $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ и $|R_n(x)| < \varepsilon$ равносильны.

Т25.4. В *гл. 25* показано, что при $x \in (-1;\ 1)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\dfrac{1}{1-x}$, $S_n(x)=\dfrac{1-x^n}{1-x}$.

Отсюда $\left|S(x)-S_n(x)\right|=\dfrac{|x|^n}{|1-x|}\le\dfrac{q^n}{1-q}$ при любом $x \in [-q;\ q]$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{q^n}{1-q}=\dfrac{0}{1-q}=0$, можно указать такое натуральное число N, что $\frac{q^n}{1-q} < \varepsilon$ при $n > N$. Отсюда $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ при любых $n > N$ и $x \in [-q; q]$, что и доказывает равномерную сходимость ряда на отрезке $[-q; q]$.

Равномерная сходимость ряда нарушается на интервале $(-1; 1)$, поскольку при фиксированном натуральном числе n $\lim\limits_{x \to 1-} \left| \frac{x^n}{1-x} \right| = +\infty$.

Т25.5. Указание: воспользоваться тем, что при $x \in [-1; 1]$

$$S_n(x) = 1 - \frac{x^n}{n+1},\ S(x) = 1,\ |S_n(x) - S(x)| = \left| \frac{x^n}{n+1} \right| \le \frac{1}{n+1}.$$

Т25.6. Если $\alpha = k\pi$, где k — целое, то $\sin(nk\pi) = 0$ и, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(n\alpha)$ сходится к нулю.

Предположим теперь, что $\alpha \ne k\pi$, т. е. $\sin\alpha \ne 0$, но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(n\alpha)$ по-прежнему сходится. Тогда в силу теоремы 25.2 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n\alpha) = 0$. Но

$$\sin(n\alpha) = \sin((n-1)\alpha + \alpha) = \sin((n-1)\alpha) \cdot \cos\alpha + \cos((n-1)\alpha) \cdot \sin\alpha.$$

Поэтому $\cos((n-1)\alpha) = \frac{\sin(n\alpha) - \sin((n-1)\alpha)\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha}$ и, следовательно, по теореме 2.2

$$\lim_{n\to\infty} \cos((n-1)\alpha) = \frac{1}{\sin\alpha} \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \sin(n\alpha) - \lim_{n\to\infty} \sin((n-1)\alpha)\cdot\cos\alpha \right) =$$

$$= \frac{0 - 0\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha} = 0.$$

Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} \cos^2((n-1)\alpha) = 0$. Но с другой стороны,

$$\lim_{n\to\infty} \cos^2((n-1)\alpha) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \sin^2((n-1)\alpha)\right) = 1 - 0 = 1.$$

Противоречие. Итак, при $\alpha \neq k\pi$, где k — целое, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(n\alpha)$ расходится.

Т25.7. Так как $a_n^2 = \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-\ldots\sqrt{2}}}}}_{n-1\text{ корней}}$, то $a_n^2 = 2 - a_{n-1}$, $2 = a_n^2 + a_{n-1}$.

Предположим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда по теореме 25.2 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, отсюда $2 = \lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n^2 + a_{n-1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 + \lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1} = 0 + 0 = 0$, что невозможно.

К25.1. Алгоритм решения с помощью Mathcad следующий:

$$f(r) := \left|\begin{array}{l} \text{for } k \in 0..2 \\ \quad \text{for } i \in 1..3 \\ \qquad a_{k,i-1} \leftarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^k}{r^{n\cdot i}} \\ a \end{array}\right. \qquad f(r)\ \text{substitute},\ r = 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{7} \\ 2 & \dfrac{4}{9} & \dfrac{8}{49} \\ 6 & \dfrac{20}{27} & \dfrac{72}{343} \end{pmatrix}$$

$$f(r)\ \text{expand} \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(-1+r)} & \dfrac{1}{(-1+r^2)} & \dfrac{1}{(-1+r^3)} \\ \dfrac{r}{(1-2r+r^2)} & \dfrac{r^2}{(1-2r^2+r^4)} & \dfrac{r^3}{(1-2r^3+r^6)} \\ \dfrac{(r+r^2)}{(-1+3r-3r^2+r^3)} & \dfrac{(r^2+r^4)}{(-1+3r^2-3r^4+r^6)} & \dfrac{(r^3+r^6)}{(-1+3r^3-3r^6+r^9)} \end{bmatrix}$$

$$f(r)\ \text{factor} \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(-1+r)} & \dfrac{1}{(-1+r)\,(1+r)} & \dfrac{1}{(-1+r)\,(r^2+r+1)} \\ \dfrac{r}{(-1+r)^2} & \dfrac{r^2}{(-1+r)^2(1+r)^2} & \dfrac{r^3}{(-1+r)^2(r^2+r+1)^2} \\ r\,\dfrac{(1+r)}{(-1+r)^3} & r^2\,\dfrac{(1+r^2)}{(-1+r)^3(1+r)^3} & r^3(1+r)\,\dfrac{(r^2-r+1)}{(-1+r)^3(r^2+r+1)^3} \end{bmatrix}$$

Глава 26

Достаточные признаки сходимости рядов

Если все члены числового ряда положительны (отрицательны), то ряд называется знакоположительным (знакоотрицательным). Скажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ мажорирует ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (или ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ мажорируется рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$), если $a_n \le b_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Теорема 26.1 (признаки сравнения).

1. Знакоположительный ряд, мажорируемый сходящимся рядом, также сходится.
2. Ряд, мажорирующий расходящийся знакоположительный ряд, тоже расходится.
3. Пусть даны два знакоположительных ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$ и $l \ne 0$, то эти ряды сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство теоремы дано в задаче Т26.1.

Примеры. В *гл. 25* было показано, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ сходится. А т. к. $\dfrac{1}{(n+1)^2} < \dfrac{1}{n(n+1)}$, $n = 1,2, \ldots$, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ расходится, поскольку расходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (см. доказательство теоремы 25.2) и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$.

Теорема 26.2 (признак равномерной сходимости). Если в каждой точке $x \in X$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ равномерно сходится на множестве X.

Доказательство. Из теоремы 26.1 следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ сходится (поточечно) на множестве X. В *гл. 27* будет показано, что область сходимости этого ряда содержится в области сходимости ряда (25.3). Поэтому в силу теоремы 25.1 любой n-й остаток ряда (25.3) сходится на множестве X. Обозначим:

$$R_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty}u_{n+i}(x), \quad R_{n\,m}(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+m}(x), \quad r_n = \sum_{i=1}^{\infty}a_{n+i},$$

$$r_{n\,m} = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m}.$$

По определению $\lim\limits_{m\to\infty}R_{n\,m}(x) = R_n(x)$ для любого $x \in X$. Но тогда и $\lim\limits_{m\to\infty}\left|R_{n\,m}(x)\right| = \left|R_n(x)\right|$ для любого $x \in X$ в силу утверждения задачи Т2.3. Так как

$$\left|R_{n\,m}(x)\right| \le \left|u_{n+1}(x)\right| + \left|u_{n+2}(x)\right| + \ldots + \left|u_{n+m}(x)\right| \le r_{n\,m},$$

то по теореме 2.3

$$\left|R_n(x)\right| = \lim_{m\to\infty}\left|R_{n\,m}(x)\right| \le \lim_{m\to\infty}r_{n\,m} = r_n.$$

Итак, $\left|R_n(x)\right| \le r_n$ для любого $x \in X$. Но $\lim\limits_{n\to\infty}r_n = 0$ (см. задачу Т25.2). Это означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что $r_n < \varepsilon$ при

$n > N$. Но тогда $|R_n(x)| < \varepsilon$ при любых $n > N$ и $x \in X$. Равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множестве X вытекает теперь из следствия 25.1.

Теорема 26.3 (признаки Даламбера и Коши).

1. Пусть дан знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Тогда этот ряд сходится в случае $l < 1$ и расходится в случаях $l > 1$ и $l = +\infty$.
2. Пусть дан знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. Тогда этот ряд сходится в случае $l < 1$ и расходится в случаях $l > 1$ и $l = +\infty$.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$. Возьмем произвольное число q между l и 1. По определению предела найдется такое натуральное число N, что все члены последовательности $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ с номерами $n > N$ окажутся в окрестности точки l с радиусом $q - l$, т. е. $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ для любого $n > N$. Обозначим N-й остаток ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ через $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m$. По доказанному выше

$$\frac{b_2}{b_1} < q, \frac{b_3}{b_2} < q, \ \ldots, \frac{b_{m+1}}{b_m} < q .$$

Перемножив почленно эти неравенства, получим, что для любого $m \geq 1$ верно $\frac{b_{m+1}}{b_1} < q^m$ или $b_{m+1} < b_1 q^m$. Таким образом, ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_{m+1}$ мажорируется сходящейся геометрической прогрессией $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_1 q^m$ и потому сходится по теореме 26.1. Сходимость исходного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует теперь из теоремы 25.1.

Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l>1$, то аналогично показывается существование такого числа N, что для любого $n>N$ $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1$, т. е. $0<a_{N+1}\leq a_{N+2}\leq\ldots\leq$ $\leq a_{N+i}\leq\ldots$ и, следовательно, последовательность $\{a_n\}$ не может сходиться к нулю. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится в силу теоремы 25.2. Признак Даламбера доказан. Доказательство второй части теоремы — признака Коши — дано в задаче Т26.2.

В случае $l = 1$ признаки Даламбера и Коши не гарантируют сходимости или расходимости ряда. Так, ранее было доказано, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ — расходится. Однако и в первом, и во втором случаях число l из теоремы 26.3 равно 1, т. к.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1,\ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1,\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=1,\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}=1.$$

Теорема 26.4 (интегральный признак). Пусть даны знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и функция $f(x)$, невозрастающая на промежутке $[1; +\infty)$, такая, что $f(n) = a_n$ для каждого натурального числа n. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, если и только если сходится интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}f(x)dx$.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ монотонная, то она интегрируема на отрезке $[n; n + 1]$ (теорема 17.4). Кроме того, для любого $x\in[n; n + 1]$

$a_n = f(n)\geq f(x)\geq f(n + 1) = a_{n+1}$.

Отсюда в силу утверждения задачи Т17.9

$$a_n=\int\limits_{n}^{n+1}a_n dx\geq\int\limits_{n}^{n+1}f(x)dx\geq\int\limits_{n}^{n+1}a_{n+1}dx=a_{n+1}.$$

Последнее двойное неравенство означает, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ мажорируется рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{n}^{n+1} f(x)dx$, который, в свою очередь, мажорируется рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Но тогда по теореме 26.1 сходимость (расходимость) одного из этих рядов означает сходимость (расходимость) другого. Для завершения доказательства остается показать, что сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{n}^{n+1} f(x)dx$ равносильна сходимости интеграла $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$. Этот факт доказан в задаче Т26.3. Теорема доказана.

Рассмотрим так называемый гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$, $a > 0$. Пусть $f(x) = \frac{1}{x^a}$, $X = [1; +\infty)$. Так как $f'(x) = -\frac{a}{x^{a+1}} < 0$ при $x \in X$, то по следствию 11.4 функция $f(x)$ убывает на промежутке X. Поскольку $f(n) = \frac{1}{n^a}$, то по теореме 26.4 сходимость исходного ряда равносильна сходимости интеграла $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx$. Но

$$\Phi(x) = \int\limits_{1}^{x} f(x)dx = \begin{cases} \frac{x^{1-a}}{1-a} - \frac{1}{1-a} & \text{при } a \neq 1 \\ \ln x & \text{при } a = 1 \end{cases},$$

и, следовательно, предел $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ x\in X}} \Phi(x)$ равен $\frac{1}{a-1}$ при $a > 1$ и бесконечен при $0 < a \le 1$. Отсюда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ сходится при $a > 1$ и расходится при $0 < a \le 1$.

Следствие 26.1. Если выполняются условия теоремы 26.4, то

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots \le \int\limits_{n}^{+\infty} f(x)dx.$$

Это утверждение, непосредственно вытекающее из доказательства теоремы 26.4, позволяет оценить точность приближения суммы S n-й частичной суммой S_n знакоположительного ряда: $S - S_n \le \int\limits_n^{+\infty} f(x)dx$. Вообще, если знакоположительный ряд (25.1) мажорируется сходящимся рядом с известными суммами r_n его n-х остатков, то $S - S_n \le r_n$.

Если каждые два соседних члена ряда (25.1) имеют разные знаки ($a_n \cdot a_{n+1} < 0$, $n = 1, 2, \ldots$), то такой ряд называется знакочередующимся.

Теорема 26.5 (признак Лейбница). Пусть ряд (25.1) знакочередующийся. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, а последовательность $\{|a_n|\}$ убывающая, то ряд (25.1) сходится, знак его суммы S совпадает со знаком его первого члена a_1, причем $|S| \le |a_1|$.

Доказательство. Можно ограничиться случаем $a_1 > 0$, поскольку при $a_1 < 0$ все последующие рассуждения применимы к ряду, полученному из $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ умножением на -1.

Обозначим через S_n n-ю частичную сумму ряда (25.1). Так как последовательность $\{|a_n|\}$ убывающая, а все члены ряда с нечетными номерами положительны, то для любого i $a_{2i+1} + a_{2i+2} > 0$, откуда

$$S_{2n} = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \ldots + (a_{2n-1} + a_{2n}) > 0,$$

$$S_{2n+2} = S_{2n} + (a_{2n+1} + a_{2n+2}) > S_{2n},$$

т. е. последовательность $\{S_{2n}\}$ положительная и возрастающая. Аналогично, для любого i $a_{2i} + a_{2i+1} < 0$, откуда

$$S_{2n} = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \ldots + (a_{2n-2} + a_{2n-1}) + a_{2n} < a_1,$$

т. е. последовательность $\{S_{2n}\}$ ограничена сверху. Следовательно, по теореме 2.4 последовательность $\{S_{2n}\}$ сходится к своей точной верхней грани S, где $S \le a_1$. Так как $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$, то по теореме 2.2 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} + \lim\limits_{n\to\infty} a_n = S$. Таким образом, $\{S_n\} \to S$ и $S \le a_1$. Теорема доказана.

Пример. Знакочередующийся ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots$ сходится по теореме 26.5, т. к. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ и последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ убывающая.

Теорема 26.5 позволяет оценить точность приближения суммы S знакочередующегося ряда (25.1) его n-й частичной суммой S_n (см. задачу 26.6): $|S-S_n|\le|a_{n+1}|$.

Компьютерный раздел

Кнопка break подпанели **Программирование** (Programming) вызывает оператор прерывания `break`, который, как правило, используется совместно с условным оператором `if`, при этом `break` вводится на месте левой метки оператора `if`. Оператор `break` прерывает выполнение цикла и осуществляет переход к строке программного модуля, следующей за прерванным циклом; при этом сохраняются последние значения всех переменных цикла. Например, в результате выполнения программного модуля

```
     | a ← 0
     | for i ∈ 1..10
c := |   | a ← a + 1
     |   | break if i = 6
     | a
```

переменная `c` примет значение 6.

Следует отметить, что в случае вложенных циклов прерывается именно тот цикл, в блоке операторов которого присутствует оператор прерывания `break`. Например, в результате выполнения программного модуля

```
     | b ← 0
     | for i ∈ 1..7
c := |  for j ∈ 1..9
     |    | b ← b + 1
     |    | break if j = 3
     | b
```

переменная `c` примет значение 21. Действительно, внутренний цикл с ранжированной переменной `j` будет прерываться всякий раз после трех выполнений, а число таких прерываний будет равно 7, поскольку внешний цикл с ранжированной переменной `i` будет выполняться 7 раз. А вот в результате выполнения программного модуля

```
     | b ← 0
     | for i ∈ 1..7
     |   | b ← b + 1
c := |   | for j ∈ 1..9
     |   |   break if j = 3
     | b
```

переменная `c` примет значение 7.

Задачи для самостоятельного решения

Т26.1. Доказать теорему 26.1.

Т26.2. Завершить доказательство теоремы 26.3, доказав признак Коши.

Т26.3. Завершить доказательство теоремы 26.4.

Т26.4. Дано: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ сходится равномерно на множестве X. Доказать, что ряд (25.3) также сходится равномерно на множестве X.

Т26.5. Дано: ряд (25.1) является знакочередующимся и удовлетворяет требованиям теоремы 26.5. Доказать, что сумма его n-го остатка не превосходит по модулю $|a_{n+1}|$ и имеет с a_{n+1} одинаковый знак.

Т26.6. Доказать, что всякая бесконечная десятичная дробь $0.a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$, где a_i, $i = 1, 2, \ldots$, — цифра, определяет некоторое действительное число.

Т26.7. Доказать, что если знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^k$ при $k > 1$ сходится. Верно ли обратное утверждение?

Т26.8. Даны два расходящихся знакоположительных ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\max\{a_n, b_n\}$ также расходится.

Т26.9. Доказать сходимость ряда (25.1), если $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2-\sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, $a_n = \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ корней}}$.

Т26.10. Исследовать сходимость ряда (25.1), если

а) $\dfrac{1}{a_n} = \int\limits_0^n \sqrt[4]{1+x^4}\,dx$; б) $a_n = \int\limits_{\pi n}^{\pi(n+1)} \dfrac{\sin^2 x}{x}\,dx$.

Т26.11. Дано: $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = a$, $a \neq 0$, $a_n > 0$. Доказать расходимость знакоположительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Т26.12. Доказать равномерную сходимость ряда на промежутке X:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{1}{x^{2n}+n}$, $X = (-\infty; +\infty)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot n}{x^4+n^2}$, $X = (-\infty; +\infty)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$, $X = [0; +\infty)$.

Общая формулировка задач П26.1—П26.21

Исследовать на сходимость указанные ряды.

П26.1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7n-1}{5^n (n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln(n+3)}$.

П26.2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{(n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^3+2n^2+1}}$.

П26.3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3n-1)\sin\left(\frac{\pi}{4^n}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2n-1}$.

П26.4. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^3\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{5^n}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n(n+4)}$.

П26.5. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\frac{n}{2}}}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3^n}\right)$.

П26.6. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n\cdot 2^n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+n}{4+n^2-n}$.

П26.7. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^n\cdot n^7$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7+n}{49+n^2}\right)^2$.

П26.8. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+5n+7}{3n^2-1}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[6]{(2n+3)^7}}$.

П26.9. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^{3n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[8]{(7n-1)^3}}$.

П26.10. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin^n\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n^2+3)}$.

П26.11. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$.

П26.12. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7n-1}{5^n(n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} n}{n^2+1}$.

П26.13. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}^{3n}\left(\frac{\pi}{5^n}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+5n+1}{\sqrt{n^6+3n^2+2}}$.

П26.14. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}^n\left(\frac{1}{2n+1}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n}{(n+2)\cdot 3^n}$.

П26.15. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin^n\left(\dfrac{2n^3-5}{2n^3+3n^2+1}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{4\sqrt{n}}$.

П26.16. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot\dfrac{1}{5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n+3^n}{4^n+5^n}$.

П26.17. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+3)\ln(n+3)\ln(\ln(n+3))}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{1+2^n}$.

П26.18. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(5n+8)\ln^3(5n+8)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{n\sqrt[5]{n^2+1}}\right)$.

П26.19. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2e^{-n^3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$.

П26.20. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^{n^2}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n}{\sqrt{6n^3+1}}$.

П26.21. а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\dfrac{n+1}{n-1}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(n!)}$.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n+3^n}{n^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+5}{2^n}$.

Общая формулировка задач К26.1—К26.11

Числовая последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. Если ряд сходится, то с помощью Mathcad вычислить приближенно его сумму с точностью 10^{-7}; если же ряд расходится, то с помощью Mathcad найти наименьшее k, при котором его k-я частичная сумма превзойдет 10^7.

К26.1. $a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{n}$. **К26.2.** $a_1=\dfrac{1}{2}$, $a_{n+1}=\dfrac{na_n}{n+2}$.

К26.3. $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = a_n - n \cdot a_n^2$.

К26.4. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + na_n}$.

К26.5. $a_1 = 1$, $a_2 = 2 - \sqrt{3}$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$.

К26.6. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$.

К26.7. $a_1 = \sqrt{2}$, $a_n^2 = 2 - a_{n-1}$.

К26.8. $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1}^2 = 2 - \sqrt{4 - a_n^2}$.

К26.9. $a_1 = 4$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = \frac{13}{4}a_{n+1} - \frac{3}{4}a_n$.

К26.10. $a_1 = 3$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{a_n}{4}$.

К26.11. $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = \frac{a_n \cdot a_{n+1}}{a_n + a_{n+1}}$.

Ответы, указания, решения

Т26.1. 1. Пусть знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ мажорируется сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Поскольку частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ограничены, то ограничены и частичные суммы S_n ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n \le b_n$ для любого n). Таким образом, последовательность $\{S_n\}$ — возрастающая и ограниченная и потому по теореме 2.4 имеет предел.

2. Второе утверждение является простым следствием уже доказанного.

3. Так как последовательность $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ имеет предел, то она ограничена сверху некоторым положительным числом q. Отсюда $a_n \le qb_n$, $n = 1, 2, \ldots$, т. е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ мажорируется рядом $q\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Аналогично, ввиду $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{l}$ последовательность $\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}$ ограничена сверху некоторым по-

ложительным числом p. Отсюда $b_n \le pa_n$, $n = 1, 2, \ldots$, т. е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ мажорируется рядом $p\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Остается только применить первую часть теоремы 26.1.

Т26.2. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1$. Возьмем произвольное число q между l и 1. По определению предела найдется такое натуральное число N, что все члены последовательности $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}$ с номерами $n > N$ окажутся в окрестности точки l с радиусом $q - l$, т. е. $\sqrt[n]{a_n} < q \Leftrightarrow a_n < q^n$ для любого $n > N$. Это означает, что ряд (25.1) мажорируется рядом $a_1 + a_2 + \ldots + a_N + {}$ $+ q^{N+1} + q^{N+2} + \ldots + q^{N+n} + \ldots$, который сходится в силу теоремы 25.1, поскольку сходится ряд

$$q^{N+1} + q^{N+2} + \ldots + q^{N+n} + \ldots = q^N (q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots).$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l > 1$, то аналогично показывается существование такого натурального числа N, что для любого $n > N$ $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$ и, следовательно, ряд (25.1) расходится в силу теоремы 25.2.

Т26.3. Положим $\Phi(x) = \int\limits_1^x f(x)dx$. Согласно следствию 17.2,

$$\Phi(n+1) = \int\limits_1^2 f(x)dx + \int\limits_2^3 f(x)dx + \ldots + \int\limits_n^{n+1} f(x)dx,$$

т. е. $\Phi(n + 1)$ является n-й частичной суммой числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_n^{n+1} f(x)dx$.

По определению $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ x\in[1;+\infty)}} \Phi(x)$. В частности, если этот предел существует (т. е. $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ сходится), то существует и предел $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi(n+1)$, а значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_n^{n+1} f(x)dx$ тоже сходится.

Предположим теперь, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{n}^{n+1} f(x)dx$ сходится к числу S, и рассмотрим произвольную последовательность $\{x_i\}$ точек из промежутка $[1; +\infty)$, сходящуюся к $+\infty$. Каждый член x_i этой последовательности заключим между двумя натуральными числами n_i и $n_i + 1$: $n_i \le x_i \le n_i + 1$. Так как интегралы $\int\limits_{n_i}^{x_i} f(x)dx$, $\int\limits_{x_i}^{n_i+1} f(x)dx$ неотрицательны (см. задачу Т17.7), то по следствию 17.2

$$\Phi(x_i) = \Phi(n_i) + \int\limits_{n_i}^{x_i} f(x)dx \ge \Phi(n_i)\,,\ \Phi(x_i) = \Phi(n_i+1) - \int\limits_{x_i}^{n_i+1} f(x)dx \le \Phi(n_i+1)\,.$$

Но согласно утверждению задачи Т2.4, $\{\Phi(n_i)\} \to S$, $\{\Phi(n_i+1)\} \to S$. Поэтому по теореме 2.3 из неравенства $\Phi(n_i) \le \Phi(x_i) \le \Phi(n_i+1)$ следует $\{\Phi(x_i)\} \to S$. Ввиду произвольности выбора последовательности $\{x_i\}$ это означает, что $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ x\in[1;+\infty)}} \Phi(x) = S$, что и завершает доказательство теоремы 26.4.

Т26.4. Указание: доказательство этого утверждения аналогично обоснованию теоремы 26.2.

Т26.5. Очевидно, n-й остаток $a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+i} + \ldots$ ряда (25.1) также удовлетворяет требованиям теоремы 26.5. Поэтому остается только применить эту теорему к ряду $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{n+i}$.

Т26.6. Перефразируем задачу: требуется доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}$. Этот ряд мажорируется рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10^n}$, который является сходящейся геометрической прогрессией. Остальное теперь следует из теоремы 26.1.

Т26.7. В силу теоремы 25.2 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Это значит, что, начиная с некоторого номера N, члены последовательности $\{a_n\}$ будут меньше 1. Но тогда $a_n^k < a_n$ при $n \geq N$ и, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n^k$ мажорируется сходящимся рядом $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$. Остальное следует из теорем 26.1, 25.1.

Обратное утверждение не всегда верно.

Т26.8. Указание: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \max\{\, a_n, b_n\}$ мажорирует расходящиеся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Т26.9. $\sqrt{2} = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2^2}\right)$,

$$\sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2+2\cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right)} = \sqrt{4\cos^2\left(\frac{\pi}{2^3}\right)} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^3}\right).$$

Аналогично, $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n-1 \text{ корней}} = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$.

Поэтому $a_n = \sqrt{2-2\cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)} = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

Воспользуемся неравенством $\sin x < x$, доказанным в *гл. 6*:

$$a_n = 2\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) < \frac{\pi}{2^n}.$$

Это означает, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ мажорируется сходящейся геометрической прогрессией $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\pi}{2^n}$ и потому сходится в силу теоремы 26.1.

Т26.10. а) Так как $\sqrt[4]{1+x^4} > x$ при $x \in [0; n]$, то согласно утверждению задачи Т17.9, $\dfrac{1}{a_n} = \int\limits_0^n \sqrt[4]{1+x^4}\,dx \geq \int\limits_0^n x dx = \dfrac{n^2}{2}$, откуда $a_n \leq \dfrac{2}{n^2}$. Таким образом, исходный ряд мажорируется сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n^2}$ и потому также сходится в силу теоремы 26.1.

б) Так как $\frac{\sin^2 x}{x} \geq \frac{\sin^2 x}{\pi(n+1)}$ при $x \in [\pi n; \pi(n+1)]$, то

$$a_n \geq \int\limits_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{\sin^2 x}{\pi(n+1)}\, dx = \frac{1}{\pi(n+1)} \int\limits_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2(n+1)}.$$

Таким образом, исходный ряд мажорирует расходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n+1)}$ и потому также расходится в силу теоремы 26.1.

Т26.11. По условию $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = a$, $a \neq 0$. Следовательно, по теореме 26.1 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, поскольку таковым же является и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Т26.12. а) Исходный ряд сходится на промежутке X по теореме 26.5. В силу утверждения задачи Т26.5

$$|R_n(x)| < \left| \frac{(-1)^{n+2}}{x^{2(n+1)} + n + 1} \right| = \frac{1}{x^{2n+2} + n + 1} \leq \frac{1}{n+1},$$

где $R_n(x)$ — сумма n-го остатка ряда. Отсюда ясно, что для любого числа $\varepsilon > 0$ функции $R_n(x)$, начиная с некоторого номера N, окажутся в ε-коридоре функции $y = 0$ на промежутке X. А это означает равномерную сходимость исходного ряда на этом промежутке (следствие 25.1).

б) Эта задача аналогична предыдущей.

в) Найдем производную $u_n'(x)$ n-го члена $u_n(x) = x^2 e^{-nx}$ исходного ряда:

$$u_n'(x) = 2xe^{-nx} + x^2 e^{-nx}(-n) = (2x - nx^2)e^{-nx}.$$

Так как $u_n'(x)$ при $x \in \left(0; \frac{2}{n}\right)$ и $u_n'(x) < 0$ при $x > \frac{2}{n}$, то в силу следствий 11.3, 11.4 функция $u_n(x)$ возрастает на интервале $\left(0;\ \frac{2}{n}\right)$ и убывает на промежутке $\left(\frac{2}{n};\ +\infty\right)$. Следовательно, наибольшее значение функция $u_n(x)$ принимает в точке $x = \frac{2}{n}$: $u_n\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{4}{n^2 e^2}$. Это означает, что ряд

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ мажорируется на промежутке X сходящимся гармоническим рядом $\frac{4}{e^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ и потому равномерно сходится на X по теореме 26.2.

П26.21. а) $\ln\frac{n+1}{n-1} = \ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)}{\frac{2}{n-1}} = 1$ *(см. гл. 6)*, то исходный ряд и ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{n}(n-1)}$ сходятся или расходятся одновременно (теорема 26.1). Но $\frac{2}{\sqrt{n}(n-1)} \le \frac{2}{\sqrt{n}\cdot\frac{n}{2}} = \frac{4}{n^{\frac{3}{2}}}$, т. е. ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{n}(n-1)}$ мажорируется сходящимся рядом $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{4}{n^{\frac{3}{2}}}$ и потому также сходится в силу теоремы 26.1. Итак, исходный ряд сходится.

б) $\ln(n!) = \ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n < n\ln n$. Поэтому исходный ряд мажорирует ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$. Воспользуемся теперь интегральным признаком сходимости. Положим $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$. Так как $f(n) = \frac{1}{n\ln n}$, то в силу теоремы 26.4 сходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ равносильна сходимости интеграла $\int\limits_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$. Вычислим этот интеграл:

$$\int\limits_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx = \int\limits_2^{+\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln x} = \int\limits_{\ln 2}^{+\infty}\frac{dt}{t} = \ln t\Big|_{\ln 2}^{+\infty}.$$

Поскольку $\lim\limits_{t\to+\infty}\ln t = +\infty$, то интеграл $\int\limits_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$ расходится, поэтому расходится и ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$. А значит, расходится и исходный ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}$, мажорирующий ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

в) Так как $\dfrac{2^n+3^n}{n^n} < \dfrac{2\cdot 3^n}{n^n}$, то исходный ряд мажорируется рядом $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n^n}$. Воспользуемся теперь признаком Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n} = 0 < 1 .$$

Отсюда следует сходимость ряда $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n^n}$ по теореме 26.3. Сходимость исходного ряда следует теперь из теоремы 26.1.

г) Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2+5}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n^2+5}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2+\dfrac{5}{n^2}}{1+\dfrac{5}{n^2}} = \frac{1}{2} < 1 .$$

Поэтому в силу теоремы 26.3 исходный ряд сходится.

К26.1. Указания. Ряд сходится в силу теоремы 26.3. Кроме того, он мажорируется сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}}$, сумма n-го остатка которого равна $\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{2^{n+1}}+\ldots=\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

К26.2. Указания. Индукцией по n можно показать, что $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$. В свою очередь, согласно следствию 26.1, сумма n-го остатка сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$ равна

$$\int_n^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)}dx = ln\frac{x}{1+x}\Bigg|_n^{+\infty} = \ln\frac{n+1}{n} .$$

К26.3. Указания. Вначале докажем индукцией по n, что $\dfrac{1}{n^2}\le a_n\le\dfrac{2}{n^2}$. При $n\le 4$ эти неравенства проверяются непосредственно. Предположим теперь, что $\dfrac{1}{(n-1)^2}\le a_{n-1}\le\dfrac{2}{(n-1)^2}$. Так как функция $f(x) = x - (n-1)x^2$ возрастает на промежутке $\left[0;\dfrac{1}{2(n-1)}\right]$ и $\dfrac{2}{(n-1)^2}\le\dfrac{1}{2(n-1)}$ при $n\ge 5$, то

$$f\left(\frac{1}{(n-1)^2}\right) \le f(a_{n-1}) \le f\left(\frac{2}{(n-1)^2}\right) \Rightarrow \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{n-1}{(n-1)^4} \le a_{n-1} - (n-1)a_{n-1}^2 \le$$

$$\le \frac{2}{(n-1)^2} - \frac{4(n-1)}{(n-1)^4} \Leftrightarrow \frac{n-2}{(n-1)^3} \le a_n \le \frac{2(n-3)}{(n-1)^3} \Rightarrow \frac{1}{n^2} < \frac{n-2}{(n-1)^3} \le a_n \le$$

$$\le \frac{2(n-3)}{(n-1)^3} < \frac{2}{n^2}.$$

Итак, исходный ряд мажорируется сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$, сумма n-го остатка которого, согласно следствию 26.1, не превосходит

$$2\int\limits_{n}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{2}{n}.$$

К26.4. Указание. Докажем индукцией по n, что $a_{n+1} < \frac{3}{(n+1)^2}$. При $n = 1$ это неравенство проверяется непосредственно. Предположим теперь, что $a_n < \frac{3}{n^2}$. Обозначим $f(x) = \frac{x}{1+nx}$. Так как $f'(x) = \frac{x}{(1+nx)^2} > 0$, то функция $f(x)$ монотонно возрастает на промежутке $[0; +\infty)$. Отсюда

$$a_{n+1} = f(a_n) < f\left(\frac{3}{n^2}\right) = \frac{3}{n^2+3n} < \frac{3}{(n+1)^2}.$$

Дальше см. решение задачи К26.3.

К26.5. Указание. Доказать, что $a_{n+2} = (2-\sqrt{3})^{n+1}$.

К26.6. Указание. Если S_n — n-я частичная сумма исходного ряда, то $a_{n+1} = \frac{1}{S_n}$. Если бы ряд сходился к некоторому числу $S > 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{S_n} = \frac{1}{S} \ne 0,$$ что противоречит теореме 25.2.

К26.7. Указание: см. задачу Т25.7.

К26.8. Указание: см. задачу Т26.9.

К26.9. Указание. Показать, что $a_n = \frac{1}{4^{n-2}}$.

K26.10. Указание. Можно показать, что $a_n = \dfrac{n+2}{2^{n-1}}$. Отсюда следует, что исходный ряд мажорируется рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4n}{2^n}$, сумма n-го остатка которого, согласно следствию 26.1, равна $\int\limits_{n}^{+\infty} \dfrac{4x}{2^x} dx = \dfrac{1 + n \ln 2}{2^{n-2} \ln^2 2}$.

K26.11. Докажем индукцией по n, что $a_{n+2} < \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. При $n = 1$ и $n = 2$ это неравенство проверяется непосредственно. Предположим теперь, что $a_n < \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2}$, $a_{n+1} < \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$. Тогда

$$a_{n+2} = \frac{1}{\dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{a_{n+1}}} < \frac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-2} + \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \cdot \frac{2}{5} < \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

Итак, исходный ряд мажорируется сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2}$, сумма n-го остатка которого равна

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \ldots = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{2}{3}} = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

Алгоритм приближенного вычисления суммы ряда с заданной точностью 10^{-7}:

```
S :=
    $a_1 \leftarrow 1$
    $a_2 \leftarrow 1$
    $S_1 \leftarrow 1$
    $S_2 \leftarrow a_1 + a_2$
    for $n \in 1..100$
        $a_{n+2} \leftarrow \frac{a_{n+1} \cdot a_n}{a_n + a_{n+1}}$
        $S_{n+2} \leftarrow S_{n+1} + a_{n+2}$
        break if $3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} < 10^{-7}$
    S
```

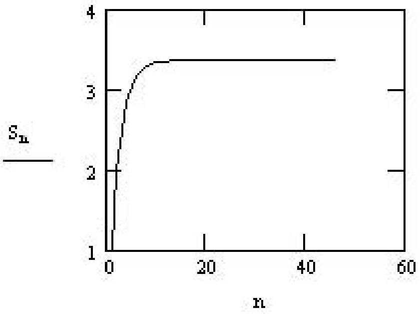
$rows(S) = 47$

$S_{rows(S)-1} = 3.359885665$

$n := 1..rows(S)$

$S =$

	0
23	3.3598292
24	3.35985077
25	3.3598641
26	3.35987234
27	3.35987743
28	3.35988058
29	3.35988252
30	3.35988373
31	3.35988446
32	3.35988492
33	3.35988521
34	3.35988538
35	3.35988549



Глава 27

Условная и абсолютная сходимости

В этой главе все члены рассматриваемых рядов будем считать отличными от нуля (нулевые члены всегда можно исключить — они не влияют ни на сходимость ряда, ни на его сумму).

Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Составим из его членов два знакопостоянных ряда — знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n$ и знакоотрицательный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a''_n$ (a'_n совпадает с n-м по счету положительным членом, a''_n совпадает с n-м по счету отрицательным членом ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$). Обозначим S, S', S'' и S_n, S_n', S''_n суммы и n-е частичные суммы рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a''_n$ соответственно. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n$ расходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n = +\infty$, что будет соответствовать записи $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n = +\infty$; если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a''_n$ расходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n = -\infty$, что будет соответствовать записи $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a''_n = -\infty$.

Возможны только три ситуации:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n = S', \ \sum_{n=1}^{\infty} a''_n = S''; \qquad (27.1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n = S', \ \sum_{n=1}^{\infty} a''_n = -\infty \ \text{ или } \ \sum_{n=1}^{\infty} a'_n = +\infty, \ \sum_{n=1}^{\infty} a''_n = S''; \tag{27.2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n = +\infty, \ \sum_{n=1}^{\infty} a''_n = -\infty. \tag{27.3}$$

Рассмотрим, как отразятся эти ситуации на сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, составленного из модулей его членов.

Теорема 27.1. Если имеет место ситуация (27.1), то оба ряда — $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} | a_n|$ — сходятся, причем $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S' + S''$, $\sum_{n=1}^{\infty} | a_n| = S' - S''$. Если имеет место ситуация (27.2), то эти оба ряда расходятся. В ситуации (27.3) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} | a_n|$ расходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ может как сходиться, так и расходиться.

Доказательство. Пусть верно (27.1). Любую частичную сумму S_n можно представить в виде $S_n = S'_{k_n} + S''_{r_n}$, где k_n — число положительных чисел среди первых n членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, r_n — число отрицательных чисел среди первых n членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $n = k_n + r_n$. По теореме 2.2 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} S'_{k_n} + \lim\limits_{n\to\infty} S''_{r_n} = S' + S''$, поскольку $\left\{S'_{k_n}\right\}$, $\left\{S''_{r_n}\right\}$ — подпоследовательности сходящихся последовательностей $\{S'_n\}$, $\{S''_n\}$ (см. задачу Т2.4).

Аналогично, если T_n — n-я частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} | a_n|$, то $T_n = S'_{k_n} - S''_{r_n}$. Следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} | a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} T_n = \lim\limits_{n\to\infty} S'_{k_n} - \lim\limits_{n\to\infty} S''_{r_n} = S' - S''$.

Рассмотрим ситуацию (27.2), при которой $\sum_{n=1}^{\infty} a''_n = -\infty$. Если предположить, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, то $\lim_{n\to\infty} S''_{r_n} = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S'_{k_n} = S - S'$, что невозможно. Аналогичное противоречие получается, если предположить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Ситуация (27.2), при которой $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n = +\infty$, рассматривается аналогично.

Пусть теперь верно (27.3). Так как $T_n = S'_{k_n} - S''_{r_n}$, $\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} S'_{k_n} - \lim_{n\to\infty} S''_{r_n} = +\infty$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится. Следующие два примера показывают, что в данной ситуации возможна как сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, так и его расходимость:

а) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n+1} + \ldots$ расходится по теореме 25.2, поскольку предел $\lim_{n\to\infty} a_n$ в данном случае не равен нулю;

б) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \ldots$ сходится по теореме 26.5.

Теорема доказана.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется условно сходящимся, если сам он сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится.

Итак, в свете теоремы 26.1 для произвольного знакопеременного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ возможны только следующие ситуации:

- ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно: в этом случае сходятся оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$;
- ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно: в этом случае $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится;
- ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится: в этом случае расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Теорема 27.2. Если ряд (25.1) сходится абсолютно, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, полученный из него произвольной перестановкой членов, также сходится абсолютно и его сумма равна сумме исходного ряда (25.1).

Доказательство теоремы дано в задаче Т27.3.

Теорема 27.3. Если ряд (25.1) сходится условно, то с помощью подходящей перестановки его членов можно получить как ряд, сходящийся к произвольному наперед заданному числу, так и расходящийся ряд.

Теоремы 27.2 и 27.3 указывают на существенное различие в свойствах абсолютно и условно сходящихся рядов.

Компьютерный раздел

Оператор `continue` вводится кнопкой continue подпанели **Программирование** (Programming). В отличие от оператора `break`, прерывающего цикл, оператор `continue` прерывает только текущую итерацию цикла, переводя вычисления к его следующей итерации. Например, в результате выполнения программного модуля

```
     | c ← 0
     | for i ∈ 1..8
c := |   | continue if i ≥ 3
     |   | c ← c + 1
     | c
```

переменная `c` примет значение 2, поскольку только в двух итерациях — при $i = 1$ и при $i = 2$ — `c` возрастает на 1; в остальных итерациях цикла оператор `c ← c + 1` пропускается из-за их прерывания оператором `continue`.

Задачи для самостоятельного решения

Т27.1. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \ldots$

Доказать, что в этом случае $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \ldots = +\infty$,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a''_n = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{2n} - \ldots = -\infty$.

Т27.2. Пусть ряд (25.1) знакоположительный и его сумма равна S. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, полученный из него произвольной перестановкой членов, также сходится к числу S.

Т27.3. Доказать теорему 27.2.

Т27.4. Члены условно сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ переставить так, чтобы вновь полученный ряд оказался расходящимся.

Общая формулировка задач П27.1—П27.21

Исследовать указанные ряды на условную и абсолютную сходимость.

П27.1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$.

П27.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{6n+1}$.

П27.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{n+5}{3^n}$.

П27.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$.

П27.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln^n (n+1)}$.

П27.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{3n^2 - 1}$.

П27.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n}{n^5}$.

П27.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln^n(n+1)}$.

П27.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

П27.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{7^n}$.

П27.11. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\ln n}$.

П27.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt[5]{(n+1)^3}}$.

П27.13. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{n-2}{n^2-1}$.

П27.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin^n\left(\frac{\pi}{6n}\right)$.

П27.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n^2+n+1}$.

П27.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos n\cdot\operatorname{arctg}\frac{n}{n^3+1}$.

П27.17. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$.

П27.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^n}{(2n)!}$.

П27.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{(n+2)\sqrt[4]{n+1}}$.

П27.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\arcsin\left(\frac{\pi}{4n}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt[11]{n}}$.

П27.21. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2+(-1)^n}{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$.

Общая формулировка задач К27.1—10

К27.*i* (*i=1—10*). Исследовать ряды из задач П27.*i* и П27.*i* + 10 на условную и абсолютную сходимость. В случае условной сходимости ряда вычислить приближенно с помощью Mathcad его сумму с точностью 10^{-5}; вычислить суммы первых 10^4 положительных и первых 10^4 отрицательных членов этого ряда.

К27.11. Вычислить приближенно с помощью Mathcad сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ с точностью 10^{-4}. Вычислить также суммы первых 10^4 положительных и первых 10^4 отрицательных членов этого ряда.

Ответы, указания, решения

Т27.1. Исходный ряд сходится условно, поскольку сам ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ сходится в силу теоремы 26.5, в то время как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, составленный из модулей его членов, расходится *(см. гл. 25)*. Отсюда по теореме 27.1 возможна только ситуация (27.3). Утверждение доказано.

Т27.2. Для каждой частичной суммы T_n ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ найдется частичная сумма S_r ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ такая, что $T_n \le S_r \le S$: для этого достаточно взять r столь большим, чтобы в частичной сумме S_r содержались все члены частичной суммы T_n. Поэтому положительная, возрастающая последовательность $\{T_n\}$ ограничена сверху числом S, а потому в силу теоремы 2.4 сходится к своей точной верхней грани T, где $T \le S$. Аналогично показывается (если поменять ролями ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$), что $S \le T$. Отсюда $S = T$.

Т27.3. Сохраняем смысл обозначений S, S', S'', a'_n, a''_n, использовавшихся в данной главе. Обозначим $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ — ряд, полученный из ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ произвольной перестановкой его членов. Перестановка членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ "переведет" ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a'_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a''_n$ в соответствующие знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b'_n$ и знакоотрицательный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b''_n$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$. Согласно утверждению задачи Т27.2, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b'_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a'_n=S'$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-b''_n\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-a''_n\right)=-S''$.

Отсюда, в силу теоремы 27.1, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ абсолютно сходится, причем

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=S'+S''=S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,.$$

Т27.4. Рассмотрим ряд

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\ldots+=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{6n-5}}+\frac{1}{\sqrt{6n-3}}+\frac{1}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n .$$

Этот ряд получается из исходного ряда в результате такой перестановки: за тремя положительными членами следует один отрицательный. Покажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ расходится. Так как $\frac{2}{\sqrt{6n-1}}>\frac{1}{\sqrt{2n}}$, то

$$\frac{1}{\sqrt{6n-3}}+\frac{1}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}>\frac{1}{\sqrt{6n-1}}+\frac{1}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}>0,$$

откуда $b_n>\frac{1}{\sqrt{6n-5}}>\frac{1}{\sqrt{2n}}$. Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ мажорирует расходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ и потому также расходится в силу теоремы 26.1.

П27.21. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2+(-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2}{n}$ сходится в силу теоремы 26.5: последовательность $\left\{\frac{2}{n}\right\}$ убывающая и $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2}{n}=0$. Но гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится *(см. гл. 26)*. Поэтому исходный ряд расходится, будучи суммой расходящегося и сходящегося рядов (см. задачу Т25.1).

б) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ сходится по теореме 26.5. Однако ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$, составленный из модулей его членов, расходится в силу теоремы 26.1, поскольку мажорирует расходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Таким образом, исходный ряд сходится условно.

К27.11. Алгоритм решения задачи с помощью Mathcad следующий. Вычислить сумму ряда с точностью 10^{-4}:

$$a(n) := \frac{(-1)^n \cdot \ln(n)}{n}$$

```
S :=
    $n \leftarrow 1$
    $S \leftarrow 0$
    while $|a(n+1)| > 10^{-4}$
        $S \leftarrow S + a(n)$
        $n \leftarrow n + 1$
    $S \leftarrow S + a(n)$
```

$S = 0.1598189$

Вычислить суммы S_p и S_n соответственно первых 10^4 положительных и отрицательных членов исходного ряда:

```
Sp :=
    $S \leftarrow 0$
    for $n \in 1..10000$
        continue if $a(n) < 0$
        $S \leftarrow S + a(n)$
    $S$

Sn :=
    $S \leftarrow 0$
    for $n \in 1..10000$
        continue if $a(n) > 0$
        $S \leftarrow S + a(n)$
    $S$
```

$Sp = 21.25157947$

$Sn = -21.09125007$

$Sp + Sn - S = 0.0005105$

Глава 28

Основные свойства равномерно сходящихся рядов

Теорема 28.1 (о непрерывности суммы ряда). Если ряд (25.3) равномерно сходится на множестве X к функции $S(x)$ и все функции $u_n(x)$ непрерывны на X, то $S(x)$ также непрерывна на X.

Доказательство. Обозначим через $S_n(x)$ n-ю частичную сумму ряда (25.3). Пусть $x_0 \in X$ и $\{x_k\}$ — произвольная последовательность точек из X, сходящаяся к x_0. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Ввиду равномерной сходимости найдется такое натуральное число n, что для любого $x \in X$ верно $\left|S_n(x) - S(x)\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Так как функция $S_n(x)$ непрерывна на X (по теореме 4.1), то $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} S_n(x) = S_n(x_0)$. Это означает, что $\{S_n(x_k)\} \to S_n(x_0)$ (при $k \to \infty$) и, следовательно, существует такое число N, что для любого $k > N$ верно $\left|S_n(x_k) - S_n(x_0)\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. В итоге имеем:

$$\left|S(x_k) - S(x_0)\right| = \left|\left(S(x_k) - S_n(x_k)\right) + \left(S_n(x_k) - S_n(x_0)\right) + \left(S_n(x_0) - S(x_0)\right)\right| \le$$

$$\le \left|S(x_k) - S_n(x_k)\right| + \left|S_n(x_k) - S_n(x_0)\right| + \left|S_n(x_0) - S(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon .$$

Отсюда, ввиду произвольности выбора ε, $\{S(x_k)\} \to S(x_0)$ и, следовательно, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} S(x) = S(x_0)$, что означает непрерывность функции $S(x)$ в точке x_0 вдоль X. Теорема доказана.

На той же идее основано доказательство следующего утверждения, обобщающего теорему 28.1.

Теорема 28.2 (о почленном предельном переходе). Если ряд (25.3) равномерно сходится на множестве X к функции $S(x)$, a — предельная точка множества X и $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in X}} u_n(x)=c_n$, $n = 1, 2, \ldots$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится и его сумма равна $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in X}} S(x)$.

Эта теорема означает, что при наличии равномерной сходимости предел суммы ряда равен сумме ряда, составленного из пределов его членов:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in X}} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\substack{x\to a\\ x\in X}} u_n(x).$$

В этом случае также говорят, что ряд допускает почленный предельный переход.

Теорема 28.1 теряет свою силу, если исключить требование равномерной сходимости ряда: сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{n-1})$, как показано в *гл. 25*, является разрывной функцией на отрезке $[0;\ 1]$, хотя члены ряда непрерывны на этом отрезке.

Теорема 28.3 (о почленном интегрировании). Если ряд (25.3) равномерно сходится на отрезке $[a;\ b]$ к функции $S(x)$ и $\int\limits_a^b u_n(x)dx = c_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, и его сумма равна $\int\limits_a^b S(x)dx$.

Доказательство. Интегрируемость функции $S(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ доказывается в задаче Т28.2. Здесь же докажем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \int\limits_a^b S(x)dx$. Обозначим $S_n(x)$ n-ю частичную сумму ряда (25.3). Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Ввиду равномерной сходимости найдется такое число N, что для любых $x \in [a;\ b]$ и $n > N$ $\left|S_n(x) - S(x)\right| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Согласно следствию 17.1, функции $S_n(x)$, $S(x) - S_n(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;\ b]$; согласно утверждению задачи Т17.10, функция $|S(x)-S_n(x)|$ тоже интегрируема на $[a; b]$, причем при любом $n > N$

$$\left|\int_a^b S(x)\,dx-\int_a^b S_n(x)\,dx\right|=\left|\int_a^b\big(S(x)-S_n(x)\big)\,dx\right|\le\int_a^b|S(x)-S_n(x)|\,dx<\int_a^b\frac{\varepsilon}{b-a}\,dx=\varepsilon\,.$$

Ввиду произвольности выбора ε, отсюда следует, что

$$\left\{\int_a^b S_n(x)\,dx\right\}\to\int_a^b S(x)\,dx \text{ и, следовательно, } \{\,c_1+c_2+\ldots+c_n\,\}\to\int_a^b S(x)\,dx\,.$$

Теорема доказана.

Эта теорема означает, что при наличии равномерной сходимости интеграл суммы функционального ряда равен сумме ряда, составленного из интегралов его членов:

$$\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,dx\,.$$

В этом случае говорят, что ряд допускает почленное интегрирование.

Теорема 28.3 теряет свою силу, если исключить требование равномерной сходимости (см. задачу Т28.3).

Теорема 28.4 (о почленном дифференцировании). Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится к функции $S(x)$ на отрезке $[a; b]$. Если функции $u_n'(x)$ непрерывны на этом отрезке, $n = 1, 2, \ldots$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ равномерно сходится на $[a; b]$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)=S'(x)$ для $x \in [a; b]$.

Доказательство. Сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ обозначим через $T(x)$.

Тогда по теореме 28.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_a^x u_n'(x)\,dx=\int\limits_a^x T(x)\,dx$ для любого $x \in [a; b]$.

Но $\int\limits_a^x u_n'(x)\,dx=u(x)-u(a)$ (следствие 18.2), откуда

$$\int_a^x T(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n'(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\bigl(u_n(x)-u_n(a)\bigr) = \sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty}u_n(a) = S(x)-S(a)$$

(см. задачу Т25.1). Итак, $S(x) - S(a) = F(x)$, где $F(x) = \int_a^x T(x)\,dx$.

Функция $T(x)$ непрерывна в силу теоремы 28.1. Поэтому функция $F(x)$ дифференцируема на $[a; b]$ и $F'(x) = T(x)$ (теорема 18.1).

Отсюда $(S(x)-S(a))' = F'(x) \Rightarrow S'(x) = T(x)$, $x \in [a; b]$. Теорема доказана.

Теорема 28.4 означает, что производная суммы ряда равна сумме ряда, составленного из производных его членов при условии равномерной сходимости последнего:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x).$$

В этом случае говорят, что ряд допускает почленное дифференцирование.

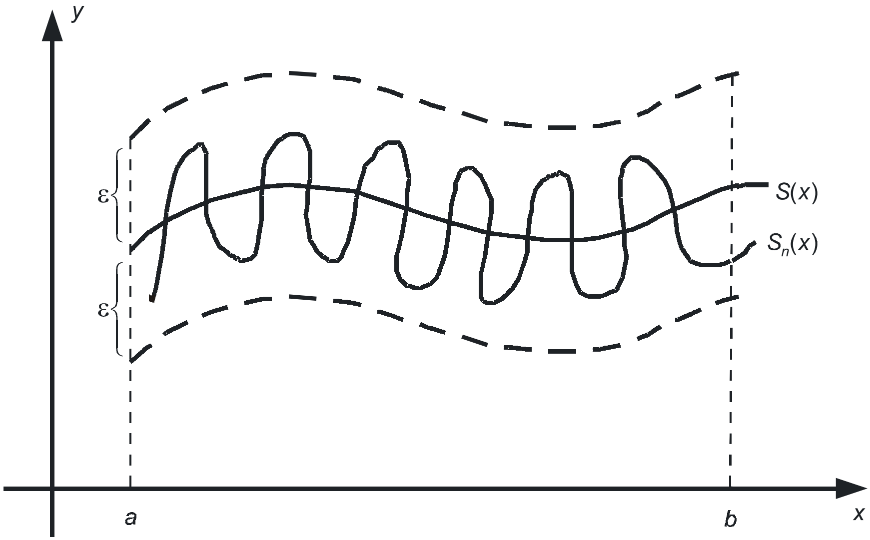


Рис. 28.1. Иллюстрация к теореме 28.4

Теорема 28.4 теряет свою силу, если исключить требование равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ (даже при условии замены этого требования равномерной сходимостью ряда (25.3)). На рис. 28.1 причина этого явления объясняется геометрически. Частичная сумма $S_n(x)$ ряда (25.3) изображена извилистой линией. Предположим, ряд (25.3) сходится равномерно на отрезке $[a; b]$. Ясно, что при этом кривая $y = S_n(x)$, находясь в ε-коридоре функции $S(x)$, может колебаться сколь угодно "резко". Это означает, что возможна такая равномерная сходимость ряда (25.3), которая не сопровождается равномерной сходимостью ряда из производных его членов; при этом почти во всех точках x, как это видно на рис. 28.1, угловые коэффициенты касательных (которые равны соответствующим производным) к графикам функций $y = S(x)$ и $y = S_n(x)$ сильно отличаются друг от друга, что исключает сходимость частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ к функции $S'(x)$, т. е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \neq S'(x)$.

Задачи для самостоятельного решения

Т28.1. Доказать теорему 28.2 в предположении, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится.

Т28.2. Дано, что ряд (25.3) равномерно сходится к функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и все функции $u_n(x)$ интегрируемы на $[a; b]$. Доказать, что функция $f(x)$ также интегрируема на отрезке $[a; b]$.

Т28.3. Привести пример функционального ряда, все члены которого являются интегрируемыми на отрезке [0; 1] функциями, в то время как его сумма таковой уже не является.

Т28.4. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 1-}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x^n - x^{n-1}\right)\right)$.

Т28.5. Сходится ли равномерно ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}\right)$ на отрезке [0; 1]?

Т28.6. Законно ли применение к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{2^{n-1}}$ теоремы 28.3 о почленном интегрировании на произвольном отрезке $[a; b]$?

Т28.7. Законно ли применение к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{n\sqrt{n}}\right)$ теоремы 28.4 о почленном дифференцировании на отрезке [1; 3]?

Т28.8. Вычислить интегралы: а) $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 5}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}\right)dx$; б) $\int\limits_{0}^{2\pi}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos^2(nx)}{n(n+1)}\right)dx$.

Ответы, указания, решения

Т28.1. Указание: доказательство аналогично доказательству теоремы 27.1 — достаточно только вместо $S_n(x_0)$ и $S(x_0)$ использовать n-ю частичную сумму C_n и сумму C ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$.

Т28.2. Обозначим $g_n(x)$ n-ю частичную сумму ряда (25.3) и возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Ввиду равномерной сходимости найдется такое n, что для любого $x \in [a; b]$

$$\left|f(x) - g_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

или

$$g_n(x) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} < f(x) < g_n(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)},\ x \in [a; b]. \qquad (28.1)$$

Функция $g_n(x)$ интегрируема на $[a; b]$ по следствию 17.1. Поэтому по теореме 17.1 найдется такое разбиение $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ отрезка $[a; b]$, при котором $S^T(g_n) - S_T(g_n) < \frac{\varepsilon}{2}$, где верхняя $S^T(g_n)$ и нижняя $S_T(g_n)$ суммы Дарбу функции $g_n(x)$ равны соответственно $\sum\limits_{i=1}^{k} M_i(g_n)\Delta x_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{k} m_i(g_n)\Delta x_i$. Но ввиду (28.1)

$$m_i(g_n) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \le m_i(f) \le M_i(f) \le M_i(g_n) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)},\ i = 1,2,\ \ldots,\ k,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{k} m_i(g_n)\Delta x_i - \sum_{i=1}^{k}\frac{\varepsilon\Delta x_i}{4(b-a)} \le \sum_{i=1}^{k} m_i(f)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{k} M_i(f)\Delta x_i \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{k} M_i(g_n)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon\Delta x_i}{4(b-a)},$$

$$S_T(g_n)-\frac{\varepsilon}{4}\le S_T(f)\le S^T(f)\le S^T(g_n)+\frac{\varepsilon}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}S^T(f)\le S^T(g_n)+\dfrac{\varepsilon}{4}\\ S_T(f)\ge S_T(g_n)-\dfrac{\varepsilon}{4}\end{cases}.$$

Отсюда $S^T(f)-S_T(f)\le\left(S^T(g_n)-S_T(g_n)\right)+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

А это означает интегрируемость функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ (теорема 17.1).

Т28.3. Определим функцию $u_n(x)$ следующим образом:

$$u_n(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x \text{ — рациональное число из } (0;\ 1], \text{представленное в виде}\\ & \text{несократимой дроби со знаменателем n;}\\ 0 & \text{во всех остальных точках } x \text{ из } [0;\ 1].\end{cases}$$

Обозначим через $S_n(x)$ n-ю частичную сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$. Функции $u_n(x)$ интегрируемы на [0; 1] по следствию 17.4, поскольку они имеют конечное число точек разрыва (точками разрыва функции $u_n(x)$ будут несократимые дроби со знаменателем n из промежутка [0; 1]).

Пусть x_0 — произвольное рациональное число из (0; 1]. Это число можно представить в виде несократимой дроби $\frac{m}{k}$, где $1\le m<k$, m и k — натуральные числа. Согласно определению функций $u_n(x)$, $u_k(x_0)=1$, $u_n(x_0)=0$ при любом $n\ne k$. Поэтому $S_k(x_0)=S_{k+1}(x_0)=\ldots=S_{k+i}(x_0)=\ldots=1$, и в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x_0)=1$. Если x_0 — иррациональное число из [0; 1] или $x_0=0$, то $S_n(x_0)=0$ при любом натуральном n, и в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x_0)=0$.

Итак, сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ совпадает с функцией Дирихле на промежутке (0; 1], а потому в силу утверждения задачи Т17.5 она не интегрируема на [0; 1].

Т28.4. а) Исходный ряд сходится равномерно к некоторой функции $S(x)$ на промежутке $[0; +\infty)$ по теореме 26.2, поскольку он мажорируется сходящейся геометрической прогрессией $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$.

Поэтому выполняются условия теоремы 28.2, в силу которой

$$\lim_{x\to0+} S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to0+}\frac{1}{2^n n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1.$$

б) В *гл. 25* показано, что данный ряд не является равномерно сходящимся на отрезке [0; 1]. Поэтому теорема 28.2 неприменима в данной ситуации. Однако искомый предел можно вычислить непосредственно, поскольку известна сумма ряда: $S(x)=\begin{cases}-1 & \text{при } x\in[0;\ 1)\\ 0 & \text{при } x=1\end{cases}$ *(см. гл. 25)*. Следовательно $\lim_{x\to1-} S(x)=-1$.

Т28.5. Предположим, что исходный ряд сходится равномерно к функции $S(x)$ на отрезке [0; 1]. Так как члены $\left(x^{\frac{1}{2n+1}}-x^{\frac{1}{2n-1}}\right)$ этого ряда непрерывны на [0; 1], то в силу теоремы 28.1 функция $S(x)$ тоже должна быть непрерывной.

С другой стороны, n-я частичная сумма ряда равна $S_n(x)=-x+x^{\frac{1}{2n+1}}$. Отсюда $S(x)=\lim_{n\to\infty}\left(-x+\sqrt[2n+1]{x}\right)=\begin{cases}-x+1 & \text{при } x\in(0;1]\\ 0 & \text{при } x=0\end{cases}$.

Очевидно, что $S(x)$ не является непрерывной функцией в точке $x=0$ вдоль [0; 1]:

$$\lim_{x\to0+} S(x)=\lim_{x\to0+}(-x+1)=1\neq S(0).$$

Получено противоречие. Итак, исходный ряд не является равномерно сходящимся на отрезке [0; 1].

Т28.6. Исходный ряд равномерно сходится на промежутке (–∞; +∞) по теореме 26.2, поскольку он мажорируется сходящейся геометрической прогрессией $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$. Поэтому допускается его почленное интегрирование на любом отрезке $[a;\ b]$.

Т28.7. Исходный ряд сходится (поточечно) на отрезке [1; 3] в силу теоремы 26.1, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{n\sqrt{n}}\right) \Big/ \frac{x}{n\sqrt{n}} = 1$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^{\frac{3}{2}}} = x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ сходится на отрезке [1; 3]. Вычислим производную n-го члена $u_n(x)$ исходного ряда: $u_n'(x) = \frac{n^{\frac{3}{2}}}{x^2+n^3}$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ мажорируется сходящимся гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ и потому, в силу теоремы 26.2, равномерно сходится на отрезке [1; 3]. Поэтому почленное дифференцирование исходного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ на отрезке [1; 3] законно.

Т28.8. а) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ мажорируется рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-n}$ на отрезке $X =$ = [ln 3; ln 5], т. к. $\frac{n}{e^{nx}} < \frac{n}{e^n}$ при $x \in X$. Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-n}$ сходится по теореме 26.3, поскольку

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)e^{-(n+1)}}{ne^{-n}} = \frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{e} < 1\,.$$

Отсюда, ввиду теоремы 26.2, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ равномерно сходится на X.

Применим теорему 28.3:

$$\int\limits_{\ln 3}^{\ln 5}\left(\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\ln 3}^{\ln 5}ne^{-nx}dx = \sum_{n=1}^{\infty}-e^{-nx}\Big|_{\ln 3}^{\ln 5} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}-\frac{1}{5^n}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}.$$

б) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2(nx)}{n(n+1)}$ равномерно сходится на отрезке $[0;\,2\pi]$ в силу теоремы 26.2, поскольку мажорируется сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$. Применим теорему 28.3:

$$\int\limits_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2(nx)}{n(n+1)}\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2nx)}{2n(n+1)}\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2n(n+1)}+\frac{\sin(2nx)}{4n^2(n+1)}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n(n+1)}=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\pi$$

($\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$ — см. пример в *гл. 25*).

Глава 29

Степенные ряды

Функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \qquad (29.1)$$

называется степенным рядом; действительные числа a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, называются его коэффициентами. Степенные ряды замечательны тем, что их члены $u_n = a_n(x - x_0)^n$ являются простейшими многочленами и потому суммы этих рядов с любой степенью точности могут быть заменены многочленами — их частичными суммами. Это обусловливает специфические свойства степенных рядов, которыми не обладают, вообще говоря, другие функциональные ряды. В частности, их области сходимости имеют достаточно простую структуру (см. теорему 29.1).

Лемма 29.1. Если ряд (29.1) сходится в точке $\bar{x} \ne x_0$, то он равномерно сходится в окрестности $N(x_0, |\bar{x} - x_0|)$ и абсолютно сходится в каждой точке этой окрестности. Если ряд (29.1) расходится в точке $\bar{x}$, то он расходится в каждой точке, лежащей вне окрестности $N(x_0, |\bar{x} - x_0|)$.

Доказательство леммы дано в задаче Т29.1.

Теорема 29.1. Ряд (29.1) либо абсолютно сходится всюду, либо существует такое число $R \ge 0$, что ряд (29.1) абсолютно сходится при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < R$, и расходится при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| > R$.

Доказательство. Обозначим P множество всех точек из Af^1, в которых ряд (29.1) сходится, $Q = Af^1 \setminus P$. Очевидно, $x_0 \in P$. Если $Q = \varnothing$, то ряд (29.1) абсолютно сходится всюду по лемме 29.1. Пусть $Q \ne \varnothing$. Обозначим через R^* и R_* точные верхнюю и нижнюю грани расстояний $|x - x_0|$ соответственно точек x из P и точек x из Q от точки x_0. По лемме 29.1 для любых $x_1 \in P$ и $x_2 \in Q$ верно $|x_1 - x_0| \le |x_2 - x_0|$. Поэтому точные грани R^*

и R_* существуют (лемма 4.1), причем $R^* \le R_*$. Если предположить существование такого числа $\bar{x}$, что $R^* < |\bar{x} - x_0| < R_*$, то по определению R^* и R_*, точка $\bar{x}$ не должна принадлежать ни множеству P, ни множеству Q, что невозможно, поскольку $P \cup Q = Af^1$. Итак, $R^* = R_*$, т. е. число $R = R^* = R_*$ искомое. Теорема доказана.

Число R, о котором говорится в теореме 29.1, называется радиусом сходимости степенного ряда (29.1). В точках $x_0 + R$ и $x_0 - R$ может иметь место как сходимость, так и расходимость ряда. Если степенной ряд всюду сходится, то полагают $R = +\infty$. Очевидно, при $R = 0$ ряд сходится (абсолютно) только в точке x_0.

Таким образом, область сходимости произвольного степенного ряда (29.1) совпадает с одним из следующих промежутков: $X = (x_0 - R; x_0 + R)$, $X = (x_0 - R; x_0 + R]$, $X = [x_0 - R; x_0 + R)$, $X = [x_0 - R; x_0 + R]$, где R — радиус сходимости.

Следствие 29.1. Степенной ряд равномерно сходится на любом отрезке, содержащемся в его области сходимости.

В частном случае $X = (x_0 - R; x_0 + R)$ следствие 29.1 доказано в задаче Т29.2.

Интересно отметить, что утверждение следствия 29.1 в общем случае не распространяется на всю область сходимости степенного ряда. Так, если $X = (x_0 - R; x_0 + R)$, то ряд (29.1) не является равномерно сходящимся на множестве X. Этот факт доказан в задаче Т29.4.

Следствие 29.2. Пусть все коэффициенты ряда (29.1) отличны от нуля. Если предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ существует или равен $+\infty$, то он совпадает с радиусом сходимости R степенного ряда (29.1).

Доказательство. Обозначим предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ через t (возможно, $t = +\infty$).

Проверим абсолютную сходимость ряда (29.1) в произвольной точке $\bar{x} \ne x_0$ по признаку Даламбера (теорема 26.3). Для этого необходимо вычислить следующий предел l:

$$l = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|a_{n+1}(\bar{x}-x_0)^{n+1}\right|}{\left|a_n(\bar{x}-x_0)^n\right|} = |\bar{x}-x_0|\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \begin{cases} \dfrac{|\bar{x}-x_0|}{t} & \text{при } t \ne 0, t \ne +\infty, \\ 0 & \text{при } t = +\infty, \\ +\infty & \text{при } t = 0. \end{cases}$$

Предположим вначале, что $l \neq 0$, $l \neq +\infty$. Тогда $l < 1$ при $\left|\bar{x} - x_0\right| < t$ и, следовательно, ряд (29.1) абсолютно сходится. Если $\left|\bar{x} - x_0\right| > t$, то $l > 1$ и ряд (29.1) расходится (теорема 26.3). Это означает, что t совпадает с радиусом сходимости R, который, в соответствии с теоремой 29.1, как раз и определяется указанными неравенствами.

Если $t = +\infty$, то $l = 0 < 1$ и, следовательно, ряд (29.1) абсолютно сходится при любом $\bar{x}$ (теорема 26.3), т. е. радиус сходимости равен $+\infty$ и совпадает с t.

Если $t = 0$, то $l = +\infty$ и, следовательно, по теореме 26.3 ряд (29.1) не является абсолютно сходящимся ни при каких $\bar{x}$, т. е. радиус сходимости равен 0 и снова совпадает с t. Следствие доказано.

Из следствия 29.1 и теоремы 28.1 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 29.3. Сумма степенного ряда непрерывна на его области сходимости.

Из следствия 29.1 и теоремы 28.3 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 29.4. Степенной ряд можно почленно интегрировать на любом отрезке, содержащемся в его области сходимости.

Лемма 29.2. Радиусы сходимости ряда (29.1) и ряда

$$a_1 + 2a_2(x - x_0)^1 + \ldots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}, \tag{29.2}$$

полученного из первоначального почленным дифференцированием, совпадают.

Доказательство леммы дано в задаче Т29.3.

Из леммы 29.2, следствия 29.1 и теоремы 28.4 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 29.5. Если R — радиус сходимости ряда (29.1), то этот ряд можно почленно дифференцировать на интервале $(x_0 - R;\, x_0 + R)$; при этом радиус сходимости степенного ряда, полученного почленным дифференцированием исходного ряда, также равен R.

Задачи для самостоятельного решения

Т29.1. Доказать лемму 29.1.

Т29.2. Доказать следствие 29.1.

Т29.3. Доказать лемму 29.2.

Т29.4. Дано: ряд (29.1) расходится в точке $x = x_0 + R$, где R — его радиус сходимости. Доказать, что этот ряд не является равномерно сходящимся на промежутке $(x_0 - R;\ x_0 + R)$.

Т29.5. Если на интервале $(a;\ b)$, содержащем точку x_0, функция $f(x)$ является суммой ряда (29.1), сходящегося в точке $x = b$, и $f(x)$ непрерывна в этой точке вдоль $(a;\ b]$, то $f(x)$ — сумма ряда (29.1) на промежутке $(a;\ b]$.

Общая формулировка задач П29.1—П29.21

Найти области сходимости и суммы соответствующих рядов.

П29.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.

П29.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{3^n}$.

П29.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

П29.4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 4^{n-1}}$.

П29.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{8^{n+1}}x^{n-1}$.

П29.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2nx^{2n-1}$.

П29.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n+\frac{1}{n}\right)x^{2n}$.

П29.8. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$.

П29.9. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+3}}{n+1}$.

П29.10. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n^2+3n+2)x^n$.

П29.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n(2n-1)}$.

П29.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}\cdot x^{n-1}$.

П29.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n}$.

П29.14. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 7^{n-1}}$.

П29.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{9^{n+1}}x^{n-1}$.

П29.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}$.

П29.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n}+\frac{1}{2n}\right)x^{2n}$.

П29.18. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+3)x^{n}$.

П29.19. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}x^{n}}{n+1}$.

П29.20. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(n^{2}+7n+12\right)x^{n+2}$.

П29.21. а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}x^{2n+1}}{2n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n+3}$.

Ответы, указания, решения

Т29.1. Пусть ряд (29.1) сходится в точке $\bar{x}$. По теореме 25.2 $\left\{a_n(\bar{x}-x_0)^n\right\}\to 0$ и, следовательно, $\left\{\left|a_n(\bar{x}-x_0)^n\right|\right\}\to 0$ (см. задачу Т2.3). Поэтому последовательность $\left\{\left|a_n(\bar{x}-x_0)^n\right|\right\}$ ограничена сверху некоторым положительным числом m.

Пусть теперь $x\in N\left(x_0,\left|\bar{x}-x_0\right|\right)$. Тогда

$$\left|a_n(x-x_0)^n\right|=\left|a_n(\bar{x}-x_0)^n\cdot\left(\frac{x-x_0}{\bar{x}-x_0}\right)^n\right|\le m\left(\frac{|x-x_0|}{|\bar{x}-x_0|}\right)^n=mq^n,\text{ где } q=\frac{|x-x_0|}{|\bar{x}-x_0|}<1.$$

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|a_n(x-x_0)^n\right|$ мажорируется сходящейся геометрической прогрессией $\sum\limits_{n=0}^{\infty}mq^n$ и потому сходится (теорема 26.1). Равномерная сходимость ряда (29.1) на множестве $N\left(x_0,\left|\bar{x}-x_0\right|\right)$ следует из теоремы 26.2.

Вторая часть утверждения леммы вытекает из первой.

Т29.2. Без ограничения общности можно считать, что отрезок симметричен относительно точки x_0, т. е. имеет вид $[x_0-r;\,x_0+r]$, $r<R$. Существует число $\bar{r}$ такое, что $r<\bar{r}<R$. По теореме 29.1 ряд (29.1) сходится в точ-

ке $x_0+\bar{r}$. Тогда по лемме 29.1 он равномерно сходится в окрестности $N(x_0,\bar{r})$, содержащей отрезок $[x_0 - r; x_0 + r]$.

Т29.3. Обозначим через R и R' радиусы сходимости рядов (29.1) и (29.2) соответственно. Предположим, что $R'<R$. Тогда возьмем такое число $\bar{x}$, что $R'<|\bar{x}-x_0|<R$. По аналогии с решением задачи Т29.1 показывается, что для любого $x\in N(x_0,|\bar{x}-x_0|)$ $\left|na_n(x-x_0)^{\,n-1}\right|\le\dfrac{m}{|\bar{x}-x_0|}\cdot nq^{n-1}$, где $0\le q<1$.

Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nq^{n-1}$ сходится по теореме 26.3:

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)q^n}{nq^{n-1}}=q\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)}{n}=q<1$. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\,na_n(x-x_0)^{n-1}\right|$, мажорируемый сходящимся рядом, сходится в точке x (теорема 26.1). В частности, это верно и для точки x, удовлетворяющей неравенствам $R'<|x-x_0|<|\bar{x}-x_0|$, что противоречит определению радиуса сходимости R'. Итак, $R'\ge R$.

Ряд (29.2) и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\,na_n(x-x_0)^n=(x-x_0)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\,na_n(x-x_0)^{\,n-1}$ имеют одинаковые области сходимости (см. задачу Т25.1). Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\,a_n(x-x_0)^n\right|$ мажорируется рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|na_n(x-x_0)^n\right|$. Следовательно, область сходимости ряда (29.1) содержит область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\,na_n(x-x_0)^n$ (теорема 26.1). Отсюда $R\ge R'$. В итоге имеем $R=R'$.

Т29.4. Предположим, что ряд (29.1) равномерно сходится на области сходимости $X = (x_0 - R; x_0 + R)$. Так как $x_0 + R$ — предельная точка множества X и $\lim\limits_{\substack{x\to x_0+R\\ x\in X}}a_n(x-x_0)^n=a_nR^n$, то по теореме 28.2 ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ сходится, т. е. $x_0 + R$ — точка сходимости ряда (29.1) и, следовательно, принадлежит его области сходимости X, что невозможно.

Т29.5. Обозначим через $S(x)$ сумму ряда (29.1) на промежутке $(a; b]$. По условию $f(x) = S(x)$ при $x \in (a; b)$ и $f(x)$ непрерывна на $(a; b]$. Функция $S(x)$ также непрерывна на $(a; b]$ по следствию 29.3. Отсюда $f(b) = \lim\limits_{x \to b-} f(x) = \lim\limits_{x \to b-} S(x) = S(b)$, т. е. $f(x)$ и $S(x)$ совпадают на промежутке $(a; b]$.

В ответах к задачам П29.1 – П29.20 содержатся суммы соответствующих рядов и их области сходимости X.

П29.1. $x + (1 - x)\ln(1 - x)$, $X = [-1; 1]$.

П29.2. $\dfrac{3}{(x-3)^2}$, $X = (-3; 3)$.

П29.3. $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, $X = (-1; 1)$.

П29.4. $4\ln\left(\dfrac{4}{4-x}\right) - x$, $X = [-4; 4)$.

П29.5. $\dfrac{16}{(8-x)^3}$, $X = (-8; 8)$.

П29.6. $-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$, $X = (-1; 1)$.

П29.7. $-\dfrac{x^2}{1+x^2} - \ln\left(1 - x^2\right)$, $X = (-1; 1)$.

П29.8. $\dfrac{x+1}{(x-1)^2}$, $X = (-1; 1)$.

П29.9. $-x^2 \ln(1 - x)$, $X = [-1; 1)$.

П29.10. $\dfrac{x^2}{1-x}$, $X = (-1; 1)$.

П29.11. $-2x \cdot \operatorname{arctg} x + \ln\left(1 + x^2\right)$, $X = [-1; 1]$.

П29.12. $\dfrac{5}{(x-5)^2}$, $X = (-5; 5)$.

П29.13. $-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$, $X = (-1;\ 1)$.

П29.14. $7\ln\left(\frac{7}{7-x}\right)-x$, $X = [-7;\ 7)$.

П29.15. $\frac{18}{(9-x)^3}$, $X = (-9;\ 9)$.

П29.16. $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $X = (-1;\ 1)$.

П29.17. $-\frac{x^2}{1+x^2}-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$, $X = (-1;\ 1)$.

П29.18. $\frac{3-x}{(x-1)^2}$, $X = (-1;\ 1)$.

П29.19. $\frac{\ln(1+x)}{x}$, $X = (-1;\ 1]$.

П29.20. $\frac{x^4}{1-x}$, $X = (-1;\ 1)$.

П29.21. а) Найдем область сходимости исходного ряда по признаку Даламбера. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left|x^{2n+3}\right|\cdot(2n+1)}{(2n+3)\cdot\left|x^{2n+1}\right|}=x^2$, то при $x^2 < 1$ ряд сходится, а при $x^2 > 1$ — расходится (теорема 26.3). Кроме того, данный ряд сходится в точках $x = \pm1$ по теореме 26.5. Поэтому его область сходимости — это отрезок $[-1;\ 1]$.

Если $S(x)$ — сумма исходного ряда, то согласно следствию 29.5, для любого $x \in (-1;\ 1)$

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\right)'_x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\frac{1}{1+x^2}.$$

Отсюда

$$\int_0^x S'(x)\,dx=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\,dx \Rightarrow S(x)-S(0)=\operatorname{arctg} x \Rightarrow S(x)=\operatorname{arctg} x,\ x\in(-1;1).$$

Так как функция $\operatorname{arctg} x$ непрерывна на отрезке $[-1;\ 1]$, а данный ряд сходится в точках ± 1, то эта функция является суммой ряда на всем отрезке $[-1;\ 1]$ (см. задачу Т29.5).

б) Так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n+3} = x^4 \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ (см. задачу Т25.1), то достаточно рассмотреть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, сумму которого обозначим $S(x)$. Согласно следствию 29.2, его радиус сходимости равен $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1} = 1$. В точках $x = \pm 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ расходится, поскольку нарушается необходимое условие сходимости (теорема 25.2). Итак, область сходимости исходного ряда — интервал $X = (-1;\ 1)$.

Согласно следствию 29.4, для любого $x \in X$

$$\int\limits_0^x S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^x nx^{n-1}dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

Так как функция $S(x)$ непрерывна на интервале X (следствие 29.3), то по теореме 18.1

$$\left(\int\limits_0^x S(x)\,dx\right)' = S(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Итак, сумма исходного ряда равна $x^4 \cdot S(x) = \dfrac{x^4}{(1-x)^2}$, $x \in (-1;\ 1)$.

Глава 30

Приложения степенных рядов

Пусть на множестве X функция $f(x)$ является суммой степенного ряда (29.1), тогда говорят, что $f(x)$ разлагается в степенной ряд с центром в точке x_0 на множестве X.

В предыдущей главе изучались условия сходимости степенных рядов и свойства их сумм. Однако для приложений актуальна и обратная задача: описать условия, при которых заданная функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд, и определить коэффициенты этого ряда.

Следствие 30.1. Если в некоторой окрестности X точки x_0 функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд (21.9) с центром в точке x_0, то $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Доказательство. Если $R_n(x)$ — сумма n-го остатка ряда (29.1), то

$$f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n) = R_n(x),\ x \in X\ .$$

Но $R_n(x) = (x - x_0)^{n+1} \cdot \sum\limits_{m=0}^{\infty} a_{n+1+m}(x - x_0)^m$. Отсюда $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$ вдоль X. Кроме того, согласно следствиям 29.5 и 28.3, функция $f(x)$ имеет непрерывные производные любого порядка на интервале X. Поэтому выполняются условия следствия 13.5, согласно которому

$a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Следствие доказано.

В связи со следствием 30.1 возникает понятие ряда Тейлора. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ называется рядом Тейлора для функции $f(x)$ в точке x_0 (независимо от того, сходится ли он и является ли функция $f(x)$ его суммой). При $x_0 = 0$ ряд Тейлора называется рядом Маклорена.

Можно привести примеры, когда ряд Тейлора для функции $f(x)$ расходится всюду, кроме точки x_0, или сходится к функции, отличной от $f(x)$. Однако благодаря следствию 30.1 можно утверждать, что если функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд с центром в точке x_0 в окрестности этой точки, то этот ряд будет ни чем иным, как рядом Тейлора для этой функции.

Следствие 30.2. Если в некоторой окрестности X точки x_0 n-ые производные $f^{(n)}(x)$ функции $f(x)$ существуют и равномерно ограничены (т. е. найдется такое число m, что $|f^{(n)}(x)| \le m$ для любых $x \in X$ и $n = 0, 1, 2, \ldots$), то $f(x)$ разлагается в степенной ряд с центром в точке x_0 на интервале X.

Доказательство. По теореме 13.2 для любого $x \in X$ $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, где $T_n(x)$ — n-я частичная сумма ряда Тейлора для функции $f(x)$ в точке x_0 (многочлен Тейлора n-го порядка), $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ (остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа). Поэтому если $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, то $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(x) + \lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(x)$, $x \in X$. По определению это означает, что $f(x)$ есть сумма своего ряда Тейлора на множестве X, т. е. $f(x)$ разлагается на множестве X в степенной ряд с центром в точке x_0.

Остается показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. По условию

$|R_n(x)| = \left|f^{(n+1)}(c)\right| \cdot \dfrac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \le m \cdot \dfrac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$ для любого $x \in X$. Но ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \dfrac{m|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$ сходится по теореме 26.3, т. к. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \dfrac{n!}{|x-x_0|^{n}}\right) =$ $= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|x-x_0|}{(n+1)} = 0 < 1$. Следовательно, по теореме 25.2 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{m|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. Отсюда по теореме 2.3 $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ (см. задачу Т2.3). Следствие доказано.

Следствие 30.3 (разложения элементарных функций в ряд Маклорена).

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ x \in (-\infty; +\infty), \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x \in (-\infty; +\infty),$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},\ x \in (-\infty; +\infty), \qquad \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1},\ x \in (-1; 1],$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},\ x \in [-1; 1],$$

$$(1+x)^a = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)}{n!} x^n,\ x \in (-1; 1).$$

Доказательство. Все степенные ряды, перечисленные в этом следствии, являются рядами Маклорена для соответствующих функций, записанных слева от знака равенства (см. следствие 13.6). Докажем, что эти ряды на самом деле имеют своими суммами функции, для которых они составлены.

Поскольку n-е производные функций e^x, $\sin x$, $\cos x$ равномерно ограничены на интервале $(-r; r)$ при любом фиксированном числе $r > 0$, то в силу следствия 30.2 эти функции разлагаются в соответствующие степенные ряды с центром в точке 0 на промежутке $(-\infty; +\infty)$, причем эти ряды будут рядами Маклорена для этих функций (следствие 30.1).

Справедливость равенства для функции $\operatorname{arctg} x$ доказана в задаче П29.21; для функции $\ln(1 + x)$ доказательство аналогично.

Справедливость равенства для функции $(1 + x)^a$ показана в задаче Т30.2. Следствие доказано.

Разложение функции в степенной ряд играет ключевую роль в теории приближенных вычислений. Рассмотрим несколько характерных примеров.

1. Вычислим приближенно число π с точностью 0.1. Согласно следствию 30.3, $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},\ x \in [-1; 1]$. Поэтому при $x = 1$

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{2n+1} + r_k,$$

т. е.

$$\pi = \sum_{n=0}^{k} \frac{4\cdot(-1)^n}{(2n+1)} + 4r_k. \tag{30.1}$$

Ряд (30.1) знакочередующийся. Так как первый член его k-го остатка равен $\frac{(-1)^{k+1}\cdot 4}{2k+3}$, то в силу утверждения задачи Т26.5 $|r_k| \le \frac{4}{2k+3}$. Поскольку $\frac{4}{2k+3} \le \frac{1}{10}$ при $k \ge 19$, то требуемая точность достигается при условии, что будет вычислена сумма первых 20 членов ряда (30.1): $\pi \approx 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{37} - \frac{1}{39}\right)$.

2. Вычислим приближенно "неберущийся" интеграл $\int\limits_0^1 e^{-x^2} dx$, используя первые 4 члена в разложении подынтегральной функции в степенной ряд, и оценим погрешность вычислений.

Согласно следствию 30.3, $e^y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$, $e^{-x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$, $x \in (-\infty; +\infty)$.

Отсюда в силу следствия 29.4

$$\int\limits_0^1 e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n! \cdot (2n+1)}\Bigg|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot (2n+1)} =$$

$$= 1 - \frac{1}{3 \cdot 1!} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + r_3 =$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + r_3.$$

Согласно утверждению задачи Т26.5, $|r_3| \le \frac{1}{9 \cdot 4!} < 0.005$. Поэтому $\int\limits_0^1 e^{-x^2} dx \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} \approx 0.7429$, и погрешность в этом случае не превосходит 0.005.

3. В теории дифференциальных уравнений известен следующий факт, который мы сформулируем в виде теоремы.

Теорема 30.1. Если коэффициенты $q(x)$, $p_0(x)$, $p_1(x)$, …, $p_{n-1}(x)$ линейного дифференциального уравнения (23.4) разлагаются в некоторой окрестности точки $x_0 \in (a; b)$ в степенные ряды с центром в этой точке, то частные решения уравнения (23.4) также разлагаются в упомянутой окрестности в степенные ряды с центром в точке x_0.

На основании теоремы 30.1 решения уравнения (23.4) можно искать в виде $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$. Продемонстрируем это на примере решения линейного уравнения $y''+y=0$ с начальными условиями $y(0)=0$, $y'(0)=1$. Так как $x_0=0$ и $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, то $a_0=y(0)=0$, $a_1=y'(0)=1$. Вычислим y' и y'':

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n,$$

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n,$$

$$y''+y=\sum_{n=0}^{\infty}\big((n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n\big)x^n.$$

$$y''+y=0\Leftrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\big((n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n\big)x^n=0.$$

Отсюда $(n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n=0\Rightarrow a_{n+2}=\dfrac{-a_n}{(n+2)(n+1)}$, $n=0, 1, 2, \ldots$

Так как $a_0=0$, то $a_2=\dfrac{-a_0}{1\cdot2}=0$, $a_4=\dfrac{-a_2}{3\cdot4}=0$, т. е. $a_{2k}=0$, $k=0, 1, 2, 3, \ldots$

Так как $a_1=1$, то

$$a_3=\frac{-a_1}{2\cdot3}=\frac{-a_1}{3!}=-\frac{1}{3!},\ a_5=\frac{-a_3}{4\cdot5}=\frac{1}{5!},\ a_{2k+1}=\frac{(-1)^k}{(2k+1)!},\ k=0, 1, 2, \ldots$$

Итак, $y(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}=\sin x$.

Задачи для самостоятельного решения

Т30.1. Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности X точки x_0. Доказать, что $f(x)$ разлагается в степенной ряд с центром в точке x_0 на интервале X, если и только если $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ для любого $x \in X$, где $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ — остаточный член (в форме Лагранжа) формулы Тейлора для функции $f(x)$.

Т30.2. Завершить доказательство следствия 30.3 для функции $(1 + x)^a$.

Общая формулировка задач П30.1—П30.21

В задачах П30.1—П30.10 вычислить приближенно указанные интегралы, используя первые три отличные от нуля члена в разложении подынтегральной функции в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$. В задачах П30.11—П30.20 найти первые четыре отличные от нуля члена в разложении решения указанной задачи Коши в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$.

П30.1. $\int\limits_0^{0.5} \ln(1 + x^3)\, dx$.

П30.2. $\int\limits_0^{1} \sin(x^2)\, dx$.

П30.3. $\int\limits_0^{0.4} \sqrt{1 - x^3}\, dx$.

П30.4. $\int\limits_0^{1} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) dx$.

П30.5. $\int\limits_0^{0.2} \sqrt{x} \cdot e^{-x} dx$.

П30.6. $\int\limits_0^{0.5} \ln(1 + x^2)\, dx$.

П30.7. $\int\limits_0^{1} \cos\left(\frac{x^2}{4}\right) dx$.

П30.8. $\int\limits_0^{0.5} \sqrt{1 + x^3}\, dx$.

П30.9. $\int\limits_0^{0.4} \sqrt{x} \cdot e^{-\frac{x}{4}} dx$.

П30.10. $\int\limits_0^{1} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{2}\right) dx$.

П30.11. $y' + xy = 2x^2, \quad y(0) = 0$.

П30.12. $y' - xy = e^x, \quad y(0) = 0$.

П30.13. $y' - y = x^2, \quad y(0) = 1$.

П30.14. $y' - xy = 2\sin x, \quad y(0) = 0$.

П30.15. $y' + 2y = x^2, \quad y(0) = 1$.

П30.16. $y' + y = x^4, \quad y(0) = -1$.

П30.17. $y' - y = x^3, \quad y(0) = 1$.

П30.18. $y' + xy = 2\sin x, \quad y(0) = 0$.

П30.19. $y' - e^x y = 0, \quad y(0) = 1$.

П30.20. $y' + y = x^2, \quad y(0) = -1$.

П30.21. а) Вычислить приближенно интеграл $\int\limits_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt[3]{8-x^3}}dx$, используя первые 4 отличные от нуля члена в разложении подынтегральной функции в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$;

б) Найти первые 4 отличные от нуля члена в разложении решения задачи Коши $y''+\frac{y}{1-x}=0,\ y(0)=y'(0)=1$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$.

Ответы, указания, решения

Т30.1. При доказательстве следствия 30.2 показано, что для $x \in X$ $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$. Там же доказано, что в случае $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$ функция $f(x)$ разлагается в искомый степенной ряд. Обратно, если $f(x)$ разлагается в степенной ряд с центром в точке x_0 на интервале X, то в силу следствия 30.1 этот ряд неизбежно является рядом Тейлора для $f(x)$, поэтому его частичные суммы совпадают с многочленами Тейлора $T_n(x)$. Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(x)=f(x)$ и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=\lim_{n\to\infty}(f(x)-T_n(x))=\lim_{n\to\infty} f(x)-\lim_{n\to\infty} T_n(x)=f(x)-f(x)=0.$$

Т30.2. Обозначим $S(x)$ сумму ряда $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)}{n!}x^n$ на интервале $(-1; 1)$. В силу следствия 29.2 радиус сходимости этого ряда равен 1: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)}{n!}\Big/\frac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n)}{(n+1)!}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{a-n}\right|=1$. Но тогда по следствию 29.5 $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}$, $x \in (-1; 1)$. Непосредственно проверяется равенство $(1+x)S'(x)=a\cdot S(x)$ при $x \in (-1; 1)$. Аналогичным свойством обладает функция $g(x) = (1+x)^a$: $g'(x)=a(1+x)^{a-1}$, $(1+x)g'(x)=a(1+x)^a=ag(x)$, $x \in (-1; 1)$. Кроме того, $g(0) = S(0) = 1$. Таким образом, функции $g(x)$ и $S(x)$ являются решениями следующей задачи Коши с начальными условиями $(0; 1)$: $\begin{cases} y'=\frac{ay}{1+x}, \\ y(0)=1. \end{cases}$ Так как условия теоремы 21.1 о непрерывности функции $f(x, y)$, $f'_y(x, y)$ на двумерном промежутке $(-1; 1) \times (-\infty; +\infty)$ выполняются, то в некоторой окрестности точки $x = 0$ функции $S(x)$ и $g(x)$ совпадают. Обозначим через ε максимально возможный радиус окрестности точки $x = 0$, в которой $S(x) = g(x)$. Если $\varepsilon = 1$, то $S(x) = (1 + x)^a$ на интервале $(-1; 1)$. Пусть $\varepsilon < 1$. Ввиду непрерывности функций $S(x)$ и $g(x)$ в точке $x = \varepsilon$ $S(\varepsilon) = \lim\limits_{\substack{x \to \varepsilon \\ x \in (-\varepsilon;\, \varepsilon)}} S(x) = \lim\limits_{\substack{x \to \varepsilon \\ x \in (-\varepsilon;\, \varepsilon)}} g(x) = g(\varepsilon) = y_{01}$. Аналогично показывается, что $S(-\varepsilon) = g(-\varepsilon) = y_{02}$. Таким образом, функции $S(x)$, $g(x)$ являются решениями следующих двух задач Коши:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{ay}{1+x}, \\ y(\varepsilon) = y_{01}, \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = \dfrac{ay}{1+x}, \\ y(-\varepsilon) = y_{02}. \end{cases}$$

Опять-таки, в силу теоремы 21.1 функции $S(x)$ и $g(x)$ должны совпасть в окрестностях $N(\varepsilon, \delta_1)$ и $N(-\varepsilon, \delta_2)$ для некоторых чисел $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$. Но тогда $S(x) = g(x)$ в окрестности $N(0, \min\{\varepsilon + \delta_1, \varepsilon + \delta_2\})$ точки $x = 0$. Радиус этой окрестности превосходит ε, что противоречит выбору числа ε. Таким образом, функция $g(x) = (1+x)^a$ является суммой ряда $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)}{n!} x^n$ на интервале $(-1; 1)$.

П30.21. а) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{8 - x^3}} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \left(\dfrac{x}{2}\right)^3\right)^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{2}(1+y)^{-\frac{1}{3}}$, где $y = -\left(\dfrac{x}{2}\right)^3$, $y \in (-1; 1)$. Разложим функцию $f(x)$ в степенной ряд, воспользовавшись следствием 30.3:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)y}{1!} + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3} - 1\right)y^2}{2!} + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3} - 1\right)\left(-\frac{1}{3} - 2\right)y^3}{3!} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{y}{3} + \frac{4}{9 \cdot 2!}y^2 - \frac{4 \cdot 7}{27 \cdot 3!}y^3 + \ldots\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x^3}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{9 \cdot 2^5}x^6 + \frac{7x^9}{81 \cdot 2^8} + \ldots\right),$$

$x \in (-2; 2)$.

Отсюда в силу следствия 29.4

$$\int\limits_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt[3]{8-x^3}}\,dx \approx \frac{1}{2}\left(\int\limits_{-1}^{0}dx+\int\limits_{-1}^{0}\frac{x^3}{24}\,dx+\int\limits_{-1}^{0}\frac{x^6}{288}\,dx+\int\limits_{-1}^{0}\frac{7x^9}{20736}\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x\Big|_{-1}^{0}+\frac{x^4}{4\cdot 24}\Bigg|_{-1}^{0}+\frac{x^7}{7\cdot 288}\Bigg|_{-1}^{0}+\frac{7x^{10}}{10\cdot 20736}\Bigg|_{-1}^{0}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4\cdot 24}+\frac{1}{7\cdot 288}-\frac{7}{10\cdot 20736}\right)\approx 0.49504.$$

б) Функция $p(x)=\dfrac{1}{1-x}$ разлагается в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$ на интервале $(-1;\ 1)$ в силу следствия 30.3. Поэтому выполняются условия теоремы 30.1, согласно которой решение исходной задачи Коши можно искать в виде степенного ряда $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$:

$$a_0 = y(0) = 1,\ a_1 = y'(0) = 1,\ y'' = \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n,$$

$$y''\cdot x = \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^n.$$

Так как уравнение $y''+\dfrac{y}{1-x}=0$ можно переписать в виде $y''-y''x+y=0$, то $y''-y''x+y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n=$

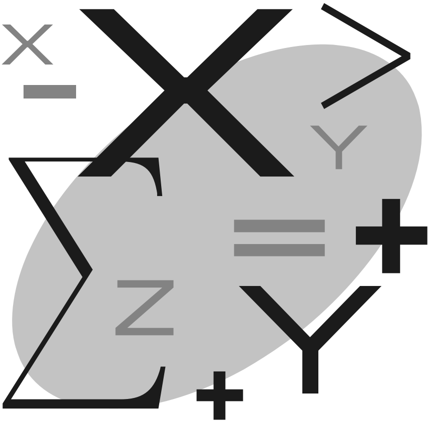
$$=\sum_{n=0}^{\infty}((n+2)(n+1)a_{n+2}-(n+1)na_{n+1}+a_n)x^n.$$

Тогда $y''-y''x+y=0 \Leftrightarrow (n+2)(n+1)a_{n+2}=(n+1)na_{n+1}+a_n=0,\ n=0,1,\ \ldots$

Следовательно, $a_{n+2}=\dfrac{(n+1)na_{n+1}-a_n}{(n+2)(n+1)}$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

Отсюда $a_2=\dfrac{1\cdot 0\cdot a_1-a_0}{2\cdot 1}=-\dfrac{a_0}{2}=-\dfrac{1}{2}$, $a_3=\dfrac{2\cdot 1\cdot a_2-a_1}{3\cdot 2}=\dfrac{2a_2-a_1}{6}=-\dfrac{1}{3}$,

$$y=1+x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\ldots$$



ЧАСТЬ VI

Линейная алгебра и элементы аналитической геометрии

Глава 31

Векторное пространство действительных чисел

Упорядоченные наборы действительных чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ определялись в гл. 1 как n-мерные точки A, B пространства Af^n. Зачастую возникает необходимость производить арифметические операции над такими наборами: например, выполнять их покоординатное сложение — $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$, или покоординатное умножение на число — $(\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n)$. Однако геометрически наглядная интерпретация наборов A и B как точек (особенно на плоскости Af^2 и в трехмерном пространстве Af^3) оставляет неясными — с геометрической точки зрения — результаты их покоординатного сложения или покоординатного умножения на число. Понятие вектора, о котором дальше пойдет речь, преодолевает ограниченность такой интерпретации.

Каждой паре точек $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ поставим в соответствие упорядоченный набор из n чисел $(b_1 - a_1, b_2 - a_2, \ldots, b_n - a_n)$, который обозначим $\overline{AB}$ и назовем вектором размерности n с началом в точке A и концом в точке B. При этом числа $b_1 - a_1$, $b_2 - a_2, \ldots, b_n - a_n$ будем называть координатами вектора $\overline{AB}$. Символически эту связь можно изобразить так: $B = A + \overline{AB}$. Геометрический смысл этого равенства таков: точка B получается отложением вектора $\overline{AB}$ от точки A. Длиной $\left|\overline{AB}\right|$ вектора $\overline{AB}$ называется число, равное $\rho(A, B)$. Вектор, все координаты которого равны нулю, называется нулевым и обозначается $\overline{0}$, т. е. $\overline{0} = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0)$.

Итак, пары точек порождают векторы. Но разные пары могут порождать векторы, соответствующие координаты которых равны. Такие векторы считаются равными, но не совпадающими. Например, если $A = (0, 1)$, $B = (2, 1)$, $C = (5, 5)$, $D = (7, 5)$, то $\overline{AB} = (2 - 0, 1 - 1) = (2, 0)$,

$\overline{CD} = (7-5, 5-5) = (2, 0)$, т. е. $\overline{AB} = \overline{CD}$. Но на плоскости векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ не совпадают (рис. 31.1).

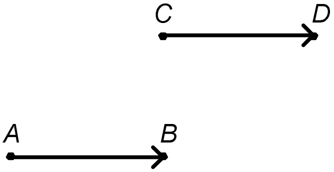


Рис. 31.1. Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$

Однако, если рассматривать векторы безотносительно к парам точек, их породивших (т. е. безотносительно к точечному пространству Af^n), то равные векторы становятся неразличимыми ("обезличиваются"), и в этом случае для их обозначения используются символы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и т. п. Например, в записи $\overline{c} = (2, 0)$ уже не важно (да это и невозможно установить), какая из пар точек A, B или C, D породила вектор $\overline{c}$. При этом $|\overline{c}| = \rho(A, B) = \rho(C, D) = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$.

Операции над векторами:

- ❒ векторное сложение: суммой двух векторов $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\overline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ одинаковой размерности называется вектор $\overline{a} + \overline{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$;
- ❒ умножение вектора на скаляр: произведением вектора $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ на действительное число α называется вектор $\alpha\overline{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n)$;
- ❒ скалярное произведение двух векторов: число $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$ называется скалярным произведением двух векторов $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\overline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ одинаковой размерности и будет обозначаться $[\overline{a} \cdot \overline{b}]$.

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю.

Множество всех векторов размерности n, в котором заданы определенные выше операции, называется n-мерным действительным пространством и обозначается $\Re^n$.

Теорема 31.1 (основные свойства операций над векторами).

1) $\alpha(\overline{a}+\overline{b})=\alpha\overline{a}+\alpha\overline{b}$;

2) $|\overline{a}|^2=[\overline{a}\cdot\overline{a}]$;

3) $|\alpha\overline{a}|=|\alpha|\cdot|\overline{a}|$;

4) $[\overline{a}\cdot\overline{b}]=[\overline{b}\cdot\overline{a}]$;

5) $\alpha[\overline{a}\cdot\overline{b}]=[\alpha\overline{a}\cdot\overline{b}]=[\overline{a}\cdot\alpha\overline{b}]$;

6) $[(\overline{a}+\overline{b})\cdot\overline{c}]=[\overline{a}\cdot\overline{c}]+[\overline{b}\cdot\overline{c}]$;

7) $[(\overline{a}+\overline{b})\cdot(\overline{c}+\overline{d})]=[\overline{a}\cdot\overline{c}]+[\overline{a}\cdot\overline{d}]+[\overline{b}\cdot\overline{c}]+[\overline{b}\cdot\overline{d}]$.

Доказательство теоремы дано в задаче Т31.2.

Теорема 31.2. Для любых двух ненулевых векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ выполняются неравенства $-1\le\frac{[\overline{a}\cdot\overline{b}]}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}\le1$.

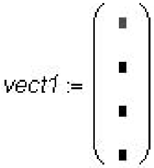
Доказательство теоремы дано в задаче Т31.6.

Именно ввиду теоремы 31.2 величину $\frac{[\overline{a}\cdot\overline{b}]}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}$ называют косинусом угла между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (тем более, что на плоскости и в трехмерном пространстве это понятие соответствует тригонометрическому определению косинуса угла между двумя векторами (см. задачу Т31.7)).

Компьютерный раздел

Координаты векторов вводятся следующим образом. Пусть, к примеру, надо ввести вектор `vect1 = (3, 2, 5.6, -8)`. Введите идентификатор вектора `vect1`. Клавишей <:> введите знак присваивания :=. Комбинацией клавиш <Ctrl>+<M> вызовите диалоговое окно **Вставить матрицу** (Insert Matrix), изображенное на рис. 5.1. В поле **Строки** (Rows) этого окна задайте размерность 4 вектора `vect1`. В поле **Столбцы** (Columns) задайте 1. Щелкните по кнопке **OK**.

Справа от знака присваивания на месте метки, выделенной синим курсором ввода, появится шаблон вектора с метками для ввода его координат:



$$vect1 := \begin{pmatrix} ■ \\ ■ \\ ■ \\ ■ \end{pmatrix}$$

Следует отметить, что на рабочем листе координаты векторов располагаются вертикально. С помощью операции транспонирования можно достичь их горизонтального расположения. Однако в этом случае Mathcad будет воспринимать вектор как вектор-строку матрицы, что приведет к необходимости использовать двойную индексацию *(см. гл. 33)*.

Некоторые операции над векторами производятся с помощью подпанели инструментов **Матрицы** (Matrix), для вызова которой надо щелкнуть по кнопке [⁞⁞⁞] панели инструментов **Математика** (Math). Как видно из рис. 31.2, подпанель **Матрицы** (Matrix) содержит 12 кнопок. Щелкнув по кнопке $\vec{x}\cdot\vec{y}$ скалярного произведения, можно ввести шаблон ■·■ и на месте меток ввести идентификаторы векторов, участвующих в скалярном произведении. Кнопка Σv задает шаблон $\sum ■$ для определения суммы координат вектора, идентификатор которого следует ввести на месте метки.

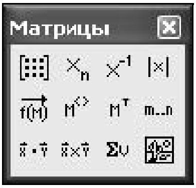


Рис. 31.2. Подпанель **Матрицы**

Mathcad предоставляет возможность для взаимодействия с различными программными системами и, в частности, с Excel. При этом вычисленные в Mathcad-документе значения можно передавать в Excel-документ и там с помощью функций Excel производить с ними вычислительные манипуляции, возвращая затем итоговые результаты в Mathcad-документ для дальнейшей обработки.

Рассмотрим взаимодействие Mathcad и Excel на следующем простом примере. Предположим, что Mathcad-документ содержит два вектора `V1 = (1, 2, 3, 4)`, `V2 = (4, 5, 1, 0)`, которые следует передать в Excel для нахождения там сумм координат векторов `V1`, `V2` с последующим возвращением этих сумм `Sum1`, `Sum2` в Mathcad-документ для вычисления их произведения.

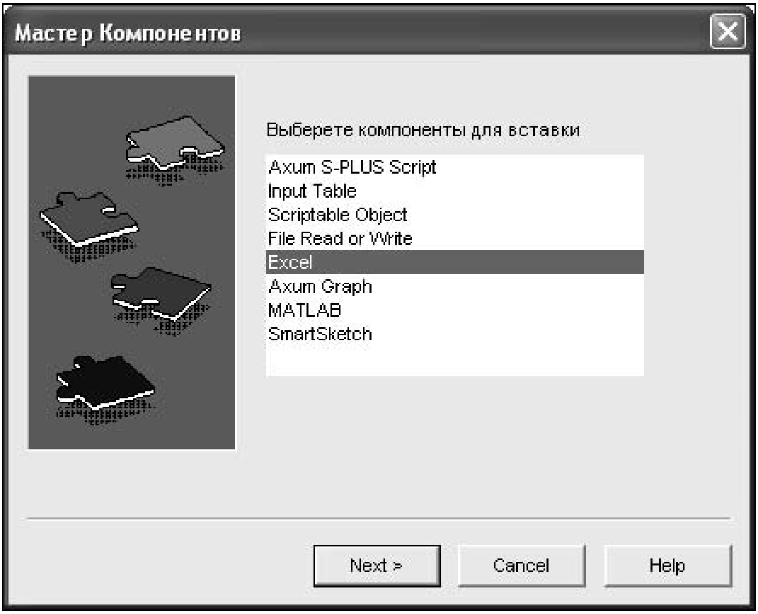
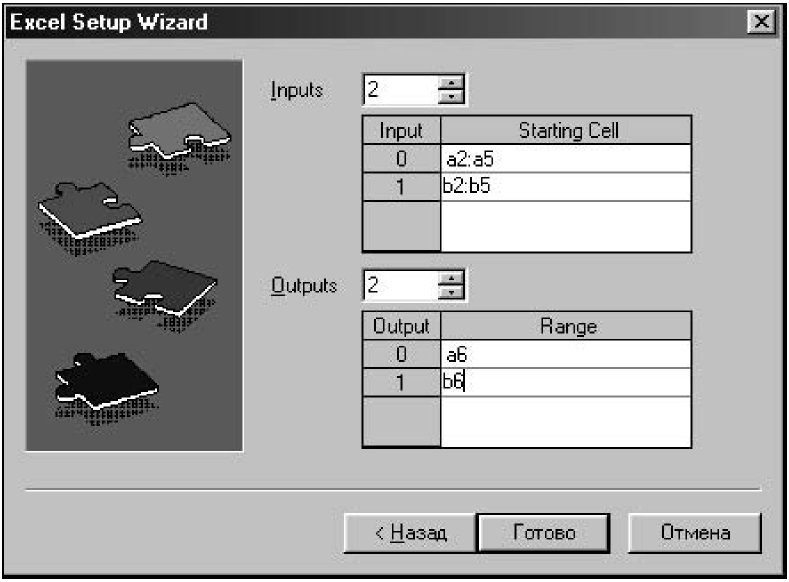


Рис. 31.3. Диалоговое окно **Мастер Компонентов**

Командой **Компонент** (Component) пункта меню **Вставка** (Insert) вызовите окно **Мастер Компонентов** (Component Wizard) (рис. 31.3), содержащее список компонент других систем. Выделите строку Excel в этом списке и щелкните по кнопке **Next**. Затем в появившемся окне выберите опцию **Create an empty Excel worksheet** (Создать пустую таблицу Excel) и щелкните опять по кнопке **Next**: появится диалоговое окно **Excel Setup Wizard** (Мастер установки Excel) (рис. 31.4). Это окно содержит: поля **Inputs** (Входные параметры) и **Outputs** (Выходные параметры) для ввода числа входных и числа выходных параметров; группы полей **Input Starting Cell** (Начальная ячейка входных параметров), **Output Range** (Диапазон выходных данных) для ввода адресов ячеек, в которых будут располагаться соответствующие данные в Excel.



Inputs 2

Input	Starting Cell
0	a2:a5
1	b2:b5

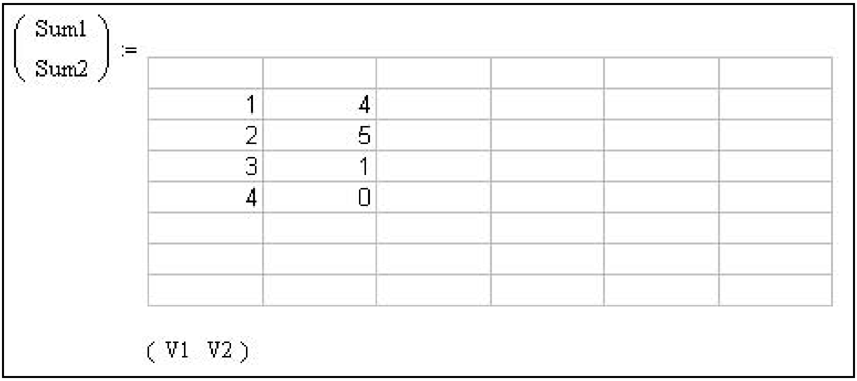
Outputs 2

Output	Range
0	a6
1	b6

Рис. 31.4. Диалоговое окно **Excel Setup Wizard**

В поле **Inputs** введите число `2` и затем в полях **Input 0**, **Input 1** адреса `a2:a5`, `b2:b5` ячеек, в которые будут помещены координаты векторов `V1`, `V2`. В поле **Outputs** введите число `2` и затем в полях **Output 0**, **Output 1** адреса `a6`, `b6` ячеек, в которых будут вычисляться суммы координат векторов `V1`, `V2` соответственно.

Рис. 31.5. Таблица с метками для ввода идентификаторов

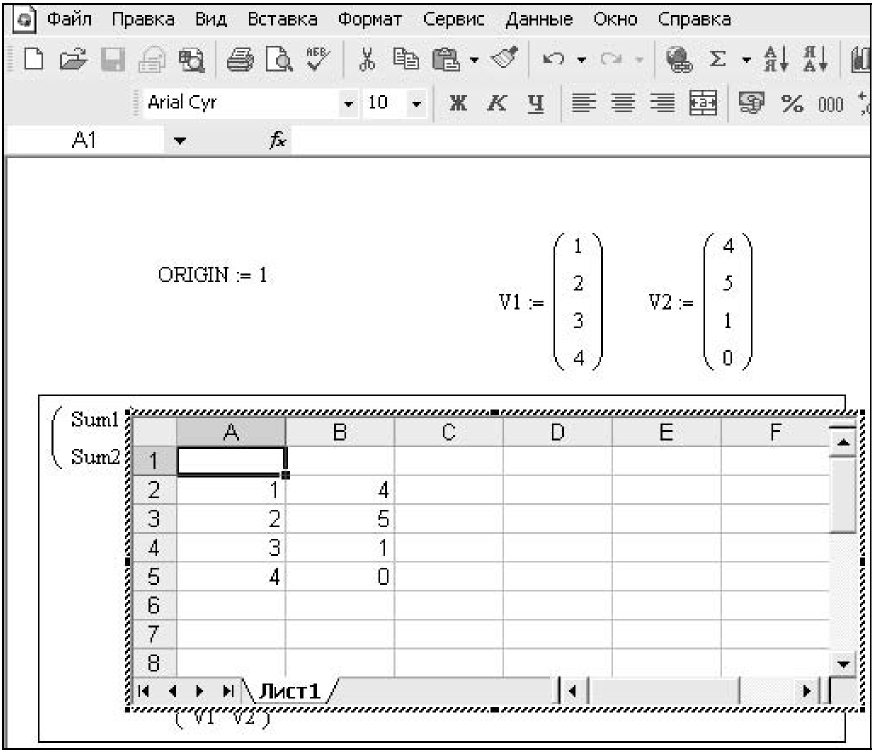


$\begin{pmatrix} \text{Sum1} \\ \text{Sum2} \end{pmatrix} :=$

1	4				
2	5				
3	1				
4	0				

(V1 V2)

Рис. 31.6. Таблица после обмена данными с Excel-документом



ORIGIN := 1

$V1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $V2 := \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \text{Sum1} \\ \text{Sum2} \end{pmatrix}$

	A	B	C	D	E	F
1						
2	1	4				
3	2	5				
4	3	1				
5	4	0				
6						
7						
8						

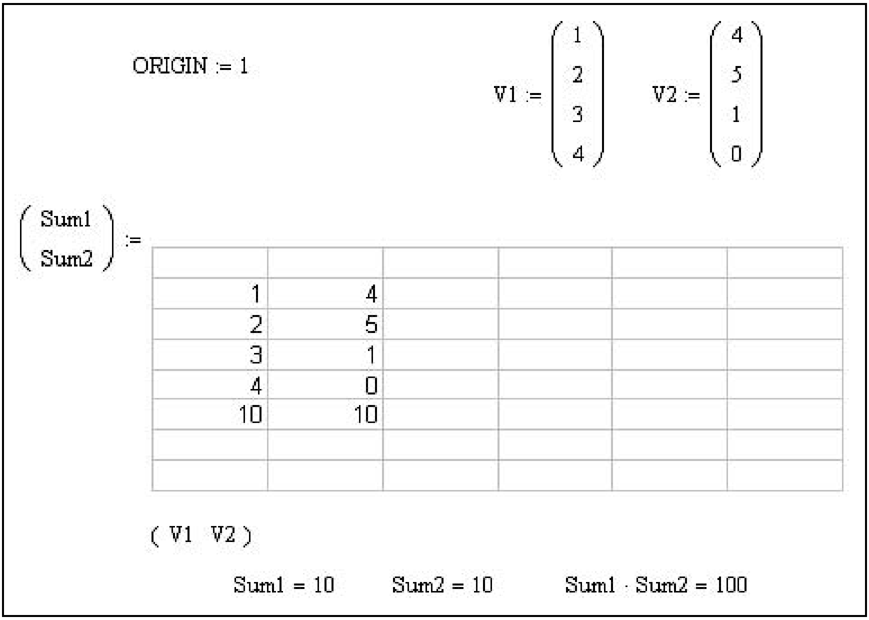
(V1 V2)

Рис. 31.7. Рабочий лист Excel-документа на рабочем листе Mathcad

После щелчка по кнопке **Готово** появится таблица с двумя метками внизу для ввода идентификаторов `V1`, `V2` и с двумя метками слева для ввода идентификаторов `Sum1`, `Sum2` (рис. 31.5). Введите соответствующие идентификаторы. После нажатия клавиши <Enter> данные будут направлены в Excel-документ, а таблица на рабочем листе Mathcad будет выглядеть так, как показано на рис. 31.6.

Дважды щелкните левой кнопкой мыши на области таблицы: панели **Математика** (Math) заменятся панелями Excel, и появится рабочий лист Excel-документа (рис. 31.7).

Введите в ячейках `A6`, `B6` команды `= СУММ(A2:A5)`, `= СУММ(B2:B5)`. Щелкните левой кнопкой мыши вне области таблицы. Суммы координат векторов будут вычислены и переданы в Mathcad-документ (рис. 31.8).



$$ORIGIN := 1$$

$$V1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad V2 := \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Sum1 \\ Sum2 \end{pmatrix} :=$$

1	4				
2	5				
3	1				
4	0				
10	10				

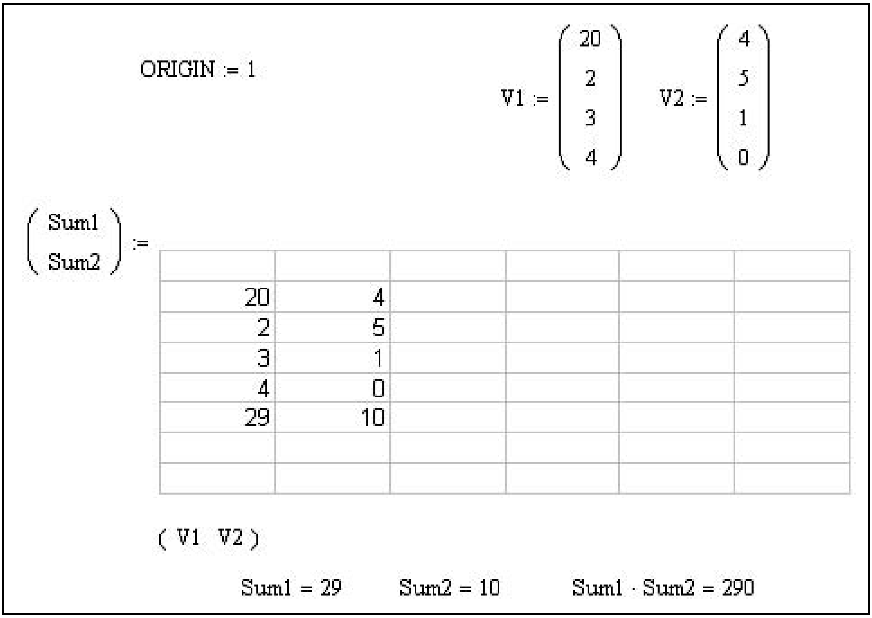
$$(V1 \ \ V2)$$

$$Sum1 = 10 \qquad Sum2 = 10 \qquad Sum1 \cdot Sum2 = 100$$

Рис. 31.8. Суммы координат векторов, переданные в Mathcad-документ

Следует отметить важную деталь: изменение значений в Mathcad-документе автоматически приведет к пересчету результатов. Так, если в векторе `V1` первую координату замените числом `20`, то после нажатия клавиши <Enter> получите (рис. 31.9).

Предположим теперь, что в рассматриваемом Mathcad-документе требуется добавить новый входной параметр — вектор `V3 = (1, 0, 1, 0)`, исключить выходной параметр *`Sum2`* и передать данные в Excel для вычисления суммы всех координат векторов *`V1`*, *`V2`*, *`V3`* с последующим возвращением результата в Mathcad-документ.



$ORIGIN := 1$

$V1 := \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $V2 := \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} Sum1 \\ Sum2 \end{pmatrix} :=$

20	4				
2	5				
3	1				
4	0				
29	10				

$(V1 \;\; V2)$

$Sum1 = 29$ $Sum2 = 10$ $Sum1 \cdot Sum2 = 290$

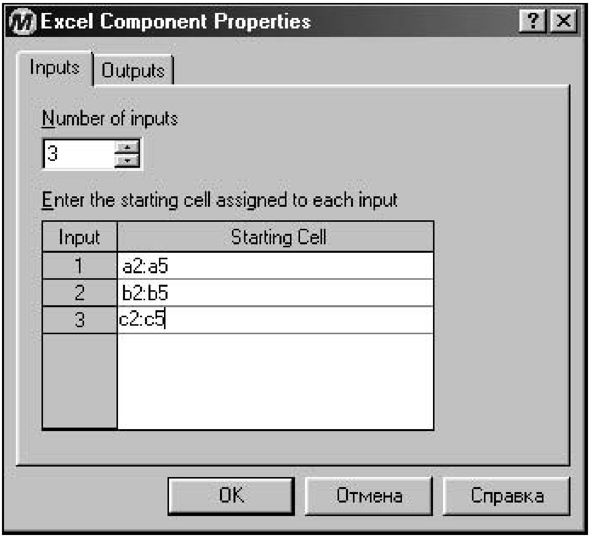
Рис. 31.9. Автоматический пересчет результатов

Введите координаты вектора `V3`. Щелкните правой кнопкой мыши на области таблицы и в появившемся меню воспользуйтесь командой **Properties** (Свойства), которая вызывает диалоговое окно **Excel Component Properties** (Свойство компонентов Excel). Это окно содержит две вкладки — **Inputs** и **Outputs**, каждая из которых содержит поля, аналогичные полям окна **Excel Setup Wizard**. В поле прокрутки **Number of inputs** (Число входных параметров) вкладки **Inputs** задайте число `3`, а вполе **Input 3** задайте адреса `c2 : c5` ячеек, в которые будут помещены координаты вектора `V3` (рис. 31.10).

В поле прокрутки **Number of outputs** вкладки **Outputs** задайте число `1`, а в поле **Output 1** введите адрес ячейки `d6`, в которой будет вычисляться сумма координат векторов `V1`, `V2`, `V3` (рис. 31.11).

После щелчка по кнопке **OK** получите (рис. 31.12).

На месте новой метки введите идентификатор `V3` и замените идентификатор `Sum1` новым — `Sum`. Дважды щелкните левой кнопкой мыши на области таблицы и на появившемся рабочем листе Excel-документа очистите ячейки `A6`, `B6`, а в ячейку `D6` введите команду `= СУММ(A2:C5)` (рис. 31.13).

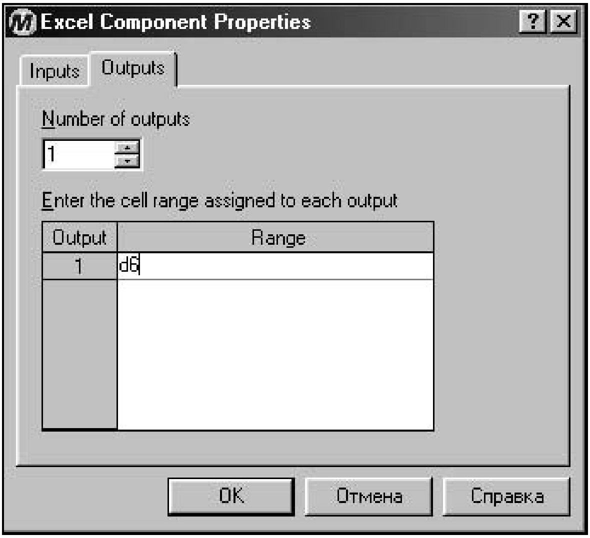


Number of inputs: 3

Enter the starting cell assigned to each input

Input	Starting Cell
1	a2:a5
2	b2:b5
3	c2:c5

Рис. 31.10. Вкладка **Inputs** диалогового окна **Excel Component Properties**

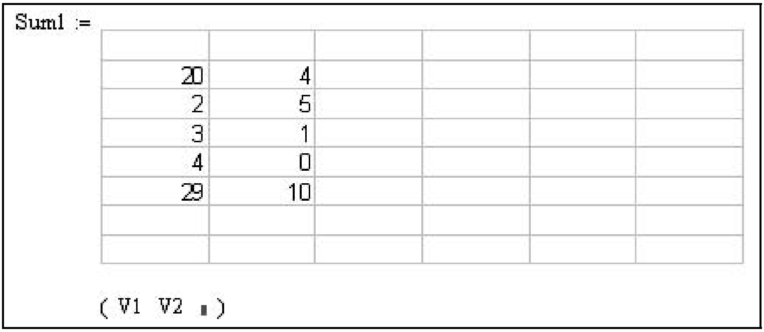


Number of outputs: 1

Enter the cell range assigned to each output

Output	Range
1	d6

Рис. 31.11. Вкладка **Outputs** диалогового окна **Excel Component Properties**

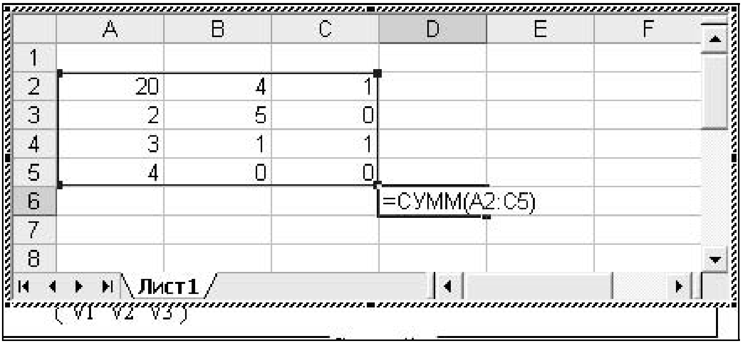


Sum1 :=

20	4				
2	5				
3	1				
4	0				
29	10				

(V1 V2 ▮)

Рис. 31.12. Результат добавления нового входного параметра

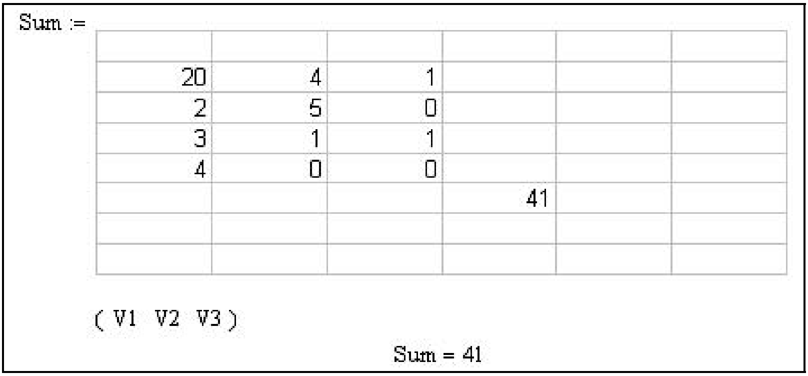


	A	B	C	D	E	F
1						
2	20	4	1			
3	2	5	0			
4	3	1	1			
5	4	0	0			
6				=СУММ(A2:C5)		
7						
8						

(V1 V2 V3)

Рис. 31.13. Рабочий лист Excel-документа

Щелкните левой кнопкой мыши вне области таблицы. Сумма координат векторов, равная `41`, будет вычислена и передана в Mathcad-документ (рис. 13.14).



Sum :=

20	4	1			
2	5	0			
3	1	1			
4	0	0			
			41		

(V1 V2 V3)

Sum = 41

Рис. 31.14. Сумма координат векторов, переданая в Mathcad-документ

В Excel встроенная функция `внДОХ(-Q, a1,..., an)` вычисляет минимальную годовую процентную ставку, при которой имеет смысл заключать сделку, состоящую в следующем: выдается кредит в размере Q ден. ед. на n лет и через k лет, где $k = 1, 2, \ldots, n$, кредитору возвращается сумма, равная a_k ден. ед. (Если найденная функцией `внДОХ(-Q, a1,..., an)` процентная ставка меньше существующей банковской, то сделка невыгодна.)

Задачи для самостоятельного решения

Т31.1. Доказать: а) длина любого вектора неотрицательна; б) длина вектора равна нулю, если и только если этот вектор нулевой.

Т31.2. Доказать все свойства, сформулированные в теореме 31.1.

Т31.3. Доказать, что косинус угла между ненулевыми векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен 1, если один из них равен другому, умноженному на некоторое положительное число.

Т31.4. Доказать, что косинус угла между ненулевыми векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен –1, если один из них равен другому, умноженному на некоторое отрицательное число.

Т31.5. Даны два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ из пространства $\Re^n$. Переставить координаты вектора $\bar{b}$ так, чтобы косинус угла между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ был максимальным.

Т31.6. Доказать теорему 31.2.

Т31.7. Доказать, что на плоскости косинус угла между векторами $\bar{a} = (x_1, y_1)$ и $\bar{b} = (x_2, y_2)$ равен $\frac{[\bar{a} \cdot \bar{b}]}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$. Отметим, что аналогичное утверждение справедливо и в трехмерном пространстве.

Т31.8. Доказать, что косинус угла между ненулевыми векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен ±1, если и только если $\bar{a} = \alpha\bar{b}$ для некоторого числа α (такие векторы называются коллинеарными).

Т31.9. Доказать, что для любых трех точек A, B, C, принадлежащих пространству Af^n, верно: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$; $\overline{AB} = -\overline{BA}$.

Общая формулировка задач K31.1—K31.11

Даны векторы $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ и m векторов $\overline{p}_1, \ldots, \overline{p}_m$ размерности n. Координата x_i равна кредиту в млн. ден. ед., выданному i-й фирме, $i = 1, \ldots, m$; k-я координата вектора p_i равна количеству млн. ден. ед., которые i-я фирма обязана вернуть кредитору через k лет, $k = 1, 2, \ldots, n$. Требуется вычислить минимальную годовую процентную ставку по каждому кредиту, при которой эта сделка имеет смысл; определить также итоговую прибыль в случае выдачи этих же кредитов под найденные годовые процентные ставки.

K31.1. $\overline{x} = (7, 30, 20, 45)$, $\overline{p}_1 = (1, 0, 2, 3, 4)$, $\overline{p}_2 = (2, 5, 12, 11, 4)$,
$\overline{p}_3 = (3, 3, 3, 3, 10)$, $\overline{p}_4 = (20, 5, 4, 6, 20)$.

K31.2. $\overline{x} = (12, 28, 19, 35)$, $\overline{p}_1 = (1, 0, 2, 3, 10)$, $\overline{p}_2 = (2, 5, 11, 11, 4)$,
$\overline{p}_3 = (2, 2, 3, 3, 10)$, $\overline{p}_4 = (20, 5, 4, 6, 17)$.

K31.3. $\overline{x} = (20, 33, 31)$, $\overline{p}_1 = (6, 6, 9, 7)$, $\overline{p}_2 = (5, 9, 10, 18)$, $\overline{p}_3 = (9, 10, 10, 15)$.

K31.4. $\overline{x} = (22, 21, 32)$, $\overline{p}_1 = (5, 8, 8, 7, 5)$, $\overline{p}_2 = (4, 5, 8, 10, 11)$,
$\overline{p}_3 = (8, 10, 10, 10, 11)$.

K31.5. $\overline{x} = (18, 24, 33)$, $\overline{p}_1 = (4, 7, 8, 9, 4)$, $\overline{p}_2 = (8, 5, 8, 10, 12)$,
$\overline{p}_3 = (8, 10, 11, 11, 10)$.

K31.6. $\overline{x} = (30, 24, 37)$, $\overline{p}_1 = (6, 11, 19)$, $\overline{p}_2 = (8, 9, 10)$, $\overline{p}_3 = (11, 16, 20)$.

K31.7. $\overline{x} = (24, 37, 17)$, $\overline{p}_1 = (8, 10, 9)$, $\overline{p}_2 = (12, 16, 21)$, $\overline{p}_3 = (5, 7, 8)$.

K31.8. $\overline{x} = (38, 16, 31)$, $\overline{p}_1 = (13, 15, 23)$, $\overline{p}_2 = (7, 2, 9)$, $\overline{p}_3 = (6, 11, 19)$.

K31.9. $\overline{x} = (19, 34, 32)$, $\overline{p}_1 = (5, 7, 12, 4)$, $\overline{p}_2 = (5, 10, 12, 17)$,
$\overline{p}_3 = (8, 11, 9, 16)$.

K31.10. $\overline{x} = (30, 22, 43, 9)$, $\overline{p}_1 = (3, 5, 11, 12, 5)$, $\overline{p}_2 = (4, 3, 2, 1, 15)$,
$\overline{p}_3 = (3, 3, 3, 3, 10)$,

$\overline{p}_4 = (1, 2, 3, 4, 1)$.

K31.11. $\overline{x} = (17, 30, 25, 36)$, $\overline{p}_1 = (5, 7, 8)$, $\overline{p}_2 = (5, 10, 18)$, $\overline{p}_3 = (8, 9, 10)$,

$\overline{p}_4 = (10, 15, 21)$.

Ответы, указания, решения

Т31.2. Докажем второе, пятое и шестое свойства.
Пусть $\overline{a} = (a_1, a_2, \ ..., a_n)$, $\overline{b} = (b_1, b_2, \ ..., b_n)$, $\overline{c} = (c_1, c_2, \ \ ..., c_n)$.

2) Пусть вектор $\overline{a} = \overline{AB}$, тогда $|\overline{a}| = \rho(A, B) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$.
Отсюда $|\overline{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = a_1a_1 + a_2a_2 + \ldots + a_na_n = [\overline{a} \cdot \overline{a}]$;

5) $\alpha[\overline{a} \cdot \overline{b}] = \alpha(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n) = (\alpha a_1)b_1 + (\alpha a_2)b_2 + \ldots + (\alpha a_n)b_n =$
$= [\alpha\overline{a} \cdot \overline{b}]$.

Аналогично показывается, что $\alpha[\overline{a} \cdot \overline{b}] = [\overline{a} \cdot \alpha\overline{b}]$.
Отсюда $\alpha[\overline{a} \cdot \overline{b}] = [\alpha\overline{a} \cdot \overline{b}] = [\overline{a} \cdot \alpha\overline{b}]$.

6) Так как $\overline{a} + \overline{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$, то

$[(\overline{a} + \overline{b}) \cdot \overline{c}] = (a_1 + b_1)c_1 + (a_2 + b_2)c_2 + (a_n + b_n)c_n =$

$= a_1c_1 + b_1c_1 + a_2c_2 + b_2c_2 + \ldots + a_nc_n + b_nc_n =$

$= (a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n) + (b_1c_1 + b_2c_2 + \ldots + b_nc_n) = [\overline{a} \cdot \overline{c}] + [\overline{b} \cdot \overline{c}]$.

Т31.3. Предположим, что $\overline{a} = \alpha\overline{b}$ и $\alpha > 0$.
Тогда $[\overline{a} \cdot \overline{b}] = [\alpha\overline{b} \cdot \overline{b}] = \alpha[\overline{b} \cdot \overline{b}] = \alpha|\overline{b}|^2$, $|\overline{a}| = |\alpha\overline{b}| = |\alpha| \cdot |\overline{b}| = \alpha|\overline{b}|$.
Отсюда $\dfrac{[\overline{a} \cdot \overline{b}]}{|\overline{a}||\overline{b}|} = \dfrac{\alpha|\overline{b}|^2}{\alpha|\overline{b}| \cdot |\overline{b}|} = 1$.

Т31.4. Указание: доказательство аналогично решению задачи Т31.3.

Т31.5. Будем считать, что координаты вектора $\overline{a}$ расположены в порядке неубывания: $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$. Предположим, что у вектора $\overline{b}$ найдутся такие две координаты b_i, b_k, что $b_i > b_k$ при $i < k$. Тогда $a_ib_i + a_kb_k \le$ $\le a_ib_k + a_kb_i$. Поэтому перестановка b_i и b_k может лишь сохранить или увеличить скалярное произведение $[\overline{a} \cdot \overline{b}]$. Это означает, что величина $[\overline{a} \cdot \overline{b}]$ примет максимальное значение, если координаты вектора $\overline{b}$ будут упорядочены по неубыванию. Поскольку перестановка координат не изменяет длин векторов, величина $\dfrac{[\overline{a} \cdot \overline{b}]}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}$ будет максимальной, если координаты вектора $\overline{b}$ упорядочены по неубыванию.

Т31.6. Обозначим через α число $\dfrac{[\bar a\cdot\bar b]}{|\bar b|^2}$ и рассмотрим квадрат длины вектора $\bar a-\alpha\bar b$:

$$|\bar a-\alpha\bar b|^2=[(\bar a-\alpha\bar b)\cdot(\bar a-\alpha\bar b)]=[\bar a\cdot\bar a]+[(-\alpha\bar b)\cdot\bar a]+[\bar a\cdot(-\alpha\bar b)]+$$
$$+[(-\alpha\bar b)\cdot(-\alpha\bar b)]=|\bar a|^2-\alpha[\bar a\cdot\bar b]-\alpha[\bar a\cdot\bar b]+\alpha^2[\bar b\cdot\bar b]=|\bar a|^2-2\alpha[\bar a\cdot\bar b]+\alpha^2|\bar b|^2 .$$

Вместо α подставим его значение, равное $\dfrac{[\bar a\cdot\bar b]}{|\bar b|^2}$:

$$|\bar a|^2-2\frac{[\bar a\cdot\bar b][\bar a\cdot\bar b]}{|\bar b|^2}+\frac{([\bar a\cdot\bar b])^2\left|\bar b\right|^2}{\left|\bar b\right|^4}=|\bar a|^2-\frac{([\bar a\cdot\bar b])^2}{|\bar b|^2}.$$

Последнее число, являясь квадратом длины вектора $\bar a-\alpha\bar b$, должно быть неотрицательным, откуда

$$|\bar a|^2-\frac{([\bar a\cdot\bar b])^2}{|\bar b|^2}\geq 0\Leftrightarrow|\bar a|^2|\bar b|^2\geq([\bar a\cdot\bar b])^2\Leftrightarrow|[\bar a\cdot\bar b]|\leq|\bar a||\bar b|\Leftrightarrow$$
$$-|\bar a||\bar b|\leq[\bar a\cdot\bar b]\leq|\bar a||\bar b|.$$

Теорема доказана.

Т31.7. Изобразим на координатной плоскости $0xy$ векторы $\bar a=(x_1,y_1)$ и $\bar b=(x_2,y_2)$ с общим началом в точке $(0,0)$, как это показано на рис. 31.15.

Тогда

$$\frac{[\bar a\cdot\bar b]}{\left|\bar a\right|\cdot\left|\bar b\right|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\left|\bar a\right|\cdot\left|\bar b\right|}=\frac{x_1}{\left|\bar a\right|}\cdot\frac{x_2}{\left|\bar b\right|}+\frac{y_1}{\left|\bar a\right|}\cdot\frac{y_2}{\left|\bar b\right|}=\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos\beta+\cos\gamma\cdot\cos(\alpha+\gamma)=$$
$$=\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos\beta+\cos(90^\circ-\alpha-\beta)\cdot\cos(90^\circ-\beta)=$$
$$=\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos\beta+\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin\beta=\cos(\alpha+\beta-\beta)=\cos\alpha.$$

Т31.8. Указание: из решения задачи Т31.6 следует, что $\left|\bar a\right|\cdot\left|\bar b\right|=\left|[\bar a\cdot\bar b]\right|$, если и только если $\left|\bar a-\alpha\bar b\right|=0$, что в свою очередь равносильно равенству $\bar a=\alpha\bar b$ (см. задачу Т31.1).

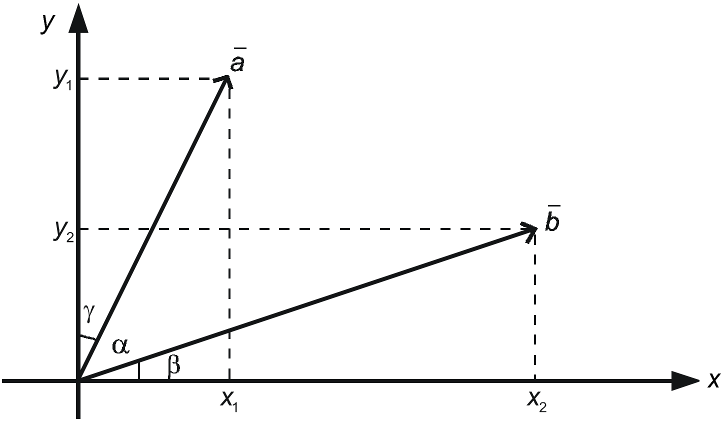


Рис. 31.15. Векторы $\bar{a} = (x_1, y_1)$ и $\bar{b} = (x_2, y_2)$ с общим началом в точке (0, 0)

Т31.9. Указание: воспользоваться определением вектора $\overline{AB}$ с началом в точке *A* и концом в точке *B*.

К31.11. Алгоритм решения задачи с помощью Mathcad следующий.

Ввести исходные данные:

$\mathrm{ORIGIN} := 1$

$P_1 := (5\ \ 7\ \ 8)\quad P_2 := (5\ \ 10\ \ 18)\quad P_3 := (8\ \ 9\ \ 10)$

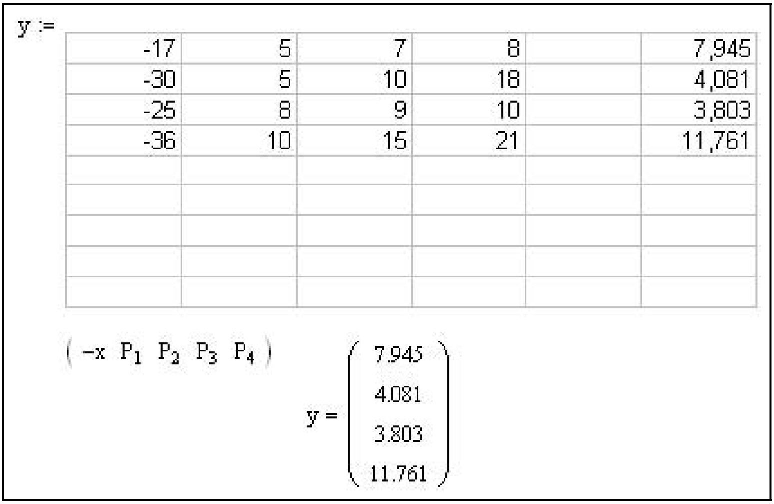
$P_4 := (10\ \ 15\ \ 21)$

$$x := \begin{pmatrix} 17 \\ 30 \\ 25 \\ 36 \end{pmatrix}$$

Командой **Компонент** (Component) меню **Вставка** (Insert) вызвать диалоговое окно **Excel Setup Wizard**. В поле **Inputs** ввести число `5`, в полях **Input 0**, **Input 1**, **Input 2**, **Input 3**, **Input 4** ввести соответственно адреса `a1:a4`, `b1:d1`, `b2:d2`, `b3:d3`, `b4:d4` ячеек, в которые будут помещены координаты векторов — x, P_1, P_2, P_3, P_4.

В поле **Outputs** ввести число 1, в поле **Output 0** — адреса `f1:f4` ячеек, в которых будут вычислены искомые процентные ставки. После щелчка по кнопке **Готово** на месте меток появившейся таблицы ввести соответствующие идентификаторы — x, P_1, P_2, P_3, P_4, y. Двойным щелчком на области таблицы вызвать рабочий лист Excel и в ячейке `f1` ввести команду

`= вндох(a1:d1) · 100`. Скопировать эту команду в ячейки `f2:f4` (рис. 31.17). После щелчка вне области таблицы искомые процентные ставки будут возвращены в Mathcad-документ:



y :=

-17	5	7	8		7,945
-30	5	10	18		4,081
-25	8	9	10		3,803
-36	10	15	21		11,761

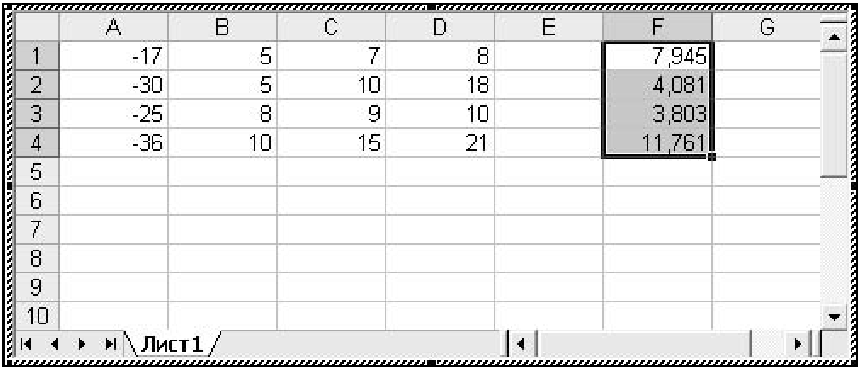
$$\begin{pmatrix} -x & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 7.945 \\ 4.081 \\ 3.803 \\ 11.761 \end{pmatrix}$$

Рис. 31.16. Процентные ставки, возвращенные в Mathcad-документ

Вычислить прибыль кредитора, если бы кредиты были выданы под найденные годовые процентные ставки. Для этого следует вычислить скалярное произведение векторов x и $((100 + y) \cdot \%)^3$ и затем вычесть общую сумму кредита:

$$x \cdot [(100 + y) \cdot \%]^3 - \sum x \ = 25.424$$



	A	B	C	D	E	F	G
1	-17	5	7	8		7,945	
2	-30	5	10	18		4,081	
3	-25	8	9	10		3,803	
4	-36	10	15	21		11,761	
5							
6							
7							
8							
9							
10							

Рис. 31.17. Рабочий лист Excel-документа

Глава 32

Линейно независимые системы векторов

Говорят, что вектор $\overline{b} \in \Re^n$ есть линейная комбинация векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, ..., $\overline{a}_k$ из $\Re^n$ с коэффициентами α_1, α_2, ..., α_k, если $\overline{b} = \alpha_1\overline{a}_1 + {} + \alpha_2\overline{a}_2 + \ldots + \alpha_k\overline{a}_k$. Такая линейная комбинация называется ненулевой, если при этом не все коэффициенты α_1, α_2, ..., α_k равны нулю, в случае $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$ она называется нулевой. Очевидно, нулевой вектор является нулевой комбинацией любой системы векторов. Однако не для всякой системы векторов нулевой вектор представим в виде ее ненулевой комбинации.

Конечная система векторов $V = \{\overline{a}_1, \overline{a}_2,\ \ldots,\ \overline{a}_k\}$ из $\Re^n$ называется линейно зависимой, если нулевой вектор из $\Re^n$ является ненулевой комбинацией векторов из V. В противном случае система векторов V называется линейно независимой. Другими словами, в случае линейно независимой системы векторов $V = \{\overline{a}_1,\ \overline{a}_2,\ \ldots,\ \overline{a}_k\}$ из равенства $\overline{0} = \alpha_1\overline{a}_1 + {} + \alpha_2\overline{a}_2 + \ldots + \alpha_k\overline{a}_k$ следует $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$.

> **Пример.** Если $\overline{a}_1 = (2, 2, 3)$, $\overline{a}_2 = (0, -4, 5)$, $\overline{a}_3 = (3, 13, -8)$, то непосредственно проверяется равенство $3\overline{a}_1 - 5\overline{a}_2 - 2\overline{a}_3 = \overline{0}$. Выполнение этого равенства означает, что система векторов $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3\}$ линейно зависима.

Если система векторов B из $\Re^n$ включает в себя все векторы системы A, то A называется подсистемой B. Систему, состоящую из единственного вектора, назовем тривиальной.

Утверждение 32.1. Если линейно зависимая система векторов A является подсистемой конечной системы векторов B, то система векторов B также линейно зависима.

Доказательство. Пусть $A=\{\bar{a}_1,\ \ldots,\ \bar{a}_k\}$, $B=\{\bar{a}_1,\ \ldots,\ \bar{a}_k,\ \bar{b}_1,\ \ldots,\ \bar{b}_r\}$. Так как A линейно зависимая система, то нулевой вектор представим в виде ненулевой комбинации векторов из A: $\bar{0}=\alpha_1\bar{a}_1+\alpha_2\bar{a}_2+\ldots+\alpha_k\bar{a}_k$. Но тогда нулевой вектор является очевидной ненулевой линейной комбинацией векторов из B:

$$\bar{0}=\alpha_1\bar{a}_1+\alpha_2\bar{a}_2+\ldots+\alpha_k\bar{a}_k+0\cdot\bar{b}_1+0\cdot\bar{b}_2+\ldots+0\cdot\bar{b}_r.$$

А это означает линейную зависимость системы векторов B.

Следствие 32.1. Любая подсистема линейно независимой системы векторов линейно независима.

Это следствие является фактически переформулировкой утверждения 32.1.

Утверждение 32.2. Любая конечная система векторов из $\Re^n$, содержащая нулевой вектор, линейно зависима. Тривиальная система, отличная от нулевого вектора, линейно независима.

Доказательство утверждения дано в задаче Т32.1.

Утверждения 32.1—32.2 говорят об иерархии конечных систем векторов, заключающейся в следующем. Любая линейно зависимая система, отличная от нулевого вектора, имеет некоторую линейно независимую подсистему, но не может быть подсистемой линейно независимой системы векторов; любая линейно независимая система является подсистемой некоторой линейно зависимой системы, но не имеет линейно зависимых подсистем.

Утверждение 32.3. Нетривиальная конечная система векторов из $\Re^n$ линейно зависима, если и только если какой-либо из ее векторов есть линейная комбинация остальных.

Доказательство утверждения дано в задаче Т32.2.

В свете утверждения 32.3 линейно зависимая система векторов обладает избыточностью, заключающейся в возможности выразить некоторый ее вектор через другие с помощью операций векторного сложения и умножения на скаляр.

Пусть дана система векторов V из $\Re^n$ и произвольный вектор $\bar{a} \in V$. Если в системе векторов V заменить вектор $\bar{a}$ либо на $\alpha\bar{a}$, где α — отличное от нуля число, либо на вектор $\bar{a}+\bar{b}$ (или $\bar{a}-\bar{b}$), где $\bar{b} \in V$, при сохранении всех остальных векторов системы, то это преобразование называется элементарным преобразованием системы V. Например, если $V = \{ \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4 \}$, то система $\{ \bar{a}_1, \bar{a}_2 + \bar{a}_4, \bar{a}_3, \bar{a}_4 \}$ получена из V элементарным преобразованием — прибавлением к $\bar{a}_2$ вектора $\bar{a}_4$.

Утверждение 32.4. Линейная зависимость (линейная независимость) системы векторов V из $\Re^n$ сохраняется в результате элементарного преобразования этой системы.

Доказательство. Пусть $V = \{ \bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \ldots,\ \bar{a}_k \}$ и система $W = \{ \bar{a}_1 + \bar{a}_2,\ \bar{a}_2,\ \ldots,\ \bar{a}_k \}$ получена из V элементарным преобразованием — прибавлением к $\bar{a}_1$ вектора $\bar{a}_2$. Предположим, что система V линейно зависима. Тогда $\bar{0} = \alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_k\bar{a}_k$, причем не все коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ равны нулю. Отсюда $\bar{0} = \alpha_1(\bar{a}_1 + \bar{a}_2) + {}$ $+ (\alpha_2 - \alpha_1)\bar{a}_2 + \alpha_3\bar{a}_3 + \ldots + \alpha_k\bar{a}_k$. Если W линейно независима, то $\alpha_1 = \alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_k = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_k = 0$, что невозможно. Таким образом, система W также линейно зависима.

Обратно, если система W линейно зависима, то вместе с ней линейно зависима и система V, поскольку система V получается из W элементарным преобразованием — вычитанием из вектора $\bar{a}_1 + \bar{a}_2$ вектора $\bar{a}_2$.

Тот факт, что V линейно независима, если и только если таковой является система, полученная из V умножением произвольного ее вектора на ненулевое число, доказан в задаче Т32.3.

Компьютерный раздел

Встроенная функция `find(X)` служит для решения систем уравнений и неравенств относительно n-мерной точки X. Перед использованием этой функции необходимо задать начальные — стартовые — значения координат точки X. Функция `find` должна завершать блок решения, начинающийся ключевым словом `Given`; внутри блока должны располагаться уравнения и неравенства решаемой системы.

Пусть, например, требуется решить систему $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 10 \\ |x_1 + x_2| = 4 \\ x_1 \ge 0 \end{cases}$.

С помощью функции `find` эту задачу можно решить так:

$\mathrm{ORIGIN} := 1 \qquad i := 1..2 \qquad x_i := 0$

$\mathrm{Given} \qquad (x_1)^2 + (x_2)^2 = 10 \qquad |x_1 + x_2| = 4 \qquad x_1 \ge 0$

$\mathrm{find}(x) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Если система имеет несколько решений, то найденное функцией `find` решение будет определяться, прежде всего, заданными стартовыми значениями переменных.

Функция `find` позволяет получать решения, зависящие от параметров. Например,

$\mathrm{ORIGIN} := 1$

$i := 1..2$

$x_i := 0$

$\mathrm{Given} \qquad (x_1)^2 + (x_2)^2 = a \qquad |x_1 + x_2| = b \qquad x_1 \ge 0$

$\mathrm{resh}(a, b) := \mathrm{find}(x)$

$\mathrm{resh}\ (10, 4) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{resh}\ (13, 5) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Команда **Параметры** (Options) меню **Математика** (Math) (рис. 32.1) вызывает диалоговое окно **Math Options** (Математические опции) (рис. 32.2).

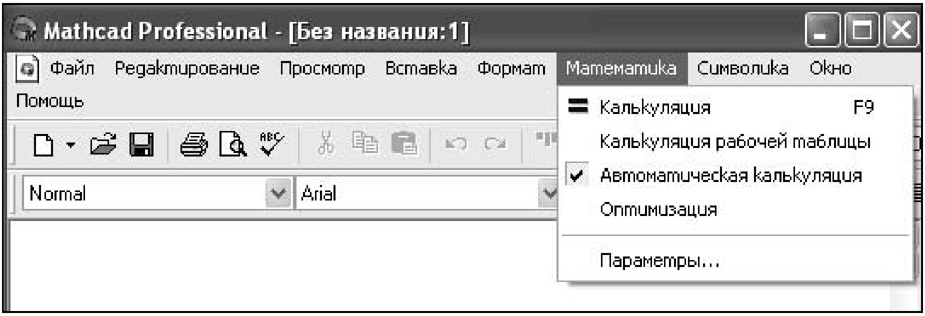
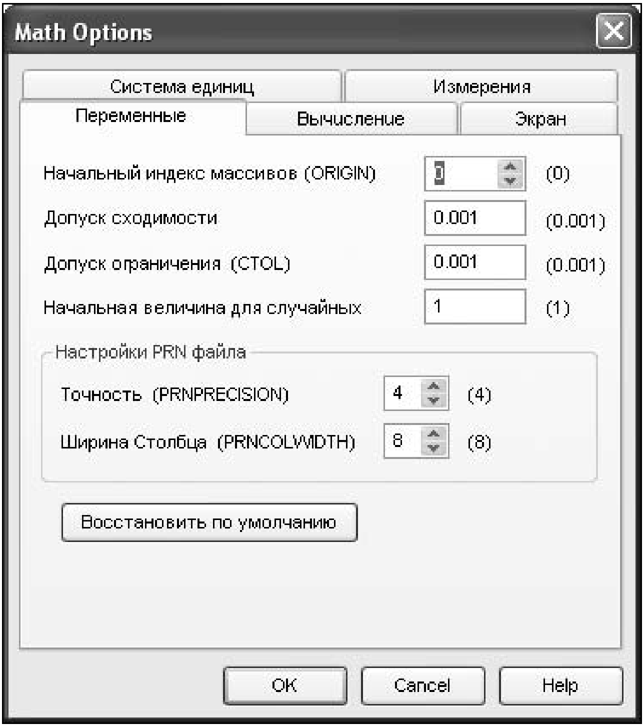


Рис. 32.1. Меню **Математика**



Начальный индекс массивов (ORIGIN) 0 (0)
Допуск сходимости 0.001 (0.001)
Допуск ограничения (CTOL) 0.001 (0.001)
Начальная величина для случайных 1 (1)
Точность (PRNPRECISION) 4 (4)
Ширина Столбца (PRNCOLWIDTH) 8 (8)

Рис. 32.2. Диалоговое окно **Math Options**

Вкладка **Переменные** (Build-in Variables) служит для установки значений системных переменных. Действие этих установок распространяется на весь Mathcad-документ. В поле **Начальный индекс массивов (ORIGIN)** (Array Origin) устанавливается значение переменной `ORIGIN` (она описана в *гл. 8*). В полях **Допуск сходимости** (Convergence Tolerance) и **Допуск ограничения (CTOL)** (Constraint Tolerance) устанавливаются значения системных переменных `TOL` и `CTOL`. Переменная `TOL` контролирует точность в реализованных в Mathcad алгоритмах вычисления интегралов, производных, корней уравнений и оптимальных значений функций. Если значение `TOL` уменьшать, то точность вычислений будет расти параллельно с увеличением времени вычислений. При неоправданно малых значениях `TOL` возможно появление сообщения "решение не найдено", поскольку достаточно хорошее приближение, найденное алгоритмом, "будет пропущено" из-за слишком строгого критерия по точности, заложенного в значении `TOL`. Переменная `CTOL` контролирует, насколько точно решение, найденное в блоке решений (такой блок должен начинаться ключевым словом `Given` и должен содержать ограничения в виде равенств или неравенств, а также одну из функций `minimize`, `maximize`, `find`, `minerr`) удовлетворяет ограничениям, содержащимся в этом блоке. Например, пусть блок содержит ограничение `x < 5`. Тогда любое значение x, которое не превосходит 5 + `CTOL`, будет считаться удовлетворяющим этому ограничению. Если же блок содержит ограничение `x = 2`, то любое значение x в диапазоне [2 – `CTOL`; 2 + `CTOL`], будет считаться удовлетворяющим этому ограничению. Как и в случае переменной `TOL`, уменьшение значения переменной `CTOL` увеличивает точность и время вычислений.

Встроенная функция `rank`, имеющая в качестве аргумента функцию `augment(V1, V2,..., Vn)` (о функции `augment` см. в *"Компьютерном разделе" гл. 33*) определяет ранг системы вектор-столбцов $\{V1, V2, \ldots, Vn\}$ одинаковой размерности.

Задачи для самостоятельного решения

Т32.1. Доказать утверждение 32.2.

Т32.2. Доказать утверждение 32.3.

Т32.3. Завершить доказательство утверждения Т32.4.

Т32.4. Доказать: если линейно независимая система векторов V после добавления к ней нового вектора $\bar{b}$ стала линейно зависимой, то вектор $\bar{b}$ является линейной комбинацией векторов из V.

Т32.5. Следующая система векторов называется ступенчатой:

$$\begin{array}{l}
\bar{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13},\ \ldots, a_{1n}),\ a_{11} \neq 0,\\
\bar{a}_2 = (\ 0, a_{22}, a_{23},\ \ldots, a_{2n}),\ a_{22} \neq 0,\\
\bar{a}_3 = (\ \ 0,\ \ 0, a_{33},\ \ldots, a_{3n}),\ a_{33} \neq 0,\\
\qquad\qquad\ \vdots\\
\bar{a}_n = (\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ldots, a_{nn}),\ a_{nn} \neq 0.
\end{array}$$

Доказать, что ступенчатая система векторов линейно независима.

Т32.6. Пусть дана система векторов V из $\Re^n$. Максимально возможное число векторов в линейно независимой подсистеме системы V называется рангом системы V. Доказать, что ранг системы, состоящей из всех векторов пространства $\Re^n$, не меньше n (в *гл. 35* будет показано, что ранг такой системы равен n).

Т32.7. Доказать, что если число векторов в линейно независимой подсистеме A системы векторов B равно рангу системы B, то любой вектор из B представим в виде линейной комбинации векторов из A.

Т32.8. Дана упорядоченная система векторов $\{\bar{a}_1, \ \ldots, \ \bar{a}_i, \ \ldots, \ \bar{a}_m, \ \ldots, \ \bar{a}_k\}$ из $\Re^n$. Доказать, что с помощью элементарных преобразований можно "поменять местами" два произвольных вектора $\bar{a}_i$ и $\bar{a}_m$, не нарушая порядка следования остальных векторов.

Общая формулировка задач К32.1—11

К32.*i*(*i* =1, 2, ..., 11). Выяснить, является ли система векторов $\{P_1, \ P_2, \ \ldots$ $\ldots, \ P_n\}$ из задачи К31.*i* линейно зависимой. В случае положительного ответа найти коэффициенты в представлении нулевого вектора в виде ненулевой линейной комбинации векторов $P_1, \ P_2, \ \ldots, \ P_n$.

Ответы, указания, решения

Т32.1. Пусть $V = \left\{\bar{0}, \ \bar{a}_1, \ \bar{a}_2, \ \ldots, \ \bar{a}_k\right\}$. Тогда $\bar{0} = 1 \cdot \bar{0} + 0 \cdot \bar{a}_1 + \ldots + 0 \cdot \bar{a}_k$, что означает линейную зависимость системы V, содержащей нулевой вектор $\bar{0}$. Если $V = \left\{\bar{b}\right\}$ и $\bar{b} \neq \bar{0}$, то равенство $\alpha\bar{b} = \bar{0}$ возможно только при $\alpha = 0$. Утверждение доказано.

Т32.2. Пусть система векторов $V = \left\{\ \bar{a}_1, \ \bar{a}_2, \ \ldots, \ \bar{a}_k\right\}$ линейно зависима. Тогда $\bar{0} = \alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_k\bar{a}_k$, причем среди коэффициентов $\alpha_1, \ \alpha_2, \ldots,$ α_k имеется по меньшей мере один, скажем, α_i, отличный от нуля. Тогда

$$\alpha_i\bar{a}_i = -(\alpha_1\bar{a}_1 + \ldots + \alpha_{i-1}\bar{a}_{i-1} + \alpha_{i+1}\bar{a}_{i+1} + \ldots + \alpha_k\bar{a}_k),$$

$$\bar{a}_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i}\bar{a}_1 - \ldots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}\bar{a}_{i-1} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}\bar{a}_{i+1} - \ldots - \frac{\alpha_k}{\alpha_i}\bar{a}_k,$$

т. е. вектор $\bar{a}_i$ есть линейная комбинация других векторов из V.

Предположим теперь, что $\bar{a}_i = \beta_1\bar{a}_1 + \ldots + \beta_{i-1}\bar{a}_{i-1} + \beta_{i+1}\bar{a}_{i+1} + \ldots + \beta_k\bar{a}_k$. Тогда $\bar{0} = -\bar{a}_i + \beta_1\bar{a}_1 + \ldots + \beta_{i-1}\bar{a}_{i-1} + \beta_{i+1}\bar{a}_{i+1} + \ldots + \beta_k\bar{a}_k$, что и означает линейную зависимость системы векторов V.

Т32.3. Указание: если $V = \{\, \bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \ldots,\ \bar{a}_k \}$, $W = \{\, r\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \ldots,\ \bar{a}_k \}$, $r \neq 0$, то

$$\bar{0} = \alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_k\bar{a}_k \Leftrightarrow \bar{0} = \left(\frac{\alpha_1}{r}\right)\left(r\bar{a}_1\right) + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_k\bar{a}_k .$$

Т32.4. Пусть $V = \{\, \bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \ldots,\ \bar{a}_k \}$. Ввиду линейной зависимости системы $V \cup \{\bar{b}\}$ нулевой вектор представим в виде ненулевой комбинации ее векторов: $\bar{0} = \alpha_1\bar{a}_1 + \ldots + \alpha_k\bar{a}_k + \beta\bar{b}$. Если $\beta = 0$, то $\bar{0} = \alpha_1\bar{a}_1 + \ldots + \alpha_k\bar{a}_k$, где не все α_i равны 0, что противоречит линейной независимости системы векторов V. Поэтому $\beta \neq 0$, откуда $\bar{b} = -\frac{\alpha_1}{\beta}\bar{a}_1 - \frac{\alpha_2}{\beta}\bar{a}_2 - \ldots - \frac{\alpha_k}{\beta}\bar{a}_k$, что и требовалось доказать.

Т32.5. Пусть $\bar{0} = \alpha_1\bar{a}_1 + \ldots + \alpha_k\bar{a}_k$. Приравняем соответствующие координаты левой и правой частей этого равенства:

$0 = \alpha_1 a_{11}$, $0 = \alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22}$, $0 = \alpha_1 a_{13} + \alpha_2 a_{23} + \alpha_3 a_{33}$, …, $0 = \alpha_1 a_{1n} + \alpha_2 a_{2n} + \ldots$ $\ldots + \alpha_n a_{nn}$. Отсюда следует, что $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$, …, $\alpha_n = 0$. Это доказывает линейную независимость ступенчатой системы векторов.

Т32.6. Указание: воспользоваться утверждением задачи Т32.5.

Т32.7. Пусть $\bar{b}$ — произвольный вектор из B. Если $\bar{b} \in A$, то $\bar{b} = 1 \cdot \bar{b}$ и все доказано. Если $\bar{b} \notin A$, то система векторов $A \cup \{\bar{b}\}$ линейно зависима по определению ранга. Остальное теперь следует из утверждения задачи 32.4.

Т32.8. Следующая цепочка систем векторов показывает последовательность элементарных преобразований, которые меняют местами векторы $\bar{a}_i$ и $\bar{a}_m$:

$\{\, \bar{a}_1,\ \ldots,\ \bar{a}_i,\ \ldots,\ \bar{a}_m,\ \ldots,\ \bar{a}_k \}$, $\{\, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_i, \ldots, \bar{a}_m + \bar{a}_i, \ldots, \bar{a}_k \}$,
$\{\, \bar{a}_1,\ \ldots,\ -\bar{a}_m,\ \ldots\ \bar{a}_m + \bar{a}_i,\ \ldots,\ \bar{a}_k \}$, $\{\, \bar{a}_1,\ \ldots,\ -\bar{a}_m,\ \ldots,\ \bar{a}_i,\ \ldots,\ \bar{a}_k \}$,
$\{\, \bar{a}_1,\ \ldots,\ \bar{a}_m,\ \ldots,\ \bar{a}_i,\ \ldots,\ \bar{a}_k \}$.

К32.11. Алгоритм решения задачи с помощью Mathcad следующий:

```
P1 := (5 7 8)    P2 := (5 10 18)    P3 := (8 9 10)    P4 := (10 15 21)
i := 1..4    xi := 0
```

Given

$$\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot P_i^T = 0 \qquad \left[x \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 1$$

$$a := \mathrm{Find}(x)$$

$$\mathrm{rank}\left(\mathrm{augment}\left(P_1^T, P_2^T, P_3^T, P_4^T\right)\right) = 3$$

$$a = \begin{pmatrix} 0.341 \\ 0.254 \\ 0.155 \\ -0.422 \end{pmatrix}$$

Глава 33

Матрицы: общие понятия

Матрицей M размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица с m строками и n столбцами, состоящая из чисел, называемых элементами матрицы M. Элемент матрицы, расположенный на пересечении i-й строки и k-го столбца, обозначается через m_{ik}; будем говорить, что этот элемент находится на позиции (i, k). Матрица размера $n \times n$ называется квадратной матрицей порядка n.

Элементы m_{ii}, $i = 1, 2, \ldots, n$, квадратной матрицы M порядка n образуют, так называемую, главную диагональ этой матрицы. Единичной матрицей E порядка n называется квадратная матрица порядка n, все элементы главной диагонали которой равны 1, а все остальные элементы — нули.

Примеры. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 13 \end{pmatrix}$ — матрица размера 2×3; на позиции (2, 3) этой матрицы находится элемент 13; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ — единичная матрица E порядка 3; $(3\ 4\ 7)$ — матрица размера 1×3, $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ —матрица размера 3×1.

Любую строку или столбец матрицы размера $m \times n$ можно рассматривать как вектор $\bar{a}$ пространства $\Re^n$ или $\Re^m$ соответственно. При необходимости они будут считаться таковыми без особых оговорок. Однако при этом следует различать, является ли вектор $\bar{a}$ строкой, которая будет называться вектор-строкой, или столбцом, который будет называться вектор-столбцом. Вектор-строка — это матрица размера $1 \times n$, а вектор-столбец — матрица размера $m \times 1$. В дальнейшем, когда из контекста не ясно, какие векторы имеются в виду, будут даваться дополнительные уточнения.

Операции над матрицами:

- сложить (вычесть) две матрицы A, B одинакового размера означает сложить (вычесть) их элементы, стоящие на одинаковых позициях; при этом получится матрица $A + B$ ($A - B$) того же размера;
- умножить матрицу M на скаляр α означает умножить на это число все элементы матрицы; при этом получится матрица αM того же размера;
- транспонировать матрицу M означает преобразовать ее в матрицу M^T, строки которой являются столбцами матрицы M с теми же номерами;
- при умножении матрицы A на матрицу B их размеры должны быть согласованными, т. е. число столбцов матрицы A должно равняться числу строк матрицы B; умножить матрицу A размера $m \times l$ на матрицу B размера $l \times n$ означает получить матрицу $C = AB$ размера $m \times n$, элемент которой c_{ik} равен скалярному произведению i-й строки матрицы A и k-го столбца матрицы B, т. е.

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{il}b_{lk} = \sum_{j=1}^{l} a_{ij}b_{jk} .$$

Для упрощения записи знак умножения в произведении матриц опускается.

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$,

$3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & -3 & 12 \end{pmatrix}$, $B^T = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

$$A \cdot B^T = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \\ 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 0 \cdot 4 + (-1) \cdot 1 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Утверждение 33.1. Если рассматривать векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ как матрицы, то скалярное произведение $[\bar{a} \cdot \bar{b}]$ можно записать в матричном виде: $\bar{a} \cdot \bar{b}^T$ или $\bar{b} \cdot \bar{a}^T$.

Теорема 33.1. Пусть A, B, C, D — матрицы, D — квадратная матрица. Тогда справедливы равенства $(AB)C = A(BC)$, $(A + B)C = AC + BC$, $C(A + B) = CA + CB$, $(AB)^T = B^T A^T$, $DE = ED = D$ при условии, что размеры матриц согласуются во всех операциях сложения и умножения, участвующих в этих равенствах.

Доказательство. Для доказательства равенства матриц $(AB)^T$ и $B^T A^T$ достаточно сравнить их элементы на одинаковых позициях. На позиции (i, k) в матрице $B^T A^T$ находится некоторое число c, равное скалярному произведению i-й строки матрицы B^T и k-го столбца матрицы A^T. Но i-я строка матрицы B^T — это i-й столбец матрицы B, а k-й столбец матрицы A^T — это k-я строка матрицы A. Поэтому число c равно скалярному произведению k-й строки матрицы A и i-го столбца матрицы B, т. е. число c находится на позиции (k, i) матрицы AB или на позиции (i, k) матрицы $(AB)^T$.

Для доказательства равенства $DE = D$ рассмотрим число d на позиции (i, k) матрицы DE: если i-я строка в D есть $(d_{i1}, d_{i2}, \ldots, d_{in})$, то $d = d_{i1}0 + {} + d_{i2}0 + \ldots + d_{i,k-1}0 + {} + d_{ik}1 + d_{i,k+1}0 + \ldots + d_{in}0 = d_{ik}$, т. к. в k-ом столбце матрицы E именно k-я координата равна 1, а остальные координаты равны 0. Итак, число d равно элементу d_{ik} матрицы D, находящемуся на позиции (i, k), что доказывает равенство $DE = D$. Равенство $ED = D$ доказывается аналогично. Доказательство первых трех равенств теоремы дано в задаче Т33.1.

Пусть задана система m линейных уравнений с n переменными, имеющая следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_{21} + \ldots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}, \qquad (33.1)$$

при этом числа a_{ik} называются коэффициентами при переменных x_k, c_k — свободными членами, $i = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, n$.

Систему (33.1) можно записать в матричном виде:

$$AX = C, \text{ где } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}. \qquad (33.2)$$

Систему (33.1) можно также записать двумя способами в векторном виде:

$$x_1\bar{b}_1 + x_2\bar{b}_2 + \ldots + x_n\bar{b}_n = \bar{c}\text{, где } \bar{b}_k = \begin{pmatrix} a_{k1} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}, \ \bar{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}, k = 1, 2, \ldots, n; \qquad (33.3)$$

или

$$\begin{cases} [\bar{a}_1 \cdot \bar{x}] = c_1 \\ \quad \vdots \\ [\bar{a}_m \cdot \bar{x}] = c_m \end{cases}, \quad \begin{matrix} \text{где } \bar{x} = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n), \\ \bar{a}_i = (a_{i1},\ a_{i2},\ \ldots,\ a_{in}), i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m. \end{matrix} \qquad (33.4)$$

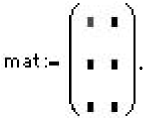
И наконец, систему (33.1) можно записать в матрично-векторном виде:

$$A\bar{x}^T = \bar{c}\,. \qquad (33.5)$$

Компьютерный раздел

Индексы матриц и векторов в Mathcad могут принимать целые неотрицательные значения. Начало индексации (нумерации) строк и столбцов матриц задается системной переменной `ORIGIN`. Например, `ORIGIN := 0` означает, что нумерация строк и столбцов начинается с нуля. По умолчанию значение переменной `ORIGIN` равно нулю.

Ввод элементов матрицы аналогичен вводу координат векторов и n-мерных точек. Пусть, к примеру, надо ввести матрицу $mat = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -5 & 8.2 \end{pmatrix}$.

В нужном месте рабочего листа введите идентификатор матрицы `mat` и знак присваивания :=. Затем выведите диалоговое окно **Вставить матрицу** (Insert Matrix). В поле **Строк** (Rows) этого окна надо задать число строк 3, а в поле **Колонок** (Columns) — число столбцов 2. После щелчка кнопкой **ОК** справа от знака присваивания появится шаблон матрицы с метками для ввода ее элементов: .

Чтобы извлечь элемент матрицы, находящийся на позиции (i, k), необходимо ввести идентификатор матрицы с индексами i, k (индексы — через запятую) — в случае равенства ORIGIN единице, или с индексами $i - 1$, $k - 1$ — в случае равенства ORIGIN нулю. Рассмотрим, например, элемент 8.2 матрицы *mat*, который находится на позиции (3,2). Предположим, что ORIGIN равно нулю. Для извлечения элемента 8.2 введите идентификатор матрицы *mat*, затем комбинацией клавиш <Ctrl>+<[> перейдите в режим ввода индексов: $\text{mat}_{▮}$. Введите на месте метки индексы 2,1. Клавишей <=> введите знак равенства, справа от которого появится искомый элемент: $mat_{2,1}=8.2$.

В Mathcad матричные операции сложения, вычитания и умножения выполняются с помощью кнопок $\boxed{+}$ $\boxed{-}$ и $\boxed{\times}$ подпанели **Арифметика** (Calculator) или с помощью клавиш <+>, <–> и <*>. Щелчок кнопкой $\boxed{M^{T}}$ подпанели **Матрицы** (Matrix) (рис. 33.1) после ввода идентификатора матрицы приводит к ее транспонированию.

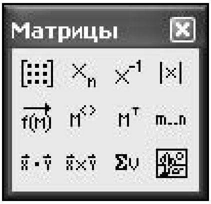


Рис. 33.1. Подпанель **Матрицы**

Щелчок кнопкой $\boxed{M^{\langle\rangle}}$ после ввода идентификатора матрицы приводит к появлению шаблона с меткой для ввода номера столбца матрицы: $\text{mat}^{\langle ▮ \rangle}$. На месте метки надо ввести номер того столбца, который требуется извлечь. Например, $mat^{\langle 1 \rangle}=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8.2 \end{pmatrix}$ (в случае равенства ORIGIN нулю).

Матрицу размера $n\times1$ Mathcad воспринимает как вектор-столбец и потому, в этом случае, допускается как одинарная, так и двойная индексация. Например:

$$\text{ORIGIN} := 1 \qquad M := \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad M_2 = 13 \qquad M_{2,1} = 13$$

Однако это не распространяется на матрицы размера 1×*n*. Например:

$A := M^T \quad A = (\,12 \quad 13 \quad -4\,) \quad A_1 = \blacksquare \quad A_{1,2} = 13$

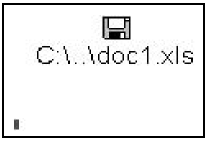
Как видно из этого фрагмента, элементы матрицы *A* размера 1×3 допускают только двойную индексацию, а сама матрица *A* не воспринимается Mathcad в качестве вектор-строки.

Стандартные функции `rows(M)` и `cols(M)` определяют соответственно число строк и столбцов матрицы `M`. Например, `rows(mat) = 3` и `cols(mat) = 2`.

Встроенная функция `augment(A1,..., An)`, аргументы `A1, A2,..., An` которой — матрицы с одинаковым числом строк, формирует матрицу (`A1, A2,..., An`) с тем же числом строк (здесь имеется в виду, что матрицы `A1, A2,..., An` размещаются последовательно слева направо). Например, если

$$A1=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix},\quad A2=\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix},\quad A3=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix},\ \text{то}\ \mathrm{augment}(A1,A2,A3)=\begin{pmatrix}1&2&7&1&0\\3&4&8&0&1\\5&6&9&1&1\end{pmatrix}.$$

Встроенная функция `stack(A1, A2,..., An)`, аргументы `A1, A2,..., An` которой — матрицы с одинаковым числом столбцов, формирует матрицу с тем же числом столбцов (здесь имеется в виду, что матрицы `A1, A2,..., An` размещаются последовательно сверху вниз). Например, если `A1 = (1 2)`, $A2=\begin{pmatrix}3&4\\5&6\end{pmatrix}$, то $\mathrm{stak}(A1,A2)=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}$.

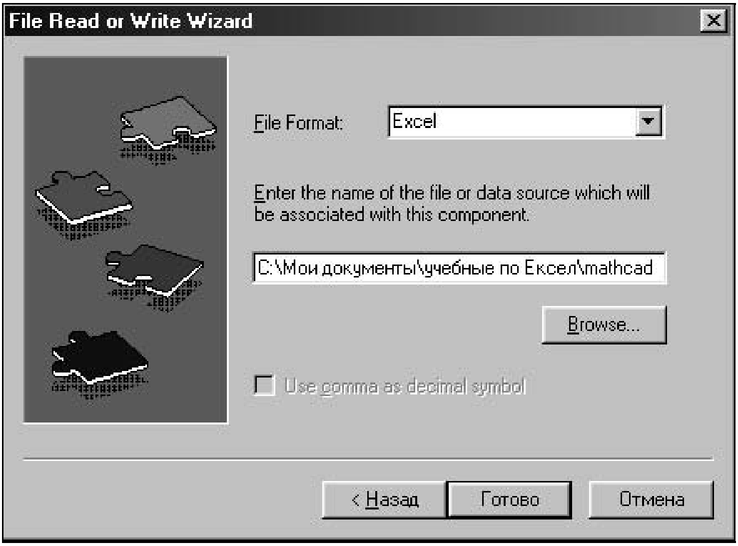
Обмен файлами данных между Mathcad и Excel осуществляется с помощью команды **File Read or Write** (Прочитать или записать файл), которая находится в списке **Выберите компоненты для вставки** (Select a component to insert) диалогового окна **Мастер компонентов** (Component Wizard) (см. рис. 31.3). Выделите строку **File Read or Write** в этом списке и щелкните по кнопке **Next**. Появившееся окно **File Read or Write Wizard** (Мастер чтения или записи файла) содержит две опции: **Read from a file** (Прочитать из файла) и **Write to a file** (Записать в файл) (рис. 33.2). Если требуется записать массив данных (например, числовую матрицу) в Excel-файл, выберите опцию **Write to a file** и щелкните по кнопке **Next**. В появившемся окне в поле прокрутки **File Format** (Формат файла) (рис. 33.3) выберите Excel, а во втором поле задайте путь к Excel-файлу, воспользовавшись кнопкой **Browse**. После щелчка по кнопке **Готово** на рабочем листе Mathcad-документа появится значок  с именем файла и меткой, на месте которой следует ввести идентификатор передаваемого массива.

Would you like this component to:

○ Read from a file

● Write to a file

Рис. 33.2. Диалоговое окно **File Read or Write Wizard**



File Format: Excel

Enter the name of the file or data source which will be associated with this component.

C:\Мои документы\учебные по Ексел\mathcad

☐ Use comma as decimal symbol

Рис. 33.3. Диалоговое окно **File Read or Write Wizard** после щелчка по кнопке **Next**

При этом надо помнить, что при записи данных в Excel-файл из Mathcad-документа все изменения в этом документе автоматически отражаются в Excel-файле (но не наоборот). В то же время при считывании данных из Excel-файла все изменения в этом файле автоматически отражаются в Mathcad-документе, куда эти данные считываются.

Задачи для самостоятельного решения

Т33.1. Завершить доказательство теоремы 33.1.

Т33.2. Следом квадратной матрицы называется сумма элементов, стоящих на главной диагонали. Доказать, что след матрицы AB равен следу матрицы BA.

Т33.3. Пусть $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$ и $C = AB = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$, где A, B, C — квадратные матрицы порядка n, A_{11}, B_{11}, C_{11} — квадратные матрицы порядка k, A_{22}, B_{22}, C_{22} — квадратные матрицы порядка l ($k + l = n$); A_{12}, B_{12}, C_{12} — матрицы размера $k \times l$; A_{21}, B_{21}, C_{21} — матрицы размера $l \times k$. Доказать, что $C_{11} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}$, $C_{12} = A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}$, $C_{21} = A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}$, $C_{22} = A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}$.

Т33.4. Пусть A и B — квадратные матрицы одного порядка. Всегда ли выполняется равенство $AB = BA$?

Т33.5. Матрицы A и B называются перестановочными, если $AB = BA$. Доказать, что квадратная матрица A перестановочна со всеми квадратными матрицами того же порядка, если и только если $A = rE$, где r — некоторое число.

Т33.6. Пусть $\bar{x} \in \Re^m$, $\bar{y} \in \Re^n$, A — матрица размера $m \times n$. Доказать, что $[\bar{x}A \cdot \bar{y}] = [\bar{x} \cdot \bar{y}A^T]$.

Общая формулировка задач П33.1—П33.21.

Найти матрицы X и X^T, где $X = 3(AB) + 2C$.

П33.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$.

П33.2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$

П33.3. $A = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 5 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

П33.4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

П33.5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$

П33.6. $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

П33.7. $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$

П33.8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

П33.9. $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$

П33.10. $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

П33.11. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$

П33.12. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$

П33.13. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$

П33.14. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

П33.15. $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -3 & 2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

П33.16. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

П33.17. $A = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 4 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

П33.18. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

П33.19. $A = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -2 & 5 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

П33.20. $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

П33.21. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Общая формулировка задач К33.1—К33.11

Предприятие выпускает m видов продукции с использованием n видов сырья. Нормы расхода сырья даны в матрице A, в которой на позиции (i, k) находится число, равное количеству k-го вида сырья (кг), расходуемому на производство единицы продукции i-го вида. Плановый объем выпуска продукции дан в вектор-строке Q, в которой i-й элемент равен количеству единиц продукции i-го вида. Вектор-строка S задает себестоимость единицы сырья каждого вида, а вектор-строка t задает транспортные расходы на единицу сырья каждого вида (k-ые элементы этих векторов соответствуют k-му виду сырья). Пользуясь только умножением матриц, найти: количество сырья каждого вида, необходимого для выполнения планового выпуска продукции; производственные и транспортные затраты на сырье, расходуемое на производство единицы продукции каждого вида; затраты на все сырье, необходимое для выполнения плана. Все полученные результаты записать в Excel-файл.

К33.1. $A = \begin{pmatrix} 31 & 3.5 & 6 & 7.4 & 3.2 & 15 & 3.1 \\ 2.3 & 12 & 4.5 & 6.2 & 5.8 & 11 & 1.9 \\ 4 & 8 & 4.5 & 10.3 & 1.4 & 8 & 2.5 \\ 5.2 & 6.1 & 3.4 & 5.3 & 5.2 & 15 & 1.2 \end{pmatrix}$, $Q = (230, 55, 321, 55)$, $S = (250, 14, 33, 5, 81, 221, 400)$, $t = (18, 5, 7, 3, 6, 4, 7)$.

К33.2. $A = \begin{pmatrix} 4.5 & 8 & 3.4 & 6.3 & 3.2 & 2.5 \\ 5.5 & 7.2 & 2.5 & 7.1 & 15.8 & 21 \\ 7.4 & 8.5 & 6.5 & 5.1 & 6.4 & 6 \\ 3 & 8.1 & 2.5 & 5.3 & 7.2 & 5 \end{pmatrix}$, $Q = (90, 145, 40, 31)$, $S = (15, 232, 143, 15, 52, 21)$, $t = (18, 22, 13, 3, 12, 14)$.

К33.3. $$A=\begin{pmatrix} 2.4 & 3.2 & 3.8 & 3.3 & 16.2 & 2.5 \\ 7.5 & 3.5 & 2.1 & 3.7 & 15.9 & 26.4 \\ 7.4 & 8.6 & 6.7 & 7.5 & 23.4 & 4.8 \\ 5.4 & 6.9 & 7.2 & 12.5 & 4.3 & 1.5 \\ 8.3 & 8.5 & 12.7 & 6.5 & 11.8 & 12.7 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} Q=(100, 105, 240, 221, 43), \\ S=(50, 212, 123, 115, 66, 21), \\ t=(9, 12, 23, 3, 15, 24). \end{array}$$

К33.4. $$A=\begin{pmatrix} 4.3 & 6.2 & 3.4 & 11 & 3.9 & 2.5 & 11 \\ 7.5 & 8.9 & 8.4 & 4.1 & 5.8 & 2.1 & 12 \\ 7.4 & 8.4 & 12 & 1.1 & 5.7 & 8.2 & 3.5 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} Q=(16.9, 12.5, 14.8), \\ S=(15, 22, 3, 5, 8, 21, 40), \\ t=(5, 7, 3, 2, 7, 4, 1). \end{array}$$

К33.5. $$A=\begin{pmatrix} 21 & 5.3 & 3.6 & 8.3 & 3.2 & 2.5 \\ 6.5 & 5.6 & 2.6 & 8.1 & 5.4 & 2.1 \\ 4.3 & 5.8 & 3.6 & 17 & 21 & 8 \\ 4.6 & 6.1 & 12 & 15 & 7.2 & 5 \\ 13 & 7.5 & 1.2 & 3.5 & 8.8 & 1.7 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} Q=(120, 225, 240, 111, 53), \\ S=(120, 202, 103, 105, 41, 21), \\ t=(18, 12, 13, 16, 2, 14). \end{array}$$

К33.6. $$A=\begin{pmatrix} 25 & 8 & 13 & 3 & 10.2 \\ 4.5 & 6.2 & 3.2 & 5.1 & 5.8 \\ 3.7 & 7.8 & 9.6 & 1.1 & 4 \\ 7.4 & 11.1 & 2.7 & 2.5 & 8.2 \\ 6.3 & 7.5 & 1.2 & 7.5 & 1.8 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} Q=(60, 25, 40, 31, 36), \\ S=(50, 202, 130, 105, 81), \\ t=(28, 22, 33, 13, 12). \end{array}$$

К33.7. $$A=\begin{pmatrix} 8.5 & 32 & 23 & 15 & 3.2 \\ 15 & 82 & 21 & 71 & 5.8 \\ 11.7 & 5.8 & 6.3 & 1.1 & 2.4 \\ 4.5 & 7.1 & 4.2 & 11.5 & 13.2 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} Q=(260, 25, 40, 111), \\ S=(250, 78, 63, 55, 111), \\ t=(90, 42, 40, 40, 31). \end{array}$$

К33.8. $$A=\begin{pmatrix} 5 & 24 & 31 & 13 & 3.2 & 2.5 \\ 15 & 8.2 & 2.7 & 7.1 & 5.8 & 2.1 \\ 6.7 & 5.8 & 8.6 & 11 & 12.4 & 8 \\ 4.9 & 7.1 & 5.2 & 8.5 & 9.2 & 15 \\ 3.9 & 3.5 & 2 & 3.5 & 1.8 & 17 \\ 4.6 & 12.3 & 3.9 & 45 & 15.8 & 32.9 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} Q=(60, 25, 40, 11, 8, 11), \\ S=(250, 220, 13, 105, 8, 21), \\ t=(48, 2, 31, 13, 12, 14). \end{array}$$

К33.9. $A = \begin{pmatrix} 7.5 & 16 & 23 & 15.3 & 3.2 & 2.5 & 9.1 \\ 1.5 & 8.2 & 2 & 7.1 & 15.8 & 21 & 0.9 \\ 7.8 & 8 & 6 & 11 & 2.4 & 8 & 0.5 \\ 4.7 & 6.1 & 2.9 & 6.5 & 7.2 & 1.5 & 0.3 \\ 3 & 8.5 & 12 & 3.5 & 1.8 & 17 & 0.4 \\ 5.1 & 24.6 & 12.3 & 23.3 & 6.7 & 4.5 & 14.7 \end{pmatrix}$, $Q = (10, 15, 40, 11, 8, 23)$, $S = (50, 2, 103, 5, 71, 11, 40)$, $t = (18, 21, 31, 13, 21, 14, 11)$.

К33.10. $A = \begin{pmatrix} 25 & 12 & 13 & 51 & 3.2 & 35 \\ 6.5 & 12 & 21 & 8.1 & 5.8 & 2.1 \\ 17 & 18 & 16 & 1 & 24 & 18 \\ 6 & 11 & 21 & 15 & 1.2 & 5 \\ 31 & 7.5 & 1.2 & 6.5 & 5.8 & 1.7 \end{pmatrix}$, $Q = (10, 15, 10, 31, 8)$, $S = (50, 2, 43, 65, 86, 11)$, $t = (18, 31, 15, 21, 12, 32)$.

К33.11. $A = \begin{pmatrix} 2.5 & 8.2 & 3 & 5.3 & 13.2 & 25 & 1.1 \\ 1.5 & 8.2 & 2 & 7.1 & 15.8 & 21 & 0.9 \\ 7 & 8 & 6 & 11 & 2.4 & 8 & 0.5 \\ 4 & 9.1 & 2 & 5 & 3.2 & 15 & 0.3 \\ 3 & 8.5 & 12 & 3.5 & 1.8 & 17 & 0.4 \end{pmatrix}$, $Q = (160, 125, 140, 311, 83)$, $S = (150, 22, 13, 15, 81, 211, 400)$, $t = (8, 2, 3, 3, 2, 4, 1)$.

К33.12. Данные о дневной производительности 6 предприятий, выпускающих пять видов продукции, приведены в матрице

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 14 & 13 & 17 & 16 & 13 \\ 21 & 28 & 23 & 24 & 0 & 0 \\ 82 & 0 & 91 & 85 & 85 & 90 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 38 & 37 & 38 & 39 & 34 & 43 \end{pmatrix},$$

в которой на позиции (i, k) находится дневная производительность (количество изделий в день) k-го предприятия по i-му виду продукции. Нормы расхода сырья трех видов даны в матрице

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \\ 5 & 8 & 6 \\ 12 & 14 & 11 \end{pmatrix},$$

в которой на позиции (i, k) находится число, равное количеству (кг) расходуемого сырья k-го вида на производство единицы продукции i-го вида. Также даны: вектор-строка r, содержащая количество рабочих дней в году по каждому предприятию, и вектор-строка c цен единицы сырья каждого вида, где

$r = (250, 222, 175, 124, 140, 140)$, $\quad c = (0.5, 150, 124)$.

Найти: годовую производительность каждого предприятия по каждому виду продукции; годовую потребность каждого предприятия по каждому виду сырья; годовую сумму кредитования каждого предприятия для закупки сырья, необходимого для выпуска всей продукции.

Ответы, указания, решения

Т33.1. Элементы матриц A, B, C, AB, BC будем обозначать соответственно a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}, d_{ik}, f_{ik}. Докажем вначале равенство $(AB)C = A(BC)$, условившись, что размеры матриц A, B, C равны соответственно $m \times l$, $l \times r$, $r \times n$.

Согласно определению операции умножения матриц, элемент матрицы $(AB)C$ на позиции (i, k) равен $\sum\limits_{j=1}^{r} d_{ij} c_{jk}$, где d_{ij}, в свою очередь, равен $\sum\limits_{t=1}^{l} a_{it} b_{tj}$. Преобразуем эти суммы, изменяя порядок суммирования:

$$\sum_{j=1}^{r} d_{ij} c_{jk} = \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{t=1}^{l} a_{it} b_{tj} \right) \cdot c_{jk} = \sum_{j=1}^{r} \sum_{t=1}^{l} a_{it} b_{tj} \cdot c_{jk} = \sum_{t=1}^{l} a_{it} \left(\sum_{j=1}^{r} b_{tj} c_{jk} \right) = \sum_{t=1}^{l} a_{it} \cdot f_{tk}.$$

Но $\sum\limits_{t=1}^{l} a_{it} \cdot f_{tk}$ — это элемент матрицы $A(BC)$, расположенный на позиции (i, k). Отсюда получаем равенство $(AB)C = A(BC)$.

Докажем равенство $(A + B)C = AC + BC$, условившись, что размеры матриц A, B, C равны соответственно $m \times r$, $m \times r$, $r \times n$. Элемент матрицы $(A + B)C$ на позиции (i, k) равен $\sum\limits_{j=1}^{r} \left(a_{ij} + b_{ij} \right) c_{jk}$. Преобразуем эту сумму:

$$\sum_{j=1}^{r} \left(a_{ij} + b_{ij} \right) c_{jk} = \sum_{j=1}^{r} \left(a_{ij} c_{jk} + b_{ij} c_{jk} \right) = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} c_{jk} + \sum_{j=1}^{r} b_{ij} c_{jk}.$$

Последняя сумма, по определению, равна элементу матрицы $AC + BC$ на позиции (i, k), что и доказывает равенство $(A + B)C = AC + BC$.

T33.2. Обозначим через a_{ij} и b_{ij} элементы матриц A и B соответственно. Элемент главной диагонали матрицы AB, находясь на позиции (k, k), является скалярным произведением k-й строки матрицы A и k-го столбца матрицы B:

$$a_{k1}b_{1k} + a_{k2}b_{2k} + \ldots + a_{kn}b_{nk} = \sum_{r=1}^{n} a_{kr}b_{rk} .$$

Поэтому след матрицы AB равен $\sum\limits_{k=1}^{n}(\sum\limits_{r=1}^{n} a_{kr}b_{rk})$. Переставим знаки суммирования:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} a_{kr}b_{rk} = \sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{kr}b_{rk} = \sum_{r=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{rk}a_{kr}\right).$$

Нетрудно видеть, что выражение в скобках есть элемент матрицы BA на позиции (r,r). Поэтому последнее выражение является следом матрицы BA.

T33.3. Пусть

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}^{(11)}\ a_{12}^{(11)}\ldots\ a_{1k}^{(11)} & a_{11}^{(12)}\ldots\ a_{1l}^{(12)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}^{(11)}\ a_{k2}^{(11)}\ldots\ a_{kk}^{(11)} & a_{k1}^{(12)}\ldots\ a_{kl}^{(12)} \\ & \\ a_{11}^{(21)}\ a_{12}^{(21)}\ldots\ a_{1k}^{(21)} & a_{11}^{(22)}\ldots\ a_{1l}^{(22)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{l1}^{(21)}\ a_{l2}^{(21)}\ldots\ a_{lk}^{(21)} & a_{l1}^{(22)}\ldots\ a_{ll}^{(22)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} b_{11}^{(11)}\ b_{12}^{(11)}\ldots\ b_{1k}^{(11)} & b_{11}^{(12)}\ldots\ b_{1l}^{(12)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{k1}^{(11)}\ b_{k2}^{(11)}\ldots\ b_{kk}^{(11)} & b_{k1}^{(12)}\ldots\ b_{kl}^{(12)} \\ & \\ b_{11}^{(21)}\ b_{12}^{(21)}\ldots\ b_{1k}^{(21)} & b_{11}^{(22)}\ldots\ b_{1l}^{(22)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{l1}^{(21)}\ b_{l2}^{(21)}\ldots\ b_{lk}^{(21)} & b_{l1}^{(22)}\ldots\ b_{ll}^{(22)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим элемент c_{ij} матрицы $C = AB$ ($i \le k,\ j \le k$). Тогда:

$$c_{ij} = (a_{i1}^{(11)} b_{1j}^{(11)} + a_{i2}^{(11)} b_{2j}^{(11)} + \ldots + a_{ik}^{(11)} b_{kj}^{(11)}) + (a_{i1}^{(12)} b_{1j}^{(21)} + \ldots + a_{il}^{(12)} b_{lj}^{(21)}).$$

Но сумма в первой скобке — это элемент произведения $A_{11}B_{11}$, находящийся на позиции (i, j), а сумма во второй скобке — это элемент произведения $A_{12}B_{21}$, находящийся на той же позиции. Следовательно, $C_{11} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}$.

Аналогично доказываются и другие равенства.

Т33.4. Ответ: нет.

Т33.5. Пусть матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

перестановочна с любой другой квадратной матрицей того же порядка n, E_{ik} — матрица порядка n, в которой элемент на позиции (i, k) равен 1, а остальные элементы — нули, $i \ne k$. Поскольку в матрице E_{ik} все столбцы, кроме k-го, состоят из нулей, то в произведении AE_{ik} ненулевыми могут быть только элементы k-го столбца. Кроме того, поскольку k-й столбец матрицы E_{ik} имеет вид $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$-я строка, то k-й столбец матрицы AE_{ik} имеет вид $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ii} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \leftarrow i$-я строка. Аналогичными рассуждениями можно убедиться, что в произведении $E_{ik}A$ все строки, кроме i-й, состоят только из нулевых элементов, а i-я строка имеет вид $\left(a_{k1}, a_{k2}, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ k\text{-й столбец}}}{a_{kk}}, \ldots, a_{kn}\right)$.

Сравнивая теперь соответствующие позиции матриц AE_{ik} и $E_{ik}A$, заключаем: $a_{1i} = \ldots = a_{i-1\,i} = \ldots = a_{n\,i} = 0$, $a_{k1} = \ldots = a_{k\,k-1} = a_{k\,k+1} = \ldots = a_{k\,n} = 0$, $a_{i\,i} = a_{k\,k} = r$, т. е. $A = rE$ ввиду произвольности выбора чисел k и n.

Равенство $B \cdot (rE) = (rE) \cdot B = rB$ доказывается по аналогии с доказательством равенства $DE = ED = D$ теоремы 33.1.

Т33.6. Используем утверждение 33.1 и теорему 33.1:

$$[\bar{x}A \cdot \bar{y}] = (\bar{x}A)\bar{y}^T = \bar{x}(A\bar{y}^T) = [\bar{x} \cdot (A\bar{y}^T)^T] = [\bar{x} \cdot \bar{y}A^T],$$

что и требовалось доказать.

П33.21. Поскольку размеры матриц A и B равны 3×3 и 3×2 соответственно, размер матрицы AB равен 3×2. Пусть $AB = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \end{pmatrix}$. Элемент d_{11} находится на пересечении первой строки и первого столбца, поэтому он равен скалярному произведению первой строки матрицы A на первый столбец матрицы B, т. е. $d_{11} = 1\times1 + (-1)\times1 + 1\times(-1) = -1$; элемент d_{12} равен скалярному произведению первой строки матрицы A на второй столбец матрицы B, т. к. он стоит на пересечении первой строки и второго столбца, т. е. $d_{12} = 1\times2 + (-1)\times1 + 1\times0 = 1$. Аналогично находим:

$$d_{21} = 0\times1 + 1\times1 + (-2)\times(-1) = -1,$$

$$d_{22} = 0\times2 + 1\times1 + 2\times0 = 1,$$

$$d_{31} = (-1)\times1 + 1\times1 + (-2)\times(-1) = 2,$$

$$d_{32} = (-1)\times2 + 1\times1 + (-2)\times0 = -1.$$

Значит, $AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Умножая все элементы матрицы AB на 3, найдем $3AB = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$. Очевидно, $2C = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Складывая элементы матрицы $3AB$ с соответствующими элементами матрицы $2C$, найдем матрицу X:

$$X=\begin{pmatrix}-3 & 3\\ -3 & 3\\ 6 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -4 & -4\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3-2 & 3-2\\ -3-4 & 3-4\\ 6+2 & -3+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 1\\ -7 & -1\\ 8 & -3\end{pmatrix}.$$

Заменяя строки матрицы X на столбцы с теми же номерами, получаем транспонированную матрицу

$$X^T=\begin{pmatrix}-5 & -7 & 8\\ 1 & -1 & -3\end{pmatrix}$$

К33.11. Алгоритм решения задачи с помощью Mathcad следующий. Ввести исходные данные:

$\mathrm{ORIGIN} := 1$

$$A := \begin{pmatrix}2.5 & 8.2 & 3 & 5.3 & 13.2 & 25 & 1.1\\ 1.5 & 8.2 & 2 & 7.1 & 15.8 & 21 & 0.9\\ 7 & 8 & 6 & 11 & 2.4 & 8 & 0.5\\ 4 & 9.1 & 2 & 5 & 3.2 & 15 & 0.3\\ 3 & 8.5 & 12 & 3.5 & 1.8 & 17 & 0.4\end{pmatrix}\qquad \begin{aligned}&Q := (160\ 125\ 140\ 311\ 83)\\ &S := (150\ 22\ 13\ 15\ 81\ 211\ 400)\\ &t := (8\ 2\ 3\ 3\ 2\ 4\ 1)\end{aligned}$$

Вычислить количество сырья каждого вида, необходимого для выполнения плана:

$$Q \cdot A = (3060.5\ 6992.6\ 3188\ 5121\ 5567.6\ 13821\ 485)$$

Вычислить производственные и транспортные затраты на сырье, необходимое для производства единицы продукции (по каждому виду продукции):

$r := \mathrm{stack}(S,\ t)$

$$A \cdot r^T := \begin{pmatrix}7458.1 & 188.8\\ 6608.7 & 172.2\\ 3551.4 & 160.3\\ 4445.4 & 137.9\\ 4738.3 & 159.5\end{pmatrix}$$

Вычислить суммарные затраты на сырье:

$$C := Q \cdot A \cdot r^T \quad C = (4292377.8\ 130300.4) \quad D := C \cdot \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \quad D = (4422678.2)$$

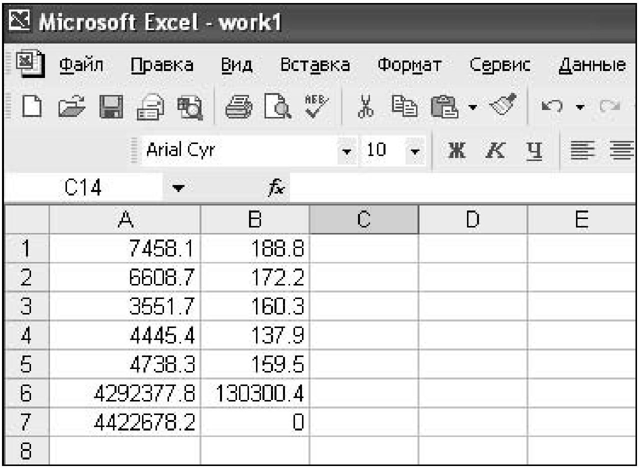
Записать все данные в файл work1.xls:

$D := \mathrm{augment}(D,\ 0)$

C:\work1.xls

$\mathrm{stack}\left(A \cdot r^{T}, C, D\right)$

Искомый результат показан на рис. 33.4.



	A	B	C	D	E
1	7458.1	188.8			
2	6608.7	172.2			
3	3551.7	160.3			
4	4445.4	137.9			
5	4738.3	159.5			
6	4292377.8	130300.4			
7	4422678.2	0			
8					

Рис. 33.4. Результаты вычислений, переданные в Excel-документ

К33.12. Ввести исходные данные: матрицы A, B, вектор-строки r, c. Определить годовую производительность каждого предприятия по каждому виду продукции:

$\mathrm{ORIGIN} := 1 \qquad n := \mathrm{cols}(A) \qquad k := 1;n \qquad C^{\langle k\rangle} := A^{\langle k\rangle} \cdot r_{1,k}$

(в матрице C на позиции (i, k) будет число, равное годовой производительности k-го предприятия по i-му виду продукции).

Определить годовую потребность каждого предприятия по каждому виду сырья: $D := B^{T} \cdot C$ (в матрице D элемент на позиции (i, k) будет равен годовой потребности k-го предприятия в i-м виде сырья).

Определить годовую сумму кредитования каждого предприятия для закупки сырья, необходимого для выпуска всей продукции $d := c \cdot D$ (в вектор-строке d k-й элемент равен сумме, которая необходима для закупки сырья всех видов k-м предприятием).

Глава 34

Метод Гаусса

Рассмотрим систему (33.1). Ее решениями являются такие наборы значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, которые превращают каждое уравнение системы в верное тождество. Система (33.1) однозначно определяет "расширенную" матрицу $D = (A \mid C)$ с $n + 1$ столбцами, в которой матрицы A и C просто расположены рядом. В то же время любой матрице с $n + 1$ столбцами можно сопоставить систему линейных уравнений с n переменными: для этого достаточно элемент на позиции (i, k) считать при $k \leq n$ коэффициентом при переменной x_k, а при $k = n + 1$ — свободным членом i-го уравнения. В этих случаях матрицу и систему будем называть соответствующими. Строку расширенной матрицы будем называть противоречивой, если последний ее элемент отличен от нуля, а остальные элементы — нулевые. Очевидно следующее утверждение.

Утверждение 34.1. Если расширенная матрица содержит хотя бы одну противоречивую строку, то соответствующая ей система линейных уравнений не имеет решения.

Аналогично элементарному преобразованию системы векторов *(см. гл. 32)* определяется элементарное преобразование строк матрицы, состоящее либо в умножении произвольной i-й строки на любое ненулевое число, либо в прибавлении к ней любой другой строки (при этом все остальные строки матрицы, отличные от i-й строки, остаются неизменными).

Утверждение 34.2. Элементарные преобразования строк расширенной матрицы не изменяют множества решений соответствующей системы уравнений.

Доказательство утверждения дано в задаче Т34.1.

Если удалить из расширенной матрицы D последний столбец, а затем все нулевые строки (если таковые имеются), то получим так называемую, приведенную матрицу D'.

Пусть размер приведенной матрицы D' $k \times n$, где $k \le n$. Если в матрице D' можно указать k таких столбцов, которые содержат ровно по одному ненулевому элементу, причем любые два из этих ненулевых элементов находятся в разных строках, то переменные, соответствующие этим k столбцам, называются базисными. Будем говорить, что они составляют базис переменных, а сама система с матрицей D' приведена к виду, содержащему базис переменных. При сделанном выборе базисных переменных все остальные переменные называются свободными.

Пример. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 = 7 \\ 3x_1 + 2x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_5 = 9 \end{cases}.$$

Составим расширенную матрицу этой системы:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right).$$

Нетрудно видеть, что данная система имеет два базиса переменных: $\{x_2, x_3, x_5\}$, $\{x_4, x_3, x_5\}$. Решим эту систему, например, относительно первого базиса: $x_2 = 7 - 2x_1 - x_4$, $2x_3 = 8 - 3x_1$, $x_5 = 9 - 4x_1$; здесь переменные x_1, x_4 — свободные и могут принимать произвольные значения, по которым затем определяются значения базисных переменных.

Этот пример помогает заметить следующее очевидное утверждение: система, имеющая базис переменных, разрешима относительно этого базиса, причем система будет иметь бесконечно много решений при наличии свободных переменных, а при их отсутствии ее решение единственно (т. к. значения базисных переменных определяются однозначно).

Итак, если система приведена к виду, содержащему базисные и свободные переменные, то, придавая различные значения свободным переменным, можно однозначно получать значения базисных переменных. В том случае, когда решение системы получено при нулевых значениях свободных переменных, оно называется базисным. Метод Гаусса, описанный ниже, позволяет с помощью элементарных преобразований либо привести систему к виду, содержащему базис переменных, либо установить отсутствие решения.

Шагом алгоритма метода Гаусса будем считать переход от системы линейных уравнений к такой равносильной системе, число столбцов с единственным ненулевым элементом у которой возросло на 1. Для удобства вместо системы уравнений будем преобразовывать соответствующую ей матрицу.

Шаг алгоритма Гаусса.

- Пусть после k предыдущих шагов, где $k \times 0$, получена матрица M_k (если $k = 0$, то M_0 — расширенная матрица, соответствующая исходной системе линейных уравнений). Если матрица M_k содержит противоречивую строку, то исходная система неразрешима, и алгоритм прекращает работу. В противном случае удаляем все нулевые строки матрицы M_k, если таковые имеются. Обозначим полученную матрицу через N_k.
- Выберем строку матрицы N_k, которая еще не выбиралась на предыдущих шагах, и назовем ее разрешающей (если таких строк нет, то система приведена к виду, содержащему базис переменных, и алгоритм прекращает работу). Некоторый ненулевой элемент этой строки, не принадлежащий последнему столбцу матрицы N_k, назовем разрешающим и с помощью элементарных преобразований все другие элементы столбца, содержащего разрешающий элемент, превращаем в нули. (Это можно сделать последовательным прибавлением к строкам матрицы N_k разрешающей строки, умноженной на подходящее число). Таким образом, будет построена матрица M_{k+1}. Переходим к следующему шагу.

Примеры. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \end{cases}.$$

Перейдем к соответствующей матрице:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{array}\right].$$

Применим алгоритм метода Гаусса.

(В дальнейшем считается, что подчеркнутые элементы в матрицах являются разрешающими, а стрелки с числами указывают, на какое число умножается разрешающая строка и к какой строке затем прибавляется.)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \underline{\underline{1}} & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \leftarrow -1 \\ \leftarrow -1 \end{matrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -4 & -4 \\ 0 & \underline{\underline{1}} & -4 & -4 \end{array}\right)\begin{matrix} \leftarrow -2 \\ \leftarrow 3 \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & -16 & -16 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & \underline{\underline{1}} & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \end{array}\right)\begin{matrix} \leftarrow -11 \\ \\ \leftarrow 4 \end{matrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -1 \\ x_3 = 1 \\ x_2 = 0 \end{matrix}.$$

В этом примере свободных переменных не оказалось, поэтому система имеет единственное решение.

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 14 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 7 \end{cases}.$$

Применим алгоритм метода Гаусса.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \underline{\underline{1}} & 3 & 0 & 14 \\ 1 & 1 & -1 & 7 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \leftarrow -1 \end{matrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 14 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 14 - 3x_2 \\ -x_3 = -7 + 2x_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 14 - 3x_2 \\ x_3 = 7 - 2x_2 \end{cases}.$$

В этом примере x_2 — свободная переменная, а x_1 и x_3 — базисные переменные.

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 = -2 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}.$$

Применим алгоритм метода Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & \underline{\underline{-4}} & -2 \\ -2 & 2 & 2 & 8 & 4 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \leftarrow 1 \\ \\ \leftarrow 2 \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & \underline{\underline{1}} & 4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -4 & -2 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \leftarrow 1 \\ \leftarrow -1 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Нижняя строка противоречивая, поэтому система не имеет решений.

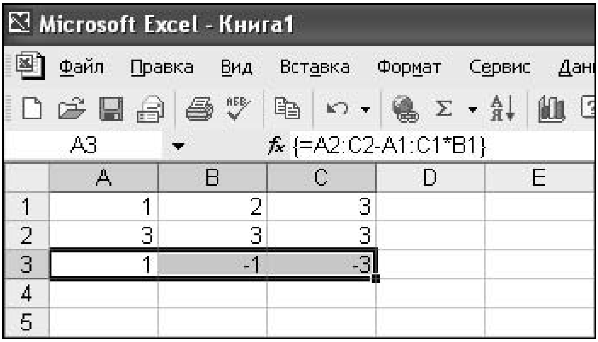
Компьютерный раздел

Встроенная функция `submatrix(M, i, m, k, n)` выделяет в матрице `M` подматрицу, состоящую из элементов, расположенных на пересечении строк с номерами `i`, `i + 1`, …, `m − 1`, `m` и столбцов с номерами `k`, `k + 1`,…, `n − 1`, `n`. Например, если $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, то `submatrix(M, 0, 1, 1, 2)` будет равна $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ (при условии, что `ORIGIN` = 0).

Теперь опишем ряд возможностей Excel, используемых при решении компьютерных задач этой главы.

Зачастую приходится проводить однотипные вычислительные манипуляции над содержимым диапазона ячеек $\Im$ и результат этих манипуляций затем помещать в диапазон ячеек $\Re$ (в подобных ситуациях еще говорят "ввести формулу в диапазон ячеек $\Re$"). В этом случае следует выделить диапазон ячеек $\Re$, а в строку формул ввести соответствующую формулу, завершив ее ввод нажатием комбинации клавиш <Ctrl>+<Shift>+<Enter>. Пусть, к примеру, требуется из вектора, содержащегося в диапазоне $A2:C2$, вычесть вектор, содержащийся в диапазоне $A1:C1$, умноженный на значение ячейки $B1$, и результат поместить в диапазон $A3:C3$. Выделите этот диапазон, в строке формул введите `= A2 : C2 - A1 : C1 * B1`.

После нажатия комбинации клавиш <Ctrl>+<Shift>+<Enter> получите искомый результат (рис. 34.1).

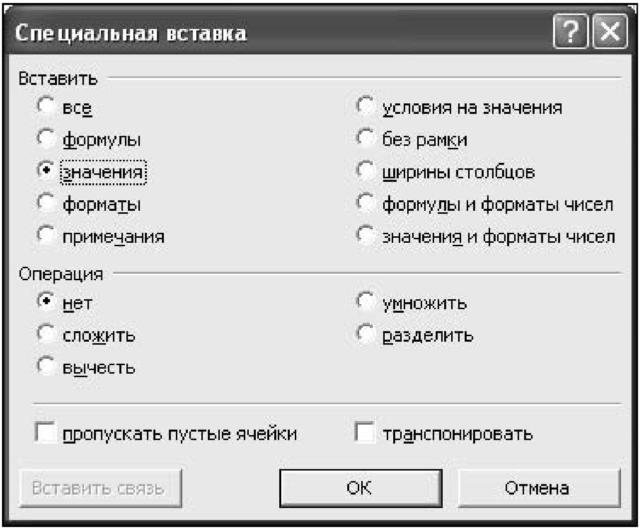


A3 {=A2:C2-A1:C1*B1}

	A	B	C	D	E
1	1	2	3		
2	3	3	3		
3	1	-1	-3		
4					
5					

Рис. 34.1. Результат вычисления разности двух векторов

Предположим, что некоторая формула была помещена в диапазон $\mathfrak{R}$, но требуется скопировать в диапазон $\aleph$ значения диапазона $\mathfrak{R}$. В этом случае следует воспользоваться командой **Специальная вставка** (Special Paste) пункта меню **Правка** (Edit). Эта команда вызывает одноименное диалоговое окно (рис. 34.2), в группе **Вставить** (Paste) которого следует выбрать опцию **значения** (Value).



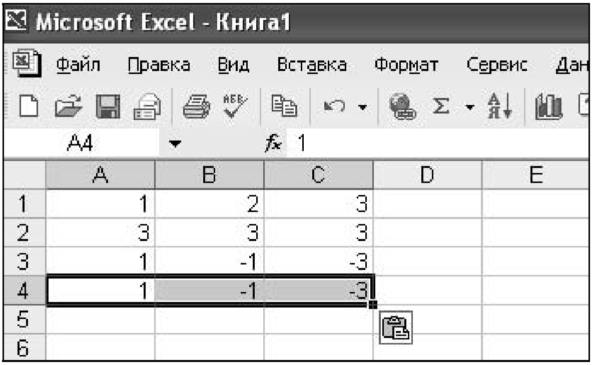
Вставить
○ все
○ формулы
● значения
○ форматы
○ примечания
○ условия на значения
○ без рамки
○ ширины столбцов
○ формулы и форматы чисел
○ значения и форматы чисел

Операция
● нет
○ сложить
○ вычесть
○ умножить
○ разделить

☐ пропускать пустые ячейки
☐ транспонировать

Рис. 34.2. Диалоговое окно **Специальная вставка**

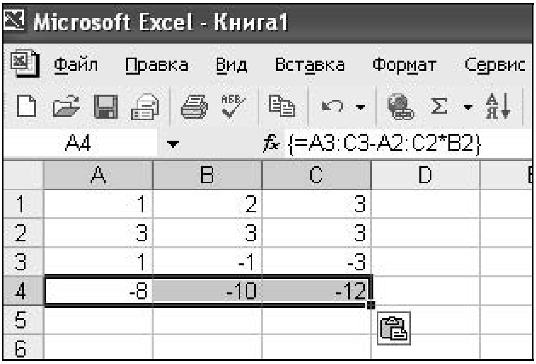
Пусть, например, требуется скопировать значения диапазона $A3 : C3$ из предудущего примера в диапазон $A4 : C4$. Нажатием комбинации клавиш <Ctrl>+<C> скопируйте содержимое диапазона $A3 : C3$ в буфер обмена данными. Затем выделите диапазон $A4 : C4$ и воспользуйтесь диалоговым окном **Специальная вставка** (Special Paste), выбрав опцию **значения** (Value). После щелчка по кнопке **OK** получите искомый результат, показанный на рис. 34.3. При выборе опции **формулы** (Formula) результат будет таким, как показано на рис. 34.4.



A4 fx 1

	A	B	C	D	E
1	1	2	3		
2	3	3	3		
3	1	-1	-3		
4	1	-1	-3		
5					
6					

Рис. 34.3. Результат применения опции **значения** диалогового окна **Специальная вставка**



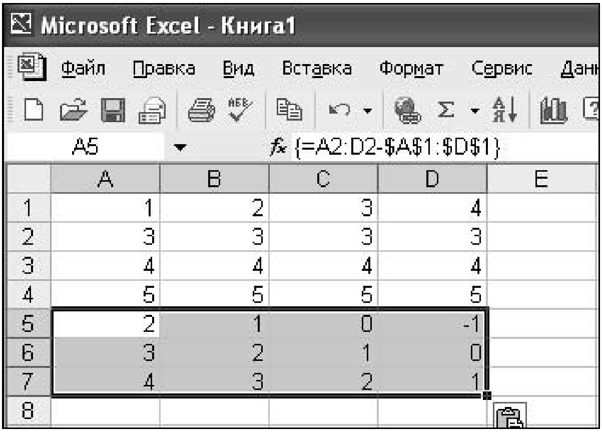
A4 fx {=A3:C3-A2:C2*B2}

	A	B	C	D
1	1	2	3	
2	3	3	3	
3	1	-1	-3	
4	-8	-10	-12	
5				
6				

Рис. 34.4. Результат применения опции **формулы** диалогового окна **Специальная вставка**

Теперь опишем пример, в котором демонстрируется использование абсолютной и относительной адресации в Excel. Пусть диапазоны $A1 : D1$, $A2 : D2$, $A3 : D3$, $A4 : D4$ содержат соответственно векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$.

Требуется вычислить векторы $\bar{b}-\bar{a}$, $\bar{c}-\bar{a}$, $\bar{d}-\bar{a}$, поместив их в диапазон $A5:D7$. Введите формулу `= A2 : D2 – $A$1 : $D$1` в диапазон $A5:D5$. Затем скопируйте этот диапазон в диапазоны $A6:D6$ и $A7:D7$, выбрав опцию **формулы** (Formula) в диалоговом окне **Специальная вставка** (Special Paste). Искомый результат показан на рис. 34.5. В введенной формуле `= A2 : D2 – $A$1 : $D$1` диапазон $A1:D1$ имеет абсолютную адресацию, поскольку вычитается один и тот же вектор $\bar{a}$, расположенный в этом диапазоне. В то же время диапазон $A2:D2$ имеет относительную адресацию, благодаря которой при копировании формулы в $A6:D6$ она автоматически меняется на формулу `= A3 : D3 – – $A$1 : $D$1`, а при копировании в диапазон $A7:D7$ — на формулу `= A4 : D4 – $A$1 : $D$1`.



A5 {=A2:D2-$A$1:$D$1}

	A	B	C	D	E
1	1	2	3	4	
2	3	3	3	3	
3	4	4	4	4	
4	5	5	5	5	
5	2	1	0	-1	
6	3	2	1	0	
7	4	3	2	1	
8					

Рис. 34.5. Возможности применения абсолютной и относительной адресации в Excel-документе

Задачи для самостоятельного решения

Т34.1. Доказать утверждение 34.2.

Т34.2. Пусть система (33.1) имеет решения $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$. Составить систему линейных уравнений с теми же коэффициентами при переменных, что и в системе (33.1), имеющую решение $(\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \ldots, \alpha_n+\beta_n)$.

Т34.3. Пусть система (33.1) имеет решение ($\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$). Составить систему линейных уравнений с теми же коэффициентами при переменных, что и в системе (33.1), имеющую решение ($k\alpha_1,\ k\alpha_2, \ldots, k\alpha_n$).

Общая формулировка задач П34.1—П34.21

Решить системы линейных уравнений методом Гаусса.

П34.1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3 \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$.

П34.2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 4 \\ x_1 - 2x_3 = -2 \end{cases}$.

П34.3. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 1 \\ 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$.

П34.4 $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 = 6 \end{cases}$.

П34.5. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 + 7x_3 = 2 \end{cases}$.

П34.6. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 7 \\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$.

П34.7. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$.

П34.8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 = 10 \\ 5x_1 - 4x_2 + 13x_3 = 14 \end{cases}$.

П34.9. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ 4x_1 - 11x_2 + 10x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 7 \end{cases}$.

П34.10. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = -2 \\ 7x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$.

П34.11. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$.

П34.12. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$.

П34.13. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 8 \\ x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 7 \end{cases}$.

П34.14. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -4 \end{cases}$.

П34.15. $$\begin{cases} 3x_1 - 8x_2 + 7x_3 - x_4 = 3 \\ 5x_1 - 6x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}.$$

П34.16. $$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases}.$$

П34.17. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -2 \end{cases}.$$

П34.18. $$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -1 \end{cases}.$$

П34.19. $$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 = -1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 7 \\ 4x_1 + 6x_2 + x_3 = 10 \end{cases}.$$

П34.20. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -2 \\ 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases}.$$

П34.21. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 11x_3 + 4x_4 = -2 \\ 2x_1 - 8x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 4 \\ 5x_1 - 6x_2 + 18x_3 + x_4 = -7 \end{cases}.$$

Общая формулировка задач К34.1—К34.11

Найти базисное решение системы линейных уравнений $AX = C$.

К34.1. $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -1 & -2 \\ 1 & -4 & 3 & -2 \\ 1 & -8 & 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

К34.2. $$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -3 & 8 & -2 \\ 2 & -2 & 5 & -12 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

К34.3. $$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

К34.4. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix}$.

К34.5. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 8 & -11 & 7 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -12 \end{pmatrix}$.

К34.6. $A=\begin{pmatrix} 7 & -5 & -2 & -4 \\ -3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

К34.7. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

К34.8. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

К34.9. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 9 & 1 & 4 & -5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

К34.10. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & -2 & -5 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

К34.11. $A=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 3 & 7 \\ 3 & -6 & -1 & -5 \\ 7 & -3 & 7 & 17 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ответы, указания, решения

Т34.1. Пусть исходная система записана в виде (33.4), $\bar{b}$ — вектор размерности n. Предположим, что новая система получена из (33.4) умножением i-го уравнения на ненулевое число r. Тогда $[\bar{a}_i \cdot \bar{b}] = c_i \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow r[\bar{a}_i \cdot \bar{b}] = rc_i \Leftrightarrow [r\bar{a}_i \cdot \bar{b}] = rc_i$ (см. теорему 33.1).

Предположим теперь, что новая система получена из (33.4) прибавлением к i-му уравнению k-го уравнения. Если $[\bar{a}_i \cdot \bar{b}] = c_i$, $[\bar{a}_k \cdot \bar{b}] = c_k$, то $[\bar{a}_i \cdot \bar{b}] + [\bar{a}_k \cdot \bar{b}] = [(\bar{a}_i + \bar{a}_k) \cdot \bar{b}] = c_i + c_k$ (теорема 33.1). Обратно, если $[(\bar{a}_i + \bar{a}_k) \cdot \bar{b}] = c_i + c_k$, $[\bar{a}_k \cdot \bar{b}] = c_k$,
то $[(\bar{a}_i + \bar{a}_k) \cdot \bar{b}] - [\bar{a}_k \cdot \bar{b}] = [\bar{a}_i \cdot \bar{b}] = c_i + c_k - c_k = c_i$. Утверждение доказано.

Т34.2. Ответ: искомая система имеет вид $AX = 2C$.

Т34.3. Ответ: искомая система имеет вид $AX = kC$.

П34.21. Составим расширенную матрицу данной системы уравнений и элементарными преобразованиями приведем ее к виду, содержащему базис переменных:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 11 & 4 & -2 \\ 2 & -8 & 4 & 9 & 4 \\ 5 & -6 & 18 & 1 & -7 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -12 & -4 & 7 & 6 \\ 0 & -16 & -2 & -4 & -2 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7/2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & -4 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -6 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 31/2 & 10 \\ 0 & -4 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Вторая матрица получена из первой путем поочередного умножения первой строки на (–3), (–2), (–5) и прибавления соответственно ко второй, третьей и четвертой строкам первой матрицы. Третья же матрица получена из предыдущей путем поочередного умножения второй строки на 1/2, –3, –4 и прибавления соответственно к первой, третьей и четвертой строкам. Четвертая матрица получена из предыдущей путем поочередного умножения третьей строки на 7/2, –1, 2 и прибавления соответственно к первой, второй и четвертой строкам. Последней матрице соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{31}{2}x_4 \quad = 10 \\ -4x_2 - 3x_4 = -2 \\ -x_3 + 4x_4 \quad = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 10 - \dfrac{31}{2}x_4 \\ -4x_2 = -2 + 3x_4 \\ -x_3 = 3 - 4x_4 \end{cases},$$

в которой имеется базис переменных $\{x_1, x_2, x_3\}$. Переменная x_4 является свободной. Поэтому исходная система имеет следующие решения:

$$x_1 = 10 - \frac{31}{2}x_4, \quad x_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x_4, \quad x_3 = -3 + 4x_4,$$

x_4 — любое действительное число.

К34.11. Алгоритм решения задачи с помощью Mathcad следующий. Ввести исходные данные:

```
ORIGIN := 1
```

$$A := \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 3 & 7 \\ 3 & -6 & -1 & -5 \\ 7 & -3 & 7 & 17 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Командой **Компонент** (Component) пункта меню **Вставка** (Insert) вызвать диалоговое окно **Excel Setup Wizard** (Мастер установки Excel). В поле **Inputs** (Входные параметры) ввести число 2, в полях **Input 0**, **Input 1** ввести соответственно адреса *A*1 : *D*4, *E*1 : *E*4 ячеек, в которые будут помещены элементы матриц *A* и *C*. В поле **Outputs** (Выходные параметры) ввести число 1, а в поле **Output 0** — адреса *F*31 : *J*34 ячеек, в которых будет располагаться расширенная матрица *B*, полученная алгоритмом метода Гаусса (с невычеркнутыми нулевыми строками, если таковые имеются). После щелчка по кнопке **Готово** на месте меток появившейся таблицы ввести идентификаторы *A*, *C*, *B*.

Двойным щелчком на области таблицы вызвать рабочий лист Excel. В диапазон *A*11 : *E*11 скопировать содержимое диапазона *A*1 : *E*1.

В диапазон $A12:E12$ ввести формулу `= A2 : E2 – $A$1 : $E$1 *(A2/$A$1)`. Скопировать содержимое диапазона $A12:E12$ в диапазоны $A13:E13$, $A14:E14$, выбрав опцию **формулы** (Formula) в диалоговом окне **Специальная вставка** (Special Paste). В диапазон $A22:E22$ скопировать содержимое диапазона $A12:E12$, выбрав опцию **значения** (Value) в диалоговом окне **Специальная вставка** (Special Paste). В диапазон $A23:E23$ ввести формулу `= A13 : E13 – $A$12 : $E$12 *(B13/$B$12)`. Скопировать содержимое диапазона $A23:E23$ в диапазоны $A24:E24$, $A21:E21$, выбрав опцию **формулы** (Formula) в диалоговом окне **Специальная вставка** (Special Paste).

В диапазон $A33:E33$ скопировать содержимое диапазона $A23:E23$, выбрав опцию **значения** (Value) в диалоговом окне **Специальная вставка** (Special Paste). В диапазон $A34:E34$ ввести формулу `=A24 : E24 – – $A$23 : $E$23 *(C24/$C$23)`. Скопировать содержимое диапазона $A34:E34$ в диапазоны $A32:E32$, $A31:E31$, выбрав опцию **формулы** (Formula) в диалоговом окне **Специальная вставка** (Special Paste).

Скопировать содержимое диапазона $A31:E34$ в диапазон $F31:J34$, выбрав опцию **значения** (Value) в диалоговом окне **Специальная вставка** (Special Paste). После щелчка вне области рабочего листа Excel получим таблицу, показанную на рис. 34.6.

С помощью функции `submatrix` сформировать матрицы A и C, полученные в результате выполнения алгоритма метода Гаусса. Очевиден базис переменных $\{x_1, x_2, x_3\}$. Поэтому имеется одна свободная переменная x_4. Завершить решение системы:

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.16 & -0.56 \\ 0 & 0 & 12.5 & 32.5 & -7.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A := \mathrm{submatrix}(B, 1, 3, 1, 4)$

$C := \mathrm{submatrix}(B, 1, 3, 5, 5)$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.16 \\ 0 & 0 & 12.5 & 32.5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.56 \\ -7.5 \end{pmatrix}$$

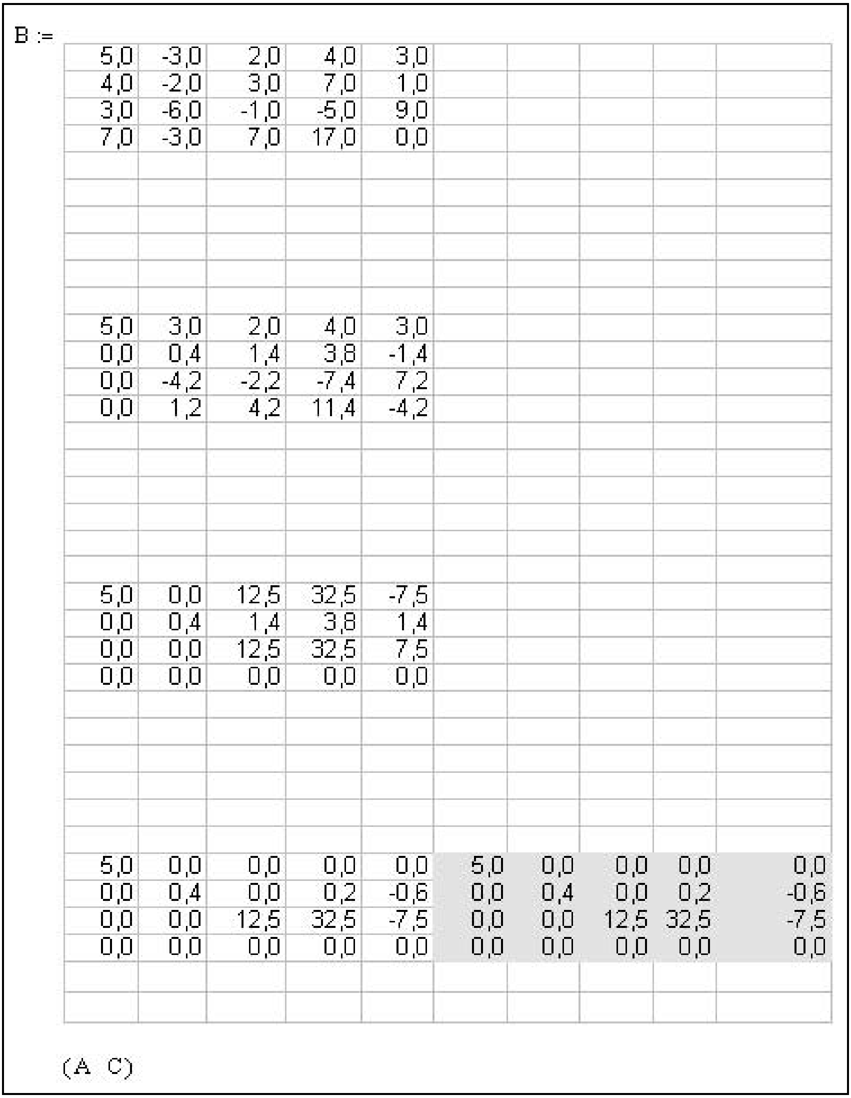
$i := 1..4 \qquad x_i := 0$

$\mathrm{Given} \qquad A \cdot x = C \qquad x_4 = 0$

$$\mathrm{Find}(x)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{7}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

Итак, имеем искомое базисное решение:

$$x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{7}{5},\ x_3 = -\frac{3}{5},\ x_4 = 0.$$



B :=

5,0	-3,0	2,0	4,0	3,0					
4,0	-2,0	3,0	7,0	1,0					
3,0	-6,0	-1,0	-5,0	9,0					
7,0	-3,0	7,0	17,0	0,0					
5,0	3,0	2,0	4,0	3,0					
0,0	0,4	1,4	3,8	-1,4					
0,0	-4,2	-2,2	-7,4	7,2					
0,0	1,2	4,2	11,4	-4,2					
5,0	0,0	12,5	32,5	-7,5					
0,0	0,4	1,4	3,8	1,4					
0,0	0,0	12,5	32,5	7,5					
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0					
5,0	0,0	0,0	0,0	0,0	5,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,0	0,4	0,0	0,2	-0,6	0,0	0,4	0,0	0,2	-0,6
0,0	0,0	12,5	32,5	-7,5	0,0	0,0	12,5	32,5	-7,5
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

(A C)

Рис. 34.6. Решение задачи К34.11
с использованием связи Mathcad и Excel

Глава 35

Следствия метода Гаусса

Система (33.1) называется однородной, если все ее свободные члены равны нулю: $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$. Очевидно, любая однородная система имеет нулевое решение. Однако для приложений важен вопрос существования ненулевого решения. Так, если дана произвольная конечная система вектор-столбцов $\overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_n$ одинаковой размерности, то ее линейная зависимость равносильна существованию ненулевого решения соответствующей однородной системы **(33.3)**, в которой $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$. Поэтому линейную зависимость системы векторов можно исследовать с помощью метода Гаусса, решив соответствующую однородную систему линейных уравнений.

> **Пример.** Исследуем линейную зависимость системы векторов $\overline{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overline{b}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overline{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$. Составим соответствующую однородную систему линейных уравнений: $x_1\overline{b}_1 + x_2\overline{b}_2 + x_3\overline{b}_3 = \overline{0}$, расширенная матрица которой равна $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -6 & 0 \end{array}\right)$. Решив эту систему методом Гаусса, получим: $x_1 = 3x_3$, $x_2 = -2x_3$. Это, в частности, означает наличие ненулевого решения и, следовательно, линейную зависимость исходной системы векторов.

Следствие 35.1. Однородная система, в которой число уравнений меньше числа переменных, имеет бесконечно много решений.

Доказательство. Применим к данной системе алгоритм метода Гаусса. Так как последний столбец исходной расширенной матрицы состоит только из нулевых элементов, то в процессе элементарных преобразований он таковым и останется. Это означает невозможность появления при решении противоречивых строк. Поскольку число столбцов и, следовательно, число переменных останется неизменным, а число строк может только уменьшиться за счет вычеркивания нулевых строк, то в конечной системе число переменных будет по-прежнему больше числа уравнений. Но базисных переменных в конечной системе столько же, сколько и уравнений. Поэтому последняя система будет содержать свободные переменные. Отсюда следует, что система имеет бесконечно много решений, в том числе и ненулевых. Следствие доказано.

Следствие 35.2. Система векторов из $\Re^n$, содержащая более n векторов, линейно зависима.

Доказательство следствия дано в задаче Т35.1.

Таким образом, ранг любой системы векторов из $\Re^n$ (максимально возможное число векторов в линейно независимой подсистеме — см. задачу Т32.6) не превосходит n.

Следствие 35.3. Если $m < n$, то для любой системы из m векторов размерности n $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m\}$ существует ненулевой вектор $\bar{z}$, ортогональный каждому вектору этой системы.

Доказательство. От данной системы векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m$ перейдем к однородной системе уравнений (33.4), в которой $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$ и число уравнений m меньше числа переменных n. В силу следствия 35.1 эта система имеет ненулевое решение $\bar{z}$, что и завершает доказательство.

Будем обозначать через 0 матрицу-столбец $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Следствие 35.4. Квадратную матрицу можно привести к единичной матрице того же порядка элементарными преобразованиями строк, если и только если строки этой матрицы линейно независимы.

Доказательство. Вначале предположим, что в квадратной матрице A порядка n строки линейно независимы. Рассмотрим однородную систему уравнений $AX = 0$ и применим к ней алгоритм метода Гаусса. По аналогии с доказательством следствия 35.1 заключаем, что в процессе алгоритма не могут появляться противоречивые строки. Более того, не могут также появляться и нулевые строки: по утверждению 32.4 элементарные преобразования сохраняют линейную независимость строк матрицы A, а наличие нулевой строки противоречит этому в силу утверждения 32.2. Итак, алгоритм метода Гаусса должен привести исходную расширенную матрицу $(A \mid 0)$ к матрице размера $n\times(n + 1)$, в которой последний столбец нулевой, а первые n столбцов будут соответствовать базису из n переменных. Делением строк этой матрицы на подходящие числа можно добиться, чтобы все ее ненулевые элементы стали единицами. Затем перестановкой строк, которая также осуществляется с помощью элементарных преобразований (см. задачу Т32.8), последняя матрица приводится к единичной, если при этом удалить последний нулевой столбец.

Если строки квадратной матрицы A линейно зависимы, по утверждению 32.4 эта зависимость будет сохраняться при элементарных преобразованиях. Поэтому единичная матрица не может получиться из матрицы A с помощью элементарных преобразований, ибо строки единичной матрицы образуют ступенчатую систему векторов, а значит, линейно независимы (см. задачу Т32.5). Следствие доказано.

Следствие 35.5. Строки квадратной матрицы A линейно независимы, если и только если линейно независимы ее столбцы.

Доказательство. Обозначим столбцы матрицы A через $\overline{b_1}, \overline{b_2}, \ldots, \overline{b_n}$. Как было уже сказано в начале этой главы, линейная независимость системы вектор-столбцов $\left\{\overline{b_1}, \overline{b_2}, \ldots, \overline{b_n}\right\}$ равносильна тому, что однородная система $AX = 0$ имеет только нулевое решение.

Строки матрицы A линейно независимы, если и только если A можно привести элементарными преобразованиями к единичной матрице E (следствие 35.4). Но однородная система $EX = 0$ имеет только нулевое решение. Отсюда, в силу утверждения 34.2, наличие только нулевого решения системы $AX = 0$ равносильно линейной независимости строк матрицы A. Следствие доказано.

Квадратная матрица называется невырожденной (вырожденной), если ее строки или столбцы линейно независимы (зависимы).

Следствие 35.6. Пусть A — квадратная матрица. Матрица A невырожденная, если и только если система уравнений (33.2) имеет единственное решение.

Доказательство следствия дано в задаче Т35.2.

Следствие 35.7. Доказать, что в произвольной матрице максимальное число линейно независимых строк равно максимальному числу линейно независимых столбцов (это число называется рангом матрицы).

Доказательство следствия дано в задаче Т35.9.

Задачи для самостоятельного решения

Т35.1. Доказать следствие 35.2.

Т35.2. Доказать следствие 35.6.

Т35.3. Доказать, что квадратная матрица A вырождена, если и только если матрица A^T вырождена.

Т35.4. Доказать, что ранг системы, состоящей из всех векторов пространства $\Re^n$, равен n.

Т35.5. Доказать, что если к матрице A с линейно независимыми строками (столбцами) добавить новый столбец (строку), то строки (столбцы) полученной матрицы B остаются линейно независимыми.

Т35.6. Пусть система $V = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m\}$ векторов из $\Re^n$ линейно независима и $m < n$. Доказать, что если ненулевой вектор $\bar{z} \in \Re^n$ ортогонален каждому вектору из V, то система $V \cup \{\bar{z}\}$ также линейно независима.

Т35.7. Система векторов из $\Re^n$ называется базисом пространства $\Re^n$, если она линейно независима и каждый вектор из $\Re^n$ есть линейная комбинация векторов этой системы. Доказать, что линейно независимая система векторов из $\Re^n$ является базисом пространства $\Re^n$, если и только если она состоит из n векторов.

Т35.8. Доказать, что любую линейно независимую систему векторов из $\Re^n$, не являющуюся базисом пространства $\Re^n$, можно дополнить новыми векторами до базиса этого пространства.

Т35.9. Доказать следствие 35.7.

Общая формулировка задач П35.1—П35.21

В задачах П35.1(а)—П35.21(а) доказать, что векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образуют базис пространства $\Re^3$ и представить вектор $\bar{d}$ в виде линейной комбинации векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$; в задачах П35.1(б)—П35.21(б) дополнить линейно независимую систему векторов до базиса соответствующего пространства.

П35.1. а) $\overline{a}=(3,1,3)\,\overline{b}=(2,1,0)\,\overline{c}=(1,0,1)\,\overline{d}=(4,2,1)$;

б) $\overline{a}=(2,1,3)$.

П35.2. а) $\overline{a}=(10,3,1)$ $\overline{b}=(1,4,2)$ $\overline{c}=(3,9,2)$ $\overline{d}=(19,30,7)$;

б) $\overline{a}=(-1,3,0)$.

П35.3. а) $\overline{a}=(2,-1,11)$ $\overline{b}=(1,1,0)$ $\overline{c}=(0,1,2)$ $\overline{d}=(2,5,3)$;

б) $\overline{a}=(2,-1,-4)$.

П35.4. а) $\overline{a}=(8,2,3)$ $\overline{b}=(4,6,10)$ $\overline{c}=(3,-2,1)$ $\overline{d}=(7,4,11)$;

б) $\overline{a}=(3,4,2)$.

П35.5. а) $\overline{a}=(1,-2,3)$ $\overline{b}=(4,7,2)$ $\overline{c}=(6,4,2)$ $\overline{d}=(14,18,6)$;

б) $\overline{a}=(-2,5,3)$.

П35.6. а) $\overline{a}=(3,1,8)$ $\overline{b}=(0,1,3)$ $\overline{c}=(1,2,-1)$ $\overline{d}=(2,0,-1)$;

б) $\overline{a}=(2,1,3)$ $\overline{b}=(-1,3,1)$.

П35.7. а) $\overline{a}=(2,4,1)$ $\overline{b}=(1,3,6)$ $\overline{c}=(5,3,1)$ $\overline{d}=(24,20,6)$;

б) $\overline{a}=(1,2,3)$ $\overline{b}=(3,-1,1)$.

П35.8. а) $\overline{a}=(-1,7,-4)$ $\overline{b}=(-1,2,1)$ $\overline{c}=(0,-3,2)$ $\overline{d}=(2,1,-1)$;

б) $\overline{a}=(0,3,4)$ $\overline{b}=(1,4,2)$.

П35.9. а) $\overline{a}=(4,7,8)$ $\overline{b}=(9,1,3)$ $\overline{c}=(2,-4,1)$ $\overline{d}=(1,-13,-13)$;

б) $\overline{a}=(-1,3,6)$ $\overline{b}=(2,6,3)$.

П35.10. а) $\overline{a}=(2,7,5)$ $\overline{b}=(1,0,1)$ $\overline{c}=(1,-2,0)$ $\overline{d}=(0,3,1)$;

б) $\overline{a}=(3,4,2)$ $\overline{b}=(3,4,1)$.

П35.11. а) $\overline{a}=(3,7,2)$ $\overline{b}=(2,3,4)$ $\overline{c}=(6,2,2)$ $\overline{d}=(3,-1,2)$;

б) $\overline{a}=(1,2,3,4)$ $\overline{b}=(2,0,-1,3)$.

П35.12. а) $\overline{a}=(0,1,1)$ $\overline{b}=(2,3,4)$ $\overline{c}=(0,0,1)$ $\overline{d}=(-1,-2,-4)$;

б) $\overline{a}=(2,-1,0,3)$ $\overline{b}=(3,2,-1,1)$.

П35.13. а) $\overline{a}=(-2,0,-2)$ $\overline{b}=(0,-1,1)$ $\overline{c}=(-2,0,-3)$ $\overline{d}=(-1,1,-3)$;

б) $\overline{a}=(1,0,3,-1)$ $\overline{b}=(-2,4,3,2)$.

П35.14. а) $\overline{a}=(0,-1,-3)$ $\overline{b}=(0,1,0)$ $\overline{c}=(-2,1,-4)$ $\overline{d}=(-1,1,-3)$;

б) $\overline{a}=(2,4,-1,6)$ $\overline{b}=(3,2,-1,4)$.

П35.15. а) $\overline{a}=(-2,-2,-3)$ $\overline{b}=(-2,1,1)$ $\overline{c}=(-2,-2,2)$ $\overline{d}=(-1,-1,3)$;

б) $\overline{a}=(3,-1,0,2)$ $\overline{b}=(2,1,3,6)$.

П35.16. а) $\overline{a}=(2,-2,0)$ $\overline{b}=(3,0,1)$ $\overline{c}=(4,-2,0)$ $\overline{d}=(3,-1,1)$;

б) $\overline{a}=(1,1,0,0)$ $\overline{b}=(0,0,1,1)$.

П35.17. а) $\overline{a}=(2,-2,4)$ $\overline{b}=(3,1,-1)$ $\overline{c}=(-4,5,2)$ $\overline{d}=(8,-1,6)$;

б) $\overline{a}=(3,2,1,-1)$ $\overline{b}=(4,2,3,6)$.

П35.18. а) $\overline{a}=(3,4,1)$ $\overline{b}=(5,8,-1)$ $\overline{c}=(6,-1,4)$ $\overline{d}=(5,-1,3)$;

б) $\overline{a}=(3,-1,4,6)$ $\overline{b}=(3,2,-1,1)$.

П35.19. а) $\overline{a}=(-3,1,4)$ $\overline{b}=(7,1,-5)$ $\overline{c}=(8,1,6)$ $\overline{d}=(-1,2,4)$;

б) $\overline{a}=(2,1,3,4)$ $\overline{b}=(2,0,4,1)$.

П35.20. а) $\overline{a}=(-3,8,2)$ $\overline{b}=(5,9,-4)$ $\overline{c}=(6,1,8)$ $\overline{d}=(-2,-3,-4)$;

б) $\overline{a}=(3,2,4,1)$ $\overline{b}=(3,1,-3,1)$.

П35.21. а) $\overline{a}=(2,-1,3)$ $\overline{b}=(1,0,2)$ $\overline{c}=(3,1,1)$ $\overline{d}=(0,-2,4)$;

б) $\overline{a}=(2,0,1,3)$ $\overline{b}=(-1,1,3,-2)$.

Ответы, указания, решения

Т35.1. Пусть V состоит из r вектор-столбцов $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ \ldots, \overline{b}_r$, где $r > n$. Тогда V линейно зависима, если однородная система линейных уравнений $x_1\overline{b}_1 + x_2\overline{b}_2 + \ldots + x_r\overline{b}_r = \overline{0}^T$ имеет ненулевое решение. Но поскольку в этой системе число уравнений n меньше числа переменных r, то в силу следствия 35.1 система имеет ненулевые решения.

Т35.2. Предположим, что система (33.2) имеет единственное решение. Применим к ней алгоритм метода Гаусса. В процессе алгоритма противоречивые строки появляться не могут, поскольку исходная система имеет решение. После завершения алгоритма полученная система $BX = D$ не должна содержать свободных переменных, поскольку исходная имеет единственное решение. Таким образом, B — квадратная матрица того же порядка n, что и матрица A, и ее столбцы соответствуют базисным переменным $x_1, x_2, \ \ldots, x_n$. Делением строк матрицы B на подходящие числа можно добиться, чтобы все ее ненулевые элементы стали единицами. Затем перестановкой строк, которая также осуществляется с помощью элементарных преобразований, последняя матрица приводится к единичной. Отсюда на основании следствия 35.4 заключаем, что A — невырожденная матрица.

Обратно, если A невырождена, то в силу следствия 35.4 систему $AX = C$ можно привести к равносильной системе $EX = D$, имеющей единственное решение $X = D$. Следствие доказано.

Т35.4. Утверждение непосредственно вытекает из следствия 35.2 и утверждения задачи Т32.6.

Т35.5. Предположим, что столбцы в A линейно независимы, а B получена из A добавлением новой строки. Рассмотрим две однородные линейные системы уравнений: $AX = 0$ и $BX = 0$. Очевидно, что система уравнений $BX = 0$ содержит все уравнения системы $AX = 0$. Поэтому множество решений системы $BX = 0$ является подмножеством множества решений системы $AX = 0$. Но система $AX = 0$ имеет только нулевое решение ввиду линейной независимости столбцов в A. Следовательно, и вторая система имеет только нулевое решение, что означает линейную независимость столбцов матрицы B.

Вторая часть утверждения, касающаяся добавления нового столбца, следует из первой части, если все предыдущие рассуждения применить к транспонированным матрицам.

Т35.6. Предположим противное: система векторов $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ \ldots, \overline{a}_m, \ \overline{z}\}$ линейно зависима. Тогда в силу утверждения задачи Т32.4 $\overline{z} = \lambda_1\overline{a}_1 +$

$+\lambda_2\bar{a}_2+\ldots+\lambda_m\bar{a}_m$. Умножим обе части этого равенства скалярно на вектор $\bar{z}$ и воспользуемся теоремой 31.1:

$$[\bar{z}\cdot\bar{z}]=[(\lambda_1\bar{a}_1+\lambda_2\bar{a}_2+\ldots+\lambda_m\bar{a}_m)\cdot\bar{z}]\Leftrightarrow|\bar{z}|^2=\lambda_1[\bar{a}_1\cdot\bar{z}]+\ldots+\lambda_m[\bar{a}_m\cdot\bar{z}]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ |\bar{z}|^2=\lambda_1\cdot 0+\ldots+\lambda_m\cdot 0\Leftrightarrow|\bar{z}|=0.$$

Последнее возможно, только если $\bar{z}$ — нулевой вектор (см. задачу Т31.1). Противоречие.

Т35.7. Предположим вначале, что линейно независимая система V содержит n векторов из $\mathfrak{R}^n$. Пусть $\bar{b}$ — произвольный вектор из $\mathfrak{R}^n$. В силу следствия 35.2 система векторов $V\cup\{\bar{b}\}$ линейно зависима. Следовательно, $\bar{b}$ является линейной комбинацией векторов из V (см. задачу Т32.4). Ввиду произвольного выбора вектора $\bar{b}$ V — базис.

Пусть теперь система V содержит m векторов из $\mathfrak{R}^n$ и $m < n$. Согласно следствию 35.3. найдется ненулевой вектор $\bar{z}$, ортогональный каждому вектору из V. Но тогда система векторов $V\cup\{\bar{z}\}$ линейно независима (см. задачу Т35.6) и, следовательно, $\bar{z}$ не может быть линейной комбинацией векторов из V в силу утверждения 32.3, т. е. V — не базис.

Т35.8. Указание: воспользоваться следствием 35.3 и утверждением задачи Т35.6.

Т35.9. Предположим противное: в матрице A максимальное число k линейно независимых строк отлично от максимального числа r линейно независимых столбцов. Не нарушая общности доказательства, будем считать, что $k > r$. Обозначим через B матрицу, состоящую из k линейно независимых строк матрицы A. В силу утверждения задачи Т35.5 максимальное число линейно независимых столбцов матрицы B не может превзойти r.

Рассмотрим однородную систему линейных уравнений $BX = 0$ и применим к ней алгоритм метода Гаусса. По аналогии с доказательством следствия 35.4 заключаем, что в процессе алгоритма не могут появляться противоречивые и нулевые строки. Поэтому конечная расширенная матрица $(C|0)$ системы, полученной в результате применения метода Гаусса к системе $BX = 0$, будет содержать k линейно независимых столбцов, соответствующих базису переменных. Обозначим через B' и C' соответственно матрицы, составленные из k столбцов матриц B и C, соответствующих этому базису переменных. Так как C' — невырожденная квадратная матрица, то таковой же будет и матрица B', из которой C' получена элементарными преобразованиями строк. Следовательно, B содержит k линейно независимых столбцов, откуда $k \le r$. Противоречие.

П35.21. (а) В пространстве $\Re^3$ базисом является любая тройка линейно независимых векторов (см. задачу Т35.7). Поэтому достаточно доказать линейную независимость векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$. С другой стороны, представить вектор $\overline{d}$ в виде линейной комбинации векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ — значит, решить линейную систему уравнений $x_1\overline{a}^T + x_2\overline{b}^T + x_3\overline{c}^T = \overline{d}^T$. Отметим, что в силу следствия 35.6 векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ линейно независимы, если и только если эта система имеет единственное решение. Применим алгоритм метода Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 5 & -4 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 5 & -4 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 5 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Отсюда получаем: $x_2 = 1$, $x_1 = 1$, $x_3 = -1$, т. е. $\overline{d} = 1\overline{a} + 1\overline{b} - 1\overline{c}$.

б) Вначале найдем ненулевой вектор $\overline{c}$, ортогональный векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Для этого необходимо решить однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} [\overline{a} \cdot \overline{c}] = 0, \\ [\overline{b} \cdot \overline{c}] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Решим ее методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 3/2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 7/2 & -1/2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4, \\ x_2 = -\frac{7}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4. \end{cases}$$

Пусть $x_3 = x_4 = 1$, тогда $x_1 = -2$, $x_2 = -3$. Вектор $\overline{c} = (-2, -3, 1, 1)$ — искомый. В силу утверждения задачи Т35.6 система векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ линейно независима. Найдем теперь ненулевой вектор $\bar{d}$, ортогональный векторам $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Для этого необходимо решить однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} [\bar{a} \cdot \bar{d}] = 0 \\ [\bar{b} \cdot \bar{d}] = 0 \\ [\bar{c} \cdot \bar{d}] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0. \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Решим ее методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ -5 & 0 & 10 & -5 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -7 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_4 = -5x_3 \\ x_2 = -6x_3 \\ x_1 = 7x_3 \end{cases}.$$

Пусть $x_3 = 1$, тогда $x_4 = -5$, $x_2 = -6$, $x_1 = 7$. Вектор $\bar{d} = (7, -6, 1, -5)$ — искомый. Опять-таки, в силу утверждения задачи Т35.6 система векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ линейно независима. Но тогда эта система является базисом пространства $\Re^4$ (см. задачу Т35.7).

Глава 36

Обратные матрицы

Пусть A и C — квадратные матрицы порядка n. Решить матричное уравнение

$$AY = C, \tag{36.1}$$

значит, найти такую квадратную матрицу $Y = B$ порядка n, что $AB = C$; при этом матрица B называется решением уравнения (36.1).

Если обозначить B_i и C_i — i-е столбцы матриц B и C соответственно, $i = 1, 2, \ldots, n$, то в соответствии с определением операции умножения матриц $AB_i = C_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, т. е. i-й столбец матрицы B — решения уравнения (36.1) — является решением системы линейных уравнений $AX_i = C_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $X_i^T = \left(x_{1i}\ x_{2i}\ \ldots x_{ni}\right)$. Таким образом, уравнение (36.1) есть компактная матричная запись n систем линейных уравнений с общей матрицей A коэффициентов при переменных. Поэтому ряд положений *гл. 34*, *35*, включая и метод Гаусса, очевидным образом распространяется на матричные уравнения.

Матричному уравнению (36.1) можно поставить в соответствие расширенную матрицу $(A|C)$ размера $n\times(2n)$, приписав справа к матрице A матрицу C. В то же время любой матрице D размера $n\times(2n)$ можно однозначно сопоставить матричное уравнение вида (36.1), условившись, что первые n столбцов в D составляют матрицу A, последние n столбцов — матрицу C. В этих случаях матрицу D и матричное уравнение (36.1) будем называть соответствующими.

Строку расширенной матрицы будем называть противоречивой, если первые n ее элементов — нули, а среди последних n имеется по крайней мере один ненулевой.

Утверждение 36.1. Если расширенная матрица содержит хотя бы одну противоречивую строку, то соответствующее ей матричное уравнение не имеет решений.

Утверждение 36.2. Элементарные преобразования строк расширенной матрицы не изменяют множества решений соответствующего матричного уравнения.

Эти утверждения непосредственно следуют из утверждений 34.1, 34.2.

Следствие 36.1. Уравнение (36.1) имеет единственное решение, если и только если A невырожденная.

Это следствие непосредственно вытекает из следствия 35.6.

Если матрица A невырожденная, то матричное уравнение (36.1) можно решить методом Гаусса.

Шаг алгоритма метода Гаусса.

На нулевом шаге положим $D_0 = (M_0 \mid N_0) = (A \mid C)$.

Пусть после k шагов, где $k \geq 0$, получена матрица $D_k = (M_k \mid N_k)$. Если эта матрица содержит противоречивую строку, то исходное уравнение не имеет решений; если эта матрица содержит нулевую строку, то A — вырожденная матрица. В противном случае переходим к рассмотрению строк матрицы D_k, которые еще не выбирались на предыдущих шагах. Выберем одну из таких строк и назовем ее разрешающей. Разрешающим назовем также один из ее ненулевых элементов d_k, принадлежащих M_k. С помощью элементарных преобразований все, отличные от d_k элементы столбца, содержащего разрешающий элемент d_k, превращаем в нули. Построенную таким образом матрицу обозначим $D_{k+1} = (M_{k+1} \mid N_{k+1})$. Переходим к следующему шагу.

Если все строки матрицы D_k побывали в роли разрешающей, то делением этих строк на подходящие числа и последующей перестановкой строк можно перейти к матрице $D_{k+1} = (E \mid B)$, для которой матрица B и будет решением уравнения (36.1).

Действительно, в силу утверждения 36.2 уравнения (36.1) и $EY = B$ равносильны. Так как E — невырожденная матрица, то эти уравнения имеют единственное решение в силу следствия 36.1. Матрица B как раз и будет этим решением, поскольку $EB = B$.

Пример. Решим матричное уравнение $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Составим соответствующую расширенную матрицу: $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

Применим алгоритм метода Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ \underset{=}{1} & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow -2 \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & \underset{=}{1} & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow -1 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right).$$

Переставив строки последней матрицы, получим:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ — искомое решение.}$$

Следствие 36.2. Если матрица A вырождена, а матрица C невырождена, то уравнение (36.1) не имеет решений.

Доказательство. В процессе выполнения алгоритма метода Гаусса, примененного к расширенной матрице $(A \mid C)$, нулевые строки получиться не могут в силу невырожденности матрицы C: элементарные преобразования сохраняют линейную независимость строк (утверждение 32.4), а наличие нулевой строки противоречило бы этому (утверждение 32.2). По той же причине алгоритм не может привести матрицу A к единичной матрице E и потому должен завершить работу получением противоречивой строки. Это доказывает следствие.

Следствие 36.2 дополняет следствие 36.1. К сожалению, в оставшемся случае, когда обе матрицы A и C — вырожденные, результат зависит от вида матриц (см. задачу Т36.1).

Рассмотрим два числа a и b, произведение которых равно 1: $a \cdot b = 1$. В этом случае число b называется обратным числу a и обозначается a^{-1}. Благодаря понятию обратного числа, деление чисел сводится к умножению на обратное число: $\frac{a}{c} = a \cdot c^{-1}$. В теории матриц аналогом обратных чисел служат обратные матрицы.

Пусть A — квадратная матрица порядка n, E — единичная матрица того же порядка. Если $A \cdot B = E$, то B называется обратной матрицей для A и обозначается A^{-1}. Другими словами, обратной матрицей для A является решение матричного уравнения

$$AY = E \tag{36.2}$$

Нуль — единственное число, не имеющее обратного. Аналогом нуля в теории матриц, как видно из следствия 36.3, являются вырожденные матрицы.

Следствие 36.3. Матрица имеет обратную, если и только если она невырождена.

Следствие 36.4. Матрицей, обратной для A^{-1}, является матрица A, т. е. $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

Доказательство следствий 36.3, 36.4 дано в задаче Т36.2.

Компьютерный раздел

Встроенная функция `lsolve(A, c̄)` решает систему линейных уравнений (33.5) в случае, когда матрица A квадратная и невырожденная. Поскольку эта функция, в отличие от функции `find`, применяется без блока решения, ее можно использовать в программных модулях.

Встроенная функция `round(x, n)`, в которой параметр `n` является целым неотрицательным числом, округляет число `x` с точностью до `n` цифр справа от десятичной точки. Если `n` — отрицательное целое, то `x` округляется с точностью до $|n|$ разрядов слева от десятичной точки. Например,

```
round(4.21, 0) = 4

round(321.43, –2) = 300

round(3.264, 2) = 3.26

round(3.264, 1) = 3.3
```

Mathcad имеет ряд встроенных функций, предназначенных для манипуляций со строковыми константами и переменными. Встроенная функция `num2str(z)` преобразует числовую константу или переменную `z` в строковую; функция `str2num(z)`, наоборот, преобразует строковую константу или переменную — в числовую. Например,

```
z := 13   z := num2str(z)   z = "13"   str2num(z) = 13
```

Встроенная функция `concat(C1, C2)` "соединяет" две строковые константы `C1`, `C2` (или значения строковых переменных) в одну. Например,

```
z := concat("privet", "and good by")

z =  "privet and good by"
```

Встроенные функции `max(v)` и `min(v)` определяют соответственно максимальную и минимальную координату вектора `v`.

Операция векторизации позволяет поэлементно оперировать векторами и матрицами одинакового размера. Эта операция производится с помощью кнопки $\overrightarrow{f(M)}$ подпанели **Матрица** (Matrix). Пусть, к примеру, даны векторы $\bar{a} = (2, 4, 6)$, $\bar{b} = (2, 8, 3)$, $\bar{c} = (3, 4, 5)$ и требуется определить вектор $\bar{d}$, i-я координата d_i которого будет равна $\frac{a_i}{b_i} \cdot c_i$, где a_i, b_i, c_i — соответственно i-е координаты векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Для этого в нужном месте рабочего листа введите выражение $d := \frac{a}{b} \cdot c$ и синим курсором выделите выражение, стоящее справа от знака присваивания: $d := \frac{a}{b} \cdot c$. После щелчка по кнопке произойдет векторизация: $d := \overrightarrow{\left(\frac{a}{b} \cdot c\right)}$, в результате которой будет получен искомый вектор $\bar{d} = (3, 2, 10)$. Этот вектор можно увидеть на рабочем листе, введя идентификатор d и знак равенства, справа от которого появится искомый вектор-столбец $d = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Следует также отметить, что для многих встроенных функций операцию векторизации можно не указывать, поскольку эти функции применяются к координатам векторов, являющихся их аргументами.

Например, $\sin(d) = \begin{pmatrix} 0.14 \\ 0.91 \\ -0.54 \end{pmatrix}$, где $0.14 = \sin(3)$, $0.91 = \sin(2)$, $-0.54 = \sin(10)$.

Однако это свойство не распространяется на матрицы. Например, если, $d = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, то функция $\sin(d)$ будет неопределенна.

Еще несколько примеров, связанных с векторизацией:

$\mathrm{ORIGIN} := 1$

$w := (1\ \ 2\ \ 3) \qquad v := (4\ \ 3\ \ 2) \qquad \overrightarrow{(w \cdot v)} = (4\ \ 6\ \ 6)$

$\left(w^T\right)^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 27 \end{pmatrix} \qquad w^3 = \bullet\ \overrightarrow{w^3} = (1\ \ 8\ \ 27)$

$M := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad N := \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\sqrt{N}} := \begin{pmatrix} 1.414 & 1.414 \\ 1.414 & 1.414 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{\left(\frac{M}{N}\right)} + \overrightarrow{\sqrt{N}} := \begin{pmatrix} 2.414 & 1.914 \\ 1.414 & 3.414 \end{pmatrix} \qquad N^3 := \begin{pmatrix} 32 & 32 \\ 32 & 32 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{N^3} := \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}.$$

В этом примере для поэлементного возведения в куб матрицы w (напомним, что Mathcad воспринимает вектор-строку как матрицу) использовалась векторизация; в то же время поэлементное возведение в куб вектора w^T (напомним, что Mathcad воспринимает вектор-столбец и как матрицу, и как вектор) оказалось возможным и без векторизации. В этом же примере благодаря векторизации удалось осуществить поэлементное извлечение квадратного корня в матрице N.

Альтернативой векторизации является применение ранжированных переменных. Однако векторизованные выражения удобно использовать в символьных вычислениях.

Задачи для самостоятельного решения

Т36.1. Известно, что в уравнении (36.1) матрицы A и C вырожденные. Что можно сказать о решении этого уравнения?

Т36.2. Доказать следствия 36.3, 36.4.

Т36.3. Известно, что в уравнении (36.1) матрица A невырождена. Доказать, что единственным решением этого уравнения является матрица $A^{-1}C$.

Т36.4. Известно, что в системе уравнений (33.5) матрица A невырождена. Доказать, что единственным решением этой системы является вектор-столбец $A^{-1}\bar{c}$.

Т36.5. Как изменится обратная матрица A^{-1}, если в данной матрице A: а) переставить r-ю и s-ю строки; б) r-ю строку умножить на отличное от нуля число λ; в) к r-й строке прибавить s-ю строку, умноженную на число λ? Ответить на этот же вопрос в случае аналогичных преобразований столбцов матрицы A.

Т36.6. Пусть A и B — невырожденные матрицы одного порядка. Доказать, что матрица AB тоже невырожденная, причем $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Т36.7. Пусть A — квадратная невырожденная матрица. Доказать, что $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Общая формулировка задач П36.1—П36.21

Решить систему линейных уравнений матричным методом (с помощью обратной матрицы).

П36.1. $\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}.$

П36.2. $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 3 \\ x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 + 4x_3 = -9 \end{cases}.$

П36.3. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 2 \\ 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ -5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}.$

П36.4. $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 6 \\ -5x_1 - 4x_2 - x_3 = 3 \end{cases}.$

П36.5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 4x_3 = -3 \end{cases}.$

П36.6. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -6 \end{cases}.$

П36.7. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ -5x_1 - 4x_2 - x_3 = 1 \end{cases}.$

П36.8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 10x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}.$

П36.9. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases}.$

П36.10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 2 \\ -3x_1 - 12x_3 = -3 \end{cases}.$

П36.11. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3 \\ 4x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 4 \end{cases}.$

П36.12. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}.$

П36.13. $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -5 \end{cases}.$

П36.14. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = 3 \\ 2x_3 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \end{cases}.$

П36.15. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 7x_3 = 3 \end{cases}.$

П36.16. $\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 - 15x_3 = 5 \\ x_2 + 2x_3 = 10 \\ x_1 + 4x_3 = 1 \end{cases}.$

П36.17. $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 = -1 \\ -x_2 + 2x_3 = -2 \\ 3x_1 + 7x_3 = -3 \end{cases}.$

П36.18. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}.$

П36.19. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_3 = -6 \end{cases}.$

П36.20. $\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}.$

П36.21. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 8 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}.$

Общая формулировка задач К36.1—К36.5, К36.11(а)

Для откорма скота на ферме в ежедневный рацион каждого животного должно включаться пять видов питательных веществ в количествах 76, 360, 155, 294, 231 единиц соответственно. При этом используются 6 видов кормов, стоимости одной весовой единицы которых равны соответственно 15, 3, 8, 1, 20.5, 13.5 ден. ед. Дана матрица A норм содержания питательных веществ в кормах, в которой на позиции (i, k) находится число единиц k-го вида питательных веществ, содержащихся в единице веса i-го вида кормов. Определить состав ежедневного рациона для откорма скота на ферме, при котором общая стоимость (в ден. ед.) этого рациона будет минимальной.

К36.1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 2.5 & 1.3 & 4.6 \\ 4 & 13 & 4.3 & 1.5 & 4.7 \\ 1 & 11 & 8.4 & 5.5 & 5 \\ 2 & 19 & 8.5 & 8.2 & 7 \\ 1 & 11 & 5.2 & 2.8 & 17 \\ 2 & 12 & 7.5 & 8.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$

К36.2. $A = \begin{pmatrix} 1.5 & 1.2 & 8.5 & 1.3 & 3 \\ 2.8 & 1.8 & 4.4 & 1.5 & 4 \\ 1.9 & 4 & 6 & 4.5 & 7 \\ 3.7 & 19 & 7.5 & 6 & 2 \\ 6.2 & 2 & 5 & 7 & 8 \\ 7.2 & 2 & 5 & 1.5 & 5.5 \end{pmatrix}.$

К36.3. $A=\begin{pmatrix} 10 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 21 & 1 & 14 & 1.5 & 5 \\ 31 & 4 & 1 & 5.5 & 7 \\ 33 & 4 & 3 & 8.8 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2.8 & 7 \\ 7 & 2 & 6 & 8.5 & 6.5 \end{pmatrix}$. **К36.4.** $A=\begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 & 11 & 6 \\ 8 & 1 & 4 & 11 & 7 \\ 9 & 1 & 18 & 5 & 7 \\ 13 & 9 & 3 & 18 & 7 \\ 12 & 12 & 7.5 & 18 & 7 \\ 12 & 2 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

К36.5. $A=\begin{pmatrix} 8 & 2 & 4.4 & 6.4 & 2.6 \\ 2.5 & 3.5 & 3.7 & 1.5 & 2.7 \\ 2.4 & 4 & 2.7 & 6.5 & 7.5 \\ 6.4 & 3.5 & 2.5 & 2.8 & 7 \\ 6 & 2 & 5 & 18 & 17 \\ 1 & 12 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$. **К36.11.** а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 12 & 2.5 & 13 & 6 \\ 2 & 10 & 4 & 11.5 & 7 \\ 1 & 14 & 8 & 5.5 & 7 \\ 3 & 9 & 3.5 & 8 & 7 \\ 2 & 12 & 5.5 & 8 & 7 \\ 2 & 12 & 6.5 & 8.5 & 6.5 \end{pmatrix}$.

Общая формулировка задач К36.6—К36.10, К36.11(б)

Для сохранения здоровья человек должен потреблять в сутки определенное количество питательных веществ трех видов, содержащихся в пяти видах пищи; при этом количество пищи второго вида должно равняться количеству пищи четвертого вида. Цена единицы веса пищи каждого вида равна соответственно 10, 5, 6, 8, 10 ден. ед. Суточные нормы питательных веществ равны соответственно 10, 12, 20 единиц. Дана также матрица A норм содержания питательных веществ в единице веса пищи, в которой на позиции (i, k) находится норма содержания питательного вещества i-го вида в единице веса пищи k-го вида. Определить состав ежедневного рациона человека, при котором общая стоимость (в ден. ед.) этого рациона будет минимальной.

К36.6. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ 5 & 12 & 1 & 1 & 8 \\ 2 & 3.5 & 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$. **К36.7.** $A=\begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

К36.8. $A=\begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 & 5 & 4 \\ 10 & 2 & 0 & 1 & 8 \\ 12 & 5 & 12 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **К36.9.** $A=\begin{pmatrix} 6 & 1 & 10 & 4 & 4 \\ 7 & 2 & 11 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 2 & 3 & 10 \end{pmatrix}$.

К36.10. $A=\begin{pmatrix} 9 & 5 & 8 & 7 & 2 \\ 10 & 4 & 0 & 1 & 7 \\ 2 & 6 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

К36.11. б) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4.5 & 1 \\ 0 & 3.2 & 1 & 2.1 & 2 \\ 2.2 & 1.5 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответы, указания, решения

Т36.1. Ответы: возможны 2 варианта: а) решения нет, примером может служить уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) решений бесконечно много, примером может служить уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Т36.2. Уравнение (36.2) не имеет решения в случае вырожденности матрицы A, поскольку E — невырожденная матрица (следствие 36.2). Если же A невырождена, то это уравнение имеет решение (следствие 36.1), т. е. A имеет обратную матрицу. Следствие 36.3 доказано.

Матрица A^{-1} является невырожденной, поскольку она может быть получена алгоритмом метода Гаусса, примененного к расширенной матрице $(A \mid E)$, из невырожденной матрицы E. Поэтому уравнение $A^{-1}Y = E$ имеет единственное решение $Y = B$ (следствие 36.1), т. е. $A^{-1}B = E$. Умножим левую и правую части этого равенства слева на матрицу A и применим теорему 33.1:

$$A(A^{-1}B) = AE \Leftrightarrow (AA^{-1})B = A \Leftrightarrow EB = A \Leftrightarrow B = A,$$

т. е. матрица $(A^{-1})^{-1}$ совпадает с A. Следствие 36.4 доказано.

Т36.3. Указание: $A(A^{-1}C) = (AA^{-1})C = EC = C$.

Т36.5. Ответы: а) в матрице A^{-1} поменяются местами r-й и s-й столбцы; б) r-й столбец в матрице A^{-1} умножится на $1/\lambda$; в) из s-го столбца вычтется r-й столбец, умноженный на λ.

Эти ответы легко обосновываются с помощью следующего свойства, вытекающего из определения операции умножения матриц: если $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ — строки матрицы A порядка n, $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_n$ — столбцы матрицы B порядка n, то $AB = E$, если и только если

$$[\overline{a_i} \cdot \overline{b_k}] = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k, \\ 1 & \text{при } i = k, \end{cases} \quad i = 1, \ \ldots, n, k = 1, \ \ldots, n. \tag{36.3}$$

Обоснуем, например, ответ на вопрос в) задачи Т36.5.

Пусть $AB = E$, т. е. $B = A^{-1}$. Без ограничения общности будем считать, что матрица C получена из A прибавлением к первой строке второй строки, умноженной на λ, а матрица D получена из B вычитанием из второго столбца первого, умноженного на λ. Таким образом, $\overline{a}_1 + \lambda\overline{a}_2, \overline{a}_2, \overline{a}_3, \ \ldots, \overline{a}_n$ — строки матрицы C, $\overline{b}_1, \overline{b}_2 - \lambda\overline{b}_1, \overline{b}_3, \ \ldots, \overline{b}_n$ — столбцы матрицы D. Для доказательства равенства $CD = E$ проверим, выполняются ли свойства (36.3) для строк матрицы C и столбцов матрицы D. Воспользуемся теоремой 31.1 и равенствами (36.3):

$$[(\overline{a}_1 + \lambda\overline{a}_2) \cdot \overline{b}_1] = [\overline{a}_1 \cdot \overline{b}_1] + \lambda[\overline{a}_2 \cdot \overline{b}_1] = 1 + \lambda \cdot 0 = 1, [(\overline{a}_1 + \lambda\overline{a}_2) \cdot \overline{b}_i] = 0, i = 2, \ \ldots, n.$$

$$[\overline{a}_2 \cdot (\overline{b}_2 - \lambda\overline{b}_1)] = [\overline{a}_2 \cdot \overline{b}_2] - \lambda[\overline{a}_2 \cdot \overline{b}_1] = 1 - \lambda \cdot 0 = 1, [\overline{b}_1 \cdot \overline{a}_2] = 0,$$

$$[(\overline{a}_1 + \lambda\overline{a}_2) \cdot (\overline{b}_2 - \lambda\overline{b}_1)] = [\overline{a}_1 \cdot \overline{b}_2] - \lambda[\overline{a}_1 \cdot \overline{b}_1] + \lambda[\overline{a}_2 \cdot \overline{b}_2] - \lambda^2[\overline{a}_2 \cdot \overline{b}_1] =$$

$$= 0 - \lambda + \lambda - \lambda^2 \cdot 0 = 0,$$

$$[\overline{a}_i \cdot (\overline{b}_2 - \lambda\overline{b}_1)] = 0, i = 2, \ \ldots, n.$$

Отсюда следует, что $CD = E$, т. е. $D = C^{-1}$.

Т36.6. По теореме 33.1 $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$. Поэтому матрица $B^{-1}A^{-1}$ — обратная для матрицы AB. В силу следствия 36.3 это означает также невырожденность матрицы AB.

Т36.7. Указание: воспользоваться теоремой 33.1 и следствием 36.3.

П36.21. Представим исходную систему в виде (33.5):

$$A\overline{x} = \overline{c}, \ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ \overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ \overline{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Согласно утверждению задачи Т36.4, если матрица A невырожденная, то решением этой системы будет вектор-столбец $A^{-1}\overline{c}$.

Найдем обратную матрицу A^{-1}, решив методом Гаусса матричное уравнение $AY = E$:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 8 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 8 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 9 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -27 & 4 & 1 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 9 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4/27 & -1/27 & 5/27 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/27 & -7/27 & 8/27 \\ 0 & 0 & 1 & -4/27 & -1/27 & 5/27 \end{array}\right).$$

Отсюда

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/27 & -7/27 & 8/27 \\ -4/27 & -1/27 & 5/27 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, искомое решение $\bar{x}$ есть

$$A^{-1}\bar{c} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/27 & -7/27 & 8/27 \\ -4/27 & -1/27 & 5/27 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 59/27 \\ 17/27 \end{pmatrix}.$$

К36.11. а) Алгоритм решения задачи с помощью Mathcad следующий. Ввести исходные данные:

```
ORIGIN := 1   p := (15 3 8 1 20.5 13.5)
c(d) := (76 360 155. 294. 231 d)
```

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 12 & 2.5 & 13 & 6 \\ 2 & 10 & 4 & 11.5 & 7 \\ 1 & 14 & 8 & 5.5 & 7 \\ 3 & 9 & 3.5 & 8 & 7 \\ 2 & 12 & 5.5 & 8 & 7 \\ 2 & 12 & 6.5 & 8.5 & 6.5 \end{pmatrix}$$

$B := \text{augment}(A,\ p^T)$

Здесь вектор `c(d)` является функцией, зависящей от аргумента `d` — стоимости (в ден. ед.) рациона; в квадратной матрице `B` 6-й столбец совпадает с вектором p^T.

Присваивая последовательно натуральные значения 1, 2, 3, … переменной `d`, с помощью функции `lsolve` решать системы линейных уравнений $B^T \cdot x = c(d)$ до тех пор, пока все координаты найденного вектора `x` не станут неотрицательными; преобразовать затем в строковую константу найденное минимальное значение `d` и с помощью функции `stack` сделать ее 7-й координатой вектора `X`:

```
X := | for d ∈ 1..900
     |   x ← lsolve((B)^T, (c(d))^T)
     |   if min(x) ≥ 0
     |     str ← num2str(d)
     |     str ← concat("the price is", str)
     |     return stack(x, str)
     | "is not found!"
```

$$X = \begin{pmatrix} 3.556 \\ 3.753 \\ 4.501 \\ 16.205 \\ 0.054 \\ 5.857 \\ \text{"the price is 197"} \end{pmatrix}$$

С помощью манипуляций со строковыми данными добиться наглядного вида полученных результатов:

```
Y := submatrix(X, 1, 6, 1, 1)
Y := round(Y,3)   (векторизация)
i := 1..6
Xi := concat("korm vida", num2str(i), "is", num2str(Yi))
```

$$X = \begin{pmatrix} \text{"korm vida 1 is 3.556"} \\ \text{"korm vida 2 is 3.753"} \\ \text{"korm vida 3 is 4.501"} \\ \text{"korm vida 4 is 16.205"} \\ \text{"korm vida 5 is 0.054"} \\ \text{"korm vida 6 is 5.857"} \\ \text{"the price is 197"} \end{pmatrix}$$

К36.11. б) Алгоритм решения задачи с помощью Mathcad следующий. Ввести исходные данные:

```
p := (10 5 6 8 10)    c(d) := (10 12 20 0 d)
```

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4.5 & 1 \\ 0 & 3.2 & 1 & 2.1 & 2 \\ 2.2 & 1.5 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
B := stack[A, (0 1 0 –1 0), p]
```

Здесь матрица A дополнена до квадратной матрицы B строками `(0 1 0 –1 0)` и `p`; строка `(0 1 0 –1 0)` соответствует уравнению $x_2 - x_4 = 0$, которое задается условием о равенстве количества пищи второго и четвертого видов.

Найти минимальное значение d, при котором система линейных уравнений `B · x = c(d)` имеет решение с неотрицательными координатами; с помощью манипуляций со строковыми константами добиться наглядности найденных результатов:

```
     | for d ∈ 1..300
     |  |
     |  |
     |  | x ← lsolve(B, c(d)^T)
Z := |  | if min(x) > 0
     |  |  | str ← num2str(d)
     |  |  | str ← concat("the price is", str)
     |  |  | return stack(x, str)
     | "is not found!"
Y := submatrix(Z, 1, 5, 1, 1)
```

$$Y := \overrightarrow{round(Y,3)}$$

$$Z = \begin{pmatrix} 2.089 \\ 1.057 \\ 6.381 \\ 1.057 \\ 0.008 \\ \text{"the price is 73"} \end{pmatrix}$$

```
i := 1..5
Z_i := concat("meal vida", num2str(i), "is", num2str(Y_i))
```

$$Z = \begin{pmatrix} \text{"meal vida 1 is 2.089"} \\ \text{"meal vida 2 is 1.057"} \\ \text{"meal vida 3 is 6.381"} \\ \text{"meal vida 4 is 1.057"} \\ \text{"meal vida 5 is 0.008"} \\ \text{"the price is 197"} \end{pmatrix}$$

Глава 37

Определители

Условимся всюду в этой главе через $M_{\setminus i \setminus k}$ обозначать матрицу, полученную из матрицы M удалением i-й строки и k-го столбца.

Каждой квадратной матрице по определенному правилу можно поставить в соответствие некоторое число, называемое определителем матрицы. Определим это понятие индуктивно. Если матрица состоит из одного элемента, то ее определитель равен этому элементу. Предположим, что уже определено понятие определителя матрицы, порядок которой меньше n, где $n > 1$. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{37.1}$$

порядка n. Определителем этой матрицы называется число $|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{1+k}|A_{\setminus 1 \setminus k}|$. Как видно из этого выражения, определитель $|A|$ вычисляется через определители матриц $A_{\setminus i \setminus k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, порядок которых на 1 меньше порядка матрицы A.

Число $(-1)^{i+k}|M_{\setminus i \setminus k}|$ называют алгебраическим дополнением элемента матрицы M, расположенного на позиции (i, k), и обозначают это число через M_{ik}. Поэтому определитель $|A|$ матрицы A есть сумма произведений элементов ее первой строки на соответствующие им алгебраические дополнения: $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}$.

Пример.

Вычислим определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ второго порядка:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}(-1)^{1+1}a_{22} + a_{12}(-1)^{1+2}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

В приведенном выше определении определителя первая строка играет особую роль. Однако следующая теорема, приводимая без доказательства, говорит о том, что в этой роли может выступать любая строка или любой столбец.

Теорема 37.1. Определитель квадратной матрицы A, порядок которой больше 1, равен сумме произведений элементов любой ее строки (столбца) на соответствующие им алгебраические дополнения:

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \quad (\text{или } |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik}).$$

Равенство $|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$ (или $|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$) называется разложением определителя по i-й строке (по k-му столбцу).

Лемма 37.1. При перестановке любых двух строк (столбцов) квадратной матрицы ее определитель меняется на противоположное число.

Доказательство. Предположим вначале, что в матрице (37.1) переставляются две соседние строки — i-я и $(i + 1)$-я. Вновь полученную матрицу обозначим через B. Очевидно, $A_{\backslash i\backslash k} = B_{\backslash i+1\backslash k}$, $k = 1,2, \ldots,n$. Но $A_{ik} =$ $= (-1)^{i+k} \mid A_{\backslash i\backslash k} \mid$. Поэтому

$$B_{i+1,k} = (-1)^{i+1+k} \mid B_{\backslash i+1\backslash k} \mid = (-1)^{i+1+k} \mid A_{\backslash i\backslash k} \mid = -A_{ik}.$$

Разложим определитель матрицы B по $(i + 1)$-й строке:

$$|B| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} B_{i+1,k} = -\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = -|A|$$

и в этом случае лемма доказана.

Теперь предположим, что в матрице A переставляются i-я и $(i + r)$-я строки. Эту перестановку можно осуществить посредством $2r - 1$ перестановок соседних строк:

$$(\overline{a}_i,\ \overline{a}_{i+1}),\ (\overline{a}_i,\ \overline{a}_{i+2}),\ \ldots,\ (\overline{a}_i,\ \overline{a}_{i+r}),\ (\overline{a}_{i+r-1},\ \overline{a}_{i+r}),\ (\overline{a}_{i+r-2},\ \overline{a}_{i+r}),\ \ldots,$$

$\ldots, (\overline{a}_{i+1}, \overline{a}_{i+r})$, где $\overline{a}_s$ — s-я строка матрицы A, а в скобках указаны переставляемые строки. Учитывая, что каждая перестановка соседних строк меняет знак определителя, можно заключить, что для матрицы C, полученной из A перестановкой i-й и $(i + r)$-й строки, верно: $\mid C \mid = (-1)^{2r-1} \mid A \mid = - \mid A \mid$, что завершает доказательство леммы.

Следствие 37.1. Если квадратная матрица имеет две одинаковые строки (два одинаковых столбца), то ее определитель равен нулю.

Доказательство. Если в матрице A переставить две имеющиеся одинаковые строки, то полученная матрица будет совпадать с A и, следовательно, по лемме 37.1 $|A| = -|A|$, что возможно только при $|A| = 0$.

Следствие 37.2. Сумма произведений элементов любой строки матрицы (37.1) на соответствующие алгебраические дополнения элементов другой строки равна нулю, т. е. $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} A_{rk} = 0$ для любых не равных между собой r и i. Аналогичное утверждение справедливо и для столбцов.

Доказательство. Заменим в матрице A r-ю строку i-й строкой. В полученной матрице B i-я и r-я строки уже одинаковы. Поэтому по следствию 37.1 $|B| = 0$. Разложим определитель матрицы B по r-й строке: $0 = |B| = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} B_{rk} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} A_{rk}$ (поскольку $B_{\setminus r \setminus k} = A_{\setminus r \setminus k}$). Следствие доказано.

Следующее утверждение показывает, каким образом элементарные преобразования строк и столбцов матрицы влияют на ее определитель.

Следствие 37.3. 1) Если матрица B получена из матрицы (37.1) умножением некоторой строки на число λ, то $|B| = \lambda |A|$.

2) Прибавление к любой строке (к любому столбцу) квадратной матрицы любой ее другой строки (столбца) не изменяет определителя этой матрицы.

Доказательство. 2) Предположим, что матрица B получена из матрицы (37.1) прибавлением к i-й строке r-й строки. Разложим определитель матрицы B по i-й строке:

$$|B| = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} + a_{rk}) B_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} + a_{rk}) A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} + \sum_{k=1}^{n} a_{rk} A_{ik} = |A|$$

т. к. $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{rk} A_{ik} = 0$ (следствие 37.2) и $B_{\setminus i \setminus k} = A_{\setminus i \setminus k}$. Часть 2) следствия доказана.

Матрица $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ называется союзной матрице (37.1).

Следствие 37.4. Если $|A| \neq 0$, то матрица $\frac{1}{|A|} \cdot (A^*)^T$ является обратной для A.

Доказательство. Элемент матрицы $A \cdot (A^*)^T$, расположенный на позиции (i, r), равен скалярному произведению i-й строки матрицы A и r-го столбца матрицы $(A^*)^T$, который, в свою очередь, является r-й строкой матрицы A^*, т. е. этот элемент равен $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{rk}^*$. Но при $i = r$ эта сумма равна $|A|$ (теорема 37.1), а при $i \neq r$ эта сумма равна нулю (следствие 37.2). Отсюда

$$A(A^*)^T = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\left(\frac{1}{|A|}(A^*)^T\right) = E,$$

что доказывает следствие.

Пример. Если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, то $A^* = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$,

$$(A^*)^T = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Следствие 37.5. Квадратная матрица невырожденная, если и только если ее определитель отличен от нуля.

Доказательство следствия дано в задаче Т37.2.

Компьютерный раздел

Встроенная функция `combin(n, k)`, где n, k — целые неотрицательные числа и $n \geq k$, вычисляет биномиальные коэффициенты $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Например, `combin(5, 2) = 10`.

Кнопка |×| подпанели **Матрица** (Matrix) вызывает шаблон |▪| для вычисления определителя матрицы, идентификатор которой вводится на месте метки этого шаблона.

Задачи для самостоятельного решения

Т37.1. Доказать первое утверждение следствия 37.3.

Т37.2. Доказать следствие 37.5.

Т37.3. Доказать, что определитель квадратной матрицы не изменится после прибавления к любой ее строке (любому столбцу) любой другой строки (столбца), умноженной (умноженного) на произвольное число.

Это утверждение подсказывает практический способ вычисления определителя, состоящий в следующем. Если в i-й строке матрицы A имеется единственный ненулевой элемент a_{ik}, то по теореме 37.1 $|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k}|A_{\setminus i\setminus k}|$. Тем самым вычисление определителя порядка n сводится к вычислению одного определителя порядка $n-1$. Хотя в матрице A может не оказаться строк с нужным числом нулей, тем не менее, с помощью преобразований, о которых говорится в задаче Т37.3, матрицу A, не изменяя определителя, можно преобразовать к нужному виду.

Т37.4. Вычислить определитель матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Т37.5. Доказать, что определитель квадратной матрицы, содержащей нулевую строку или нулевой столбец, равен нулю.

Т37.6. Вывести следующее правило "треугольника" для вычисления определителя третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Т37.7. Доказать, что $|A| = |A^T|$.

Т37.8. Квадратная матрица называется треугольной, если все ее элементы, находящиеся выше (ниже) главной диагонали, равны нулю. Доказать, что определитель треугольной матрицы равен произведению всех элементов главной диагонали (в частности, $|E| = 1$).

Т37.9. Пусть даны $n + 1$ функция $f_i(x) = a_{in}x^n + a_{i,n-1}x^{n-1} + \ldots + a_{i1}x^1 + a_{i0}$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Доказать, что если все они одновременно обращаются в нуль при некотором значении $x = \lambda$, то определитель матрицы F, i-я строка которой совпадает с вектор-строкой $(a_{in}, a_{i,n-1}, \ldots, a_{i1}, a_{i0})$, равен нулю.

Т37.10. Квадратная матрица A называется кососимметрической, если все ее элементы на главной диагонали равны нулю, а сумма любых двух элементов, симметричных относительно главной диагонали, также равна нулю, т. е. $a_{ik} = -a_{ki}$. Доказать, что определитель кососимметрической матрицы нечетного порядка равен нулю.

Т37.11. Пусть все числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$ различны. Тогда матрицей Вандермонда называется матрица

$$B = \begin{pmatrix} 1\ c_1\ c_1^2 \ldots c_1^{n-1} \\ 1\ c_2\ c_2^2 \ldots c_2^{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1\ c_n\ c_n^2 \ldots c_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Доказать, что определитель матрицы Вандермонда равен произведению всех разностей вида $c_k - c_i$, где $1 \le i < k \le n$.

Т37.12. Пусть A — квадратная матрица (37.1) порядка n. Произведение $(-1)^p a_{1i_1}, a_{2i_2}, \ldots, a_{ni_n}$ называется членом определителя, если координаты вектора $\bar{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ составлены из номеров столбцов $1, 2, \ldots, n$ (в произвольном порядке) матрицы A, а p — число всех таких пар координат вектора $\bar{i}$, в которых большее число расположено в векторе $\bar{i}$ раньше меньшего (такие пары называются инверсиями). Заметим, что член определителя матрицы A состоит из n сомножителей, взятых ровно по одному из каждой строки и каждого столбца матрицы.

Доказать, что сумма всех $n!$ членов определителя матрицы A порядка n равна $|A|$.

Общая формулировка задач К37.1—К37.11

С помощью Mathcad вычислить определители матриц для указанных значений параметра a и параметра n, от которых зависят элементы и размеры этих матриц.

К37.1. $$\begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 & \dots & C_n^n \\ 1 & C_{n+1}^1 & C_{n+1}^2 & \dots & C_{n+1}^n \\ 1 & C_{n+2}^1 & C_{n+2}^2 & \dots & C_{n+2}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & C_{2n}^1 & C_{2n}^2 & \dots & C_{2n}^n \end{vmatrix},\ n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

К37.2. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ C_1^1 & C_2^1 & C_3^1 & \dots & C_n^1 \\ C_2^2 & C_3^2 & C_4^2 & \dots & C_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ C_{n-1}^{n-1} & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \dots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix},\ n = 3, 5, 7, 9, 11.$$

К37.3. $$\begin{vmatrix} 1 & C_2^2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & C_3^2 & C_3^3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & C_n^2 & C_n^3 & C_n^4 & C_n^5 & \dots & C_n^n \\ 1 & C_{n+1}^2 & C_{n+1}^3 & C_{n+1}^4 & C_{n+1}^5 & \dots & C_{n+1}^n \end{vmatrix},\ n = 3, 4, 5, 6, 7, 8.$$

К37.4. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & C_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & 0 & \dots & 0 & a^2 \\ 1 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & \dots & 0 & a^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \dots & C_n^{n-1} & a^n \end{vmatrix},\ \begin{array}{l} n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \\ a = 1, 2, 3, 4.5, 5.5, 6.5, 7.5. \end{array}$$

К37.5. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 1 & a & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ 1 & a & a & 1 & \dots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & a & a & a & \dots & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \\ a = 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4. \end{matrix}$$

К37.6. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ a & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ a & a & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ a & a & a & 1 & \dots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a & a & a & a & \dots & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \\ a = 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4. \end{matrix}$$

К37.7. $$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \dots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \dots & \frac{1}{2n-1} \end{vmatrix}, \quad n = 2, 3, 4, 5, 6, 7.$$

К37.8. $$\begin{vmatrix} 1^{n-1} & 2^{n-1} & \dots & n^{n-1} \\ 2^{n-1} & 3^{n-1} & \dots & (n+1)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ n^{n-1} & (n+1)^{n-1} & \dots & (2n-1)^{n-1} \end{vmatrix}, \quad n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 14.$$

К37.9. $$\begin{vmatrix} a^0 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ a^{n-1} & a^0 & a & \dots & a^{n-2} \\ a^{n-2} & a^{n-1} & a^0 & \dots & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a & a^2 & a^3 & \dots & a^0 \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, \\ a = 5, 6, 7, 8, 9. \end{matrix}$$

К37.10. $$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & \ldots & n^2 \\ n^2 & 1^2 & 2^2 & \ldots & (n-1)^2 \\ (n-1)^2 & n^2 & 1^2 & \ldots & (n-2)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & \ldots & 2^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \ldots & 1^2 \end{vmatrix}, \ n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.$$

К37.11. $$\begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 & \ldots & C_n^{n-1} & C_n^n \\ C_n^n & 1 & C_n^1 & \ldots & C_n^{n-2} & C_n^{n-1} \\ C_n^{n-1} & C_n^n & 1 & \ldots & C_n^{n-3} & C_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ C_n^2 & C_n^3 & C_n^4 & \ldots & 1 & C_n^1 \\ C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \ldots & C_n^n & 1 \end{vmatrix}, \ n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.$$

Ответы, указания, решения

Т37.1. Указание: разложить определитель матрицы B по строке, которая была умножена на λ.

Т37.2. Если $|A| \neq 0$, то по следствию 37.4 матрица A имеет обратную матрицу. Но тогда A невырожденная в силу следствия 36.3. Пусть $|A| = 0$. Тогда любые элементарные преобразования строк матрицы A не могут изменить нулевого значения ее определителя (следствие 37.3) и, следовательно, не могут привести ее к единичной матрице E, чей определитель отличен от нуля (см. задачу 37.7). Отсюда по следствию 35.4 матрица A вырождена.

Т37.3. Предположим, что матрица B получена из A прибавлением к i-й строке r-й строки, умноженной на λ. Если $\lambda = 0$, то $A = B$ и все доказано. Пусть $\lambda \neq 0$. Тогда это преобразование можно представить как три последовательных элементарных преобразования: умножение r-й строки на λ, прибавление r-й строки к i-й строке, умножение r-й строки на $\frac{1}{\lambda}$. Отсюда, согласно следствию 37.3, $|B| = \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda \cdot |A| = |A|$.

Т37.4. Преобразуем определитель, не меняя его величины: прибавим ко второй строке первую, умноженную на (–2), к третьей — первую, а к четвертой прибавим первую строку, умноженную на (–3). После этого получим:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 6 & 5 \\ 0 & 4 & -4 & -10 \end{vmatrix}.$$

Разложим этот определитель по первому столбцу:

$$|A| = a_{11} \cdot A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 \\ -1 & 6 & 5 \\ 4 & -4 & -10 \end{vmatrix}.$$

Последний определитель вычисляется по правилу "треугольника" (см. задачу Т37.6):

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 \\ -1 & 6 & 5 \\ 4 & -4 & -10 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 \cdot (-10) + (-1) \cdot (-4) \cdot (-5) +$$

$$+ 4 \cdot (-3) \cdot 5 - 4 \cdot 6 \cdot (-5) - (-1) \cdot (-3) \cdot (-10) -$$

$$- (-4) \cdot 5 \cdot 3 = -50.$$

Т37.5. Указание: разложить определитель по нулевой строке или по нулевому столбцу.

Т37.6. Указание: воспользоваться теоремой 37.1 и примером в начале главы, в котором вычисляется определитель матрицы второго порядка.

Т37.7. Для доказательства воспользуемся индукцией по n, где n — порядок матрицы. При $n = 2$ утверждение проверяется непосредственно. Предположим, что оно верно для всех квадратных матриц порядка $n - 1$. Докажем его справедливость для произвольной матрицы A порядка n. Обозначим матрицу A^T через B и разложим $|B|$ по первому столбцу: $|B| = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} B_{i1}$. Но $B_{\backslash i \backslash 1} = A^T_{\backslash 1 \backslash i}$ и, следовательно, по индуктивному предположению $|B_{\backslash i \backslash 1}| = |A_{\backslash 1 \backslash i}|$. Поэтому

$$|B| = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} (-1)^{1+i} |B_{\backslash i \backslash 1}| = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} (-1)^{1+i} |A_{\backslash 1 \backslash i}| = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} A_{1i} = |A|.$$

Т37.8. Докажем индукцией относительно порядка матриц. Утверждение непосредственно проверяется для треугольных матриц порядка 2. Предположим, что оно верно для всех треугольных матриц порядка $n-1$. Докажем его справедливость для произвольной треугольной матрицы (37.1) порядка n. Для определенности считаем, что все элементы матрицы A, которые расположены выше главной диагонали, равны нулю. Разложим $|A|$ по первой строке: $|A| = a_{11}A_{11}= a_{11}(-1)^2|A_{\backslash 1\backslash 1}|$, где $A_{\backslash 1\backslash 1}$ — треугольная матрица порядка $n-1$ и, следовательно, для нее выполняется индуктивное предположение, т. е. $|A_{\backslash 1\backslash 1}| = a_{22}a_{33}\dots a_{nn}$. Отсюда $|A| = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}$, что и требовалось доказать.

Т37.9. Если обозначить через $\overline{\lambda}$ вектор-строку ($\lambda^n, \lambda^{n-1}, \dots, \lambda, 1$), то, согласно условию, $F\overline{\lambda}^T = \overline{0}^T$. Это означает линейную зависимость столбцов матрицы F и, следовательно, вырожденность этой матрицы. Отсюда по следствию 37.5 $|F| = 0$.

Т37.10. Пусть

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

и n нечетно. Если умножить каждую строку матрицы A^T на -1, то опять получится матрица A. Из следствия 37.3 вытекает, что $|A| = (-1)^n|A^T|$. Но $|A^T| = |A|$ (см. задачу Т37.7), откуда $|A| = (-1)^n|A|$ или $|A| = -|A|$, что возможно только при $|A| = 0$.

Т37.11. Докажем индукцией относительно порядка матрицы Вандермонда. Матрица Вандермонда второго порядка имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & c_1 \\ 1 & c_2 \end{pmatrix}$ и ее определитель равен $c_2 - c_1$, т. е. утверждение в этом случае выполняется. Предположим, что утверждение верно для матриц Вандермонда порядка $n-1$. Проделаем следующие элементарные преобразования со столбцами матрицы B: поочередно из каждого столбца, начиная с n-го, вычитаем предыдущий столбец, умноженный на c_1. В результате получим матрицу:

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & (c_2-c_1) & (c_2-c_1)c_2 & \dots & (c_2-c_1)c_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & (c_n-c_1) & (c_n-c_1)c_n & \dots & (c_n-c_1)c_n^{n-2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \;\; 0 \dots 0 \\ 1 & \\ \vdots & C_{\backslash 1\backslash 1} \\ 1 & \end{pmatrix},$$

откуда $|B| = |C| = 1(-1)^{1+1}|C_{\backslash 1\backslash 1}| = (c_2 - c_1)(c_3 - c_1)\ldots(c_n - c_1)$

$$\begin{vmatrix} 1 & c_2 & c_2^2 & \cdots & c_2^{n-2} \\ 1 & c_3 & c_3^2 & \cdots & c_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & c_n & c_n^2 & \cdots & c_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Из того факта, что последний сомножитель является определителем матрицы Вандермонда порядка $n - 1$, следует утверждение задачи.

Т37.12. Доказательство утверждения проведем индукцией относительно порядка матрицы A. Для матриц второго порядка его справедливость проверяется непосредственно. Предположим, что утверждение верно для матрицы порядка $n - 1$, и рассмотрим квадратную матрицу A порядка n.

Из определения определителя следует, что

$$|A| = a_{11}(-1)^{1+1}|A_{\backslash 1\backslash 1}| + \ldots + a_{1k}(-1)^{1+k}|A_{\backslash 1\backslash k}| + \ldots + a_{1n}(-1)^{1+n}|A_{\backslash 1\backslash n}|.$$

По индуктивному предположению для любой матрицы $A_{\backslash i\backslash k}$ определитель $|A_{\backslash i\backslash k}|$ состоит из $(n - 1)!$ слагаемых, каждое из которых содержит в качестве сомножителей ровно по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы $A_{\backslash i\backslash k}$. Поэтому рассматриваемая сумма может быть представлена в виде $n(n - 1)!$ слагаемых, составленных таким же образом. Осталось доказать, что каждое такое слагаемое фактически является членом определителя. Рассмотрим одно из таких слагаемых в выражении $a_{1k}(-1)^{1+k}|A_{\backslash 1\backslash k}|$. По индуктивному предположению оно равно

$$a_{1k}(-1)^{1+k}(-1)^{\tilde{p}}a_{2i_2}\ldots a_{ni_n} = (-1)^{\tilde{p}+k+1}a_{1k}a_{2i_2}\ldots a_{ni_n},$$

где $\tilde{p}$ — число инверсий вектора $\bar{i}' = (i'_2, \ldots, i'_n)$, координаты которого составлены из номеров столбцов матрицы $A_{\backslash i\backslash k}$, содержащих соответственно элементы $a_{2i_2}, a_{3i_3}, \ldots, a_{ni_n}$ матрицы A. При этом следует отметить, что из-за исключения k-го столбца из матрицы A происходит сдвиг номеров ее столбцов (на 1 уменьшаются все номера с $(k + 1)$-го по n-й). Поэтому

$$i'_r = \begin{cases} i_r & \text{при } i_r < k, \\ i_r - 1 & \text{при } i_r > k, \end{cases} \quad r = 2, \ldots, n. \tag{37.2}$$

Сравним числа $\tilde{p}$ и p, где p — число инверсий вектора $\bar{i} = (k, i_2, \ldots, i_n)$. Ввиду (37.2) число инверсий, образованных парами координат, не содержащих k в векторах $\bar{i}' = (i'_2, \ldots, i'_n)$ и $\bar{i} = (k, i_2, \ldots, i_n)$, одинаково. Число k, стоящее на первом месте в векторе $\bar{i}$, образует $k-1$ инверсию с меньшими числами $1, 2,\ldots, k-1$. Поэтому $p = \tilde{p} + k - 1$. Числа $\tilde{p} + k - 1$ и $\tilde{p} + k + 1$ имеют одинаковую четность. Следовательно, слагаемое $(-1)^{\tilde{p}+k+1} a_{1k} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n}$ равно члену определителя $(-1)^{p} a_{1k} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n}$. Отсюда следует, что сумма членов определителя матрицы A равна $|A|$.

К37.11. Алгоритм решения задачи с помощью Mathcad следующий. Построить матрицу `A(k)` порядка `k`:

```
ORIGIN := 1

        | for i ∈ 1..k − 1
        |   for j ∈ i + 1..k
        |     A_{i,j} ← combin(k − 1, j − i)
        | for j ∈ 1..k − 1
A(k) := |   for i ∈ j + 1..k
        |     A_{i,j} ← combin(k − 1, k − i + j)
        | for i ∈ 1..k
        |   A_{i,i} ← 1
        | A
```

Вычислить ее определитель при заданных значениях параметра `n`:

```
k := 3..12

|A(k)| =
   4
   0
  16
   0
  64
  -0
 256
  -0
1024
  -0
```

Глава 38

Структура общего решения линейного дифференциального уравнения

В этой главе будет описана структура общего решения линейного дифференциального уравнения (23.4) (сокращенно ЛДУ). Частным случаем этого уравнения является однородное уравнение (сокращенно ЛОДУ)

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)\cdot y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)\cdot y^{(1)} + p_0(x)\cdot y = 0. \tag{38.1}$$

Условимся, что все частные решения (интегральные кривые) уравнений (23.4), (38.1) рассматриваются только на интервале $(a; b)$, а $(n + 1)$-мерный промежуток $(a;\ b)\times\underbrace{(-\infty;\ +\infty)\times\ldots\times(-\infty;\ +\infty)}_{n}$ будет обозначаться через $\Im$.

В *гл. 23* (см. задачу Т23.1) показано, что уравнение (23.4) обладает свойством единственности решения в окрестности точки $x_0 \in (a; b)$. Оказывается, для линейных дифференциальных уравнений единственность решения сохраняется на всем интервале $(a; b)$.

Теорема 38.1. Пусть функции $p_0(x)$, $p_1(x)$, ..., $p_{n-1}(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$. Тогда через каждую точку области $\Im$ проходит единственная интегральная кривая уравнения (23.4).

Напомним, что фраза "интегральная кривая $y = \varphi(x)$ проходит через точку $(x_0, y_0, y_{01}, \ldots, y_{0\,n-1})$" означает выполнимость соотношений (23.2).

В дальнейшем функции $p_0(x)$, $p_1(x)$, ..., $p_{n-1}(x)$, $q(x)$ в уравнениях (38.1), (23.4) считаются непрерывными на отрезке $[a; b]$.

Функцию, равную нулю в каждой точке интервала $(a; b)$, назовем нулевой функцией на $(a; b)$ и обозначим ее через $0(x)$. Скажем, что система функций $\{f_1(x), \ldots, f_k(x)\}$ линейно зависима на интервале $(a; b)$, если существуют числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, не все равные нулю, такие что $0(x) = \alpha_1 f_1(x) +$

+ $\alpha_2 f_2(x)$ +…+ $\alpha_k f_k(x)$ для любого $x \in (a; b)$; в противном случае система функций $\{f_1(x), \ldots, f_k(x)\}$ называется линейно независимой на указанном интервале. Если функции $f_1(x), \ldots, f_k(x)$ имеют $(k-1)$-е производные на $(a; b)$, то определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_k(x) \\ f_1^{(1)}(x) & f_2^{(1)}(x) & \ldots & f_k^{(1)}(x) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ f_1^{(k-1)}(x) & f_2^{(k-1)}(x) & \ldots & f_k^{(k-1)}(x) \end{pmatrix}$$

называется определителем Вронского системы функций $\{f_1(x), \ldots, f_k(x)\}$ на интервале $(a; b)$ и обозначается $W(x)$.

Лемма 38.1. Если система $\{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$ интегральных кривых ЛОДУ (38.1) линейно зависима на интервале $(a; b)$, то определитель Вронского этой системы функций равен нулю в каждой точке $x_0 \in (a; b)$:

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_0) & \varphi_2(x_0) & \ldots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_1^{(1)}(x_0) & \varphi_2^{(1)}(x_0) & \ldots & \varphi_n^{(1)}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x_0) & \varphi_2^{(n-1)}(x_0) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0 .$$

Доказательство. По условию $0(x) = \alpha_1\varphi_1(x) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(x)$, $x \in (a; b)$, где не все числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ равны нулю. Так как i-я производная нулевой функции есть нулевая функция, то по теореме 8.1

$$0(x) = \alpha_1\varphi_1^{(i)}(x) + \ldots + \alpha_n\varphi_n^{(i)}(x),\ x \in (a; b),\ i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Отсюда $0 = \alpha_1\varphi_1^{(i)}(x_0) + \ldots + \alpha_n\varphi_n^{(i)}(x_0)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. А это означает линейную зависимость столбцов матрицы

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x_0) & \varphi_2(x_0) & \ldots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_1^{(1)}(x_0) & \varphi_2^{(1)}(x_0) & \ldots & \varphi_n^{(1)}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x_0) & \varphi_2^{(n-1)}(x_0) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}. \qquad (38.2)$$

Поэтому определитель этой матрицы равен нулю в силу следствия 37.5. Лемма доказана.

Лемма 38.2. Если система $\{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$ интегральных кривых ЛОДУ (38.1) линейно независима на $(a; b)$, то определитель Вронского этой системы функций не равен нулю ни в одной точке $x_0 \in (a; b)$.

Доказательство. Предположим противное: $W(x_0) = 0$ для некоторой точки $x_0 \in (a; b)$. Тогда столбцы матрицы (38.2) линейно зависимы (следствие 37.5), т. е. существуют такие числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, не все равные нулю, что

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} \varphi_1(x_0) \\ \varphi_1^{(1)}(x_0) \\ \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \varphi_2(x_0) \\ \varphi_2^{(1)}(x_0) \\ \vdots \\ \varphi_2^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_n \begin{pmatrix} \varphi_n(x_0) \\ \varphi_n^{(1)}(x_0) \\ \vdots \\ \varphi_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (38.3)$$

Функция $\varphi(x) = \alpha_1\varphi_1(x) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(x)$ является интегральной кривой ЛОДУ (38.1) по теореме 23.2. Кроме того, эта интегральная кривая проходит через точку $(x_0, 0, \ldots, 0) \in \mathfrak{I}$ в силу равенств (38.3). Но и нулевая функция $0(x)$, являющаяся интегральной кривой ЛОДУ (38.1), проходит через эту же точку. Отсюда по теореме 38.1 $\varphi(x) = 0(x)$, $x \in (a; b)$, что означает линейную зависимость системы функций $\{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$. Противоречие. Лемма доказана.

Любая линейно независимая на интервале $(a; b)$ система, состоящая из n интегральных кривых ЛОДУ (38.1), называется его фундаментальной системой решений на множестве $\mathfrak{I}$.

Теорема 38.2 (общее решение ЛОДУ). Если $\{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$ — фундаментальная система решений ЛОДУ (38.1), то $\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) = C_1\varphi_1(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x)$ — его общее решение на множестве $\mathfrak{I}$.

Доказательство. Тот факт, что $\varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ — интегральная кривая ЛОДУ (38.1) для любых чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, следует из теоремы 23.2. Покажем, что для любой точки $(x_0, y_0, y_{01}, \ldots, y_{0\,n-1}) \in \mathfrak{I}$ существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ такие, что интегральная кривая $\varphi(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ЛОДУ (38.1) проходит через эту точку.

В силу леммы 38.2 столбцы матрицы (38.2) линейно независимы. Следовательно, согласно утверждению задачи Т35.7, они составляют базис пространства $\mathfrak{R}^n$.

Поэтому вектор $(y_0, y_{01}, \ldots, y_{0\,n-1})^T$ является линейной комбинацией столбцов матрицы (38.2):

$$\alpha_1\begin{pmatrix}\varphi_1(x_0)\\ \varphi_1^{(1)}(x_0)\\ \vdots\\ \varphi_1^{(n-1)}(x_0)\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}\varphi_2(x_0)\\ \varphi_2^{(1)}(x_0)\\ \vdots\\ \varphi_2^{(n-1)}(x_0)\end{pmatrix}+\ldots+\alpha_n\begin{pmatrix}\varphi_n(x_0)\\ \varphi_n^{(1)}(x_0)\\ \vdots\\ \varphi_n^{(n-1)}(x_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_0\\ y_{01}\\ \vdots\\ y_{0\,n-1}\end{pmatrix}.$$

Последняя система равенств означает, что интегральная кривая $\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(x)$ проходит через точку $(x_0, y_0, y_{01}, \ldots, y_{0\,n-1})$. Теорема доказана.

Теорема 38.3. Любое ЛОДУ имеет фундаментальную систему решений.

Доказательство. В силу теоремы 38.1 для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ существует интегральная кривая $\varphi_i(x)$ ЛОДУ (38.1), проходящая через точку $(x_0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (здесь $(i + 1)$-я координата равна 1, остальные координаты, кроме первой, равны нулю). Очевидно, определитель Вронского $W(x_0)$ системы функций $\{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$ в точке x_0 совпадает с определителем единичной матрицы E. Но поскольку $|E| = 1$ (см. задачу Т37.8), то в силу леммы 38.1 $\{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$ — линейно независимая система функций. Теорема доказана.

Теорема 38.4 (общее решение ЛДУ). Если $\{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$ — фундаментальная система решений ЛОДУ (38.1), $\psi(x)$ — частное решение ЛДУ (23.4), то $f(x, C_1, \ldots, C_n) = C_1\varphi_1(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x) + \psi(x)$ — общее решение ЛДУ (23.4) на множестве $\mathfrak{I}$.

Доказательство теоремы дано в задаче Т38.7.

Применим теоремы 38.2, 38.4 к нахождению общего решения ЛДУ второго порядка

$$y'' + py' + ry = q(x) \tag{38.4}$$

с постоянными коэффициентами $p = p_1(x)$, $r = p_0(x)$. Вначале рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$y'' + py' + ry = 0\,. \tag{38.5}$$

Его фундаментальная система решений $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$ определяется с помощью алгебраического уравнения $\lambda^2 + p\lambda + r = 0$, называемого характеристическим уравнением ЛОДУ (38.5):

❒ если характеристическое уравнение имеет два различных (действительных) корня α_1 и α_2, то $\varphi_1(x) = e^{\alpha_1 x}$, $\varphi_2(x) = e^{\alpha_2 x}$;

- ❐ если характеристическое уравнение имеет два одинаковых корня, равных α, то $\varphi_1(x) = e^{\alpha x}$, $\varphi_2(x) = xe^{\alpha x}$;
- ❐ если характеристическое уравнение не имеет действительных корней, то $\varphi_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x, \varphi_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$, где $\alpha = -\frac{p}{2}, \beta = \sqrt{-D}$, D — дискриминант характеристического уравнения.

Тот факт, что определенная таким образом система функций $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$ составляет фундаментальную систему решений ЛОДУ (38.5), доказан в задачах Т38.3—Т38.6.

Покажем теперь, как, зная лишь фундаментальную систему решений ЛОДУ (38.5), можно найти общее решение ЛДУ (38.4). Применим для этого метод вариации постоянных, который состоит в следующем. Будем искать общее решение ЛДУ (38.4) в виде $f(x) = C_1(x)\varphi_1(x) + C_2(x)\varphi_2(x)$, где $C_1(x)$, $C_2(x)$ — новые неизвестные функции, $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$ — фундаментальная система решений ЛОДУ (38.5).

Отсюда $f' = C_1'\varphi_1 + C_2'\varphi_2 + C_1\varphi_1' + C_2\varphi_2'$. Потребуем дополнительно, чтобы $C_1'\varphi_1 + C_2'\varphi_2 = 0$. Тогда $f' = C_1\varphi_1' + C_2\varphi_2'$, откуда $f'' = C_1\varphi_1'' + C_2\varphi_2'' + C_1'\varphi_1' + C_2'\varphi_2'$. Подставляя найденные выражения для f', f'' в исходное уравнение (38.4), получим:

$$C_1\varphi_1'' + C_2\varphi_2'' + C_1'\varphi_1' + C_2'\varphi_2' + pC_1\varphi_1' + pC_2\varphi_2' + rC_1\varphi_1 + rC_2\varphi_2 = q(x)$$

или после перегруппировки слагаемых:

$$C_1(\varphi_1'' + p\varphi_1' + r\varphi_1) + C_2(\varphi_2'' + p\varphi_2' + r\varphi_2) + (C_1'\varphi_1' + C_2'\varphi_2') = q(x).$$

Поскольку $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — решения ЛОДУ (38.5), то $\varphi_1'' + p\varphi_1' + r\varphi_1 = 0$, $\varphi_2'' + p\varphi_2' + r\varphi_2 = 0$. Следовательно, $C_1'\varphi_1' + C_2'\varphi_2' = q(x)$.

Таким образом, неизвестные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)\varphi_1(x) + C_2'(x)\varphi_2(x) = 0, \\ C_1'(x)\varphi_1'(x) + C_2'(x)\varphi_2'(x) = q(x). \end{cases}$$

Запишем эту систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q(x) \end{pmatrix}. \qquad (38.6)$$

Определитель матрицы $\Phi(x)=\begin{pmatrix}\varphi_1(x) & \varphi_2(x)\\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x)\end{pmatrix}$ является определителем Вронского линейно независимой системы функций $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$ и потому отличен от нуля в каждой точке интервала $(a; b)$ (лемма 38.2). Следовательно, система (38.6) однозначно разрешима относительно функций $C_1'(x), C_2'(x)$ (см. задачу Т36.4 и следствие 37.5):

$\begin{pmatrix}C_1'\\ C_2'\end{pmatrix}=\Phi^{-1}\cdot\begin{pmatrix}0\\ q\end{pmatrix}$. Обратная матрица Φ^{-1} в силу следствия 37.4 равна $\frac{1}{|\Phi|}\cdot\begin{pmatrix}\varphi_2' & -\varphi_2\\ -\varphi_1' & \varphi_1\end{pmatrix}$, $|\Phi|=\varphi_1\varphi_2'-\varphi_1'\varphi_2$. Отсюда $\begin{pmatrix}C_1'\\ C_2'\end{pmatrix}=\frac{1}{|\Phi|}\cdot\begin{pmatrix}-\varphi_2 q\\ \varphi_1 q\end{pmatrix}$. Положим $f_1(x)=\frac{-\varphi_2 q}{|\Phi|}$, $f_2(x)=\frac{\varphi_1 q}{|\Phi|}$.

Тогда $C_1(x)=\int f_1(x)dx+\overline{C_1}$, $C_2(x)=\int f_2(x)dx+\overline{C_2}$.

В итоге, согласно теореме 38.4, общее решение ЛДУ (38.4) имеет вид

$$f(x,\overline{C_1},\overline{C_2})=\overline{C_1}\cdot\varphi_1(x)+\overline{C_2}\cdot\varphi_2(x)+\varphi_1(x)\cdot\int f_1(x)dx+\varphi_2(x)\cdot\int f_2(x)dx,$$

где $\overline{C_1}\cdot\varphi_1(x)+\overline{C_2}\cdot\varphi_2(x)$ — общее решение ЛОДУ (38.5), а $\varphi_1(x)\cdot\int f_1(x)dx+\varphi_2(x)\cdot\int f_2(x)dx$ — частное решение ЛДУ (38.4).

Пример. Найдем общее решение уравнения $y''+3y'-4y=30e^{2x}$. Ему соответствует ЛОДУ $y''+3y'-4y=0$. Составим характеристическое уравнение последнего: $\lambda^2+3\lambda-4=0$. $\alpha_1=1$, $\alpha_2=-4$ — корни этого уравнения. Поэтому $\{e^x, e^{-4x}\}$ — фундаментальная система решений уравнения $y''+3y'-4y=0$. В данном примере

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix}e^x & e^{-4x}\\ e^x & -4e^{-4x}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\ q(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 30e^{2x}\end{pmatrix},\ |\Phi|=-4e^{-3x}-e^{-3x}=-5e^{-3x},$$

$$f_1(x)=\frac{-e^{-4x}\cdot 30e^{2x}}{-5e^{-3x}}=6e^x,\ f_2(x)=\frac{e^x\cdot 30e^{2x}}{-5e^{-3x}}=-6e^{6x}.$$

Отсюда $C_1(x)=\int 6e^x dx=6e^x+\overline{C_1}$, $C_2(x)=\int -6e^{6x}dx=-e^{6x}+\overline{C_2}$.

Искомое общее решение есть

$$f(x,\overline{C_1},\overline{C_2})=\overline{C_1}e^x+\overline{C_2}e^{-4x}+e^x\cdot 6e^x+e^{-4x}\cdot(-e^{6x})=\overline{C_1}e^x+\overline{C_2}e^{-4x}+5e^{2x}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Т38.1. Пусть $\{f_1(x), \ldots, f_k(x)\}$ — линейно зависимая на $(a; b)$ система функций, имеющих $(k-1)$-е производные на $(a; b)$. Доказать, что определитель Вронского этой системы равен нулю в каждой точке $x_0 \in (a; b)$.

Т38.2. Доказать линейную независимость системы функций $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ на произвольном интервале $(a; b)$.

Т38.3. Доказать линейную независимость следующих систем функций на произвольном интервале $(a; b)$:

а) $\left\{e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}\right\}$ при любых различных числах α_1, α_2;

б) $\left\{e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}\right\}$ при любом числе α;

в) $\left\{e^{\alpha x}\sin\beta x, e^{\alpha x}\cos\beta x\right\}$ при любых числах α и $\beta \neq 0$.

Т38.4. Доказать, что если характеристическое уравнение ЛОДУ (38.5) имеет два различных корня α_1, α_2, то функции $\left\{e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}\right\}$ составляют фундаментальную систему решений этого ЛОДУ.

Т38.5. Доказать, что если характеристическое уравнение ЛОДУ (38.5) имеет два одинаковых корня, равных α, то функции $\left\{e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}\right\}$ составляют фундаментальную систему решений этого ЛОДУ.

Т38.6. Доказать, что если дискриминант D характеристического уравнения ЛОДУ (38.5) отрицателен, то функции $e^{\alpha x}\sin\beta x, e^{\alpha x}\cos\beta x$, где $\alpha = -\frac{p}{2}, \beta = \sqrt{-D}$, являются решениями этого ЛОДУ, причем они образуют фундаментальную систему решений этого уравнения.

Т38.7. Доказать теорему 38.4.

Т38.8. Доказать линейную независимость системы функций $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$ на интервале $(-1; 1)$, где

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} x^2 \text{ при } x \in (-1;0) \\ 0 \text{ при } x \in [0;1) \end{cases}, \quad \varphi_2(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \in (-1;0) \\ x^2 \text{ при } x \in [0;1) \end{cases}.$$

Чему равен определитель Вронского этой системы функций на интервале $(-1; 1)$?

Т38.9. Известно, что две интегральные кривые $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ ЛОДУ $y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$ на интервале $(a; b)$ имеют стационарную точку $x_0 \in (a; b)$. Доказать линейную зависимость системы функций $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$ на $(a; b)$.

Общая формулировка задач П38.1—П38.21

Найти общие решения линейных дифференциальных уравнений.

П38.1. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin(2x)}$.

П38.2. $y'' + 4y' + 4y = 2x^2 - x + 1$.

П38.3. $y'' - 2y' - 3y = e^{5x}(2x + 1)$.

П38.4. $y'' + y = \sin(6x)$.

П38.5. $y'' - 2y' + y = \dfrac{1}{x^2}$.

П38.6. $y'' - 4y' + 4y = \ln x$.

П38.7. $y'' + y = \dfrac{7}{\cos x}$.

П38.8. $y'' + 2y' + y = x^2 - 5x + 3$.

П38.9. $y'' + 3y' - 4y = e^{2x}(1 - 5x)$.

П38.10. $4y'' + y = \cos(2x)$.

П38.11. $y'' - 10y' + 25y = \dfrac{2}{x^3}$.

П38.12. $y'' - 8y' + 16y = 3\ln(5x)$.

П38.13. $y'' + 9y = \dfrac{2}{\cos(3x)}$.

П38.14. $y'' + 6y' + 9y = 2 - 7x + x^2$.

П38.15. $y'' - 6y' + 5y = e^{-3x}(4x + 7)$.

П38.16. $9y'' + y = 2\sin(3x)$.

П38.17. $4y'' + 4y' + y = -\dfrac{15}{x^6}$.

П38.18. $y'' + y = 3e^{11x}$.

П38.19. $y'' + \dfrac{y}{4} = \dfrac{1}{\sin^2(x/4)}$.

П38.20. $y'' - 4y' + 4y = 5\sin(3x)$.

П38.21. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

Ответы, указания, решения

Т38.1. Указание: обоснование аналогично доказательству леммы 38.1.

Т38.2. Определитель Вронского данной системы функций равен

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \ldots & x^n \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 & \ldots & nx^{n-1} \\ 0 & 0 & 2! & 3!x & \ldots & n(n-1)x^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 3! & \cdots & n(n-1)(n-2)x^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n! \end{vmatrix} = 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot n!$$

(определитель треугольной матрицы равен произведению элементов этой матрицы, расположенных на главной диагонали — см. задачу Т37.8). Поскольку $W(x)$ не равен нулю ни в одной точке интервала $(a; b)$, то исходная система функций линейно независима в силу утверждения задачи Т38.1.

Т38.3. Определитель Вронского системы функций $\left\{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x\right\}$ равен

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta) & e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x) \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2\alpha x}\begin{vmatrix} \cos\beta x & \sin\beta x \\ \alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta & \alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x \end{vmatrix} = \beta e^{2\alpha x}.$$

Поскольку $W(x)$ не равен нулю ни в одной точке интервала $(a;\, b)$, то исходная система функций линейно независима в силу утверждения задачи Т38.1.

Определитель Вронского системы функций $\left\{ e^{\alpha x}, xe^{\alpha x} \right\}$ равен

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x} & xe^{\alpha x} \\ \alpha e^{\alpha x} & e^{\alpha x}(\alpha x + 1) \end{vmatrix} = e^{2\alpha x} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x \\ \alpha & \alpha x + 1 \end{vmatrix} = e^{2\alpha x}.$$

Поскольку $W(x)$ в данном случае не равен нулю ни в одной точке интервала $(a;\, b)$, то исходная система функций линейно независима в силу утверждения задачи Т38.1.

Для системы функций $\left\{ e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x} \right\}$ рассуждения аналогичны.

Т38.4. Пусть $\varphi(x) = e^{\alpha_i x}, i \in \{ 1{,}2 \}$. Тогда $\varphi'(x) = \alpha_i e^{\alpha_i x}$, $\varphi''(x) = \alpha_i^2 e^{\alpha_i x}$.

Подставляя теперь функцию $\varphi(x)$ в (38.5), получим:

$$\varphi'' + p\varphi' + r\varphi = e^{\alpha_i x}(\alpha_i^2 + p\alpha_i + r) = 0$$

при любом $x \in (a;\, b)$, поскольку по условию $\alpha_i^2 + p\alpha_i + r = 0$.

Кроме того, как показано в задаче Т38.3, система функций $\left\{ e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x} \right\}$ линейно независима на интервале $(a;\, b)$, а значит, является фундаментальной системой решений ЛОДУ (38.5).

Т38.5. Пусть $\varphi(x) = xe^{\alpha x}$. Тогда $\varphi'(x) = e^{\alpha x}(1 + \alpha x)$, $\varphi''(x) = e^{\alpha x}(\alpha^2 x + 2\alpha)$. Подставляя теперь функцию $\varphi(x)$ в (38.5), получим:

$\varphi'' + p\varphi' + r\varphi = e^{\alpha x}(x(\alpha^2 + p\alpha + r) + 2\alpha + p) = 0$ при любом $x \in (a;\, b)$, поскольку по условию $\alpha^2 + p\alpha + r = 0, \alpha = -\dfrac{p}{2}, 2\alpha + p = 0$. В соответствии с утверждением задачи Т38.3, система функций $\left\{ e^{\alpha x}, xe^{\alpha x} \right\}$ является фундаментальной системой решений.

Т38.6. Пусть $\varphi(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$. Тогда $\varphi'(x) = e^{\alpha x}(\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x)$,

$$\varphi''(x) = e^{\alpha x}(\alpha^2 \cos \beta x - \beta^2 \cos \beta x - 2\alpha\beta \sin \beta x).$$

Подставляя теперь функцию $\varphi(x)$ в (38.5), получим:

$\varphi'' + p\varphi' + r\varphi = e^{\alpha x}(\cos \beta x(\alpha^2 + p\alpha + r - \beta^2) + \sin \beta x(p + 2\alpha)) = 0$, поскольку по условию $p + 2\alpha = 0$, $\alpha^2 + p\alpha + r - \beta^2 = \dfrac{p^2}{4} - \dfrac{p^2}{2} + r + \dfrac{p^2}{4} - r = 0$.

Т38.7. Тот факт, что $f(x, c_1, \ldots, c_n)$ — интегральная кривая ЛДУ (23.4) для любых чисел $c_1, \ldots, c_n$, следует из теоремы 23.2. Покажем, что для любой точки $(x_0, y_0, y_{01}, \ldots, y_{0\,n-1}) \in \Im$ существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ такие, что интегральная кривая $f(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ проходит через эту точку.

В силу леммы 38.2 столбцы матрицы (38.2) линейно независимы. Следовательно, согласно утверждению задачи Т35.7, они составляют базис пространства $\Re^n$. Поэтому вектор $(y_0 - \psi(x_0), y_{01} - \psi^{(1)}(x_0), \ldots, y_{0\,n-1} - \psi^{(n-1)}(x_0))$ является линейной комбинацией столбцов матрицы (38.2):

$$\alpha_1\begin{pmatrix}\varphi_1(x_0)\\ \varphi_1^{(1)}(x_0)\\ \vdots\\ \varphi_1^{(n-1)}(x_0)\end{pmatrix}+\ldots+\alpha_n\begin{pmatrix}\varphi_n(x_0)\\ \varphi_n^{(1)}(x_0)\\ \vdots\\ \varphi_n^{(n-1)}(x_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_0-\psi(x_0)\\ y_{01}-\psi^{(1)}(x_0)\\ \vdots\\ y_{0\,n-1}-\psi^{(n-1)}(x_0)\end{pmatrix}.$$

Из этих равенств видно, что интегральная кривая $\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(x) + \psi(x)$ проходит через заданную точку $(x_0, y_0, y_{01}, \ldots, y_{0\,n-1})$.

Т38.8. Пусть $\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) = 0(x)$ для любого $x \in (-1; 1)$.

Если $x_0 \in (0; 1)$, то $-x_0 \in (-1; 0)$ и $\alpha_1\varphi_1(-x_0) + \alpha_2\varphi_2(-x_0) = \alpha_1 x_0^2$,

$\alpha_1\varphi_1(x_0) + \alpha_2\varphi_2(x_0) = \alpha_2 x_0^2$. Отсюда $\begin{cases}\alpha_1 x_0^2 = 0\\ \alpha_2 x_0^2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1 = 0\\ \alpha_2 = 0\end{cases}$,

что доказывает линейную независимость данной системы функций.

Вычислим определитель Вронского данной системы функций:

$$W(x) = \begin{vmatrix}\varphi_1 & \varphi_2\\ \varphi_1^{(1)} & \varphi_2^{(1)}\end{vmatrix} = \begin{cases}\begin{vmatrix}x^2 & 0\\ 2x & 0\end{vmatrix} & \text{при } x \in (-1; 0),\\[2ex] \begin{vmatrix}0 & x^2\\ 0 & 2x\end{vmatrix} & \text{при } x \in [0; 1),\end{cases}$$

т. е. $W(x) = 0$ при любом $x \in (-1; 1)$. С учетом лемм 38.1 и 38.2 этот факт означает, что функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ не могут быть решениями ЛОДУ (38.1) с непрерывными на отрезке $[-1; 1]$ коэффициентами.

Т38.9. Указание: рассмотреть определитель Вронского данной системы функций в точке x_0 и применить лемму 38.2.

П38.21. $\lambda^2 + 1 = 0$ — это характеристическое уравнение ЛОДУ $y'' + y = 0$. Дискриминант D характеристического уравнения равен -1, $p = 0$. Поэтому $\alpha = -\frac{p}{2} = 0$, $\beta = \sqrt{-D} = 1$, и, следовательно, $\{\cos x, \sin x\}$ — фундаментальная система решений уравнения $y'' + y = 0$.

Так как $\Phi(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$, $|\Phi| = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$, $q(x) = \frac{1}{\sin x}$,

то $f_1(x) = -1$, $f_2(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$, $C_1(x) = \int -1 \cdot dx = -x + \overline{C_1}$,

$$C_2(x) = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{1}{\sin x} d \sin x = \ln|\sin x| + \overline{C_2} .$$

Искомое общее решение есть $\overline{C_1} \cos x + \overline{C_2} \sin x - x \cos x + \sin x \cdot \ln|\sin x|$.

Глава 39

Прямые и плоскости в n-мерном точечном пространстве

Прямой в пространстве Af^n, проходящей через точку $A = (a_1, \ldots, a_n)$ параллельно ненулевому вектору $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, называется множество всех точек $X = (x_1, \ldots, x_n)$ вида $X = A + t\,\overline{p}$, где t — любое число; при этом вектор $\overline{p}$ называется направляющим вектором прямой. Покоординатно последнее равенство можно записать так: $x_1 = a_1 + tp_1, \ \ldots, x_n = a_n + tp_n$ или $\frac{x_1 - a_1}{p_1} = \frac{x_2 - a_2}{p_2} = \ldots = \frac{x_n - a_n}{p_n}$. Последняя запись чисто символическая, ибо некоторые из координат вектора $\overline{p}$ могут равняться нулю. Например, соотношение $\frac{x_1 - a_1}{0} = \frac{x_2 - a_2}{3}$ означает только, что $3(x_1 - a_1) = 0(x_2 - a_2)$ или $x_1 - a_1 = 0$.

k-мерной плоскостью в пространстве Af^n, проходящей через точку $A = (a_1, \ldots, a_n)$ параллельно линейно независимой системе $\{\overline{p}_1, \overline{p}_2, \ldots, \overline{p}_k\}$ k векторов из $\Re^n$, называется множество всех точек X вида $X = A + (t_1\overline{p}_1 + t_2\overline{p}_2 + \ldots + t_k\overline{p}_k)$, где $t_1, t_2, \ldots, t_k$ — произвольные числа.

1-мерная плоскость — это прямая; n-мерная плоскость в пространстве Af^n совпадает с этим пространством (см. задачу Т39.2). Особый интерес представляют гиперплоскости — $(n - 1)$-мерные плоскости в Af^n, поскольку, как показано в теореме 39.1, координаты точек гиперплоскости определяются одним линейным уравнением.

Теорема 39.1. Множество точек $X = (x_1, \ldots, x_n)$ пространства Af^n является гиперплоскостью, если и только если координаты всех точек этого множества удовлетворяют некоторому линейному уравнению вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b = 0, \tag{39.1}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ — константы и не все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равны нулю.

Доказательство. Рассмотрим произвольную гиперплоскость

$X=M+t_1\bar{p}_1+t_2\bar{p}_2+\ldots+t_{n-1}\bar{p}_{n-1}$,

где $M=(m_1, m_2, \ldots, m_n)$, $\{\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_{n-1}\}$ — система линейно независимых векторов из $\Re^n$. Если ввести вектор $\bar{p}_n=\overline{MX}$, то по определению $\bar{p}_n=t_1\bar{p}_1+t_2\bar{p}_2+\ldots+t_{n-1}\bar{p}_{n-1}$. Это равенство, в частности, означает линейную зависимость системы векторов $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_n$. Обозначим через B квадратную матрицу порядка n, в i-й строке которой расположены координаты вектора $\bar{p}_i$, $i=1, \ldots, n$. Так как B — вырожденная матрица, то по следствию 37.5 $|B|=0$. Разложим этот определитель по последней строке $(x_1-m_1\ x_2-m_2\ldots\ x_n-m_n)$:

$$(x_1-m_1)B_{n1}+(x_2-m_2)B_{n2}+\ldots+(x_n-m_n)B_{nn}=0, \tag{39.2}$$

где $B_{n1}, \ldots, B_{nn}$ — алгебраические дополнения соответственно элементов $x_1-m_1, \ldots, x_n-m_n$ матрицы B. Если не все числа $B_{n1}, \ldots, B_{nn}$ равны нулю,последнее уравнение можно записать в виде (39.1), обозначив $a_i=B_{ni}$, $i=1, 2, \ldots, n$, $b=-(m_1B_{n1}+\ldots+m_nB_{nn})$. Предположим теперь, что $B_{n1}=$ $=B_{n2}=\ldots=B_{nn}=0$. С учетом этого, из равенства (39.2) следует, что какова бы ни была последняя строка матрицы B, все равно $|B|=0$. Однако если в последнюю строку матрицы B поместить координаты вектора $\bar{z}$, который вместе с векторами предыдущих строк $\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_{n-1}$ образует линейно независимую систему (такой вектор $\bar{z}$ всегда можно подобрать ввиду следствия 35.3 и задачи Т35.6), то определитель этой матрицы в силу следствия 37.5 будет отличен от нуля. Таким образом, случай $B_{n1}=$ $=B_{n2}=\ldots=B_{nn}=0$ невозможен и первая часть теоремы доказана.

Пусть в равенстве (39.1) коэффициент $a_i\neq 0$. Введем в рассмотрение вектор $\bar{a}=(a_1, \ldots, a_n)$ и точку $L=(l_1, \ldots, l_i, \ldots, l_n)=(0, \ldots, 0, -b/a_i, 0, \ldots, 0)$ (именно i-я координата точки L равна $-b/a_i$). Вектор $\bar{a}$ можно последовательно дополнить такими векторами $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \ldots, \bar{q}_{n-1}$ до базиса в $\Re^n$, что $\bar{q}_1$ будет ортогонален вектору $\bar{a}$, $\bar{q}_i$ будет ортогонален векторам $\bar{a}$, $\bar{q}_1$, $\bar{q}_2$, ..., $\bar{q}_{i-1}$, $i=2, 3, \ldots, n$ (см. задачу Т35.8). Докажем, что множество всех точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (39.1), образуют гиперплоскость

$$L+(t_1\bar{q}_1+\ldots+t_{n-1}\bar{q}_{n-1}) \tag{39.3}$$

Рассмотрим произвольную точку X из Af^n, отличную от L. По определению базиса, вектор $\overline{LX}$ является линейной комбинацией векторов $\overline{q}_1, \overline{q}_2, \ldots, \overline{q}_{n-1}, \overline{a}$:

$$\overline{LX} = t_1\overline{q}_1 + \ldots + t_{n-1}\overline{q}_{n-1} + t_n\overline{a}\ , \tag{39.4}$$

где t_1, t_2, ..., t_n — некоторые числа. Домножим обе части этого равенства скалярно на вектор $\overline{a}$: $[\overline{a}\cdot\overline{LX}] = [\overline{a}\cdot t_1\overline{q}_1] + \ldots + [\overline{a}\cdot t_{n-1}\overline{q}_{n-1}] + [\overline{a}\cdot t_n\overline{a}]$.

Так как $[\overline{a}\cdot t_i\overline{q}_i] = t_i[\overline{a}\cdot\overline{q}_i] = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, то $[\overline{a}\cdot\overline{LX}] = t_n[\overline{a}\cdot\overline{a}]$.

Отсюда

$$\begin{aligned} &[\overline{a}\cdot\overline{LX}] = t_n|\overline{a}|^2 \Leftrightarrow a_1(x_1 - l_1) + \ldots + a_n(x_n - l_n) = t_n|\overline{a}|^2 \Leftrightarrow \\ &a_1x_1 + \ldots + a_nx_n - (a_1l_1 + \ldots + a_nl_n) = t_n|\overline{a}|^2 \Leftrightarrow \\ &a_1x_1 + \ldots + a_nx_n - \left(a_i\left(\frac{-b}{a_i}\right)\right) = t_n|\overline{a}|^2 \Leftrightarrow \\ &a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + b = t_n|\overline{a}|^2 . \end{aligned} \tag{39.5}$$

Если координаты точки X удовлетворяют уравнению (39.1), то левая часть в (39.5) равна нулю, откуда $t_n = 0$ и, следовательно, точка X принадлежит гиперплоскости (39.3) ввиду (39.4). С другой стороны, если точка X принадлежит гиперплоскости (39.3), то в (39.4) $t_n = 0$ и, следовательно, $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + b = 0$ ввиду (39.5), т. е. координаты точки X удовлетворяют уравнению (39.1). Теорема доказана.

Компьютерный раздел

Встроенная функция `minerr(X)` служит для решения систем уравнений относительно координат n-мерной точки X. По аналогии с функцией `find`, функция `minerr` должна завершать блок решения, начинающийся ключевым словом `Given`; блоку решения должны предшествовать стартовые (начальные) значения координат искомой точки X. Но в отличие от функции `find`, в случае неразрешимости системы уравнений функция `minerr` все же находит некоторую точку, которая минимизирует сумму квадратов отклонений левых частей уравнений решаемой системы от их правых частей. Рассмотрим пример: с помощью функции `minerr` на прямой $y = -x + 4$ найдем точку, ближайшую к началу координат (0, 0):

$x := 0$ $y(x) := (-1)\cdot x + 4$

Given $x^2 + y(x)^2 = 0$ $\mathrm{minerr}(x)^T = (2\ \ 2)$

Хотя уравнение $x^2 + (-x + 4)^2 = 0$ не имеет решений, но функцией `minerr` на прямой найдена точка (2, 2), ближайшая к началу координат.

Задачи для самостоятельного решения

Т39.1. Доказать, что для любой k-мерной плоскости в пространстве Af^n верно $k \le n$.

Т39.2. Доказать, что n-мерная плоскость пространства Af^n совпадает с Af^n.

Т39.3. Даны две пересекающиеся прямые $A + t\overline{p}$ и $B + t\overline{s}$. Доказать, что эти прямые совпадают, если и только если направляющие векторы $\overline{p}, \overline{s}$ линейно зависимы.

Т39.4. Даны две прямые $A + t\overline{p}$, $B + t\overline{s}$ в пространстве Af^n. Доказать, что эти прямые имеют одну общую точку, если и только если $\overline{p}$ и $\overline{s}$ линейно независимы и вектор $\overline{AB}$ является линейной комбинацией векторов $\overline{p}, \overline{s}$.

Т39.5. Найти точку пересечения двух прямых $A + t\overline{p}$ и $B + t\overline{s}$, если $A = (2, 1, 1, 3, -3)$, $\overline{p} = (2, 3, 1, 1, -1)$, $B = (1, 1, 2, 1, 2)$, $\overline{s} = (1, 2, 1, 0, 1)$.

Т39.6. Найти точку пересечения двух прямых $A + t\overline{p}$ и $B + t\overline{s}$, если $A =$ $= (3, 1, 2, 1, 3)$, $\overline{p} = (1, 0, 1, 1, 2)$, $B = (2, 2, -1, -1, -2)$, $\overline{s} = (2, 1, 0, 1, 1)$.

Общая формулировка задач К39.1—К39.11

В пространстве Af^n заданы две плоскости, соответственно проходящие через точки A и B параллельно системам векторов V и W. Найти две точки, принадлежащие этим плоскостям, расстояние между которыми минимально; найти это расстояние.

К39.1. $A = (3, 1, 2, 1, 3)$, $B = (2, 2, -1, -1, -2)$, $V = \{\overline{p}_1, \overline{p}_2\}$, $W = \{\overline{s}_1, \overline{s}_2\}$,

$\overline{p}_1 = (1, 0, 1, 1, 2)$, $\overline{p}_2 = (-1, 0, -3, 0, 5)$, $\overline{s}_1 = (2, 1, 0, 1, 1)$, $\overline{s}_2 = (0, 0, 1, 1, -2)$.

К39.2. $A = (2, 1, 1, 3, -3)$, $B = (1, 1, 2, 1, 2)$, $V = \{\overline{p}_1\}$, $W = \{\overline{s}_1\}$,

$\overline{p}_1 = (2, 3, 1, 1, -1)$, $\overline{s}_1 = (1, 2, 1, 0, 1)$.

К39.3. $A = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$, $B = (2, 1, 2, 1, 2, 1)$, $V = \{\overline{p}_1, \overline{p}_2\}$, $W = \{\overline{s}_1\}$,

$\overline{p}_1 = (2, 1, 3, 4, 1, 5)$, $\overline{p}_2 = (7, -2, 3, 1, 2, 3)$, $\overline{s}_1 = (0, 1, 0, 1, 8, -7)$.

К39.4. A = (1, 2, 3, 4), B = (4, 3, 2, 1), $V=\{\,\overline{p}_1,\overline{p}_2,\overline{p}_3\}$, $W=\{\,\overline{s}_1,\overline{s}_2\}$,

$\overline{p}_1=(1,0,0,0)$, $\overline{p}_2=(0,2,0,0)$, $\overline{p}_3=(0,0,3,0)$, $\overline{s}_1=(0,0,0,1)$, $\overline{s}_2=(1,1,1,1)$.

К39.5. A = (1, 2, 3, 1), B = (4, 3, 2, 4), $V=\{\,\overline{p}_1\}$, $W=\{\,\overline{s}_1,\overline{s}_2,\overline{s}_3\}$,

$\overline{p}_1=(2,2,2,3)$, $\overline{s}_1=(1,0,0,0)$, $\overline{s}_2=(0,1,0,0)$, $\overline{s}_3=(0,0,1,0)$.

К39.6. A = (2, 2, –1, –1, –2), B = (3, 1, 2, 1, 3), $V=\{\,\overline{p}_1\}$, $W=\{\,\overline{s}_1\}$,

$\overline{p}_1=(1,0,1,1,2)$, $\overline{s}_1=(2,1,0,1,1)$.

К39.7. A = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), B = (7, 6, 5, 4, 3, 2, 1), $V=\{\,\overline{p}_1,\overline{p}_2\}$, $W=\{\,\overline{s}_1,\overline{s}_2,\overline{s}_3\}$,

$\overline{p}_1=(4,2,2,2,2,2,2)$, $\overline{p}_2=(2,4,2,2,2,2,2)$, $\overline{s}_1=(0,0,1,1,1,1,1)$,

$\overline{s}_2=(0,0,1,0,1,0,1)$, $\overline{s}_3=(0,0,0,0,0,0,1)$.

К39.8. A = (–1, –2, 2, 1), B = (0, 0, 0, 0), $V=\{\,\overline{p}_1\}$, $W=\{\,\overline{s}_1\}$,

$\overline{p}_1=(0,1,0,1)$, $\overline{s}_1=(0,2,0,2)$.

К39.9. A = (–1, –2, 1, 2), B = (0, 0, 0, 1), $V=\{\,\overline{p}_1\}$, $W=\{\,\overline{s}_1\}$,

$\overline{p}_1=(0,0,1,0)$, $\overline{s}_1=(0,1,0,0)$.

К39.10. A = (0, 0, 0), B = (1, 1, 1), $V=\{\,\overline{p}_1,\overline{p}_2\}$, $W=\{\,\overline{s}_1\}$,

$\overline{p}_1=(1,0,0)$, $\overline{p}_2=(0,1,0)$ $\overline{s}_1=(2,2,1)$.

К39.11. A = (3, 1, 2, 1, 3), B = (2, 2, –1, –1, –2), $V=\{\,\overline{p}_1,\overline{p}_2\}$, $W=\{\,\overline{s}_1,\overline{s}_2\}$,

$\overline{p}_1=(4,0,1,1,2)$, $\overline{p}_2=(7,3,2,0,1)$, $\overline{s}_1=(2,1,0,1,1)$, $\overline{s}_2=(0,0,1,1,-2)$.

Ответы, указания, решения

Т39.1. k-мерная плоскость параллельна линейно независимой системе k векторов из $\Re^n$. Поэтому в силу следствия 35.2 $k \le n$.

Т39.2. Пусть данная n-мерная плоскость параллельна линейно независимой системе n векторов $\{\,\overline{p}_1,\overline{p}_2,\ \ldots,\ \overline{p}_n\}$ и проходит через точку $M \in Af^n$. В силу утверждения задачи Т35.7 система векторов $\{\,\overline{p}_1,\overline{p}_2,\ \ldots,\ \overline{p}_n\}$ является базисом пространства $\Re^n$ и, следовательно, для любой точки

$X \in Af^n$ вектор $\overline{MX}$ есть линейная комбинация векторов $\overline{p}_1, \overline{p}_2, \ldots, \overline{p}_n$. Последнее означает, что любая точка X принадлежит данной n-мерной плоскости.

Т39.3. Пусть данные прямые пересекаются в точке $M = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$. Предположим вначале, что система векторов $\{\overline{p}, \overline{s}\}$ линейно зависима. Тогда в силу утверждения 32.3 $\overline{p} = r\overline{s}$ для некоторого ненулевого числа r. Запишем первую прямую в покоординатном виде:

$$\frac{x_1 - m_1}{rs_1} = \frac{x_2 - m_2}{rs_2} = \ldots = \frac{x_n - m_n}{rs_n}.$$

После сокращения на число r получим покоординатную запись второй прямой. Это доказывает совпадение данных прямых.

Предположим теперь обратное: данные прямые совпадают. Возьмем некоторую точку $L \neq M$, принадлежащую этим прямым. Тогда $\overline{ML} = t_1\overline{p}$, $\overline{ML} = t_2\overline{s}$. Отсюда $\frac{t_1}{t_2}\overline{p} = \overline{s}$, что и означает линейную зависимость системы векторов $\{\overline{p}, \overline{s}\}$ (утверждение 32.3).

Т39.4. Предположим, что данные прямые имеют общую точку M. Тогда $M = A + t_1\overline{p}$, $M = B + t_2\overline{s}$ для некоторых чисел t_1, t_2, откуда $\overrightarrow{AM} = t_1\overline{p}$, $\overline{BM} = t_2\overline{s}$, $\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB} = t_1\overline{p} + (-t_2\overline{s})$ (см. задачу Т31.9), т. е. вектор $\overline{AB}$ есть линейная комбинация векторов $\overline{p}$, $\overline{s}$. Линейная независимость векторов $\{\overline{p}, \overline{s}\}$ следует из утверждения задачи Т39.3.

Предположим теперь, что вектор $\overline{AB}$ является линейной комбинацией линейно независимых векторов $\overline{p}$, $\overline{s}$: $\overline{AB} = t_1\overline{p} - t_2\overline{s}$. Обозначим через N точку $A + t_1\overline{p}$, а через L — точку $B + t_2\overline{s}$. Тогда $\overline{AN} = t_1\overline{p}$, $\overline{LB} = -t_2\overline{s}$, $\overline{AN} + \overline{LB} = t_1\overline{p} - t_2\overline{s} = \overline{AB}$. Согласно утверждению задачи Т31.9,

$\overline{AN} + \overline{NB} = \overline{AB}$.

Отсюда

$$\overline{AN} + \overline{LB} = \overline{AN} + \overline{NB} \Leftrightarrow \overline{LB} = \overline{NB} \Leftrightarrow \overline{LB} + \overline{BN} = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{LN} = \overline{0} \Leftrightarrow L = N,$$

т. е. исходные прямые имеют общую точку L. Других общих точек эти прямые не могут иметь ввиду линейной независимости системы векторов $\{\overline{p}, \overline{s}\}$ (см. задачу Т39.3).

Т39.5. Воспользуемся решением задачи Т39.4, согласно которому для нахождения точки пересечения двух данных прямых необходимо решить систему линейных уравнений $\overline{AB} = t_1\overline{p} - t_2\overline{s}$ относительно переменных t_1, t_2, где $\overline{AB} = (-1, 0, 1, -2, 5)$. Решим ее методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right).$$

Отсюда $t_1 = -2$, $t_2 = -3$. Искомая точка L (см. решение задачи Т39.4) равна $A - 2\overline{p} = (-2, -5, -1, 1, -1)$.

Т39.6. Ответ: (0, 1, –1, –2, –3).

К39.11. Алгоритм решения задачи с помощью Mathcad следующий:

ORIGIN := 1

$$A := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad p_{1,1} := \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad p_{1,2} := \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad s_{1,1} := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad s_{1,2} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$f(t) := A + \sum_{i=1}^{2} t_i \cdot p_{1,i} \qquad g(r) := B + \sum_{i=1}^{2} r_i \cdot s_{1,i} \qquad i := 1..2 \quad t_i := 0 \quad r_i := 0$$

Given $\quad |f(t) - g(r)| = 0 \qquad v := \mathrm{Minerr}(t, r)$

$$v^T = \left[\begin{pmatrix} -1.921 \\ 0.73 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.027 \\ -0.198 \end{pmatrix}\right] \quad g(v_2) = \begin{pmatrix} 1.946 \\ 1.973 \\ -1.198 \\ -1.225 \\ -1.632 \end{pmatrix} \quad f(v_1) = \begin{pmatrix} 0.426 \\ 3.189 \\ 1.539 \\ -0.921 \\ -0.111 \end{pmatrix}$$

$$|f(v_1) - g(v_2)| = 3.699$$

Глава 40

Плоскости и прямые в двумерном и трехмерном пространствах

Так как гиперплоскость в Af^3 — это обычная плоскость трехмерного пространства, а гиперплоскость в Af^2 — это обычная прямая на плоскости, то из теоремы 39.1 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 40.1. Множество точек (x, y, z) пространства Af^3 образуют плоскость, если и только если координаты каждой точки этого множества удовлетворяют уравнению $ax + by + cz + d = 0$, в котором не все константы a, b, c равны нулю. Множество точек (x, y) плоскости образуют прямую, если и только если координаты каждой точки этого множества удовлетворяют уравнению $ax + by + c = 0$, в котором не все константы a, b равны нулю.

Если прямая в Af^3 перпендикулярна плоскости, то ее направляющий вектор называется нормальным вектором этой плоскости. Если прямая на плоскости перпендикулярна другой прямой этой плоскости, то направляющий вектор каждой из этих прямых называется нормальным вектором другой прямой.

Следствие 40.2. Вектор $\overline{n} = (a, b, c)$ является нормальным вектором плоскости, заданной уравнением $ax + by + cz + d = 0$. Вектор $\overline{n} = (a, b)$ является нормальным вектором прямой, заданной уравнением $ax + by + c = 0$.

Доказательство следствия дано в задаче Т40.1.

Следствие 40.3. Точка $M = (x, y, z)$ принадлежит плоскости, проходящей через три различные точки $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, $C = (c_1, c_2, c_3)$, не лежащие на одной прямой, если и только если ее координаты x, y, z удовлетворяют уравнению

$$\begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \\ x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Доказательство. Обозначим:

$$\overline{p}_1 = \overline{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3), \quad \overline{p}_2 = \overline{AC} = (c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3).$$

Так как точки A, B, C не лежат на одной прямой, то прямые, проходящие через точку A и имеющие направляющие векторы $\overline{p}_1$ и $\overline{p}_2$, не совпадают. Следовательно, векторы $\overline{p}_1$ и $\overline{p}_2$ линейно независимы (см. задачу T39.3). Поэтому искомая плоскость должна проходить через точку A параллельно линейно независимой системе векторов $\{\overline{p}_1, \overline{p}_2\}$. По определению, точки этой плоскости имеют вид $A + t_1\overline{p}_1 + t_2\overline{p}_2$, где t_1, t_2 — произвольные числа. При доказательстве теоремы 39.1 было показано, что эта плоскость может быть задана уравнением $|B| = 0$, где B — матрица, строки которой совпадают с векторами $\overline{p}_1, \overline{p}_2$, $\overline{AM} = (x - a_1, y - a_2, z - a_3)$. Следствие доказано.

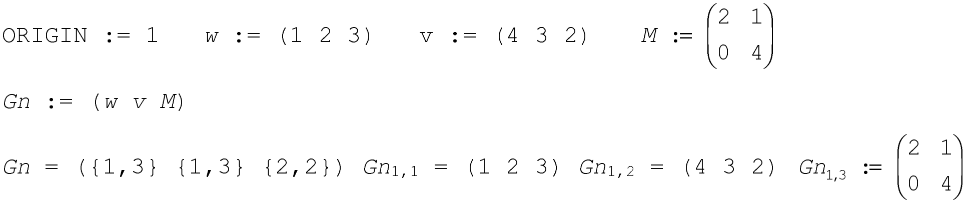
Следствие 40.4. Точка $M = (x, y)$ на плоскости принадлежит прямой, проходящей через две различные точки $A = (a_1, a_2)$ и $B = (b_1, b_2)$ этой плоскости, если и только если ее координаты x, y удовлетворяют уравнению

$$\begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ x - a_1 & y - a_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство следствия дано в задаче T40.2.

Компьютерный раздел

В Mathcad допускается использование так называемых "гнездовых" матриц (nested arrays), т. е. матриц, элементами которых являются другие матрицы. Рассмотрим следующий фрагмент рабочего листа документа:



$\mathrm{ORIGIN} := 1 \quad w := (1\ 2\ 3) \quad v := (4\ 3\ 2) \quad M := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$Gn := (w\ v\ M)$

$Gn = (\{1,3\}\ \{1,3\}\ \{2,2\}) \quad Gn_{1,1} = (1\ 2\ 3) \quad Gn_{1,2} = (4\ 3\ 2) \quad Gn_{1,3} := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

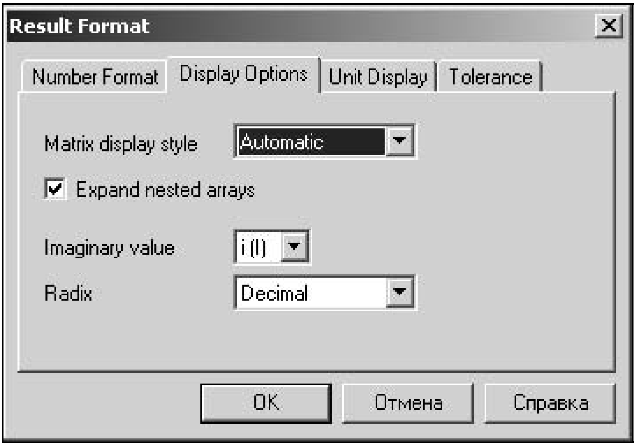
Как видно из этого примера, гнездовая матрица Gn состоит из трех элементов — $Gn_{1,1}$, $Gn_{1,2}$, $Gn_{1,3}$, являющихся соответственно матрицами $(1\ 2\ 3)$, $(4\ 3\ 2)$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Чтобы извлечь элемент "элемента" матрицы Gn, следует перейти во второй "ярус" индексов. Пусть, например, требуется извлечь элемент на позиции (2, 1) матрицы $Gn_{1,3}$. Введите идентификатор Gn и нажатием клавиши <[> перейдите в режим ввода индексов первого яруса. Введите индексы 1, 3 и правым уголком синего курсора охватите все введенное выражение. Нажатием клавиши <[> перейдите в режим ввода индексов второго яруса и введите индексы 2, 1. После нажатия клавиши <=> получите $\left(Gn_{1,3}\right)_{2,1} = 0$.

Отобразить на рабочем листе все элементы "элемента" $Gn_{1,3}$ с использованием ранжированных переменных можно так:

$i := 1..2 \quad j := 1..2 \quad \left(Gn_{1,3}\right)_{i,j} =$

2
0
1
4

Для отображения на рабочем листе всех элементов гнездовых матриц надо воспользоваться вкладкой **Display Options** (Опции отображения), диалогового окна **Result Format** (Формат результата) (рис. 40.1), отметив опцию **Expand nested arrays** (Развернуть вложенные массивы).



Result Format

Matrix display style: Automatic

☑ Expand nested arrays

Imaginary value: i (I)

Radix: Decimal

Рис. 40.1. Диалоговое окно **Result Format**

Окно **Result Format** (Формат результата) вызывается двойным щелчком на области любого численного результата. Так, если дважды щелкнуть левой кнопкой мыши на области `({1,3} {1,3} {2,2})` в блоке

`Gn = ({1,3} {1,3} {2,2})` и в появившемся окне на вкладке **Display Options** (Параметры экрана) отметить опцию **Expand nested arrays** (Развернуть вложенные массивы), то на рабочем листе появится следующий результат: $Gn = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}4 & 3 & 2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}\end{bmatrix}$.

Гнездовые матрицы не допускают матричных операций. Однако к ним применимы векторизация и встроенные функции `augment`, `stack`, `submatrix`, `cols`, `rows`. Например,

$$N := \begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$$

$$Gm := (v\ \ v\ \ N) \qquad \overrightarrow{(Gn + Gm)} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix}5 & 5 & 5\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}8 & 6 & 4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{cols}(Gn) = 3 \qquad \mathrm{stack}(Gn,\ Gm) = \begin{pmatrix}\{1,\ 3\} & \{1,\ 3\} & \{2,\ 2\}\\ \{1,\ 3\} & \{1,\ 3\} & \{2,\ 2\}\end{pmatrix}$$

`submatrix(Gn, 1, 1, 1, 2) = ({1, 3} {1, 3})`

С помощью встроенной функции `CreateSpace(f1, f2, f3, ti, te, s)` строятся параметрические кривые в трехмерном пространстве. При этом координаты точек кривой задаются в виде вектор-функции $\begin{pmatrix}f1(t)\\ f2(t)\\ f3(t)\end{pmatrix}$; диапазон изменения параметра t совпадает с промежутком $[ti;\ te]$, а сама функция `CreateSpace` формирует гнездовую матрицу $\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\\ Z\end{pmatrix}\end{pmatrix}$, где X, Y, Z — матрицы размера $s\times 1$, элементами которых являются соответственно x-координаты, y-координаты, z-координаты точек кривой. Если функция $F(t)$ определена в виде $F(t) := \begin{pmatrix}f1(t)\\ f2(t)\\ f3(t)\end{pmatrix}$, то возможна более экономная запись: `CreateSpace(F, ti, te, r)`.

Рассмотрим следующий пример:

$$\mathrm{ORIGIN} := 1 \quad F(t) := \begin{pmatrix}t\\ t\\ t^3\end{pmatrix} \qquad P := \mathrm{CreateSpace}(F,\ 0,\ 4,\ 8)$$

$$P = (\{3,\ 1\}) \quad P_1 = \begin{pmatrix} \{8,\ 1\} \\ \{8,\ 1\} \\ \{8,\ 1\} \end{pmatrix}$$

$$(P_1)_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.571 \\ 1.143 \\ 1.714 \\ 2.286 \\ 2.857 \\ 3.429 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (P_1)_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.571 \\ 1.143 \\ 1.714 \\ 2.286 \\ 2.857 \\ 3.429 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (P_1)_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.187 \\ 1.493 \\ 5.038 \\ 11.942 \\ 23.324 \\ 40.303 \\ 64 \end{pmatrix}$$

Как видно из этого примера, P — гнездовая матрица, состоящая из единственного элемента P_1, который, в свою очередь, является гнездовой матрицей (вектором) размера 3×1. Элементами P_1 являются матрицы (векторы) $(P_1)_1$, $(P_1)_2$, $(P_1)_3$ размера 8×1 (отметим, что в данном случае $s = 8$). С помощью встроенной функции `CreateMesh(f1, f2, f3, ti, te, ri, re, s, u)` строятся параметрические поверхности в трехмерном пространстве. При этом координаты точек поверхности задаются в виде вектор-функции $\begin{pmatrix} f1(t,r) \\ f2(t,r) \\ f3(t,r) \end{pmatrix}$, диапазоны изменения параметров t и r совпадают соответственно с промежутками $[ti;\ te]$ и $[ri;\ re]$, а сама функция `CreateMesh` формирует гнездовую матрицу $\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, где X, Y, Z — матрицы размера $s\times u$, элементами которых являются соответственно x-координаты, y-координаты, z-координаты точек поверхности.

Рассмотрим следующий пример:

$$F(t,r) := \begin{pmatrix} t + 3 \\ r + 3 \\ t + r + 3 \end{pmatrix} \qquad PL := \mathrm{CreateMesh}(F,\ 0,\ 5,\ 0,\ 5,\ 25,\ 22)$$

$$PL = (\{3,\ 1\})$$

$$PL_1 = \begin{pmatrix} \{25,\ 22\} \\ \{25,\ 22\} \\ \{25,\ 22\} \end{pmatrix}$$

$(PL_1)_3 =$

	15	16	17	18	19	20	21	22
11	8.42	8.65	8.89	9.13	9.37	9.61	9.85	10.08
12	8.63	8.86	9.1	9.34	9.58	9.82	10.05	10.29
13	8.83	9.07	9.31	9.55	9.79	10.02	10.26	10.5
14	9.04	9.28	9.52	9.76	9.99	10.23	10.47	10.71
15	9.25	9.49	9.73	9.96	10.2	10.44	10.68	10.92
16	9.46	9.7	9.93	10.17	10.41	10.65	10.89	11.13
17	9.67	9.9	10.14	10.38	10.62	10.86	11.1	11.33
18	9.88	10.11	10.35	10.59	10.83	11.07	11.3	11.54
19	10.08	10.32	10.56	10.8	11.04	11.27	11.51	11.75
20	10.29	10.53	10.77	11.01	11.24	11.48	11.72	11.96
21	10.5	10.74	10.98	11.21	11.45	11.69	11.93	12.17
22	10.71	10.95	11.18	11.42	11.66	11.9	12.14	12.38
23	10.92	11.15	11.39	11.63	11.87	12.11	12.35	12.58
24	11.13	11.36	11.6	11.84	12.08	12.32	12.55	12.79
25	11.33	11.57	11.81	12.05	12.29	12.52	12.76	13

Как видно из этого примера, `PL` — гнездовая матрица, состоящая из единственного элемента `PL1`, который, в свою очередь, является гнездовой матрицей размера 3×1. Элементами `PL1` являются матрицы $(PL_1)_1$, $(PL_1)_2$, $(PL_1)_3$ размера 25×22 (отметим, что в данном случае $s = 25$, $u = 22$).

Шаблон для построения параметрических кривых и поверхностей (рис. 40.3) вызывается кнопкой подпанели **График** (Graph), изображенной на рис. 40.2. На месте единственной метки вводятся (через запятую) идентификаторы гнездовых матриц, сформированных функциями `CreateSpace` и `CreateMesh`. Так, если на месте метки ввести идентификаторы `P`, `PL`, то после щелчка вне области шаблона получите графики кривой и поверхности, о которых шла речь выше (рис. 40.4).

Рис. 40.2. Подпанель **График**

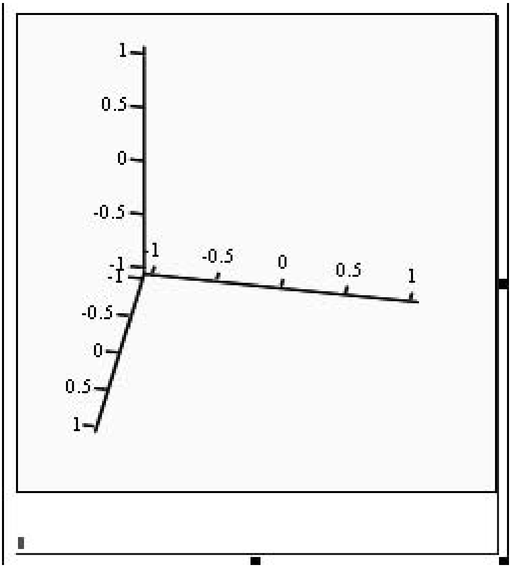


Рис. 40.3. Шаблон для построения параметрических кривых и поверхностей

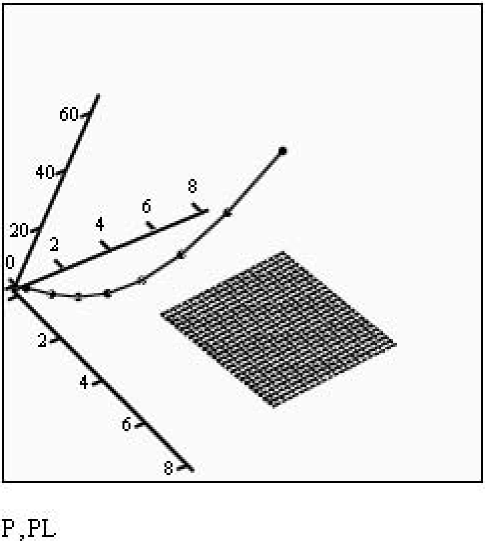
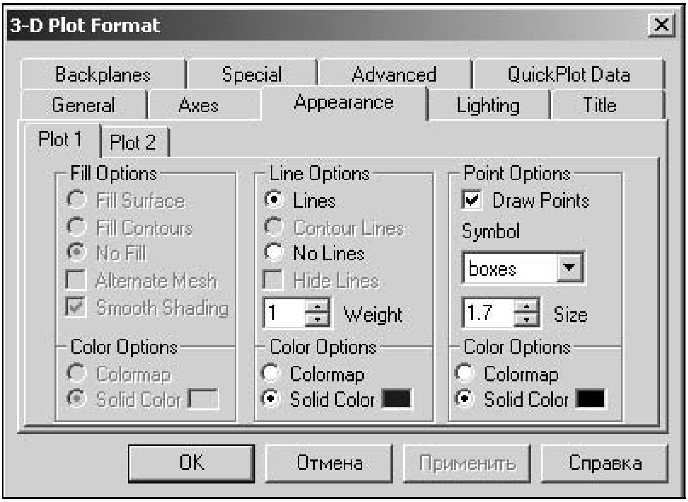


Рис. 40.4. Графики кривой и поверхности

Диалоговое окно форматирования **3-D Plot Format** (Формат трехмерного графика) вызывается двойным щелчком левой кнопки мыши на области графика и содержит 9 вкладок. Для форматирования параметрических кривых и поверхностей важна вкладка **Appearance** (Появление), связанная с вкладками **Plot 1**, **Plot 2**, **Plot 3**, ..., соответствующими идентификаторам, введенным на месте метки шаблона параметрического графика.

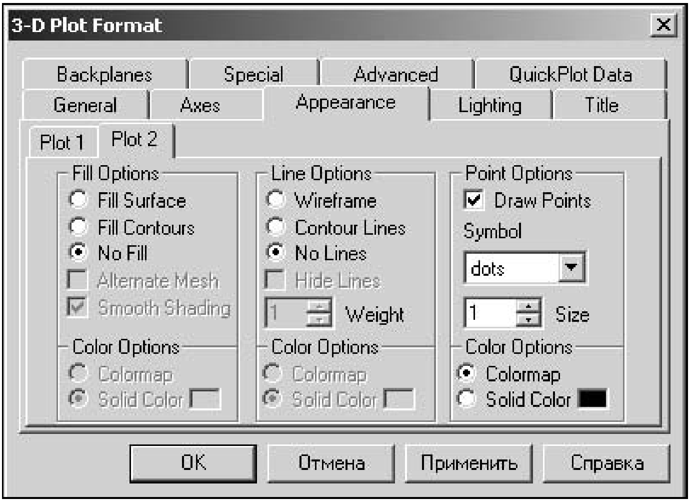


Fill Options
○ Fill Surface
○ Fill Contours
● No Fill
☐ Alternate Mesh
☑ Smooth Shading
Color Options
○ Colormap
● Solid Color ☐

Line Options
● Lines
○ Contour Lines
○ No Lines
☐ Hide Lines
1 Weight
Color Options
○ Colormap
● Solid Color ■

Point Options
☑ Draw Points
Symbol: boxes
1.7 Size
Color Options
○ Colormap
● Solid Color ■

Рис. 40.5. Вкладка **Appearance**, содержащаяся во вкладке **Plot 1** диалогового окна **3-D Plot Format**



Fill Options
○ Fill Surface
○ Fill Contours
● No Fill
☐ Alternate Mesh
☑ Smooth Shading
Color Options
○ Colormap
● Solid Color ☐

Line Options
○ Wireframe
○ Contour Lines
● No Lines
☐ Hide Lines
1 Weight
Color Options
○ Colormap
● Solid Color ☐

Point Options
☑ Draw Points
Symbol: dots
1 Size
Color Options
● Colormap
○ Solid Color ■

Рис. 40.6. Вкладка **Appearance**, содержащаяся во вкладке **Plot 2** диалогового окна **3-D Plot Format**

Так, на рис. 40.5 и 40.6 показаны вкладки **Appearance**, связанные с вкладками **Plot 1** и **Plot 2** соответственно; при этом установленные опции и параметры в группах **Line Options** (Опции линии), **Point Options** (Опции точек) обеспечивают именно тот формат графика, который показан на рис. 40.4.

Вращение графика осуществляется следующим образом. Щелкните левой кнопкой мыши на области графика и, удерживая эту кнопку, передвигайте мышь в том или ином направлении. Если передвигать мышь при нажатой клавише <Ctrl>, то можно отдалять или приближать объект; этот же эффект достигается с помощью колесика мыши (если таковое имеется).

Задачи для самостоятельного решения

T40.1. Доказать следствие 40.2.

T40.2. Доказать следствие 40.4.

T40.3. Пусть две плоскости заданы уравнениями $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Доказать, что косинус угла между ними равен $\dfrac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$.

T40.4. Пусть две плоскости заданы уравнениями $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Доказать, что они перпендикулярны, если и только если $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

T40.5. Пусть две плоскости заданы уравнениями $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Доказать, что они параллельны, если и только если существует такое число α, что $a_1 = \alpha a_2$, $b_1 = \alpha b_2$, $c_1 = \alpha c_2$, $d_1 \neq \alpha d_2$.

T40.6. Доказать, что если плоскость пересекает оси координат $0x$, $0y$, $0z$ в точках $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$, причем $abc \neq 0$, то ее уравнение можно задать в виде $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.

T40.7. Доказать, что уравнение прямой, проходящей в трехмерном пространстве через две различные точки (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), можно записать в виде

$$\frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2} = \frac{z - a_3}{b_3 - a_3}.$$

Т40.8. Сформулировать и доказать утверждения, аналогичные утверждениям задач Т40.3—Т40.7, для прямых на плоскости.

Общая формулировка задач П40.1—П40.21

Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$. Найти: длину ребра AB; угол между ребрами AB и AD; уравнение прямой AB; уравнение плоскости ABC; уравнение высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

П40.1. $A = (1, -1, 2)$, $B = (2, -1, 3)$, $C = (1, 3, -1)$, $D = (2, 0, -2)$.

П40.2. $A = (0, -2, 5)$, $B = (6, 6, 0)$, $C = (3, -3, 6)$, $D = (2, -1, 3)$.

П40.3. $A = (4, 5, -3)$, $B = (6, 3, 0)$, $C = (8, 5, -9)$, $D = (-3, -2, -10)$.

П40.4. $A = (5, -6, 2)$, $B = (2, -1, 3)$, $C = (1, 9, -1)$, $D = (2, -1, -2)$.

П40.5. $A = (-5, 6, 2)$, $B = (8, -1, 3)$, $C = (2, 1, -1)$, $D = (3, -1, -4)$.

П40.6. $A = (-1, 1, 2)$, $B = (8, -1, 1)$, $C = (2, 1, -1)$, $D = (-3, -1, -4)$.

П40.7. $A = (-1, 1, 1)$, $B = (1, -1, 1)$, $C = (2, 2, 2)$, $D = (-3, -1, 2)$.

П40.8. $A = (-1, 2, 1)$, $B = (3, -3, 3)$, $C = (2, 1, 2)$, $D = (-3, 1, 2)$.

П40.9. $A = (-1, 2, 1)$, $B = (4, -3, 3)$, $C = (5, 1, 2)$, $D = (0, 1, 2)$.

П40.10. $A = (-4, 3, 1)$, $B = (4, -5, 3)$, $C = (5, 1, 6)$, $D = (0, 1, 3)$.

П40.11. $A = (-4, 4, 1)$, $B = (4, -6, 0)$, $C = (9, 1, 0)$, $D = (-5, 2, 3)$.

П40.12. $A = (7, 7, 3)$, $B = (6, 5, 8)$, $C = (3, 5, 8)$, $D = (8, 4, 1)$.

П40.13. $A = (-7, 7, -3)$, $B = (6, 5, -8)$, $C = (3, -5, 8)$, $D = (-8, 4, 1)$.

П40.14. $A = (10, 6, 6)$, $B = (-2, 8, 2)$, $C = (6, 8, 9)$, $D = (7, 10, 3)$.

П40.15. $A = (2, 1, 4)$, $B = (-1, 5, -2)$, $C = (-7, -3, 2)$, $D = (-6, 3, 6)$.

П40.16. $A = (8, 6, 4)$, $B = (5, 7, 7)$, $C = (5, 3, 1)$, $D = (2, 3, 7)$.

П40.17. $A = (-7, 1, -3)$, $B = (6, 15, -8)$, $C = (4, 5, 2)$, $D = (2, 4, 1)$.

П40.18. $A = (0, -1, -1)$, $B = (-2, 3, 5)$, $C = (1, -5, -9)$, $D = (-1, -6, 3)$.

П40.19. $A = (-4, 2, 6)$, $B = (2, 2, 1)$, $C = (-1, 0, 1)$, $D = (-4, 6, -3)$.

П40.20. $A = (-1, 5, 1)$, $B = (0, 4, 8)$, $C = (2, -1, 7)$, $D = (4, 0, 1)$.

П40.21. $A = (1, -3, 2)$, $B = (2, -1, -1)$, $C = (3, -4, 3)$, $D = (3, 4, 5)$.

Общая формулировка задач К40.1—К40.11

Даны две скрещивающиеся прямые, соответственно проходящие через точки A и B параллельно векторам $\overline{p}$ и $\overline{s}$. Найти: уравнение прямой, содержащей их общий перпендикуляр; уравнения плоскостей, содержащих общий перпендикуляр и одну из данных прямых. Построить 3-мерные графики этих плоскостей, а также данных прямых и их общего перпендикуляра.

К40.1. $A = (28, 9, 19)$, $B = (-1, 1.2, 0)$, $\overline{p} = (-1, 1, 2)$, $\overline{s} = (-1, 3, 3)$.

К40.2. $A = (1, 2, 3)$, $B = (-27, -6.5, -11)$, $\overline{p} = (1, 2, 3)$, $\overline{s} = (-4, 5, 0)$.

К40.3. $A = (4, 1, -1)$, $B = (4, -1, 0)$, $\overline{p} = (1, -4, 2)$, $\overline{s} = (0, -5, 3)$.

К40.4. $A = (1, 2, 4)$, $B = (1, 7, 1)$, $\overline{p} = (0, 2, -1)$, $\overline{s} = (1, -4, 2)$.

К40.5. $A = (2, -2, 3)$, $B = (1, 2, 1)$, $\overline{p} = (0, -5, 3)$, $\overline{s} = (0, 2, -1)$.

К40.6. $A = (3, 0, 6)$, $B = (1, -2, 1)$, $\overline{p} = (3, 2, -1)$, $\overline{s} = (1, 1, 2)$.

К40.7. $A = (3, 4, -1)$, $B = (0, 2, 0)$, $\overline{p} = (1, 1, 2)$, $\overline{s} = (2, 2, 5)$.

К40.8. $A = (1, 0, 0)$, $B = (-2, -2, 1)$, $\overline{p} = (2, 2, 5)$, $\overline{s} = (1, 1, 2)$.

К40.9. $A = (1, 2, 3)$, $B = (0, 1, 1)$, $\overline{p} = (3, 2, -1)$, $\overline{s} = (2, 2, 5)$.

К40.10. $A = (6, 4, 1)$, $B = (1, 2, 0)$, $\overline{p} = (2, 0, 1)$, $\overline{s} = (3, 1, 0)$.

К40.11. $A = (30, 10, 20)$, $B = (0, 2, 0)$, $\overline{p} = (1, -1, 2)$, $\overline{s} = (-1, 3, 3)$.

Ответы, указания, решения

Т40.1. Пусть $P = (x_1, y_1, z_1)$ и $Q = (x_2, y_2, z_2)$ — две произвольные точки данной плоскости. Тогда $\begin{cases} ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0 \end{cases}$. Вычитая из первого уравнения второе, получаем $a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) + c(z_1 - z_2) = 0$. Поскольку $(a, b, c) = \overline{n}$, $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = \overline{PQ}$, то последнее уравнение равносильно следующему $[\overline{n} \cdot \overline{PQ}] = 0$, откуда $\dfrac{[\overline{n} \cdot \overline{PQ}]}{|\overline{n}| \cdot |\overline{PQ}|} = 0$.

Таким образом, косинус угла между векторами $\overline{n}$ и $\overline{PQ}$ *(см. гл. 31)* равен нулю, следовательно, угол между этими векторами равен 90°. Доказано, что прямая с направляющим вектором $\overline{n}$ перпендикулярна каждой прямой данной плоскости (напомним, что точки P, Q выбраны произвольно). Следовательно, она перпендикулярна и самой плоскости.

Второе утверждение следствия доказывается аналогично.

Т40.2. Указание: обоснование провести по аналогии с доказательством следствия 40.3.

Т40.3. Угол между данными плоскостями равен углу между их нормальными векторами $\overline{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ и $\overline{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$, а косинус угла между векторами $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$ (см. гл. 31) равен

$$\frac{[\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2]}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Т40.4. Указание: воспользоваться утверждением задачи Т40.3.

Т40.5. Очевидно, данные плоскости параллельны, если и только если косинус угла между векторами $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$ равен ±1. Остальное следует из утверждения задачи Т31.8.

Т40.6. Воспользуемся следствием 40.3, согласно которому данную плоскость можно задать уравнением $\begin{vmatrix} -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \\ x-a & y & z \end{vmatrix} = 0$. Разложив определитель по последней строке, получим:

$$(x-a)\begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} -a & 0 \\ -a & c \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} -a & b \\ -a & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-a)bc + yac + zab = 0.$$

Разделив это равенство на abc, получим: $\frac{x}{a} - 1 + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$.

Т40.7. Указание: направляющим вектором искомой прямой будет вектор $(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$.

П40.21. Длина ребра AB равна длине вектора $\overline{AB} = (2 - 1, -1 + 3, -1 - 2) =$ $= (1, 2, -3)$: $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$.

Прямые AB и AD имеют направляющие векторы $\overline{AB} = (1, 2, -3)$ и $\overline{AD} = (2, 7, 3)$ соответственно. Поэтому косинус угла между AB и AD равен косинусу угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$:

$$\frac{[\overline{AB} \cdot \overline{AD}]}{|\overline{AB}||\overline{AD}|} = \frac{2+14-9}{\sqrt{14}\sqrt{4+49+9}} = \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{62}}.$$

Следовательно, угол равен $\arccos\frac{7}{\sqrt{14 \cdot 62}}$.

Так как прямая AB проходит через точку A параллельно вектору $\overline{AB} = (1, 2, -3)$, то ее уравнение можно записать в виде

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{-3}.$$

Так как векторы $\overline{AB} = (1, 2, -3)$ и $\overline{AC} = (2, -1, 1)$ не коллинеарны (т. е. их координаты не пропорциональны), то прямые AB и AC не совпадают (см. задачу Т39.3) и, следовательно, точки A, B, C не лежат на одной прямой. Поэтому уравнение плоскости, проходящей через точки A, B, C, согласно следствию 40.3, будет иметь следующий вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ x-1 & y+3 & z-2 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложив этот определитель по последней строке, получим:

$$(x-1)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (y+3)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + 7y + 5z + 10 = 0.$$

Это и есть уравнение искомой плоскости.

Высота, опущенная из вершины D на грань ABC, должна быть перпендикулярна плоскости ABC, т. е. параллельна нормальному вектору этой плоскости. Так как нормальный вектор этой плоскости есть $\overline{n} = (1, 7, 5)$ (следствие 40.2), то уравнение прямой, проходящей через точку D параллельно вектору $\overline{n}$, имеет вид $\frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{7} = \frac{z-5}{5}$.

K40.11. Алгоритм решения задачи с помощью Mathcad следующий. Задать скрещивающиеся прямые $h1(t)$ и $h2(t)$:

$$\mathrm{ORIGIN} := 1 \qquad h1(t) := t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix} \qquad h2(t) := t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

С помощью функции `minerr` найти на этих прямых точки $h1(v_1)$ и $h2(v_2)$, расстояние между которыми наименьшее; найти это расстояние:

$$t1 := 0 \qquad t2 := 0$$

$$\mathrm{Given} \qquad |h1(t1) - h2(t2)| = 0 \qquad v := \mathrm{minerr}(t1, t2)$$

$$v = \begin{pmatrix} -9.727 \\ 1.818 \end{pmatrix} \qquad h1(v_1) = \begin{pmatrix} 20.273 \\ 19.727 \\ 0.545 \end{pmatrix} \qquad h2(v_2) = \begin{pmatrix} -1.818 \\ 7.455 \\ 5.455 \end{pmatrix}$$

$$|h1(v_1) - h2(v_2)| = 25.743$$

Определить прямую $h3(t)$, содержащую общий перпендикуляр двух данных скрещивающихся прямых:

$$h3(t) := (h2(v_2) - h1(v_1)) \cdot t + h1(v_1)$$

Задать плоскости, содержащие общий перпендикуляр и одну из скрещивающихся прямых:

$$pl1(r1, r2) := h1(v_1) + r1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r2 \cdot \left(h2(v_2) - h1(v_1)\right)$$

$$pl2(r1, r2) := h2(v_2) + r1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + r2 \cdot \left(h1(v_1) - h2(v_2)\right)$$

Построить трехмерные графики прямых $h1(t)$, $h2(t)$, их общего перпендикуляра и плоскостей $pl1(r1, r2)$, $pl2(r1, r2)$ (рис. 40.7).

$$r := 30$$

$$H1 := \mathrm{CreateSpace}(h1, v_1 - 5, v_1 + 5, r)$$

$$H2 := \mathrm{CreateSpace}(h2, v_2 - 5, v_2 + 5, r)$$

$$H3 := \mathrm{CreateSpace}(h3, 0, 1, r + 20)$$

$$Pl1 := \mathrm{CreateMesh}(pl1, -5, 5, 0, 1, r, r)$$

$$Pl2 := \mathrm{CreateMesh}(pl2, -5, 5, 0, 1, r, r)$$

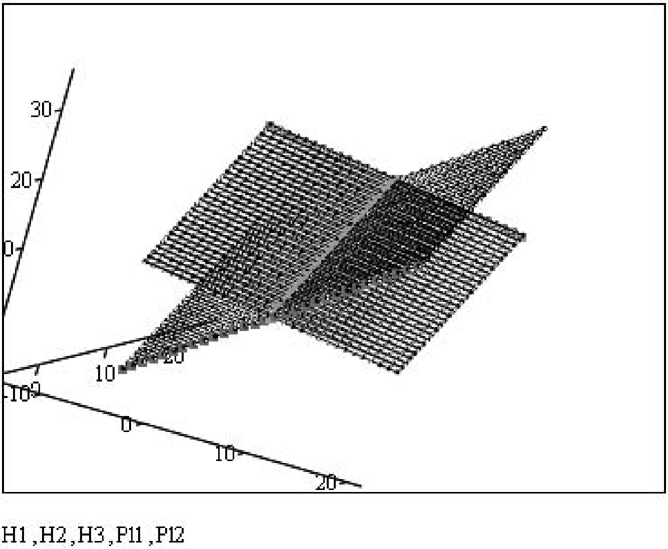
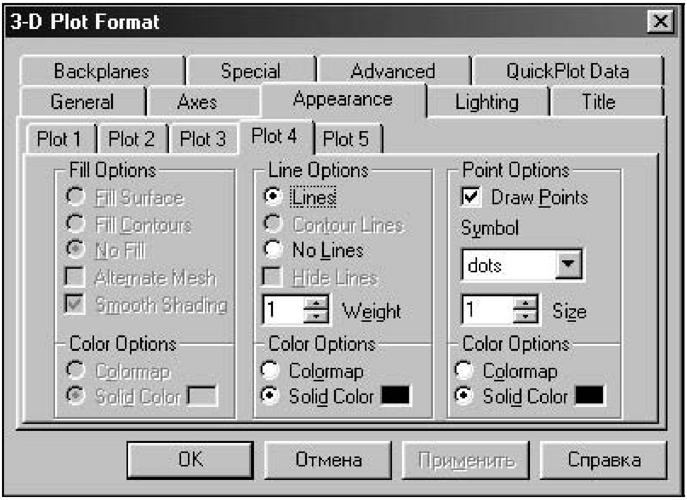


Рис. 40.7. Графики прямых `h1(t)`, `h2(t)`, их общего перпендикуляра и плоскостей `pl1(r1, r2)`, `pl2(r1, r2)`

Этот график отформатирован в соответствии с опциями и параметрами вкладок **Appearance** (Появление), изображенных на рис. 40.8, 40.9.

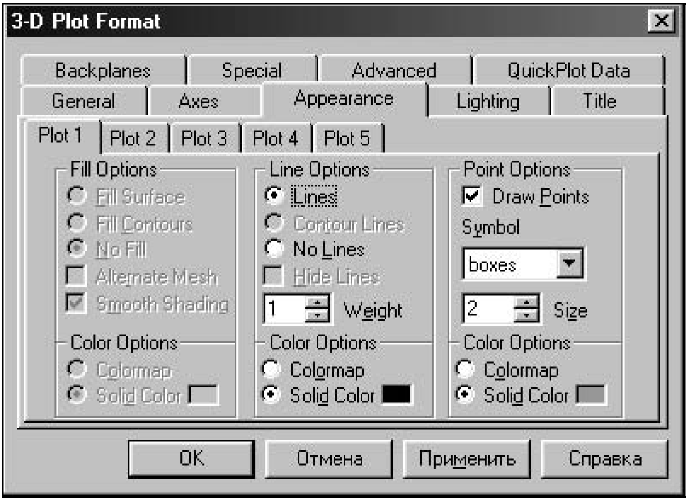


Fill Options
○ Fill Surface
○ Fill Contours
● No Fill
☐ Alternate Mesh
☑ Smooth Shading
Color Options
○ Colormap
● Solid Color

Line Options
● Lines
○ Contour Lines
○ No Lines
☐ Hide Lines
1 Weight
Color Options
○ Colormap
● Solid Color

Point Options
☑ Draw Points
Symbol
dots
1 Size
Color Options
○ Colormap
● Solid Color

Рис. 40.8. Параметры вкладки **Plot 4** вкладки **Appearance** диалогового окна **3-D Plot Format**



Fill Options
○ Fill Surface
○ Fill Contours
● No Fill
☐ Alternate Mesh
☑ Smooth Shading

Color Options
○ Colormap
● Solid Color

Line Options
● Lines
○ Contour Lines
○ No Lines
☐ Hide Lines
1 Weight

Color Options
○ Colormap
● Solid Color

Point Options
☑ Draw Points
Symbol
boxes
2 Size

Color Options
○ Colormap
● Solid Color

Рис. 40.9. Параметры вкладки **Plot 1** вкладки **Appearance** диалогового окна **3-D Plot Format**

Глава 41

Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов, суть которого сконцентрирована в теореме 41.1, позволяет решать многие важные прикладные задачи. Две такие задачи будут рассмотрены в данной главе.

Теорема 41.1. Пусть дана матрица A размера $m \times n$ с линейно независимыми столбцами и вектор-столбец $\bar{c} \in \Re^m$. Среди всех векторов $\bar{x}$ пространства $\Re^n$ существует единственный вектор $\bar{z} = \left((A^T A)^{-1} A^T \bar{c}\right)^T$, для которого величина $\left|A\bar{x}^T - \bar{c}\right|^2$ минимальна.

Доказательство. Предположим вначале, что матрица $A^T A$ вырождена. Тогда однородная система линейных уравнений $A^T A\, \bar{x}^T = \bar{0}^T$ имеет ненулевое решение $\bar{d}$, т. е. $A^T A\, \bar{d}^T = \bar{0}^T$. Домножив обе части этого уравнения слева на $\bar{d}$, получим $\bar{d} A^T A\, \bar{d}^T = \bar{d}\ \bar{0}^T = 0$. Теперь применим теорему 33.1, утверждение 33.1 и утверждение задачи Т33.6:

$$0 = \bar{d} A^T A\, \bar{d}^T = [\bar{d} \cdot (A^T A\, \bar{d}^T)^T] = [\bar{d} \cdot \bar{d} A^T A] = [\bar{d} A^T \cdot \bar{d} A^T] = \left|(A\, \bar{d}^T)^T\right|^2.$$

Отсюда $A\bar{d}^T = \bar{0}^T$ (см. задачу Т31.1). А это означает линейную зависимость столбцов матрицы A. Противоречие.

Итак, доказана невырожденность матрицы $A^T A$. Но тогда существует обратная матрица $(A^T A)^{-1}$ (следствие 36.3). Осталось доказать, что для любого, отличного от $\bar{z}$, вектора $\bar{x}$ из $\Re^n$ выполняется неравенство $\left|A\bar{z}^T - \bar{c}\right|^2 < \left|A\bar{x}^T - \bar{c}\right|^2$.

Обозначим вектор $\overline{x}-\overline{z}$ через $\overline{y}$. Применяя теорему 33.1 и утверждение 33.1, получим:

$$[(A\overline{y}^T)^T\cdot(A\overline{z}^T-\overline{c})^T]=\overline{y}A^T(A\overline{z}^T-\overline{c})=\overline{y}(A^TA\overline{z}^T-A^T\overline{c})=$$
$$=\overline{y}\Big((A^TA)\cdot(A^TA)^{-1}\cdot(A^T\overline{c})-A^T\overline{c}\Big)=\overline{y}(A^T\overline{c}-A^T\overline{c})=0,$$

т. е. векторы $(A\overline{y}^T)^T$, $(A\overline{z}^T-\overline{c})^T$ ортогональны.

Из равенства $A\overline{y}^T=A\overline{x}^T-A\overline{z}^T$ следует, что $A\overline{x}^T-\overline{c}=A\overline{y}^T+(A\overline{z}^T-\overline{c})$.

Отсюда, используя теорему 33.1 и ортогональность векторов $(A\overline{y}^T)^T$ и $(A\overline{z}^T-\overline{c})^T$, получаем:

$$\left|A\overline{x}^T-\overline{c}\right|^2=[(A\overline{y}^T+(A\overline{z}^T-\overline{c}))^T\cdot(A\overline{y}^T+(A\overline{z}^T-\overline{c}))^T]=$$
$$=[(\overline{y}A^T+(A\overline{z}^T-\overline{c})^T)\cdot(\overline{y}A^T+(A\overline{z}^T-\overline{c})^T)]=$$
$$=[\overline{y}A^T\cdot\overline{y}A^T]+[(A\overline{z}^T-\overline{c})^T\cdot(A\overline{z}^T-\overline{c})^T]=$$
$$=\left|\overline{y}A^T\right|^2+\left|A\overline{z}^T-\overline{c}\right|^2.$$

Ввиду линейной независимости столбцов матрицы A вектор $A\overline{y}^T$ отличен от нулевого вектора и потому его длина больше нуля: $\left|A\overline{y}^T\right|^2=\left|\overline{y}A^T\right|^2>0$.

Следовательно, $\left|A\overline{x}^T-\overline{c}\right|^2=\left|\overline{y}A^T\right|^2+\left|A\overline{z}^T-\overline{c}\right|^2>\left|A\overline{z}^T-\overline{c}\right|^2$. Теорема доказана.

Система линейных уравнений (33.5) не всегда имеет решения. В связи с этим возникает вопрос о существовании такого вектора $\overline{z}$ пространства $\Re^n$, который минимизирует отклонение левой части системы (33.5) от ее правой части; при этом за величину отклонения берется квадрат длины вектора $A\overline{x}^T-\overline{c}$. Очевидно, теорема 41.1 отвечает на этот вопрос в случае линейной независимости столбцов матрицы A.

Еще одно интересное применение теоремы 41.1 обнаруживается в геометрии. Рассмотрим k-мерную плоскость

$$X=M+(t_1\overline{p}_1+\ldots+t_k\overline{p}_k)\qquad(41.1)$$

в пространстве Af^n, проходящую через точку M параллельно линейно независимой системе векторов $\{\overline{p}_1,\ \ldots,\ \overline{p}_k\}$. Покажем, как теорема 41.1 позволяет определить расстояние от фиксированной точки L из Af^n до плоскости (41.1). Это расстояние будет найдено, если удастся указать такую точку X плоскости (41.1), для которой величина $\left|\overline{LX}\right|^2$ минимальна.

По определению, $\overline{MX} = t_1\overline{p}_1 + \ldots + t_k\overline{p}_k$. Обозначим: $\overline{c}^T = \overline{ML}$, $\overline{x} = (t_1, t_2, \ \ldots, \ t_k)$.

Составим матрицу A, i-й столбец которой совпадает с вектором $\overline{p}_i$, $i =$ $= 1, \ldots, k$. В этих обозначениях $\overline{LX} = \overline{LM} + \overline{MX} = -\overline{c}^T + \overline{x}A^T$ или $\overline{LX} = (-\overline{c}^T + \overline{x}A^T)^T = -\overline{c} + (\overline{x}A^T)^T = A\overline{x}^T - \overline{c}$ (теорема 33.1). Таким образом, задача сведена к поиску вектора $\overline{z}$ в $\Re^k$, для которого величина $\left|A\overline{z}^T - \overline{c}\right|^2$ минимальна. Такой вектор определяется с помощью теоремы 41.1.

Задачи для самостоятельного решения

Т41.1. Решить задачу Т11.16 с помощью теоремы 41.1.

Т41.2. Доказать, что в пространстве Af^2 расстояние от точки $L = (x_0, y_0)$ до прямой, заданной уравнением $ax + by + c = 0$, равно $\dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Общая формулировка задач П41.1—П41.21

На прямой, проходящей через точку M параллельно вектору $\overline{p}$, найти точку, ближайшую к заданной точке L, где:

П41.1. $M = (0, 1, 0, 1)$, $\overline{p} = (2, 5, -3, 2)$, $L = (1, 1, 2, 5)$.

П41.2. $M = (2, 1, 3, 1)$, $\overline{p} = (1, 3, -1, 1)$, $L = (1, 0, 2, 4)$.

П41.3. $M = (-1, 2, 0, 1)$, $\overline{p} = (2, 3, -3, 1)$, $L = (-3, 1, 2, 0)$.

П41.4. $M = (-2, 1, 3, 4)$, $\overline{p} = (-1, 5, 1, 2)$, $L = (3, 3, 2, 1)$.

П41.5. $M = (1, 3, -1, 2)$, $\overline{p} = (6, 3, -1, 4)$, $L = (2, -1, 4, 5)$.

П41.6. $M = (5, 1, 5, -1)$, $\overline{p} = (7, 4, -5, 3)$, $L = (5, -1, -2, 0)$.

П41.7. $M = (2, 4, 0, 3)$, $\overline{p} = (-2, -5, 8, 1)$, $L = (-2, 5, 2, 5)$.

П41.8. $M = (1, 6, 2, 3)$, $\overline{p} = (6, 5, -3, 7)$, $L = (4, 1, 0, 8)$.

П41.9. $M = (1, 3, 1, 1, 1)$, $\overline{p} = (1, 2, 5, 3, -2)$, $L = (7, -1, 1, -2, 5)$.

П41.10. $M = (8, 1, 9, 5)$, $\overline{p} = (4, 5, 7, 3)$, $L = (8, 5, 2, 1)$.

П41.11. $M = (7, 4, -1, 1)$, $\overline{p} = (3, 5, 3, 9)$, $L = (5, 8, 2, 1)$.

П41.12. $M = (3, 3, -5, 1, 9)$, $\overline{p} = (1, 2, 1, 3, 2)$, $L = (7, -1, 8, -4, 3)$.

П41.13. $M = (2, -1, 7, 6, 5)$, $\overline{p} = (3, 7, 3, 8, -2)$, $L = (1, -1, 0, -2, 0)$.

П41.14. $M = (8, 3, 7, 1, 6)$, $\overline{p} = (5, 2, 4, 3, -3)$, $L = (7, -2, 1, -2, -1)$.

П41.15. $M = (1, 3, 2, 1, 3)$, $\overline{p} = (4, 2, 5, 3, -5)$, $L = (7, -1, 6, 8, 7)$.

П41.16. $M = (5, 3, 6, 1, 7)$, $\overline{p} = (1, -8, 5, 3, 9)$, $L = (0, -1, 3, 4, 1)$.

П41.17. $M = (1, 1, 2, 5)$, $\overline{p} = (3, 5, 4, 3)$, $L = (5, -5, 6, 1)$.

П41.18. $M = (7, -1, 8, 5)$, $\overline{p} = (4, 9, 7, 3)$, $L = (0, -4, 1, 1)$.

П41.19. $M = (2, 3, 9, 4)$, $\overline{p} = (5, 6, 7, 7)$, $L = (-8, 5, 8, 9)$.

П41.20. $M = (0, 1, -1, 2)$, $\overline{p} = (3, 5, 4, 5)$, $L = (-6, 7, 2, 8)$.

П41.21. На плоскости, проходящей через точку $M = (1, 2, 4)$ параллельно линейно независимой системе векторов $\{\overline{p}_1, \overline{p}_2\}$, где $\overline{p}_{1'} = (1, 2, 3)$, $\overline{p}_2 = (3, 2, 1)$, найти точку, ближайшую к точке $L = (3, 1, 4)$.

Ответы, указания, решения

Т41.1. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ — матрица размера $n\times 1$, $\overline{c} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\overline{x} = (x)$.

Так как в данном случае $A\overline{x} - \overline{c} = \begin{pmatrix} x - x_1 \\ x - x_2 \\ \vdots \\ x - x_n \end{pmatrix}$, то $|A\bar{x}-\bar{c}|=(x-x_1)^2+\ldots+(x-x_n)^2$. Воспользуемся теоремой 41.1 для нахождения такого числа z, при котором сумма квадратов $(z-x_1)^2+\ldots+(z-x_n)^2$ минимальна:

$$A^TA = 1 + 1 +\ldots+ 1 = n,\quad (A^TA)^{-1}=\frac{1}{n},\quad A^T\bar{c}=x_1+x_2+\ldots+x_n,$$

$$z=(A^TA)^{-1}A^T\bar{c}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

Т41.2. Возьмем две точки $M=\left(-\frac{c}{a},0\right)$, $N=\left(0,-\frac{c}{b}\right)$, принадлежащие данной прямой. Тогда направляющий вектор этой прямой равен $\bar{p}=\overline{MN}=\left(\frac{c}{a},\ -\frac{c}{b}\right)$. Кроме того, $\overline{ML}=\left(x_0+\frac{c}{a},y_0\right)$. Если теперь $A=\begin{pmatrix}\frac{c}{a}\\ -\frac{c}{b}\end{pmatrix}$, $\bar{c}^T=\overline{ML}$, то, как показано в данной главе, искомое расстояние равно

$$\left|A\bar{z}^T-\bar{c}\right|=\left|A(A^TA)^{-1}A^T\bar{c}-\bar{c}\right|=\left|(A(A^TA)^{-1}A^T-E)\bar{c}\right|,\text{ где } E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Так как $A=\frac{c}{ab}\cdot\begin{pmatrix}b\\-a\end{pmatrix}$, $A^TA=\frac{c^2(a^2+b^2)}{a^2b^2}$, $\left(A^TA\right)^{-1}=\frac{a^2b^2}{c^2(a^2+b^2)}$,

то $$A\left(A^TA\right)^{-1}A^T=\frac{a^2b^2}{c^2(a^2+b^2)}\cdot(AA^T)=\frac{1}{a^2+b^2}\left(\begin{pmatrix}b\\-a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b&-a\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}b^2&-ab\\-ab&a^2\end{pmatrix}.$$

Отсюда $A\left(A^TA\right)^{-1}A^T-E=-\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}a^2&ab\\ab&b^2\end{pmatrix}$,

$$\left(A\left(A^TA\right)^{-1}A^T-E\right)\bar{c}=-\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}a(ax_0+by_0+c)\\b(ax_0+by_0+c)\end{pmatrix}=-\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}.$$

Искомое расстояние равно

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{a^2+b^2}\cdot\left|\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right|=\frac{|ax_0+by_0+c|}{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

П41.21. Так как $\bar{c}^T = \overline{ML} = (3-1, 1-2, 4-4) = (2, -1, 0)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$,

то $D = A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$,

$$A^T \bar{c} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Обратную для D матрицу найдем так же, как и в последнем примере *гл. 37*:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{48} & -\frac{5}{48} \\ -\frac{5}{48} & \frac{7}{48} \end{pmatrix}.$$

Отсюда $\bar{z}^T = D^{-1}(A^T \bar{c}) = \begin{pmatrix} \frac{7}{48} & -\frac{5}{48} \\ -\frac{5}{48} & \frac{7}{48} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{12} \\ \frac{7}{12} \end{pmatrix}$, $\bar{z} = \left(-\frac{5}{12}, \frac{7}{12} \right)$.

Таким образом, ближайшей к L точкой плоскости будет точка

$$M + \left(-\frac{5}{12} \bar{p}_1 + \frac{7}{12} \bar{p}_2 \right) = (1, 2, 4) + \left(-\frac{5}{12} \right)(1, 2, 3) + \frac{7}{12}(3, 2, 1) = \left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}, \frac{10}{3} \right).$$

Приложение

Интерфейсные возможности Mathcad и редактирование формульных блоков

Эта часть является приложением к компьютерным разделам глав. Здесь описываются только интерфейсные возможности Mathcad и способы редактирования формульных блоков.

П1. Окно редактирования

Пользовательский интерфейс Mathcad создан таким образом, чтобы пользователь, имеющий элементарные навыки работы с Windows-приложениями, мог сразу начать работу с Mathcad.

После запуска пакета Mathcad на экране появляется окно редактирования — рабочий лист Mathcad-документа (рис. П1.1). Это окно имеет название *Untitled*:*k*, где *k* — его порядковый номер. Командой **Новый** (New) выпадающего меню **Файл** (File) можно вызывать новые окна, номера которых будут возрастать на единицу. Название Mathcad-документа можно изменить при записи его на диск с помощью команды **Сохранить как** (Save As) меню **Файл** (File).

Mathcad-документ формируется из формульных, графических и текстовых блоков — логически завершенных фрагментов рабочего листа. Блоки вводятся с помощью курсора ввода, который может принимать три формы: визира — красного крестика, синего курсора ввода — уголка, красного курсора ввода — вертикальной черточки. Курсор перемещается с помощью клавиш <←>, <→>, <↑>, <↓>, а также указателем мыши: достаточно подвести указатель мыши к нужному месту рабочего листа и щелкнуть левой кнопкой. Последнюю процедуру будем просто называть "щелчком" (в нужном месте рабочего листа).

Визир появляется только за пределами блоков и указывает на то место рабочего листа, где предполагается вводить очередной блок. Красный курсор служит для ввода и редактирования текстовых блоков. Визир превращается в красный курсор нажатием клавиши <"> или щелчком на уже введенном текстовом блоке. Синий курсор служит для ввода и редактирования формульных блоков. Визир превращается в синий курсор сразу же после начала ввода очередного формульного блока или после щелчка на уже введенном формульном блоке, а также при вызове шаблона графика. Обратное превращение синего или красного курсора в визир происходит после выхода из блока, осуществляемого либо клавишами <←>, <→>, <↑>, <↓>, либо щелчком вне области блока.

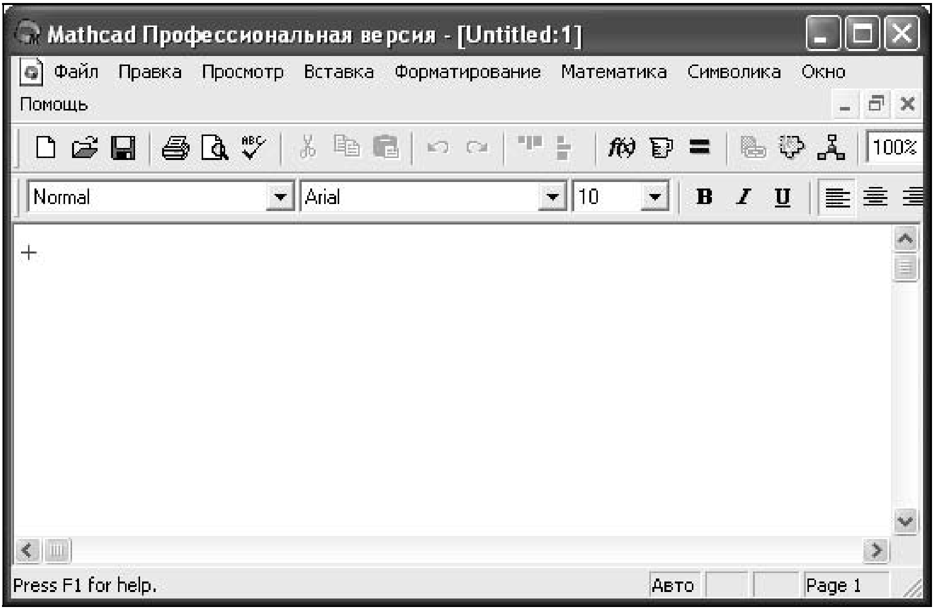


Рис. П1.1. Рабочий документ Mathcad

Теперь можно уточнить понятие блока. Под блоком понимается та часть Mathcad-документа — формула, график или текст, которая образовалась на рабочем листе с момента превращения визира в синий или красный курсор ввода (т. е. с момента начала ввода или редактирования формулы, графика или текста) до момента обратного превращения курсора ввода в визир (т. е. к моменту завершения ввода или редактирования формулы, графика или текста).

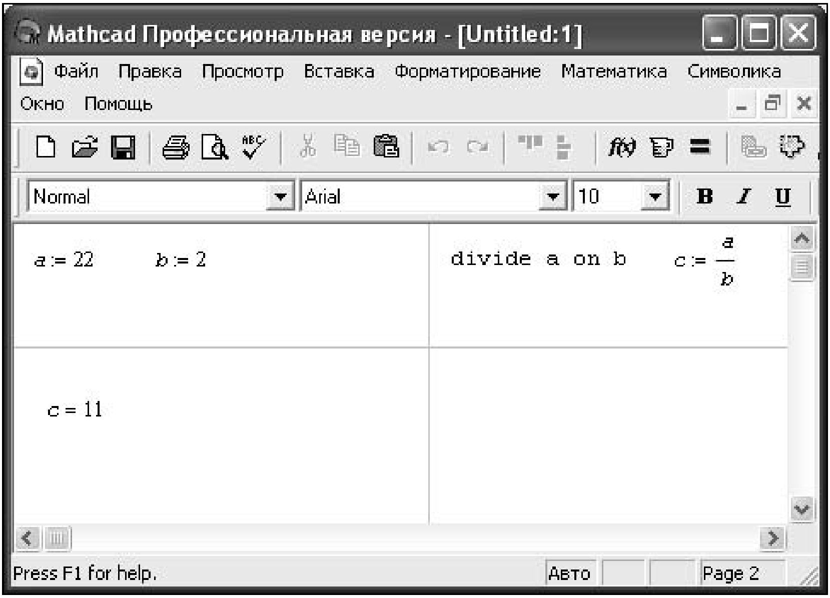
В окне редактирования при использовании полос прокрутки обнаруживаются тусклые горизонтальные и вертикальные линии. Горизонтальные линии делят рабочий лист на экранные страницы, которые нумеруются сверху вниз.

Можно изменить заданное разбиение на экранные страницы, вводя новые горизонтальные линии с помощью команды **Разрыв страницы** (Page Break) выпадающего меню **Вставка** (Insert); при этом место их ввода указывается визиром. Этой командой можно добиться того, чтобы блоки не разрывались на части разными страницами. Добавленную горизонтальную линию можно удалить командой **Стереть** (Delete) выпадающего меню **Правка** (Edit), предварительно выделив ее (для выделения следует, не отпуская левой кнопки мыши, "протащить" визир сверху вниз, пересекая удаляемую линию).

Логический порядок блоков подчинен привычному принципу чтения русскоязычной (и не только) литературы — слева направо, сверху вниз. Указанный порядок, в частности, означает, что содержание некоторого формульного блока влияет только на те формульные и графические блоки, которые расположены правее и ниже его. Вертикальные линии не оказывают никакого влияния на этот порядок — они учитываются только при распечатке Mathcad-документа на принтере. В этом случае нумерация страниц следующая: вначале сверху вниз последовательно нумеруются непустые страницы, расположенные слева от первой вертикальной линии, затем сверху вниз продолжается нумерация непустых страниц слева от второй вертикальной линии, и т. д.

Проиллюстрируем вышесказанное примером. Щелкните в левом верхнем углу первой экранной страницы и введите формульный блок `a := 22` (знак присваивания := вводится клавишей <:>). С помощью клавиши <→> выйдите из этого блока и рядом, справа от него, введите формульный блок `b := 2`. Переместите визир вправо за вертикальную черту и введите текстовый блок `"divide a on b"`, превратив визир в красный курсор. Щелкнув справа от текстового блока, введите формульный блок $c := \frac{a}{b}$. Добейтесь при этом, чтобы этот блок оказался на одном уровне или ниже блоков `a := 22 b := 2`, иначе переменная `c` не будет определена. Щелкните чуть ниже введенных блоков и командой **Разрыв страницы** (Page Break) введите горизонтальную линию разбиения на экранные страницы, и слева под этой линией введите формульный блок `c =`. После щелчка вне этого блока справа от знака = появится результат деления `a` на `b`, равный 11 (рис. П1.2).

Командой **Save As** (Сохранить Как) вызовите одноименное диалоговое окно для записи данного документа на диск под выбранным именем. Например, рис. П1.3 означает, что документ получит название "Первая проба пера" и будет записан в папку *Mathcad-excelent* после щелчка по кнопке **Save**.



Normal Arial 10

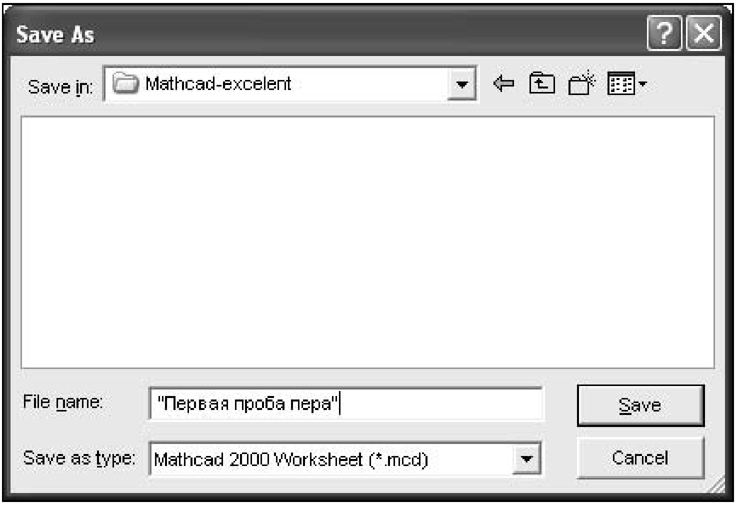
$a := 22$ $b := 2$

divide a on b $c := \frac{a}{b}$

$c = 11$

Press F1 for help.

Рис. П1.2. Рабочий документ Mathcad



Save in: Mathcad-excelent

File name: "Первая проба пера"

Save as type: Mathcad 2000 Worksheet (*.mcd)

Рис. П1.3. Диалоговое окно **Save As**

Командой **Предварительный просмотр** (Print Preview) меню **Файл** (File) вызовите диалоговое окно (рис. П1.4) предварительного просмотра постраничного разбиения документа для печати. С помощью кнопок управления просмотром (в верхней части окна) убедитесь, что за страницей с блоками $a := 22$ $b := 2$ при распечатке последует страница с блоком $c = 11$, а уж затем — страница с текстовым блоком "divide a on b" и блоком $c := \frac{a}{b}$. Закройте окно и удалите горизонтальную линию между блоками. Повторно откройте окно предварительного просмотра и убедитесь с помощью кнопок управления просмотром, что на этот раз документ разбит на две страницы для печати.

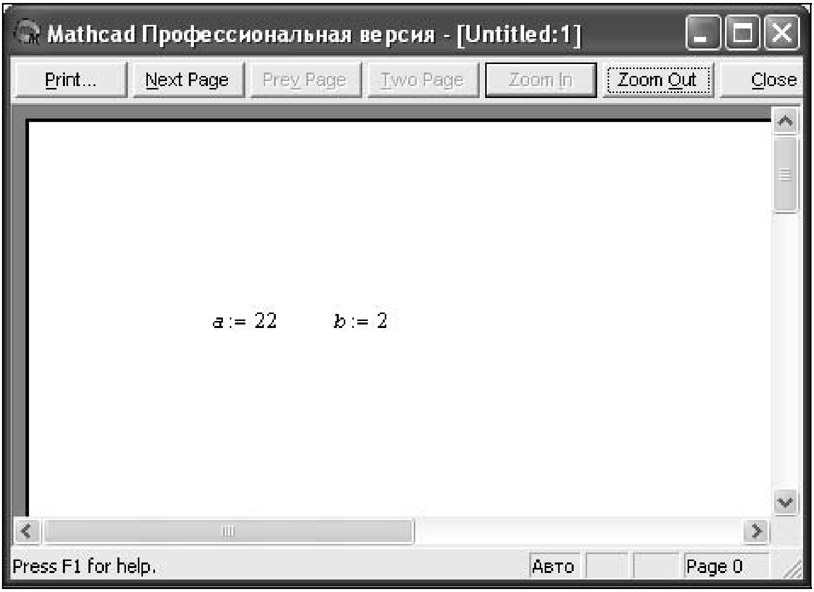


Рис. П1.4. Диалоговое окно предварительного просмотра постраничного разбиения документа для печати

Команда **Идти на страницу** (Go to Page) меню **Правка** (Edit) вызывает одноименное диалоговое окно, в соответствующем поле которого указывается номер нужной страницы рабочего листа. После щелчка по кнопке **OK** верхняя граница искомой страницы (тусклая горизонтальная линия) будет совпадать с верхним краем окна редактирования.

Отдельный блок или группу блоков можно перемещать вдоль рабочего листа. Для этого их предварительно следует выделить. Существуют два способа выделения блоков. Первый способ: удерживая клавишу <Ctrl>, щелкните последовательно на блоках, которые предназначены для выделения. Выделенные блоки окажутся внутри прямоугольников с пунктирными сторонами как, например, на рис. П1.5.

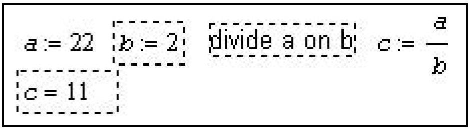


Рис. П1.5. Выделенные блоки

Этот способ выделения удобен в тех случаях, когда предназначенные для выделения блоки хаотично разбросаны на рабочем листе.

Если же требуется выделить группу блоков, попадающих в некоторый воображаемый прямоугольник на рабочем листе, то удобно воспользоваться вторым способом: установите визир в левой верхней вершине этого воображаемого прямоугольника и, не отпуская левую кнопку мыши, переместите ее указатель по диагонали до противоположной вершины. Отпустив кнопку мыши, получите выделенную группу блоков, окруженных пунктирными прямоугольниками. Выделенная группа блоков ведет себя как единый блок, который можно перемещать вдоль рабочего листа при нажатой левой кнопке мыши, предварительно добившись, чтобы указатель на краю одного из блоков принял форму ладошки.

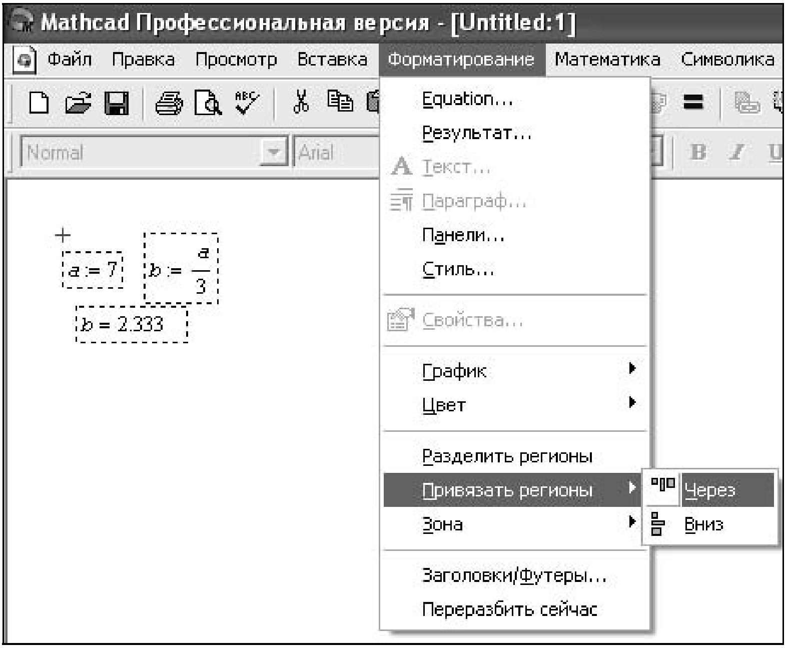


Рис. П1.6. Меню **Форматирование**

Выделенную группу блоков с помощью команд **Копировать** (Copy) или **Вырезать** (Cut) меню **Правка** (Edit) можно скопировать или удалить в буфер обмена данными. С помощью команды **Вставить** (Paste) меню **Правка** (Edit) можно затем вставить эту группу в нужное место рабочего листа.

Команда **Регионы** (Regions) меню **Просмотр** (View) позволяет "обнаруживать" (но не выделять) все блоки Mathcad-документа: при этом сами блоки будут отмечены белым цветом, а промежутки между ними — серым.

Команда **Обновить** (Refresh) меню **Просмотр** (View) позволяет устранить нежелательные следы, которые могут оставаться на экране при манипуляциях с блоками (например, при изменении их размеров, перемещении в окне редактирования и т. д.). При этом сами блоки остаются нетронутыми.

Если на рабочем листе выделены блоки (пунктирными прямоугольниками), то можно воспользоваться командами **Разделить Регионы** (Separate Regions) и **Привязать Регионы** (Align Regions) меню **Форматирование** (Format). Первая из них разделяет перекрывающиеся блоки; вторая — вызывает падающее меню (см. рис. П1.6) для выравнивания областей по вертикали или горизонтали соответственно.

П2. Панели инструментов

Панели инструментов позволяют выполнять наиболее часто используемые команды щелчком по кнопке-пиктограмме. Благодаря этому становится ненужным поиск в меню наиболее часто используемых команд. Mathcad имеет три панели инструментов — **Стандартная** (Standard), **Форматирование** (Formatting) и **Математика** (Math), изображенные на рис. П2.1.

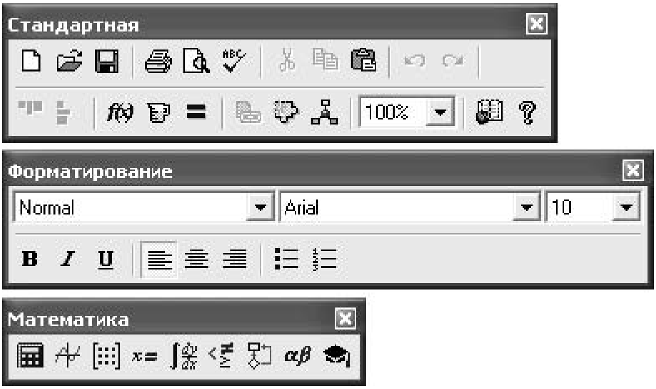


Рис. П2.1. Панели инструментов

Панели также можно расположить друг под другом сразу под строкой меню, как это показано на рис. П2.1. Чтобы установить панель в нужном месте экрана, достаточно щелкнуть на ее названии и, удерживая левую кнопку мыши, переместить панель в это место.

Панель инструментов *Стандартная*

Панель инструментов **Стандартная** (Standard) содержит 21 кнопку и один раскрывающийся список 100% ▾ для выбора масштаба изображения Mathcad-документа на экране.

Перечислим соответствие кнопок этой панели командам меню.

🗋 — создание нового документа. Соответствует команде **Новый** (New) меню **Файл** (File) без вызова диалогового окна **Новый** (New).

📂 — загрузка ранее созданного документа в виде файла. Соответствует команде **Открыть** (Open) меню **Файл** (File).

💾 — запись текущего документа в файл под текущим именем. Соответствует команде **Сохранить** (Save) меню **Файл** (File).

🖨 — распечатка документа на принтере. Соответствует команде **Печать** (Print) меню **Файл** (File).

🔍 — предварительный просмотр документа перед печатью в том виде, в котором он будет распечатан. Соответствует команде **Просмотр печати** (Print Preview) меню **Файл** (File).

ABC✓ — проверка орфографии (действует только для англоязычных документов). Соответствует команде **Проверка орфографии** (Check Spelling) меню **Правка** (Edit).

✂ — перенос выделенных блоков в буфер обмена (с удалением их из документа). Соответствует команде **Вырезать** (Cut) меню **Правка** (Edit).

🗐 — копирование выделенных блоков в буфер обмена (с сохранением их в документе). Соответствует команде **Копировать** (Copy) меню **Правка** (Edit).

📋 — перенос содержимого буфера обмена в окно редактирования на место, в котором находится курсор или визир. Соответствует команде **Вставить** (Paste) меню **Правка** (Edit).

— отмена предшествующей операции редактирования. Соответствует команде **Отменить** (Undo) меню **Правка** (Edit).

— восстановление отмененной операции редактирования. Соответствует команде **Восстановить** (Redo) меню **Правка** (Edit).

— выравнивание выделенных блоков по горизонтали. Соответствует команде **Привязать Регионы** (Align Regions) меню **Формат** (Format).

— выравнивание выделенных блоков по вертикали. Соответствует команде **Привязать Регионы** (Align Regions) меню **Формат** (Format).

— вставка функции из списка, появляющегося в диалоговом окне. Соответствует команде **Функция** (Function) меню **Вставка** (Insert).

— вставка единиц измерения. Соответствует команде **Юнит** (Unit) меню **Вставка** (Insert).

— вычисление выделенного блока. Соответствует команде **Вычислить** (Calculate) меню **Математика** (Math).

— вставка гиперссылок. Соответствует команде **Гиперссылка** (Hyperlink) меню **Вставка** (Insert).

— вставка компонентов других систем. Соответствует команде **Компонент** (Component) меню **Вставка** (Insert).

— запуск системы MathConnex.

— открытие доступа к центру ресурсов. Соответствует команде **Центр Ресурсов** (Resource Center) меню **Помощь** (Help).

— запуск справочной базы данных. Соответствует команде **Помощь по Mathcad** (Mathcad Help) меню **Помощь** (Help).

Панель инструментов *Форматирование*

Панель инструментов **Форматирование** (Formatting) содержит 8 кнопок и три раскрывающихся списка, подробно описанных в компьютерных разделах глав.

Normal

— раскрывающийся список имен стилей переменных, констант и текстовых блоков.

Arial ▾ — раскрывающийся список шрифтов, используемых при отображении констант, переменных или текстовых блоков.

10 ▾ — раскрывающийся список размеров символов.

B — полужирное начертание символов.

I — наклонное начертание символов.

U — подчеркнутое начертание символов.

≡ — выравнивание текста по левой границе текстового блока.

≡ — выравнивание текста по центру текстового блока.

≡ — выравнивание текста по правой границе текстового блока.

☰ — создание ненумерованного списка в текстовых блоках.

☰ — создание нумерованного списка в текстовых блоках.

Панель инструментов *Математика*

Панель инструментов **Математика** (Math) содержит 9 кнопок для вызова подпанелей, подробно описанных в компьютерных разделах глав.

Кнопка 🖩 вызывает подпанель **Калькулятор** (Calculator) (рис. П2.2) для ввода арифметических операций и некоторых наиболее часто используемых функций.

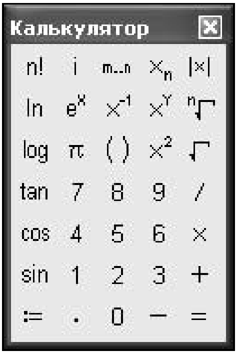


Рис. П2.2. Подпанель **Калькулятор**

Кнопка вызывает подпанель **Графики** (Graph) (рис. П2.3) для построения двумерных и трехмерных графиков.

Кнопка вызывает подпанель **Матрица** (Matrix) (рис. П2.4) для ввода и обработки векторов и матриц.

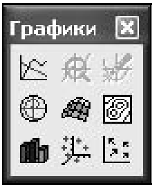


Рис. П2.3. Подпанель **Графики**

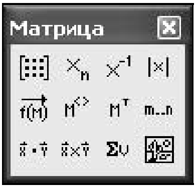


Рис. П2.4. Подпанель **Матрица**

Кнопка вызывает подпанель **Подсчет** (Evaluation) (рис. П2.5) для ввода знаков присваивания и равенства, а также для задания собственных операторов различных видов.

Кнопка вызывает подпанель **Калькулус** (Calculus) (рис. П2.6) для вычисления производных, интегралов, сумм, произведений и пределов.

Рис. П2.5. Подпанель **Подсчет**

Рис. П2.6. Подпанель **Калькулус**

Кнопка вызывает подпанель **Булевый** (Boolean) (рис. П2.7) для ввода логических операторов булевой алгебры.

Кнопка вызывает подпанель **Программирование** (Programming) (рис. П2.8) для ввода операторов программирования.

Кнопка вызывает подпанель **Греческие** (Greek) (рис. П2.9) для ввода греческих букв.

Рис. П2.7. Подпанель **Булевый**

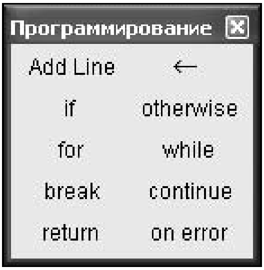


Рис. П2.8. Подпанель **Программирование**

Рис. П2.9. Подпанель **Греческие**

Кнопка вызывает подпанель **Символика** (Symbolic) (рис. П2.10) для символьных вычислений.

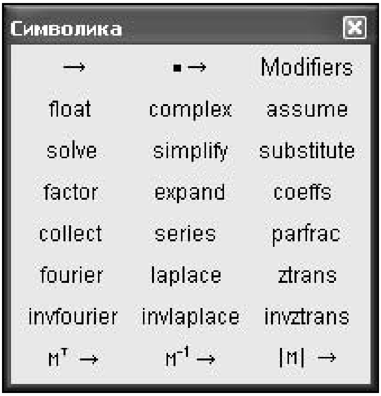


Рис. П2.10. Подпанель **Символика**

П3. Редактирование формульных блоков

Константы в Mathcad могут быть действительными и комплексными числами. Действительные константы могут иметь знаки "+" или "–", которые без пробела ставятся перед числом. Знак "+" можно не указывать. Дробная часть константы отделяется от целой части точкой. Если необходимо ввести константу с порядком, например -1.2×10^{-2}, то она формируется в виде выражения, в котором константа –1.2 умножается на 10^{-2}. Комплексная константа представляется в виде суммы (разности) действительной и мнимой частей. При этом за мнимой частью константы, без какого-либо знака операции, ставится символ *i*, который вводится непосредственно с клавиатуры или кнопкой i подпанели **Калькулус** (Calculus).

В Mathcad имеется несколько зарезервированных констант. Это число π, которое вводится кнопкой π подпанели **Калькулус** (Calculus); основание натурального логарифма, которое вводится клавишей <e>; значение 0.01 для вычисления процентов, которое вводится клавишей <%>; значение компьютерной бесконечности (это число 10^{307}), которое вводится кнопкой ∞ подпанели **Калькулус** (Calculus).

Имена переменных и функций называются идентификаторами. Они состоят из символов, каждый из которых может быть буквой (в том числе и греческой), а также цифрой. При этом первым символом должна быть буква. Допускаются и некоторые специальные символы, например, знак подчеркивания "_". Строчные и прописные буквы различаются. Идентификаторы должны быть уникальными, т. е. они не должны совпадать с именами встроенных функций и функций, определенных пользователем. В Mathcad идентификатор может содержать подстрочные символы, т. е. в нем некоторые последние символы, являющиеся составной частью этого идентификатора, могут быть набраны в виде "нижних индексов". Перед вводом подстрочных символов необходимо нажать клавишу <.>. Визуально идентификаторы с подстрочными символами почти не отличаются от индексированных элементов матриц и координат точек и векторов, чьи индексы вводятся после нажатия клавиши <[>.

Ввод и редактирование формульных блоков осуществляются синим курсором ввода, который может принимать три состояния: левый уголок |__, правый уголок __|, промежуточное состояние __|__. Изменение окаймления символов уголком осуществляется клавишей <пробел>. Изменение __| на |__, и наоборот, выполняется клавишей <Ins>, а продвижение синего курсора выполняется клавишами <→> и <←>.

Рассмотрим несколько примеров. Введите выражение `2 + 3` клавишами клавиатуры или кнопками подпанели **Калькулус** (Calculus). После нажатия клавиши <=> справа от знака = появится результат вычисления — число `5`.

Введите выражение `1.25*2.44 =`. Справа от знака равенства появится результат вычисления — число `3.05`. Отметим: знак умножения, вводимый кнопкой подпанели **Калькулус** (Calculus), будет соответствовать символу ×.

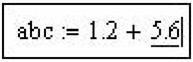
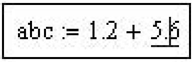
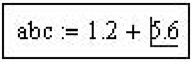
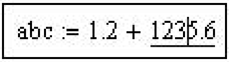
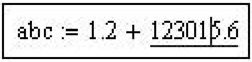
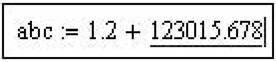
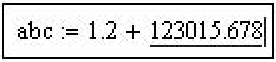
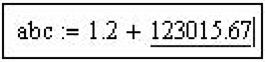
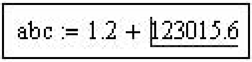
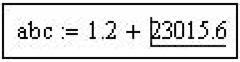
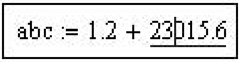
Введите выражение `1.55/8`, при этом на экране оно будет выглядеть так: $\frac{1.55}{8}$. После нажатия клавиши <пробел> формула примет вид: $\frac{1.55}{8}$. После нажатия клавиши <=> получится результат: `0.19375`.

На подпанели **Калькулус** (Calculus) имеются две кнопки ввода операции деления — ÷ и /. При использовании кнопки ÷ вышеприведенный блок будет выглядеть так: $1.55 \div 8 = 0.19375$.

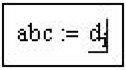
Поскольку идентификатор переменной всегда начинается с буквы, то при умножении константы на переменную символ умножения можно не указывать:

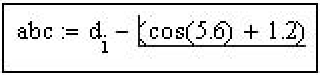
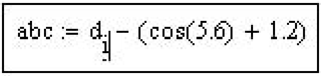
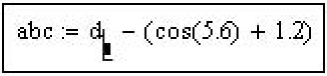
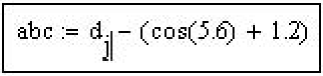
$a := 2$

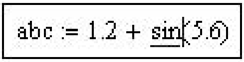
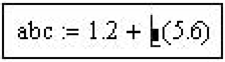
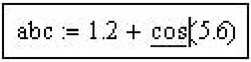
$b := 2.6a + 3a^2 \quad b = 17.2$

Введите теперь выражение  abc := 1.2 + 5.6 (знак присваивания := вводится клавишей <:>). В данном случае синий курсор окаймляет правым уголком константу 5.6. В пределах формульного блока состояние курсора ввода можно изменять клавишами <←> и <→>. Так, нажатие клавиши <←> передвигает синий курсор на одну позицию влево:  abc := 1.2 + 5.6. Еще два нажатия этой клавиши переводят курсор в состояние левого уголка:  abc := 1.2 + 5.6. Изменение состояния синего курсора используется для добавления или удаления символов. В состоянии левого уголка добавляемые символы записываются перед константой или идентификатором. Так, при охвате левым уголком константы 5.6 перед ней могут быть добавлены новые символы, например 123:  abc := 1.2 + 1235.6. В промежуточном состоянии синего курсора символы добавляются на место вертикальной линии, которая при этом сдвигается вправо:  abc := 1.2 + 123015.6 (в данном случае добавлены символы 01). В состоянии правого уголка символы добавляются в конец константы или идентификатора:  abc := 1.2 + 123015.678. Удаление символов осуществляется клавишами <Del> или <BackSpace>. Если синий курсор принял состояние правого уголка  abc := 1.2 + 123015.678, то символ в конце константы или идентификатора удаляется клавишей <BackSpace>:  abc := 1.2 + 123015.67. Если синий курсор принял состояние левого уголка  abc := 1.2 + 123015.6, то символ в начале константы или идентификатора удаляется клавишей <Del>:  abc := 1.2 + 23015.6. В промежуточном состоянии синего курсора  abc := 1.2 + 23015.6 символ можно удалять клавишей <BackSpace> (при этом удаляется символ слева от вертикальной линии) или клавишей <Del> (при этом удаляется символ справа от вертикальной линии).

Изменение и удаление индексов в индексированных переменных выполняется переводом синего курсора в область индекса (опять-таки, клавишами <←> и <→>). Далее все процедуры изменения индекса осуществляются по аналогии с вышеизложенным.

Введите формулу `abc := `d_i` − (cos(5.6) + 1.2)`. Для этого последовательным нажатием клавиш <a>, <b>, <c>, <:>, <d> введите идентификатор `abc`, знак присваивания `:=` и идентификатор `d`. Клавишей <[> перейдите в область нижних индексов и введите индекс *i* клавишей <i>. Нажмите клавишу <пробел> для того, чтобы правый уголок окаймлял всю индексированную переменную d_i:  abc := d_i.

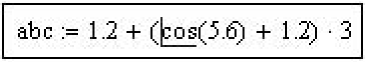
Введите оставшуюся часть формульного блока. Затем нажатием клавиши <пробел> добейтесь, чтобы правый уголок окаймлял выражение `cos(5.6) + 1.2` и нажатием клавиши <’> заключите это выражение в скобки. Нажатием клавиши <Ins> переведите синий курсор в состояние левого уголка:  abc := d_i − (cos(5.6) + 1.2). Клавишей <<> переведите синий курсор в область индекса:  $abc := d_i - (\cos(5.6) + 1.2)$. Клавишей <BackSpace> удалите индекс `i`:  $abc := d_{\blacksquare} - (\cos(5.6) + 1.2)$; на месте метки введите идентификатор `j`:  $abc := d_j - (\cos(5.6) + 1.2)$.

Замена идентификатора функции осуществляется так же, как и замена обычного идентификатора. Например, пусть необходимо заменить в формуле  $abc := 1.2 + \sin(5.6)$ идентификатор функции `sin` на идентификатор функции `cos`. Для этого щелкните на идентификаторе `sin` и переведите синий курсор в состояние правого уголка. Удалите символы идентификатора `sin` (клавишей <BackSpace> в данном случае):  $abc := 1.2 + \blacksquare(5.6)$; введите новый идентификатор функции `cos`:  $abc := 1.2 + \cos(5.6)$. Правила изменения функций, записываемых специальными символами, будут рассмотрены ниже.

Синий курсор ввода можно сразу установить в пределах константы или идентификатора в формуле. Для этого необходимо щелкнуть на соответствующей константе или идентификаторе. При этом синий курсор устанавливается на место указателя мыши.

Часто синий курсор ввода используется не для изменения констант или идентификаторов, а для редактирования формул, т. е. замены операций, изменения приоритета их выполнения, удаления операций или части формулы, добавлений в формулу и т. п. Во всех этих операциях синий курсор должен принимать состояния левого или правого уголка.

Уже при наборе формул возникает необходимость выделения части формулы для выполнения над ней какой-то операции. Изменение окаймления производится клавишей <пробел>. Рассмотрим действие этой клавиши на примере.

Предположим, что формульный блок имеет следующий вид на экране:  $abc := 1.2 + (\cos(5.6) + 1.2) \cdot 3$. После нажатия клавиши <пробел> курсор будет окаймлять функцию `cos` вместе с ее аргументом:

 $abc := 1.2 + (\cos(5.6) + 1.2) \cdot 3$.

Очередное нажатие клавиши <пробел> приводит к охвату всего выражения в скобках (без окаймления самих скобок):


abc := 1.2 + (cos(5.6) + 1.2) · 3

. Окаймление скобок выполняется еще одним нажатием клавиши <пробел>:


abc := 1.2 + (cos(5.6) + 1.2) · 3

. В дальнейшем окаймление распространяется на ту операцию, которая логически выполняется первой (в данном случае — это операция умножения):


abc := 1.2 + (cos(5.6) + 1.2) · 3

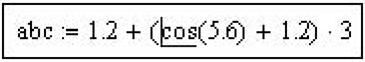
. Если операндом, на который распространяется окаймление, является выражение в скобках, то окаймляется все выражение в скобках:


abc := 1.2 + (cos(5.6) + 1.2) · (3 + 5)

. Таким способом можно добиться окаймления всей формулы:

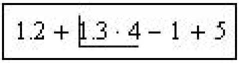

abc := 1.2 + (cos(5.6) + 1.2) · 3

. Последующее нажатие клавиши <пробел> переводит курсор в состояние, с которого окаймление начиналось:

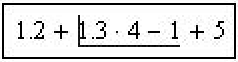

abc := 1.2 + (cos(5.6) + 1.2) · 3

.

Если при окаймлении возникает ситуация равных условий расширения синего курсора вправо или влево, то расширение производится в сторону удлинения синей горизонтальной линии. Например, при расширении синего курсора ввода из состояния


1.2 + 1.3 · 4 − 1 + 5

после нажатия клавиши <пробел> получите

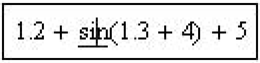

1.2 + 1.3 · 4 − 1 + 5

.

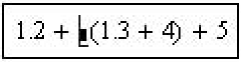
Изменение окаймления можно выполнять также с использованием клавиш <<> и <>>, однако в этом случае перебор выполняется справа налево или слева направо без учета приоритета, а части формульного блока будут выделяться только при появлении закрывающейся или открывающейся скобки.

Рассмотрим примеры удаления/вставки символов и добавления/изменения операций.

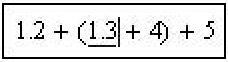
Для удаления константы или идентификатора щелкните на соответствующих константе или идентификаторе:


1.2 + sin(1.3 + 4) + 5

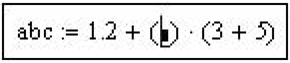
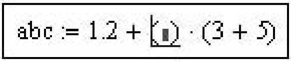
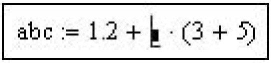
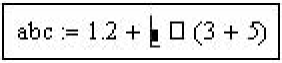
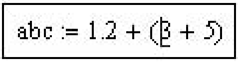
; клавишами <Del> или <BackSpace> удалите соответствующие символы:


1.2 + ▮(1.3 + 4) + 5

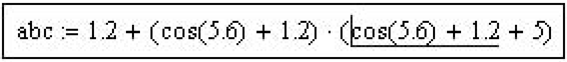
. Затем клавишей <Del> удалите метку:


1.2 + (1.3 + 4) + 5

.

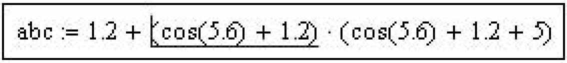
Удаление части формулы выполняется после ее окаймления левым или правым уголком. Например, выделите левым уголком удаляемую часть формулы:  abc := 1.2 + (cos(5.6) + 1.2) · (3 + 5), затем нажмите клавишу <Del>:  abc := 1.2 + (cos(5.6) + 1.2) · (3 + 5); подтвердите удаление очередным нажатием <Del>:  abc := 1.2 + (▮) · (3 + 5). Если дальше необходимо удалить символы (▮), то охватите скобки левым уголком:  abc := 1.2 + (▮) · (3 + 5); нажмите два раза клавишу <Del>:  abc := 1.2 + ▮ · (3 + 5). Удалите затем операцию умножения нажатием клавиши <Del>:  abc := 1.2 + ▮ □ (3 + 5); клавишей <Del> удалите метку:  abc := 1.2 + (3 + 5). Все эти действия (кроме завершающего шага удаления операции умножения) можно было бы осуществить правым уголком, заменив нажатие клавиши <Del> нажатием клавиши <BackSpace>.

Вставка части формулы в другое место формулы выполняется предварительным ее копированием. Охватите уголком фрагмент формулы:  abc := 1.2 − (cos(5.6) + 1.2) · (3 + 5) и кнопкой 📋 поместите ее в буфер. Затем установите синий курсор ввода на место, куда должна дублироваться эта часть формулы:  abc := 1.2 + (cos(5.6) + 1.2) · (3 + 5); кнопкой 📋 вставьте формулу из буфера в указанное место:

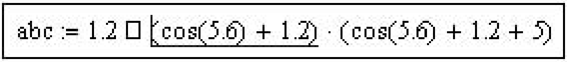
 abc := 1.2 + (cos(5.6) + 1.2) · (cos(5.6) + 1.2 + 5).

Удаление части формулы может выполняться также выделением ее черным цветом с помощью мыши. Для этого установите указатель мыши на начало выделяемого фрагмента, нажмите левую кнопку мыши и, не отпуская ее, протяните указатель к концу выделяемого фрагмента формулы.

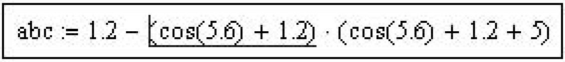
Замена операции может выполняться с помощью правого или левого уголка. Для замены операции левым уголком установите его сразу после намеченной для изменения операции, добившись окаймления ближайшего, примыкающего к этой операции, выражения:

 abc := 1.2 + cos(5.6) + 1.2) · (cos(5.6) + 1.2 + 5);

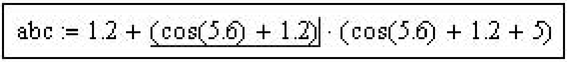
нажмите клавишу <BackSpace>:


$abc := 1.2 \,\square\, (\cos(5.6) + 1.2)\cdot(\cos(5.6) + 1.2 + 5)$.

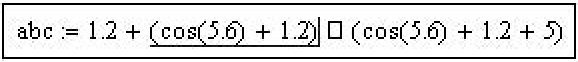
Затем введите новую операцию, например, знак минус:


$abc := 1.2 - (\cos(5.6) + 1.2)\cdot(\cos(5.6) + 1.2 + 5)$.

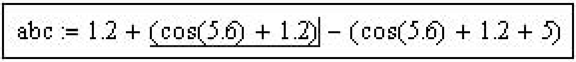
Для замены операции правым уголком установите его перед изменяемой операцией:


$abc := 1.2 + (\cos(5.6) + 1.2)\cdot(\cos(5.6) + 1.2 + 5)$;

нажмите клавишу <Del>:


$abc := 1.2 + (\cos(5.6) + 1.2) \,\square\, (\cos(5.6) + 1.2 + 5)$.

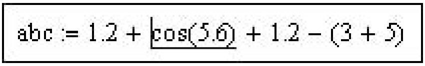
Затем введите новую операцию, например, знак минус:


$abc := 1.2 + (\cos(5.6) + 1.2) - (\cos(5.6) + 1.2 + 5)$

Отдельно опишем операции удаления и вставки скобок. Удаление скобок выполняется с использованием правого и левого уголков. Установите левый уголок сразу после удаляемой открывающей скобкой:


$abc := 1.2 + (\cos(5.6) + 1.2) - (3 + 5)$;

нажмите клавишу <BackSpace>:


$abc := 1.2 + \cos(5.6) + 1.2 - (3 + 5)$.

При этом удаляется и соответствующая закрывающаяся скобка.

Теперь восстановите скобки кнопкой ↶ панели **Стандартная** (Standart) и расположите правый уголок перед удаляемой закрывающей скобкой:


$abc := 1.2 + (\cos(5.6) + 1.2) - (3 + 5)$;

нажмите клавишу <Del>:

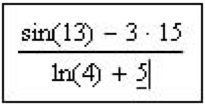

$abc := 1.2 + \cos(5.6) + 1.2 - (3 + 5)$.

При этом удаляется и соответствующая открывающая скобка.

Добавление скобок может также выполняться с помощью левого или правого уголка. Однако намного удобнее скобки вставлять кнопкой ( ) подпанели **Калькулус** (Calculus) или клавишей <’>. Для этого правым или левым уголком охватите часть формулы, которая должна заключаться в скобки: $abc := 1.2 + \cos(5.6) + 1.2 - (3 + 5)$. Затем введите скобки, щелкнув кнопкой ( ) подпанели **Калькулус** (Calculus) или нажатием клавиши <’>: $abc := 1.2 + (\cos(5.6) + 1.2) - (3 + 5)$.

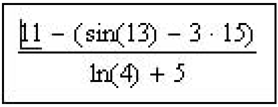
При необходимости добавить в начало формулы двуместную операцию вычитания Mathcad вместо этой операции вставляет знак минус перед выражением, не позволяя ввести первый операнд (уменьшаемое).

Избежать этого можно так. Пусть, например, уже введена формула



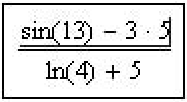
$$\frac{\sin(13) - 3 \cdot 15}{\ln(4) + 5}$$

и требуется "достроить" ее до формулы



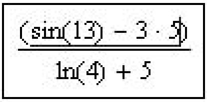
$$\frac{11 - (\sin(13) - 3 \cdot 15)}{\ln(4) + 5}.$$

Выделите уголком часть выражения, которая должна стать вторым операндом операции вычитания:



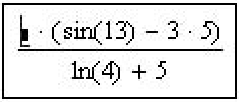
$$\frac{\sin(13) - 3 \cdot 5}{\ln(4) + 5}.$$

Заключите эту часть формулы в скобки:



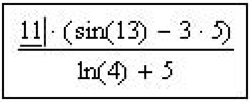
$$\frac{(\sin(13) - 3 \cdot 5)}{\ln(4) + 5}.$$

Охватите ее вместе со скобками правым уголком и клавишей <Ins> переведите курсор в состояние левого уголка. Введите знак умножения:



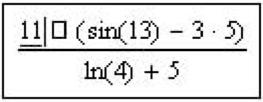
$$\frac{\blacksquare \cdot (\sin(13) - 3 \cdot 5)}{\ln(4) + 5}.$$

На месте метки введите первый операнд операции вычитания:



$$\frac{11 \cdot (\sin(13) - 3 \cdot 5)}{\ln(4) + 5}.$$

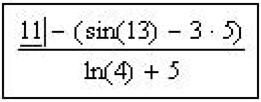
Клавишей <Del> удалите знак умножения:



$$\frac{11\,\square\,(\sin(13) - 3 \cdot 5)}{\ln(4) + 5}$$

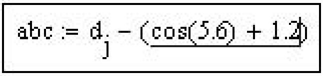
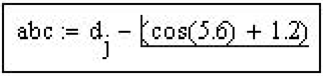
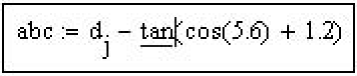
.

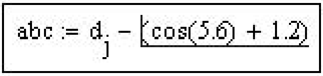
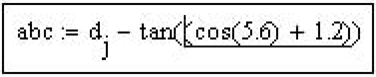
Введите знак вычитания:

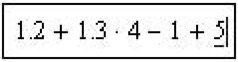
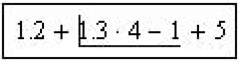
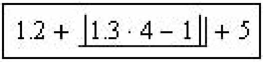


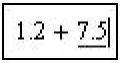
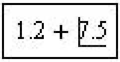
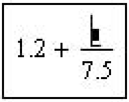
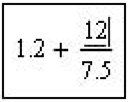
$$\frac{11 - (\sin(13) - 3 \cdot 5)}{\ln(4) + 5}$$

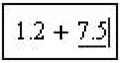
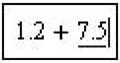
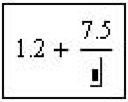
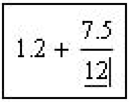
.

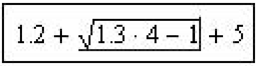
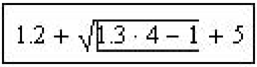
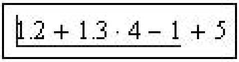
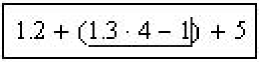
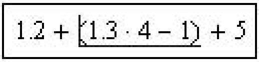
При редактировании формул иногда приходится добавлять функцию, аргументом которой является уже набранная часть формулы. Для этого охватите уголком часть формулы, которая должна стать аргументом, и заключите ее в скобки:  $abc := d_j - (\cos(5.6) + 1.2)$. Переведите курсор ввода в состояние левого уголка так, чтобы он охватывал все выражение вместе со скобками:  $abc := d_j - (\cos(5.6) + 1.2)$. Введите идентификатор требуемой функции:  $abc := d_j - \tan(\cos(5.6) + 1.2)$.

При вводе функции можно также пользоваться кнопками подпанели **Калькулус** (Calculus) или списком функций, вызываемых командой f(x) стандартной панели. Выделите левым уголком часть формулы, которая должна стать аргументом функции, и заключите ее в скобки:  $abc := d_j - (\cos(5.6) + 1.2)$. Далее, кнопкой tan подпанели **Калькулус** (Calculus) введите требуемую функцию:  $abc := d_j - \tan((\cos(5.6) + 1.2))$.

Аналогично добавляются в формулу и функции, не имеющие идентификаторов. Пусть формулу  $1.2 + 1.3 \cdot 4 - 1 + 5$ необходимо преобразовать для вычисления абсолютного значения ее фрагмента 1.3 · 4 – 1. Выделите левым или правым уголком эту часть формулы:  $1.2 + 1.3 \cdot 4 - 1 + 5$. Щелкните кнопкой |x| подпанели **Калькулус** (Calculus) или нажмите клавишу <|>:  $1.2 + |1.3 \cdot 4 - 1| + 5$.

Добавление в формулу двуместной операции может выполняться с использованием левого и правого уголка. Пусть в формулу  $1.2 + 7.5$ необходимо добавить операцию деления так, чтобы часть формулы (число 7.5) была вторым операндом. Охватите левым уголком второй операнд (в данном случае число 7.5):  $1.2 + 7.5$. Клавишей </> введите операцию деления:  $1.2 + \frac{\blacksquare}{7.5}$. На месте появившейся метки введите первый операнд операции деления:  $1.2 + \frac{12}{7.5}$.

Пусть теперь в формулу  $1.2 + 7.5$ необходимо добавить операцию деления так, чтобы выделенная часть формулы (число 7.5) была первым операндом. Охватите правым уголком первый операнд (в данном случае число 7.5):  $1.2 + 7.5$. Введите операцию деления:  $1.2 + \frac{7.5}{\blacksquare}$. На месте появившейся метки введите второй операнд операции деления:  $1.2 + \frac{7.5}{12}$.

Рассмотрим процедуру замены функций, записываемых с помощью специальных знаков. Предположим, что в формуле  $1.2 + \sqrt{1.3 \cdot 4 - 1} + 5$ необходимо заменить функцию квадратного корня на функцию `sin`. Для этого охватите левым уголком подкоренное выражение:  $1.2 + \sqrt{1.3 \cdot 4 - 1} + 5$; удалите функцию квадратного корня клавишей <BackSpace>:  $1.2 + 1.3 \cdot 4 - 1 + 5$. Охватите левым уголком выражение $1.3 \cdot 4 - 1$ и заключите его в скобки:  $1.2 + (1.3 \cdot 4 - 1) + 5$. Охватите левым уголком все выражение вместе со скобками:  $1.2 + (1.3 \cdot 4 - 1) + 5$.

Щелкните кнопкой sin подпанели **Калькулус** (Calculus): $1.2 + \sin(1.3 \cdot 4 - 1) + 5$.

Замена функции |×| вычисления абсолютного значения выполняется аналогичным образом с предварительным удалением левой вертикальной линии в обозначении этой функции.

Обратная процедура замены функции, заданной идентификатором, на функцию, записанную специальным символом, выполняется после удаления идентификатора. Пусть в формуле $1.2 + \sin(1.3 \cdot 4 - 1) + 5$ необходимо заменить функцию `sin` на функцию вычисления абсолютного значения. Охватите идентификатор `sin` уголком и удалите его: $1.2 + \blacksquare(1.3 \cdot 4 - 1) + 5$.

Клавишей <Del> удалите метку: $1.2 + (1.3 \cdot 4 - 1) + 5$. Охватите вместе со скобками левым уголком бывший аргумент функции `sin`: $1.2 + (1.3 \cdot 4 - 1) + 5$. Клавишей <|> введите функцию |×| вычисления абсолютного значения: $1.2 + |1.3 \cdot 4 - 1| + 5$.

При вводе формул следует обратить внимание на операцию возведения функции в степень. На рабочем листе Mathcad-документа показатель степени функции должен вводиться после закрывающей скобки, ограничивающей аргументы функции.

Так, формула

$$\frac{2.2 + \sin^3 3.1 + \cos 1.5^2}{4.2 + \sin^2 \dfrac{1}{2.6}}$$

на рабочем листе будет выглядеть так:

$$\frac{2.2 + \sin(3.1)^3 + \cos\left(1.5^2\right)}{4.2 + \sin\left(\dfrac{1}{2.6}\right)^2} = 0.362$$

Опишем последовательность действий при вводе этой формулы:

Введите фрагмент числителя: $2.2 + \sin(3.1)$.

Охватите правым уголком выражение sin(3.1):

$2.2 + \underline{\sin(3.1)}$.

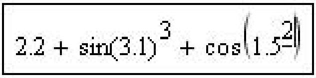
Клавишей <^> или кнопкой x^Y подпанели **Калькулус** (Calculus) перейдите в область верхних индексов и введите показатель степени:

$2.2 + \sin(3.1)$,

$2.2 + \sin(3.1)^3$,

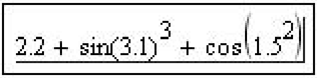
$2.2 + \underline{\sin(3.1)^3}$.

Введите оставшуюся часть числителя:



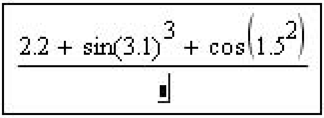
$2.2 + \sin(3.1)^3 + \cos\left(1.5^2\right)$.

Охватите правым уголком все выражение числителя:



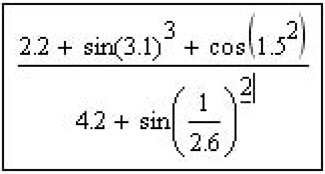
$\underline{2.2 + \sin(3.1)^3 + \cos\left(1.5^2\right)}$.

Введите операцию деления "/":



$$\frac{2.2 + \sin(3.1)^3 + \cos\left(1.5^2\right)}{\blacksquare}.$$

Введите знаменатель:



$$\frac{2.2 + \sin(3.1)^3 + \cos\left(1.5^2\right)}{4.2 + \sin\left(\frac{1}{2.6}\right)^2}.$$

Для получения результата вычислений нажмите клавишу <=>:

$$\frac{2.2 + \sin(3.1)^3 + \cos\left(1.5^2\right)}{4.2 + \sin\left(\frac{1}{2.6}\right)^2} = 0.362.$$

Команда **Отменить** (Undo) меню **Правка** (Edit) (или кнопка ↶ панели **Стандартная** (Standart), или комбинация клавиш <Ctrl>+<z>) отменяет последнюю операцию редактирования. Команда **Восстановить** (Redo) меню **Правка** (Edit) (или кнопка ↷ панели **Стандартная** (Standart), или комбинация клавиш <Ctrl>+<Y>) восстанавливает только что отмененную операцию редактирования. Пусть, к примеру, в числе 12 на рабочем листе удаляется цифра 2 и затем применяются последовательно команды **Отменить** (Undo) и **Восстановить** (Redo). Тогда последовательность этих действий вызовет следующие превращения:

$$12 > 1 \xrightarrow{\text{Undo}} 12 \xrightarrow{\text{Redo}} 1$$

Для получения численного результата необходимо всем переменным из формулы присвоить числовые значения. Присваивания в Mathcad бывают двух видов: локальные и глобальные. Локальное присваивание осуществляется кнопкой := подпанели **Калькулус** (Calculus) или клавишей <:>. Присвоенное значение в документе начинает действовать (слева направо и сверху вниз) с момента его записи.

Глобальное присваивание действует в пределах всего документа независимо от места его определения. Глобальное присваивание задается кнопкой ≡ подпанели **Оценка** (Evaluation). Ниже приведен пример цепочки формул с использованием локального (для *x*) и глобального (для *a*) присваивания:

$x := 1 \quad y := x + 2 \quad z := y \cdot x + 3 \quad z = 6$

$x := 2 \quad \mu := \dfrac{z \cdot x}{a} \quad \mu = 4$

$a \equiv 3$

В этом примере во всех формулах для переменной *a* используется ее глобальное значение 3, хотя на рабочем листе документа оно записано последним в цепочке формул. Для вычисления переменных *y* и *z* используется локальное значение переменной *x* — число 1. Для вычисления переменной μ используется локальное значение переменной *x* — число 2.

Если для одной и той же переменной в документе задано локальное и глобальное присваивание, то локальное присваивание отменяет глобальное присваивание, превратив последнее в локальное:

$a := 2 \quad x := a + 4$

$a \equiv 4$

$x = 6$

$z := a + 4 \quad z = 8$

Если для одной и той же переменной в документе глобальное присваивание задается несколько раз, то действует всегда самое последнее из них:

$x := a + 4 \quad x = 11$

$a \equiv 4$

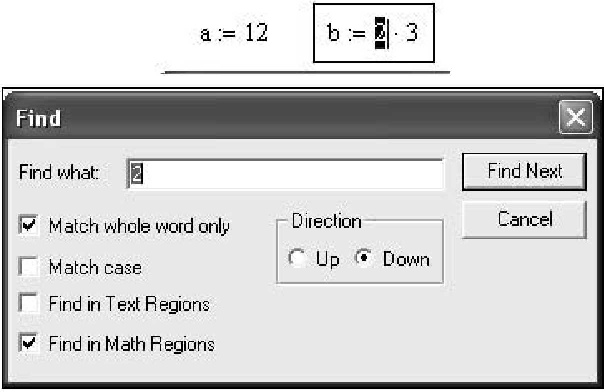
$z := a + 4 \quad z = 11$

$a \equiv 7$

Команда **Find** (Найти) вызывает диалоговое окно **Find** (Найти) для поиска выражений в документе. Искомое выражение вводится в поле **Find What** (Что найти). Окно **Find** (Найти) содержит 4 опции. Если отмечена опция **Match whole word only** (Точное совпадение), то будет производиться поиск именно того выражения, которое введено в поле **Find What** (Что найти). Если же отмечена опция **Match case** (Учесть регистр), то поиск будет производиться с учетом регистра, т. е. с учетом различия малых и больших букв. Опции **Find in Text Regions** (Найти в тексте) и **Find in Math Regions** (Найти в математике) дают возможность задать тип блоков — текстовых или формульных, которые будут просматриваться при поиске. Кнопка **Find Next** (Дальше) осуществляет переходы от текущего места к месту рабочего листа, где содержится искомое выражение.

Пусть, к примеру, на рабочем листе имеются следующие блоки:

`a := 12   b := 2 · 3`



a := 12   b := 2 · 3

Find

Find what: 2

☑ Match whole word only

☐ Match case

☐ Find in Text Regions

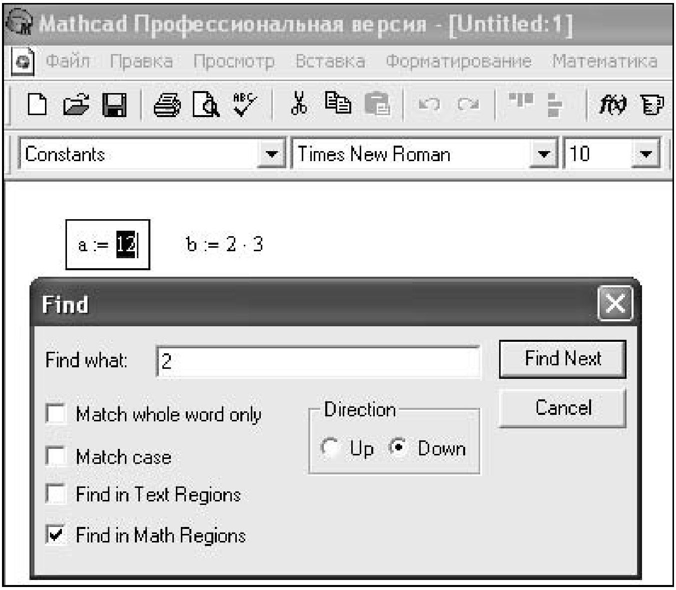
☑ Find in Math Regions

Direction: ○ Up ● Down

Рис. П3.1. Поиск при отмеченной опции **Match whole word only**

Рис. П3.1 демонстрирует результаты поиска после щелчка кнопкой **Find Next** (Дальше) в случае выбора опции **Match whole word only** (Точное совпадение). Как видно из рис. П3.1, найдено число 2 в формульной области `b:=2·3` и пропущена цифра 2 в числе 12. Рис. П3.2 демонстрирует результаты поиска после щелчка по кнопке **Find Next** (Дальше) в случае отмены опции **Match whole word only** (Точное совпадение). Как видно из рис. П3.2, найдено число 12, в котором цифра 2 встречается как "фрагмент". При следующем щелчке по кнопке **Find Next** (Дальше) будет отмечено число 2 в выражении `b:=2·3`, как и в первом случае.

Команда **Replace** (Заменить) вызывает диалоговое окно **Replace** (Замена), аналогичное окну **Find** (Найти), только с двумя дополнительными кнопками **Replace** (Заменить) и **Replace All** (Заменить все) и дополнительным полем **Replace with** (Заменить на) для ввода выражения, которое должно заменить выражение, введенное в поле **Find What** (Что найти). Действия этих окон аналогичны.



a := 12 b := 2 · 3

Find what: 2

☐ Match whole word only

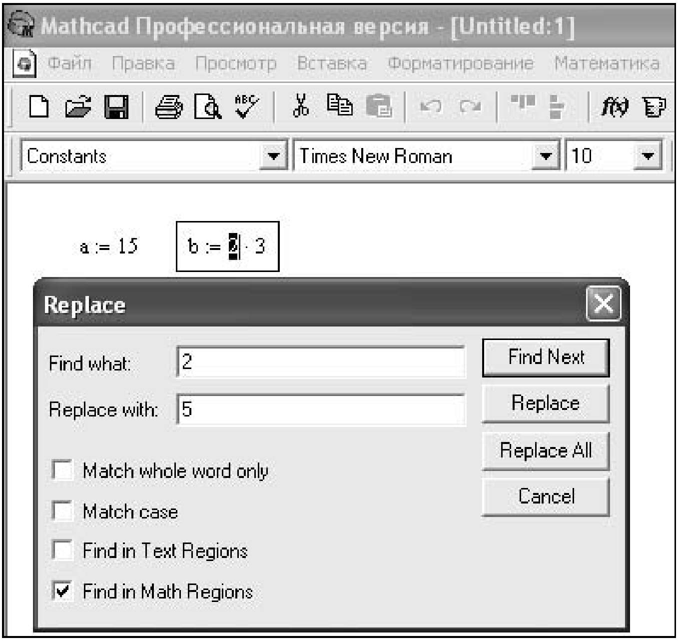
☐ Match case

☐ Find in Text Regions

☑ Find in Math Regions

Direction: ○ Up ● Down

Рис. П3.2. Поиск при отмененной опции **Match whole word only**



a := 15 b := 2 · 3

Find what: 2

Replace with: 5

☐ Match whole word only

☐ Match case

☐ Find in Text Regions

☑ Find in Math Regions

Рис. П3.3. Пример замены фрагментов текста

Отличие только в том, что после очередного щелчка по кнопке **Replace** (Заменить), найденное в документе выражение сразу же заменяется новым, указанным в поле **Replace with** (Заменить на), после чего осуществляется переход к следующему месту в документе, содержащему искомое выражение. Результат двух щелчков по кнопке **Replace** (Заменить) (после вызова окна **Replace** (Заменить)) показан на рис. П3.3.

Команда **Unit** (Юнит) вызывает диалоговое окно **Insert Unit** для ввода единиц измерения (рис. П3.4).

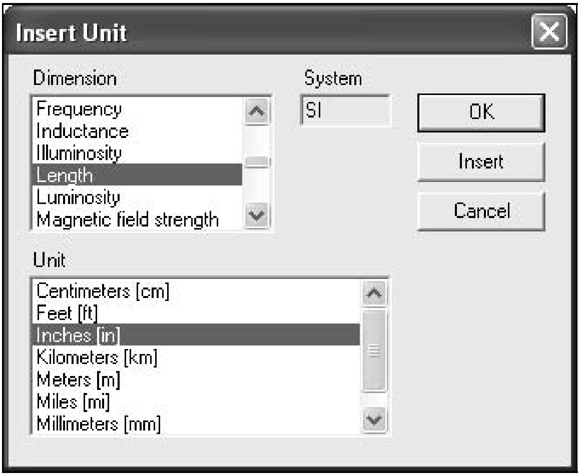
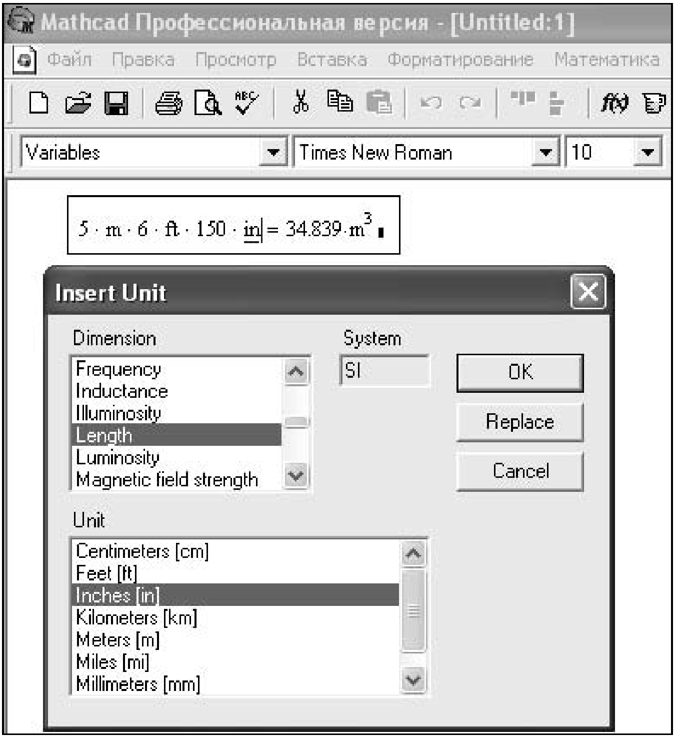


Рис. П3.4. Диалоговое окно **Insert Unit**

Это окно содержит два прокручиваемых списка: верхний — **Dimension** — содержит перечень типов единиц измерения; нижний — **Unit** — списки самих единиц измерения. В поле **System** указана система единиц измерения (по умолчанию SI), которую можно выбрать с помощью меню **Математика** (Math). Выделение щелчком левой кнопкой мыши соответствующего типа единиц измерения в списке **Dimension**, например `Length`, автоматически вызывает в списке **Unit** перечень единиц измерения этого вида. Если выделить в этом окне щелчком левой кнопки мыши одну из единиц списка, например, `Inches` и затем щелкнуть по кнопке **Insert** диалогового окна, то на месте визира на рабочем листе появится сокращение выделенной единицы измерения. Пусть, к примеру, необходимо вычислить объем комнаты, длина которой равна 5 метров, ширина равна 6 футов, а высота равна 150 дюймов. Введите в нужном месте рабочего листа число 5 и клавишей <*> знак умножения. Вызовите окно **Insert Unit** и в его списке **Dimension** выделите строку `Length`, а затем в списке **Unit** — строку `Meters`. Щелкните по кнопке **Insert**. Опять введите знак умножения, число 6, знак умножения, выделите строку `Length` в списке **Dimension**, а в списке **Unit** — строку `Feet`. Щелкните по кнопке **Insert**. Затем введите знак умножения, число 150, знак умножения, опять выделите последовательно строки с названиями `Length` и `Inches`, щелкните по кнопке **Insert**. Нажав клавишу <=>, получите объем комнаты в кубических метрах, как это и показано на рис. П3.5.



$5 \cdot m \cdot 6 \cdot ft \cdot 150 \cdot in = 34.839 \cdot m^3$

Dimension: Length

System: SI

Unit: Inches [in]

Рис. П3.5. Ввод единиц измерения командой **Unit**

Список литературы

1. Черняк А. А., Новиков В. А., Мельников О. И., Кузнецов А. В. Математика для экономистов на базе Mathcad. — СПб.: БХВ-Петербург, 2003. — 485 с.
2. Плис А. И., Сливина Н. А. Mathcad 2000: математический практикум. — М.: Финансы и статистика, 2000 — 656 с.
3. Салманов О. Н. Математические методы в экономике с применением средств Excel и Mathcad. — М.: Knowledge, 2002. — 500 с.
4. Кудрявцев Е. М. Mathcad 2000: символьное и численное решение разнообразных задач. — М.: ДМК, 2001. — 570 с.
5. Херхагер М., Партолль. Mathcad 2000: полное руководство. — Киев.: БХВ-Киев, 2000. — 414 с.

Предметный указатель