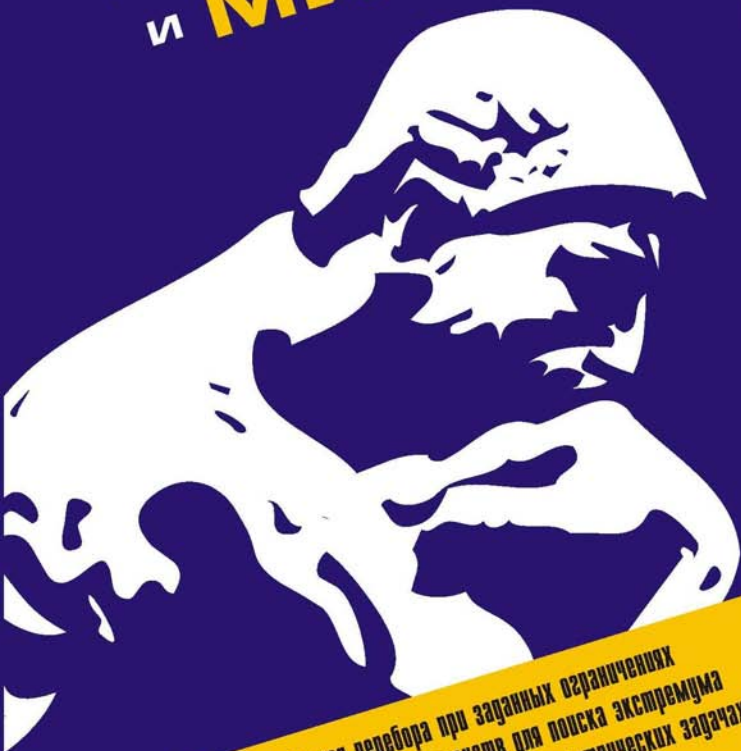


С. П. Актершев

ЗАДАЧИ на МАКСИМУМ и МИНИМУМ



- Метод перебора при заданных ограничениях
- Применение неравенств для поиска экстремума
- Максимум и минимум в геометрических задачах
- Задачи с параметром

Сергей Ахтершев

ЗАДАЧИ **на МАКСИМУМ** **и МИНИМУМ**

Санкт-Петербург

«БХВ-Петербург»

2004

УДК 372.8(076.1)
ББК 74.26я721
А43

Актершев С. П.

А43 Задачи на максимум и минимум. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005. — 192 с.: ил.

ISBN 5-94157-539-4

Рассмотрены разнообразные задачи элементарной математики, связанные с поиском экстремальных значений функции или выбором наилучшего (оптимального) решения при заданных ограничениях (наименьшая стоимость, кратчайший путь и т. п.). Большое внимание уделено геометрическим задачам "на экстремум" и задачам с параметром, взаимосвязи различных разделов математики, связи ее с другими науками и роли этой науки в повседневной практической деятельности людей. Все задачи приведены с подробным решением, часть задач сопровождается двумя или тремя решениями. В конце каждого раздела дана подборка задач для самостоятельной работы.

*Для учащихся и преподавателей общеобразовательных
и специализированных школ, лицеев, колледжей
и для самообразования*

УДК 372.8(076.1)
ББК 74.26я721

Группа подготовки издания:

Главный редактор	<i>Екатерина Кондукова</i>
Зам. главного редактора	<i>Людмила Еремеевская</i>
Зав. редакцией	<i>Григорий Добин</i>
Редактор	<i>Татьяна Лапина</i>
Компьютерная верстка	<i>Натальи Караваевой</i>
Корректор	<i>Виктория Пиотровская</i>
Дизайн серии	<i>Инна Тачина</i>
Оформление обложки	<i>Игоря Цырульников</i>
Зав. производством	<i>Николай Тверских</i>

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 25.11.04.

Формат 60×90^{1/16}. Печать офсетная. Усл. печ. л. 12.

Тираж 3000 экз. Заказ №

"БХВ-Петербург", 190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

Гигиеническое заключение на продукцию, товар № 77.99.02.953.Д.001537.03.02 от 13.03.2002 г. выдано Департаментом ГСЭН Минздрава России.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 5-94157-539-4

© Актершев С. П., 2005
© Оформление, издательство "БХВ-Петербург", 2005

Содержание

Предисловие	1
Глава 1. Выбор наилучшего варианта.....	3
1.1. О математических моделях, постановке задачи и других "скучных" вопросах	3
1.2. Метод перебора	16
1.3. Когда экстремум найти нетрудно	30
Глава 2. Экстремум находим без помощи производной	45
2.1. Наилучшее — это то, что невозможно улучшить	46
2.2. Применение неравенств для поиска экстремумов	59
2.3. Вариации на тему неравенств	72
Глава 3. О том, как с помощью гирек построить кратчайшую транспортную сеть, и о том, как можно растянуть бычью шкуру	87
3.1. Экстремум в геометрических задачах.....	87
3.2. Минимум энергии, сумма длин и "оптические" свойства экстремумов	103
3.3. Задача Дидоны и родственные ей задачи	119

Глава 4. Где быть экстремуму —	
диктует параметр	131
4.1. Исследуем все возможности	131
4.2. Сколько корней имеет уравнение?	153
4.3. Когда без производной не обойтись	165
Список литературы	187

Предисловие

Среди различных математических задач встречаются задачи, в которых требуется найти наилучший вариант, кратчайший путь, наибольшее число с заданными свойствами и т. п. Подобные задачи обладают своеобразной привлекательностью. По-видимому, это объясняется тем, что они чем-то похожи на наши повседневные проблемы. Мы стараемся приобрести вещи наилучшего качества по возможности за наименьшую цену; пытаемся максимально увеличить свои доходы, прилагая к этому минимальные усилия; хотим поменьше рисковать и т. д. У всех этих жизненных проблем есть одно общее свойство: необходимо добиться наилучшего результата, выполнив определенные условия. В математике таким проблемам соответствует целый класс задач, в которых при заданных ограничениях нужно отыскать наибольшее (максимальное) или наименьшее (минимальное) значение некоторой функции. Оба понятия — максимум и минимум — объединяются одним термином "экстремум".

К сожалению, задачам "на экстремум" в школьном курсе математики уделяется явно недостаточное внимание. В лучшем случае школьники старших классов умеют найти экстремум простейших функций с помощью производной. У них создается ложное впечатление, будто это единственный метод решения подобных задач. Встретившись на вступительном экзамене с нестандартно сформулированной задачей "на экстремум", многие абитуриенты совершенно теряются и не знают, как к ней подступиться. Вместе с тем, в элементарной математике имеется целый набор приемов решения подобных задач. Так, например, многие задачи достаточно просто решаются применением теорем о средних, методом перебора при заданных ограничениях, установлением области значений функции, применением зеркальной симметрии и т. д.

В этом учебном пособии рассмотрен ряд задач элементарной математики, разнообразных по содержанию, так или иначе связанных с выбором наилучшего варианта или поиском экстремальных значений функции. В нем подробно обсуждаются методы решения "экстремальных" задач, а также идеи, лежащие в их основе. Задачи приведены с подробным решением; некоторые сопровождаются двумя или тремя различными решениями. В конце каждого параграфа дана подборка задач для самостоятельного решения.

Основная часть задач рассчитана на учащихся старших классов, но диапазон уровня трудности задач довольно широк: от простейших, которые вполне по силам учащимся 8–9 классов, до задач олимпиадных. Почти все приведенные в книге решения задач "на экстремум" даже не используют понятие производной. Исключение составляет только последний параграф *главы 4*, предназначенный для учащихся физико-математических школ и классов с углубленным изучением математики. Разумеется, приведенные решения не являются единственно возможными. Читатели наверняка смогут для многих задач найти оригинальные решения, возможно даже более простые и изящные.

Большая часть задач взята из различных источников, указанных в списке литературы; многие из задач предлагались на вступительных экзаменах в различные вузы. Основой материала для этой книги послужили задачи, опубликованные в журнале "Квант" в 70–90 гг. прошлого столетия (разделы "Задачник Кванта", "Избранные школьные задачи", "Читатели пишут", "В помощь абитуриенту" и др.). В те годы в "Кванте" было напечатано много замечательных статей с подборками задач, которые сейчас мало доступны современным школьникам. Стремление "извлечь на поверхность" эти "золотые россыпи" и является главной причиной создания настоящего пособия. Книга предназначена в первую очередь школьникам, но будет полезна преподавателям, студентам, а также всем интересующимся математикой и желающим расширить свой кругозор.

Автор

Глава 1



Выбор наилучшего варианта

1.1. О математических моделях, постановке задачи и других "скучных" вопросах

Физик и математик целый год вместе работают над одной задачей. Математик: "Ура! Я доказал, что решение задачи существует". Физик: "Да если бы я в этом хоть на секунду сомневался, я бы не стал этой задачей заниматься! "

Из анекдота

Не подумайте, что анекдот в эпиграфе этого раздела про глупого математика. Это анекдот про недалекого физика. Дело в том, что на самом деле они занимаются разными задачами. Физик исследует некоторое физическое явление, которое, очевидно, существует. Математик же изучает математическую модель этого явления. Вопрос об адекватности математической модели может оказаться очень непростым. Тот факт, что математику удалось доказать существование решения математически поставленной задачи (заметьте, не найти решение, а только выяснить, что оно существует!), свидетельствует в пользу правильности выбранной модели. Окончательный вывод о пригодности модели покажет только сравнение следствий, выведенных из решения математической задачи с результатами физического эксперимента.

Однако прежде чем решить задачу, необходимо ее четко сформулировать на языке математики, т. е. правильно поставить.

Например, *найти все значения параметра, при которых данное уравнение имеет единственное действительное решение*, — это правильно поставленная задача. Здесь ясно сформулирована цель (найти значения параметра) и указаны условия, которые требуется выполнить (уравнение должно иметь решение; решение должно быть единственным и действительным). А вот задание из одноименной сказки "пойди туда — не знаю куда, принеси то — не знаю что" — это неправильно поставленная задача. Главный герой этой сказки, получив такой задание, может, не сходя с места, заявить, что он задание уже выполнил. Вопрос о правомерности его наглого заявления не может быть решен объективно. Отсюда первое правило: *задача должна быть поставлена правильно!*

Рассмотрим теперь, что такое математическая модель. Это только в школьных задачках заранее известно, что дано и что требуется получить. В жизни все гораздо сложнее.

К примеру, требуется проложить железную дорогу через горный хребет наилучшим образом. Возникает вопрос: какую дорогу считать наилучшей — самую короткую, самую дешевую или самую безопасную? Возможно, требуется, чтобы будущая железная дорога обладала всеми этими качествами (т. е. была достаточно короткая, дешевая и безопасная) и вдобавок была бы хороша в эксплуатации. Тогда надо сформулировать ограничения. Например, такие: длина дороги не должна превышать 500 км, стоимость строительства не должна превышать 100 миллиардов руб., серьезные повреждения дороги лавинами должны быть не чаще, чем раз в два года и т. д. Затем необходимо определить целевую функцию, для которой надо будет найти экстремальное значение. Такой функцией может служить, к примеру, годовая стоимость эксплуатации железной дороги или ее пропускная способность или что-нибудь иное.

При постановке задачи приходится отвечать на следующие вопросы: какие варианты маршрута удовлетворяют сформулированным требованиям? сколько их? какие величины можно считать независимыми переменными, а какие — заданными параметрами? Такими переменными могут быть количество станций, туннелей и мостов, а параметрами — максимальная

протяженность туннеля, максимально допустимая крутизна участка дороги и т. п. Наконец, как зависит целевая функция от всех этих переменных и параметров? Дать четкие ответы на все эти вопросы и означает создать математическую модель поставленной задачи. Разработав математическую модель, можно заняться решением поставленной задачи, т. е. выяснить, на каких участках дороги необходимо построить мосты, туннели и станции так, чтобы целевая функция принимала экстремальное значение.

При разработке математической модели неизбежно приходится делать некоторые упрощения и предположения, иначе задача будет "неподъемной". Так, например, можно считать небольшой участок дороги отрезком прямой, крутизну и скорость движения поездов на каждом участке полагать постоянной, вероятность схода лавины некоторой постоянной величиной и т. д. Математическая модель всегда основана на некотором упрощении. Однако, заменяя реальный объект моделью, мы получаем возможность использовать для решения задачи мощные средства математики.

Помните, как в известной сказке П. П. Ершова "Конек-Горбунук" царь приказал Ивану доставить во дворец Царь-Девичу в трехнедельный срок? (Тем, кто не читал это замечательное произведение, настоятельно рекомендуем его прочесть.) Надо отдать должное царю — задачу он поставил правильно. Поставленную задачу Иван успешно решил с помощью своего четвероногого друга. Разработка же математической модели задачи — заслуга Конька-Горбунка. Тот выделил два самых важных фактора, позволивших решить задачу:

периодическое появление Царь-Девичи на берегу Моря-Окияна (два раза в год);

ее пагубное пристрастие к кондитерским изделиям (не может не клюнуть на такую приманку).

Все остальные качества Царь-Девичи оказались для решения задачи несущественными. Отсюда второе правило: *создавая модель, необходимо отбросить все второстепенные особенности реального объекта и сохранить только самые главные, без которых никак нельзя обойтись.*

Далеко не всегда заранее ясно, какие свойства объекта окажутся существенными для решения задачи, а какие — нет. Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Путешественник вышел утром из своей маленькой палатки на прогулку. Сначала он прошел 1 км в южном направлении, затем повернул на восток и прошел ровно 1 км, затем повернул на север и, пройдя ровно 1 км, оказался перед входом в свою палатку. Может ли это быть?

Решение. Возьмем лист бумаги и карандаш. Представим, что бумажный лист — это план местности. Изобразим на плане маршрут прогулки. У нас получится ломаная, идущая по трем сторонам квадрата со стороной 1 км. Вывод, кажется, ясен: в конце прогулки путешественник находится на расстоянии 1 км от своей палатки.

Если вы еще не заметили подвоха, давайте задумаемся над вопросом: *какую модель мы используем?* План или карта — это модель поверхности Земли. Достаточно ли хороша эта модель? Конечно, мы понимаем, что Земля не плоская. Однако на расстояниях порядка километра ее можно считать плоской с хорошей точностью. Другое дело, если бы путешественник прогулялся на расстояние 1000 км! Тогда было бы необходимо учитывать кривизну поверхности Земли. Строго говоря, каждый из трех участков пути представляет собой дугу окружности (в восточном направлении путешественник шел по дуге параллели, а в южном и северном направлениях — по дугам меридианов). Изображая маршрут прогулки на плане местности, мы заменили эти дуги отрезками. Откажемся от модели плоской Земли. Возьмем в качестве модели сферу. Можно ли на поверхности сферы из двух меридиональных дуг и одной дуги параллели составить замкнутую линию? Могут ли на поверхности сферы две меридиональных дуги иметь хотя бы одну общую точку? Теперь вы наверняка отыщете такую возможность. Как видим, решение существенно зависит от выбранной модели. В модели плоской Земли ситуации, указанной в условии задачи, быть не может; если же считать Землю шарообразной, то ситуация возможна.

Вопрос

Сколько вариантов решения имеет эта задача? *Подсказка:* задача имеет не единственное решение.

Вот другой пример задачи, в решении которой важную роль играет выбранная математическая модель.

Задача 2. Двумя ударами топора разрубить подкову на максимальное число частей, не перекладывая части после удара.

Решение. Не будем хвататься за топор или бежать на улицу искать подкову. Лучше сделаем математическую модель задачи, например, следующую: *подкова — дуга окружности; удар топора — прямолинейный разрез*. Мы четко поставили задачу, и не трудно убедиться, что больше пяти частей не получится (рис. 1.1). Можно ли получить шесть частей? Так и хочется заявить, что это невозможно! Не будем торопиться с заявлениями. Попробуем выбрать другую модель. У реальной подковы кроме длины есть еще и ширина. Усложним нашу модель: *подкова — это кольцо с разрезом*. Теперь можно получить шесть и даже семь частей (рис. 1.2, а, б).

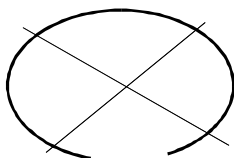


Рис. 1.1

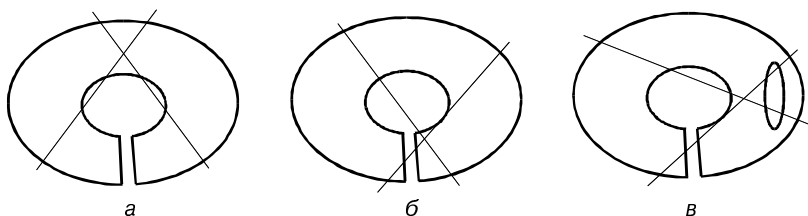


Рис. 1.2

Упражнение 1

Считая подкову кольцом с разрезом, получите восемь частей.

Продолжая в том же духе, можно догадаться, что у подковы есть толщина, а тогда *удар топора — плоский разрез*. Какое наибольшее число частей можно получить с учетом толщины подковы? А может быть частей еще больше? Что бы еще учесть? Конечно же, дырки для гвоздей! На рис. 1.2, в показано, как наличие дырок в подкове может увеличить число частей. Какое максимальное число частей можно получить, если учесть дырки для гвоздей? Как видите, от исходных предположений существенно зависит ответ задачи. Чем сложнее выбранная модель, тем сложнее решение. Однако не всегда, усложняя модель, мы получаем новый результат. Искусство составления модели в том и состоит, чтобы учесть самое важное, не переусложнив модель.

Сделаем еще один важный вывод: найденный ответ относится, прежде всего, к выбранной модели и только косвенно — к реальному объекту.

Вот еще пример задачи-головоломки, решение которой помогает найти хорошая математическая модель.

Задача 3. Возьмите жесткую, например, деревянную палочку длиной 20–30 см и прочную нитку. Сделайте на конце нити широкую петлю и наденьте ее на конец палочки. Возьмите пиджак (можно жилет, рубашку, кофточку — лишь бы были на пуговицах) и, продев свободный конец нити в пуговичную петлю, привяжите его к другому концу палочки так, чтобы нить не соскальзывала (для этого на конце палочки сделайте небольшую зарубку). В результате палочка окажется прицепленной к пиджаку, как показано на рис. 1.3. В этом состоянии длина нити должна быть чуть меньше длины палочки так, чтобы петлю невозможно было снять с палочки. Теперь попробуйте отцепить палочку от пиджака (разумеется, не разрывая нити, не ломая палочку и не разрезая пиджака).

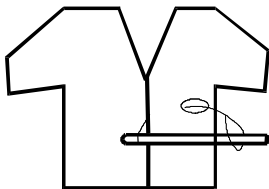


Рис. 1.3

Указание

Если ваши попытки окажутся безрезультатными и вы решите, что вам подсунули задачу, не имеющую решения, сделайте хорошую математическую модель пиджака. Обдумайте, какие свойства пиджака совершенно необходимы для решения задачи, а какие только мешают решению? Можно ли выделить одно, самое главное для решения свойство и отбросить все остальные? Обдумав эти вопросы, изготовьте физическую модель пиджака из небольшого ненужного лоскута или листка бумаги. Решите задачу на этой модели.

Рассмотрим еще один вопрос: *когда задачу можно считать решенной?* Например, такую: *найти простые числа, у которых сумма цифр (в десятичной системе) равна двум*. Первое "подвернувшееся под руку" простое число 2 как раз подходит. Можно ли считать задачу решенной? Увы, нет! Решить задачу — значит найти *все* ее решения и доказать, что других решений нет. Например, простые числа 11 и 101 тоже удовлетворяют условию. Доказать, что поставленная задача не имеет решения — это тоже означает *решить задачу*!

Упражнение 2

Найдите еще несколько простых чисел, у которых сумма цифр равна двум. Существует ли наибольшее такое число?

Несколько советов о том, как решать задачи

Никогда не лишайте себя возможности (и удовольствия) самостоятельно найти решение задачи. Прежде чем прочитать реше-

ние, затратьте некоторое время на попытку "подобрать ключ" к задаче. Даже если ваша попытка будет неудачной, она не является бесполезной. Во-первых, вы поймете, в чем состоит трудность задачи и какие препятствия необходимо преодолеть на пути к ответу. Это понимание поможет вам разобраться в приведенном ниже решении. Во-вторых, вы приобретете нечто весьма ценное: опыт самостоятельного исследования проблемы (этот опыт нигде невозможно купить ни за какие деньги). Рано или поздно этот накопленный опыт приведет вас к успеху.

Принято считать, что в математике надо не угадывать ответ, а доказывать некоторые утверждения, ссылаясь на другие ранее доказанные утверждения (теоремы). Вообще говоря, это верно. Сам по себе ответ, не подтвержденный какими-либо рассуждениями, не представляет ценности: как знать, а вдруг он неверный? Однако прежде чем что-то доказывать, необходимо *догадаться*, что именно надо доказать. Решая задачу, мы, прежде всего, делаем более или менее правдоподобное предположение, т. е. догадку. Догадка лежит в основе всякого решения, поэтому прежде всего надо учиться делать правдоподобное предположение. Затем нужно выяснить, верно ли оно. Для этого рассмотрите частные и предельные случаи.

Рассмотрим, например, следующее предположение: *любая прямая, проведенная через точку пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника, делит его на две равновеликие части.*

Рассмотрим следующие частные случаи выпуклого четырехугольника:

прямоугольник;

параллелограмм;

равнобокая трапеция.

В первых двух случаях предположение подтверждается. В случае трапеции гипотеза подтверждается, только если прямая является осью симметрии. Однако если прямая является диагональю, то легко видеть, что гипотеза неверна (докажите это). Предположение оказалось неверным.

Если же ваша догадка подтверждается на различных частных случаях, вы обрываете все большую уверенность в ее правильности и начинаете ее обосновывать. Изучите следствия, которые можно вывести из вашего предположения. Установите связь этих следствий с другими известными вам фактами. Выясните, какие свойства объектов, с которыми вы работаете (геометрических фигур, функций и т. п.), обеспечивают правильность вашего предположения. Попробуйте найти объекты, для которых гипотеза будет неверна. Исследуйте предельные случаи. Если вы работаете с функцией, рассмотрите случай, когда переменная принимает очень большие или предельно возможные значения и т. п. Рассуждения такого типа называются наводящими соображениями. Поясним сказанное на двух примерах.

Пример 1. Через точку пересечения диагоналей произвольной трапеции провести прямую так, чтобы разделить трапецию на две равновеликие части.

Решение. Возьмем частный случай равнобедренной трапеции. Эта фигура имеет ось симметрии, которая и будет искомой прямой, т. к. точка пересечения диагоналей лежит на оси симметрии. А если трапеция неравнобедренная?

Приглядимся внимательней к частному случаю. Ось симметрии проходит через середины оснований трапеции. Возникает предположение, что это свойство искомой прямой верно для любой трапеции. Проверим его.

Возьмем предельный случай: одно основание трапеции равно нулю (трапеция в этом случае вырождается в треугольник). Тогда точка пересечения диагоналей вырожденной трапеции совмещается с вершиной треугольника. Теперь нужно провести прямую через вершину треугольника так, чтобы разделить его на равновеликие части. Очевидно, что искомой прямой будет медиана треугольника. Искомая прямая проходит через середину основания вырожденной трапеции, т. е. в этом предельном случае предположение подтверждается.

Если наше предположение верно, тогда середины обоих оснований трапеции и точка пересечения диагоналей должны лежать на

одной прямой! Возьмем другой частный случай: основание AD трапеции $ABCD$ вдвое больше другого основания BC . Продолжим боковые стороны AB и CD до их пересечения в точке E . Диагонали трапеции являются медианами треугольника AED (докажите это). Тогда третья медиана, проведенная из вершины E , проходит через точку пересечения диагоналей и середину основания BC (почему?). Предположение опять подтверждается.

Упражнение 3

Докажите, что в любой трапеции точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой. Докажите, что эта прямая делит трапецию на две равновеликие части.

Пример 2. Два поселка A и B расположены на одном берегу реки. Почтальон должен доставить из A в B телеграмму и вернуться обратно. Он может пойти пешком либо плыть по реке туда и обратно на лодке. Скорость лодки в стоячей воде и скорость, с которой почтальон идет по берегу, одинаковы. Какой способ передвижения следует выбрать почтальону, чтобы проделать весь путь за наименьшее время?

Решение. Предположим, что река довольно быстрая и скорость лодки только чуть-чуть больше скорости течения (предельный случай). Тогда скорость лодки вниз по течению будет почти вдвое превышать скорость передвижения почтальона по берегу. Однако когда почтальон станет грести против течения, он будет продвигаться очень медленно (если скорость течения равна скорости лодки, то почтальон просто будет торчать на месте). Очевидно, что выигрыш во времени на пути по течению не сможет компенсировать катастрофический проигрыш на обратном пути. Напрашивается гипотеза: почтальон должен идти пешком. Проверим ее.

Пусть U — скорость лодки в стоячей воде, V — скорость течения ($U > V$), l — расстояние между поселками. Пешком весь путь будет проделан за время $2l/U$, а на лодке — за время $l/(U + V) + l/(U - V)$. Мы предполагаем, что верно неравенство

$1/(U+V) + 1/(U-V) > 2 \cdot 1/U$. Упрощая его, видим, что неравенство верно, поэтому предположение было правильным.

В замечательной книге Д. Пойа "Как решать задачу" сформулированы "правила исследователя". Прочитируем некоторые из них.

Начните с частных случаев (они могут оказаться легче).

Рассмотрите полученные результаты.

Наблюдайте, обобщайте, проверяйте.

Проанализируйте метод решения, расчлените его и посмотрите, какие его части могут быть перенесены на общий случай.

Подойдите к задаче с разных сторон, исследуйте различные детали; исследуйте одни и те же детали, но с разных точек зрения; попытайтесь усмотреть в каждой детали некоторую новую интерпретацию задачи.

Ищите точки соприкосновения с вашими ранее приобретенными знаниями.

Попробуйте увидеть знакомое в том, что вы исследуете, и полезное в том, что оказалось знакомым.

Вглядитесь в метод, попытайтесь увидеть в нем главное. Постарайтесь улучшить его.

Наконец, последний совет. Приступая к решению, выясните, существует ли в рамках принятой модели решение? Вопрос не праздный — решения может и не быть. Вы сэкономите время и усилия, если не будете искать то, чего нет.

Упражнение 4

Выясните, существует ли прямоугольник единичной площади с наибольшим периметром? Существует ли правильная треугольная пирамида единичного объема с наибольшей площадью поверхности?

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Из трех одинаковых отрезков можно составить равнобедренный треугольник. Из пяти одинаковых отрезков нетрудно

составить два равносторонних треугольника (как?). Можно ли из шести одинаковых отрезков составить четыре равносторонних треугольника?

Задача 2. Можно ли тремя разрезами разделить торт на восемь частей?

Задача 3. Арбуз разрезали на четыре части и мякоть съели; осталось пять корок. Может ли такое быть?

Задача 4. Вечный и Неутомимый Путешественник решил все время двигаться строго на северо-восток. Окончится ли когда-нибудь его путешествие? Если да, то в какой точке? Где следует разыскивать этого упряма, если с момента начала путешествия прошло много времени?

Задача 5. Из листа жести вырезан кусок неправильной формы. Каким образом по возможности точнее определить его площадь, если у Вас имеется в запасе квадратный лист такой жести? (Поверхность вырезанного куска может быть не плоской, и выпрямить ее вы не можете.)

Задача 6. В комнате на столе находятся три электрические лампы накаливания, а в коридоре три выключателя. Каждым выключателем можно зажечь или погасить одну из ламп. Вам позволяется зайти в комнату только один раз. Можно ли определить, какой выключатель соответствует каждой из ламп? Свет от ламп не проникает в коридор; вначале все лампы погашены.

Задача 7. Можно ли на плоскости расположить четыре треугольника так, чтобы каждый из них имел общую границу с тремя остальными? Любая общая граница должна быть отрезком.

Задача 8. Две точки А и В движутся так, что в любой момент скорость точки А больше скорости точки В (по модулю), а направление векторов скорости одинаково. Может ли расстояние между А и В оставаться неизменным?

Задача 9. Существует ли такой многоугольник площадью один квадратный сантиметр, который невозможно накрыть никаким прямоугольником площадью один квадратный километр?

Задача 10. Ученики одной из московских школ совершили автобусную экскурсию в г. Волоколамск. После экскурсии один из школьников нарисовал картинку (рис. 1.4). Куда на этой картинке едет автобус — в Москву или Волоколамск?

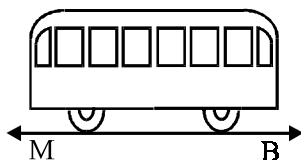


Рис. 1.4

Задача 11. Можно ли вырезать из целого прямоугольного листа бумаги фигуру, изображенную на рис. 1.5? Приклеивать части нельзя.

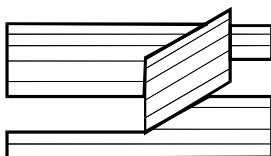


Рис. 1.5

Задача 12. В городе, окруженном прямоугольной стеной, живут три враждующих между собой князя. Каждый из них имеет свой терем и владеет одними из трех городских ворот. На рис. 1.6 ворота и терем каждого князя помечены одним и тем же номером; терем № 1 примыкает к городской стене. Каждый из князей решил проложить дорожку от своего терема к своим воротам так, чтобы она не пересекалась с дорожками остальных князей. Смогут ли князья осуществить задуманное?

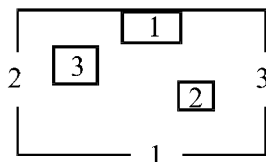


Рис. 1.6

Задача 13. Два состава по 4 вагона каждый идут по одному пути навстречу друг другу. Между ними расположен тупик, в котором помещается локомотив и два вагона. Смогут ли поезда разойтись?

Задача 14. Математический удав представляет собой цилиндр, закрытый с одного торца и открытый с другого. Толщина стенки цилиндра равна нулю; поверхность цилиндра может как угодно деформироваться и сминаться, не разрываясь. Этот удав начал заглатывать свой собственный хвост. Каков будет результат этого захватывающего процесса? Можете ли вы описать, как будет выглядеть удав, проглотивший сам себя, в разрезе?

1.2. Метод перебора

Навозну кучу разгребая,
Петух нашел жемчужное зерно.

И. А. Крылов

В математическом фольклоре можно встретить забавную задачу, которую мы перескажем в следующей формулировке.

Задача 1. Математик Иванов случайно встретил на улице своего знакомого Петрова, с которым не виделся много лет. "А у меня уже три сына подрастают", — гордо объявил Петров. "Какого же возраста твои парни?" — поинтересовался Иванов. "Если возрасты всех троих сложить, то получится 13, если эти три числа перемножить, то получится 36, — ответил Петров и ехидно добавил: — Ты же у нас математик, вот и реши сам, сколько им лет". "Этой информации мне недостаточно, чтобы определить возраст твоих детей", — смущенно признался Иванов после минутного размышления. "Да, забыл тебе сказать, что у старшего сына волосы рыжие", — сообщил ценные сведения Петров. "Ну, теперь я все понял!" — обрадовался Иванов и тут же правильно назвал возраст всех трех детей. Какого возраста сыновья Петрова?

Решение. Представим число 36 произведением простых сомножителей и единицы: $36 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ (единица всегда готова служить сомножителем перед чем угодно). Эти "кирпичики"

нужно скомбинировать в три сомножителя так, чтобы в результате сумма всех трех была 13. Перебрав все возможные комбинации, видим, что подходящих вариантов только два: $36 = 1 \cdot 6 \cdot 6$ и $36 = 9 \cdot 2 \cdot 2$. В первом варианте есть младший сын, но нет старшего; во втором варианте есть старший сын. Дополнительная информация о цвете волос старшего сына позволяет выбрать единственный вариант.

В этой задаче использован метод перебора — видимо, самый древний и самый простой метод решения задач, в которых искомая величина принимает только целочисленные значения. Этот метод очень удобен, когда количество возможных вариантов невелико. Такой перебор легко осуществить "вручную". Когда же вариантов тысячи или миллионы, то перебор можно поручить компьютеру. Известны серьезные задачи, которые математики не могут решить иначе, чем методом перебора. Конечно, любой перебор, который можно осуществить практически, — это перебор *конечного* числа вариантов, и никакая вычислительная техника этого не изменит. Так, например, перебором невозможно точно решить такую простейшую геометрическую задачу: *найти на прямой l точку, наименее удаленную от заданной точки O , не лежащей на прямой l* . Количество точек на прямой l — бесконечное множество, и никакой суперкомпьютер тут не поможет. Единственный недостаток метода перебора — его трудоемкость при большом количестве вариантов. Однако и этого недостатка можно избежать, если правильно организовать перебор. Рассмотрим применение этого метода в следующих задачах.

Задача 2. Купили несколько одинаковых книг и несколько одинаковых альбомов. За книги заплатили 10 р. 56 коп. Известно, что книг купили на шесть больше, чем альбомов, а цена книги более чем на 1 рубль превосходит цену альбома. Сколько купили книг?

Решение. Из условия видно, что книг купили не менее семи и цена книги больше одного рубля. Отсюда следует, что книг не более десяти (иначе за них заплатили бы больше 11 руб.). Таким образом, количество купленных книг — одно из чисел 7, 8, 9, 10. Кроме того, цена одной книги в копейках — натуральное число,

следовательно, 1056 делится нацело на одно из чисел 7, 8, 9, 10. Из них только число 8 является делителем числа 1056, значит, купили 8 книг.

Замечание

Здесь, прежде всего надо было заметить, что количество книг — натуральное число. Цена одной книги в копейках — тоже натуральное число. Этот факт не очень заметен в условии задачи. Предполагается, что читатель из личного опыта знает о том, что копейка — самая мелкая денежная единица. Важно на начальном этапе решения выявить все ограничения на значения целочисленной переменной, которые заложены в условии задачи. На эти ограничения указывают сведения о количестве книг (больше шести) и цене одной книги (больше 1 рубля). Ограничения устанавливают небольшое количество возможных вариантов, и далее вступает в действие перебор этих вариантов.

Задача 3. Рыбаки поймали несколько рыб (больше 30, но меньше 100 штук). Оказалось, что 48 % из них окуни. Пять самых мелких рыб были отпущены в озеро. После этого рыб снова пересчитали, и оказалось, что среди оставшихся рыб 50 % составляют окуни. Сколько рыб было поймано? Сколько окуней было среди отпущенных рыб?

Решение. Пусть было поймано n рыб. Тогда количество окуней среди них $0,48 \cdot n = 12 \cdot n / 25$. Поскольку количество окуней — натуральное число, то число n должно нацело делиться на 25. С учетом ограничений, указанных в условии, число n может принимать только два возможных значения: 50 и 75. После того как пять рыб были отпущены в озеро, должно остаться четное число рыб (половина оставшихся рыб — натуральное число). Этому условию удовлетворяет единственный вариант: было поймано 75 рыб, среди них было $0,48 \cdot 75 = 36$ окуней. Среди оставшихся рыб $0,5 \cdot 70 = 35$ окуней, поэтому среди отпущенных рыб был один окунь.

Задача 4. Около дома посажены липы и березы, причем общее их количество больше 14. Если количество лип увеличить вдвое, а количество берез на 18, то берез станет больше. Если увеличить

вдвое количество берез, не изменяя количества лип, то лип все равно будет больше. Сколько лип и сколько берез было посажено?

Решение. Пусть было посажено x лип и y берез. По условию задачи, натуральные числа x и y удовлетворяют следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} 14 < x + y, \\ 2x < y + 18, \\ 2y < x. \end{cases}$$

Используя второе и третье неравенства, получаем $4y < 2x < y + 18$. Отсюда $3y < 18$. Умножая первое неравенство на два и складывая его со вторым неравенством, получаем $28 < 3y + 18$. Отсюда $10 < 3y < 18$. Число $3y$ кратно трем, поэтому его возможные значения — это 12 или 15. Рассмотрим первый вариант. Пусть $y = 4$, тогда из первого неравенства исходной системы получаем $10 < x$, а из второго неравенства получаем $x < 11$. Этот вариант не подходит. Пусть теперь $y = 5$. Из третьего неравенства системы получаем $10 < x$, а из второго неравенства получаем $x < 23/2$. Этим условиям удовлетворяет только число 11. Итак, было посажено 11 лип и 5 берез.

Задача 5. Для того чтобы купить в харчевне полпорции жареных пескарей, коту Базилио не хватает 3 сольдо, а лисе Алисе — 10 сольдо. Они сложили свои деньги, закопали их на Поле Чудес, и на следующий день их совместный капитал утроился. Смогут ли теперь кот Базилио и лиса Алиса купить полную порцию жареных пескарей на двоих?

Решение. Пусть полпорции жареных пескарей стоит x сольдо. Тогда у Базилио первоначально было $(x - 3)$ сольдо, а у Алисы $(x - 10)$ сольдо. Заметим, что $x > 10$, т. к. иметь при себе отрицательную сумму денег невозможно. После того как совместный капитал Алисы и Базилио чудесным образом утроился, на руках у них оказалось $6x - 39$ сольдо. Они смогут купить жареной рыбки, если верно неравенство $6x - 39 > 2x$, т. е. $x > 39/4$. Это неравенство верно, т. к. $x > 10$, и остается только пожелать коту Базилио и лисе Алисе приятного аппетита.

Задача 6. Группа студентов решила купить магнитофон ценой от 1700 до 1950 руб. Все внесли одинаковую сумму денег, однако в последний момент двое отказались участвовать в покупке, поэтому каждому из оставшихся пришлось внести на 10 руб. больше. Сколько стоил магнитофон и сколько студентов участвовали в покупке?

Решение. Пусть в покупке участвовали n студентов и каждый из них внес x руб. Тогда стоимость магнитофона составляет $n x$ руб. Первоначально собирались участвовать $(n + 2)$ человека, и каждый вносил $(x - 10)$ руб. Отсюда следует равенство: $n x = (n + 2)(x - 10)$. Упрощая это уравнение, получаем $x = 5(n + 2)$. Таким образом, магнитофон стоит $5n(n + 2)$ руб. По условию $1700 < 5n(n + 2) < 1950$. Поделим это двойное неравенство на пять и прибавим ко всем частям единицу. В результате получим $341 < (n + 1)^2 < 391$. Из всех квадратов натуральных чисел в диапазоне от 341 до 391 находится только квадрат числа 19. Таким образом, $n = 18$, $x = 100$. Магнитофон стоит 1800 руб.

Задача 7. Малыш может съесть торт за 10 мин., порцию мороженого — за 6 мин., а пакет молока выпить за 4 мин. Карлсон может сделать все это вдвое быстрее. За какое наименьшее время они вместе смогут покончить с завтраком, состоящим из двух тортов, одной порции мороженого и двух пакетов молока? Каждое блюдо поедается только одним членом этой дружной команды.

Решение. Условие задачи не позволяет Малышу и Карлсону одновременно есть одно блюдо. Поэтому тот, кто покончит со своей долей завтрака раньше, вынужден дожидаться своего напарника. Вот если бы им позволялось помогать друг другу, это был бы самый быстрый завтрак в мире! Посчитаем, за какое время был бы съеден завтрак в таком случае. В одиночку Малыш покончил бы с завтраком за 34 мин. Помогая друг другу, они делают эту работу в три раза быстрее (Карлсон ест за двоих Малышей), т. е. за $34/3$ мин. Это тот самый идеал, к которому надо стремиться. По условию задачи время в минутах, затраченное на завтрак, должно быть натуральным числом. Наименьшее такое число, которое больше, чем $34/3$, — это число 12. Проверим,

можно ли уложиться в этот срок. Вполне! Для этого один пакет молока и оба торта надо отдать лучшему в мире пожирателю тортов — Карлсону. Малышу достанется другой пакет молока и порция мороженого.

Вопрос

Нет ли других вариантов распределения блюд, дающих такое же значение времени?

Задача 8. Завод должен переслать заказчику 1100 деталей. Детали для пересылки упаковываются в ящики. Имеются ящики трех типов. Ящик первого типа вмещает 70 деталей, ящик второго типа — 40 деталей, ящик третьего типа — 25 деталей. Стоимость пересылки ящиков первого, второго и третьего типов соответственно 200 руб., 100 руб., 70 руб. Какого типа ящики и в каких количествах нужно использовать, чтобы стоимость пересылки была наименьшей? Недогрузка ящиков не допускается.

Решение. Поставьте себя на место начальника отдела пересылки (мысленно). Вам надо сэкономить как можно больше (за это вам будет денежная премия). Какой вопрос, прежде всего, придет вам в голову? Нет, не вопрос *"как велика премия?"*, а вопрос *"какие ящики самые выгодные?"*. Стоимость пересылки одной детали в ящиках первого типа (крупные ящики) 20/7 руб.; в ящиках второго типа (средние ящики) — 5/2 руб.; в ящиках третьего типа (мелкие ящики) — 14/5 руб. Самыми выгодными оказываются средние ящики, а самые невыгодными — крупные. Следовательно, средних ящиков надо использовать как можно больше. Наибольшее возможное количество средних ящиков — 25. В них можно разместить 1000 деталей. Если же средних ящиков взять 26, то остальные 60 деталей нельзя разместить ни в мелких, ни в крупных ящиках. Остается 100 деталей, которые, очевидно, можно разместить в четырех мелких ящиках. Стоимость пересылки при этом будет $25 \cdot 100 + 4 \cdot 70 = 2780$ руб. Приведенные рассуждения правдоподобны, но все же мы не перебрали все возможные варианты. Приведем более строгое решение.

Пусть все детали разместились в n средних, x мелких и y крупных ящиках. Тогда

$$40 \cdot n + 25 \cdot x + 70 \cdot y = 1100. \quad (1.1)$$

Десятая часть стоимости пересылки при этом равна

$$S_1 = 10n + 7x + 20y. \quad (1.2)$$

Выразим из (1.1) количество самых выгодных ящиков n , подставив в (1.2), получим $S_1 = 275 + (3 \cdot x + 10 \cdot y) / 4$. Величина S_1 должна быть натуральным числом (почему?), поэтому выражение $(3 \cdot x + 10 \cdot y)$ должно делиться на 4 и при этом иметь наименьшее возможное значение. Если взять $y = 0$, то выражение $(3x + 10y)$ при различных натуральных x принимает значения 3, 6, 9, 12, ... Наименьшее значение, которое делится на 4, — это 12. Если же взять $y = 1$, то $(3 \cdot x + 10 \cdot y)$ при целых неотрицательных x принимает значения 10, 13, 16, ... Наименьшее среди них значение, которое делится на 4, — это 16. Если же $y \geq 2$, то $3x + 10y \geq 20$. Таким образом, наилучший вариант будет $y = 0$, $x = 4$. Остается убедиться, что в этом случае n принимает натуральное значение ($n = 25$). Стоимость пересылки при этом $S = 2780$ руб.

Вопрос

Почему бы не взять $y = 0$, $x = 0$? Ведь тогда выражение $(3 \cdot x + 10 \cdot y)$ кратно 4 и принимает наименьшее значение!

Задача 9. Какое наибольшее и наименьшее натуральные числа, в десятичной записи которых нет нулей и единиц, а сумма цифр равна 67?

Решение. Найдем сначала наибольшее такое число. В записи этого числа надо использовать максимальное количество цифр. Для этого надо разбить сумму цифр на самые мелкие возможные слагаемые. Нули и единицы использовать нельзя, поэтому самое мелкое возможное слагаемое — это двойка. Наибольшее количество двоек, которое можно использовать, — это 32 (если взять 33 двойки, то останется одна единица, которую использовать нельзя). Таким образом, искомое число состоит из 32 двоек и одной тройки. Для того чтобы искомое число было наибольшим,

тройка должна стоять на первом месте. Итак, наибольшее искомое число — это $322\cdots 22$.

Теперь найдем наименьшее число. Для этого надо использовать минимальное количество цифр, т. е. надо использовать самые крупные возможные слагаемые, — девятки. Наибольшее количество девяток, которое можно использовать, — это семь. Остается еще одна четверка, которая, очевидно, должна стоять на первом месте. Итак, наименьшее искомое число — это 49999999 .

Замечание

Если в условии задачи идет речь о цифрах в десятичной записи некоторого числа, то ограничения довольно очевидны: наибольшая цифра — 9, наименьшая — 0; первая цифра не может быть нулем.

Рассмотрим еще несколько задач такого типа.

Задача 10. Сколько нужно взять слагаемых в сумме, $1 + 2 + \dots + n$, чтобы получилось трехзначное число, состоящее из одинаковых цифр?

Решение. Трехзначное число, состоящее из одинаковых цифр, можно представить в виде $a \cdot 111$, где $a \leq 9$ — натуральное число. Сумма всех слагаемых равна $n \cdot (n+1)/2$. Нам нужно найти a и n из равенства $n \cdot (n+1) = 2 \cdot 111 \cdot a$. Заметим, что $111 = 37 \cdot 3$. Число 37 простое, поэтому либо n или $(n+1)$ делится на 37, т. е. имеет вид $37 \cdot k$, где k — натуральное число.

Установим наибольшее возможное значение числа k . Заметим, что $2 \cdot 111 \cdot a \leq 1998$, значит $n \cdot (n+1) \leq 1998$. Поскольку $n^2 < n \cdot (n+1)$, получаем $n^2 < 1998$, т. е. $n < 45$. Отсюда $k = 1$. Остаются два варианта: либо $n = 37$, либо $n+1 = 37$. В первом варианте сумма равна 703, а во втором варианте сумма равна 666. Итак, нужно взять 36 слагаемых.

Задача 11. Найдите все натуральные трехзначные числа, каждое из которых обладает следующими двумя свойствами:

1. Первая цифра в три раза меньше последней;

2. Сумма самого числа с числом, получающимся из него перестановкой второй и третьей его цифр, делится на 8.

Решение. Перебирать все трехзначные числа, проверяя для каждого наличие свойств 1 и 2, — дело хлопотное и неинтересное. Мы начнем решать эту задачу алгебраически и прибегнем к перебору только тогда, когда ее удастся свести к немногим случаям.

Пусть x — цифра сотен, y — цифра десятков искомого числа. Тогда цифра его единиц будет $3x \leq 9$, т. е. $x \leq 3$. Поскольку нулем первая цифра быть не может, то возможные значения x — это числа один, два или три. Согласно свойству 2, число $(100x + 10y + 3x) + (100x + 30x + y)$ делится на 8 без остатка. Выделим в этой сумме слагаемые, кратные 8, и запишем это число в виде $(232x + 8y) + (x + 3y)$. Отсюда видно, что $(x + 3 \cdot y)$ тоже делится на 8. Теперь можно перебрать по очереди все три варианта.

Вариант 1: $x = 1$. Тогда $3 \cdot y = 8 \cdot k - 1$, где k — натуральное число. Поскольку $3y \leq 27$, то $k \leq 28/8$, т. е. k может быть равно 1, 2 или 3. При $k = 1$ и $k = 3$ не получается целых значений y , а при $k = 2$ находим $y = 5$. Получаем искомое число 153.

Вариант 2: $x = 2$. Тогда $3 \cdot y = 8 \cdot k - 2$. При $k = 1$ находим $y = 2$, а при $k = 2$ и $k = 3$ целых значений y нет. Получаем искомое число 226.

Вариант 3: $x = 3$. Тогда $3 \cdot y = 8 \cdot k - 3$. При $k = 3$ находим $y = 7$, других целых значений нет. Получили искомое число 379. Все варианты рассмотрены, задача решена. Найдены три решения: 153, 226, 379.

Не всегда ограничения, заложенные в условии задачи, достаточно очевидны. Но их можно обнаружить, если только предположить, что среди нескольких чисел существует *наибольшее* или *наименьшее*. Поясним эту мысль на примере следующей задачи.

Задача 12. Решите в натуральных числах уравнение

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1.$$

Решение. Одно из решений угадывается довольно просто. В левой части уравнения неизвестные x, y, z равноправны. Предположим, что $x = y = z$ и получаем решение $(3, 3, 3)$. Есть ли другие решения? За что бы здесь "зацепиться"? Да за уже угаданное решение! В угаданном решении все три числа равны. Если существует другое решение, то в тройке чисел x, y, z найдутся наименьшее и наибольшее числа. Допустим, что $x \leq y \leq z$. Как велико может быть наименьшее число x ? Предположим, что $x > 3$. Тогда

$$\frac{1}{3} > \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{z} \Rightarrow 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} > \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Получаем противоречие с условием задачи. Итак, x может принимать значения 1, 2 или 3. Рассмотрим эти варианты.

Пусть $x = 1$, тогда

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0,$$

чего не может быть при натуральных y, z .

Пусть $x = 3$, тогда

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3}.$$

Если при этом $3 < y \leq z$, то в этом случае опять получаем противоречие:

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Случай $y = 3$ уже найден угадыванием. Остается единственная возможность: $x = 2$. Тогда

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}.$$

Продолжим в том же духе. Предположим, что $y > 4$. Тогда

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} > \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Опять получаем противоречие с условием. Вывод ясен: u может принимать значения 3 или 4. Проверяя эти варианты, находим два решения: (2, 3, 6) и (2, 4, 4). Все случаи разобраны; кроме угаданной тройки (3, 3, 3) найдены еще две тройки чисел. Теперь остается заметить, что из-за равноправности x, y, z ответом в этой задаче будут тройки чисел, полученные из найденных троек всеми возможными перестановками.

Вопрос

Сколько таких различных троек чисел x, y, z ?

Задача 13. У Фрола было мыло, не менее 6 кусков, а у Прокла — шилья, не более 30 штук. Столковались они считать каждое шило за 8700 руб., а кусок мыла — за 4500 руб., да и поменялись. Прокл отдал Фролу все свои шилья и забрал все мыло. Известно, что Фрол доплатил Проклу 3350 руб. и остался еще ему должен не более 500 руб. Сколько кусков мыла было у Фрола и сколько шильев было у Прокла?

Решение. Пусть у Фрола было n кусков мыла, у Прокла — m шильев, а долг составляет d руб. Тогда, согласно договоренности, капитал Фрола составляет $4500 \cdot n$ руб., а капитал Прокла — $8700 \cdot m$ руб. Торговую сделку Фрола и Прокла можно выразить равенством:

$$4500 \cdot n + 3350 + d = 8700 \cdot m. \quad (1.3)$$

Нам нужно найти из *одного* этого уравнения *три* неизвестных величины: n, m, d . Неужели это возможно? Но ведь мы имеем некоторую дополнительную информацию: натуральное число $n \geq 6$, натуральное число $m \leq 30$, долг $d \leq 500$. Как эту информацию использовать? Во-первых, из (1.3) следует, что d — тоже натуральное число (почему?). Неужели придется перебирать все возможные натуральные значения n, m, d , каждый раз проверяя выполнение равенства (1.3)? Не будем торопиться с перебором, лучше присмотримся внимательней к коэффициентам перед неизвестными в уравнении (1.3). Числа 4500 и 8700 имеют наи-

больший общий делитель 300. Число 3350 не имеет такого делителя. Разобьем его на два слагаемых: $3350 = 3300 + 50$ и запишем

$$4500 \cdot n + 3300 + (50 + d) = 8700 \cdot m. \quad (1.4)$$

Из (1.4) видно, что выражение $(50 + d)$ тоже делится на 300 (почему?), т. е. $d = 300 \cdot s - 50$, где s — натуральное число. Согласно условию задачи, $s < 2$, т. е. $d = 250$. Итак, одним неизвестным стало меньше! Теперь обе части равенства (1.4) можно поделить на 300 и записать его в виде

$$15 \cdot n + 12 = 29 \cdot m. \quad (1.5)$$

Левая часть (1.5) делится без остатка на 3. Следовательно, правая часть тоже делится на 3, т. е. $m = 3 \cdot p$, где p — натуральное число. В результате получаем новое уравнение:

$$5 \cdot n + 4 = 29 \cdot p. \quad (1.6)$$

На первый взгляд, от этих манипуляций толку мало: мы заменяем одни неизвестные другими неизвестными. Однако обратите внимание на тот факт, что с каждым шагом мы приходим к новому уравнению с меньшими коэффициентами. Интересно, будет ли это процедура продолжаться бесконечно или когда-нибудь закончится? Теперь коэффициенты 5 и 29 не имеют общих делителей. Ну и что же, мы запишем $29 \cdot p = 30 \cdot p - p$ и представим (1.6) в виде $5 \cdot n = 30 \cdot p - (p + 4)$. Теперь видно, что $(p + 4)$ делится на 5, т. е. $p = 5 \cdot q - 4$, где q — натуральное число. Подставляя это в (1.6), получаем новое уравнение

$$n = 29 \cdot q - 24.$$

На этом наши мучения закончились (коэффициент перед n — это единица). Отсюда получаем $m = 3 \cdot p = 15 \cdot q - 12$. Нам удалось оба неизвестных n и m выразить через одно неизвестное q . Вот тут вступает в действие перебор. По условию $n = 29 \cdot q - 24 \geq 6$ и $m = 15 \cdot q - 12 \leq 30$. Из этих ограничений следует, что $30/29 \leq q \leq 14/5$, т. е. $q = 2$. Отсюда получаем ответ: $n = 34$, $m = 18$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Для приготовления завтрака нужно поджарить три корочки хлеба с двух сторон каждую. На сковородке помещается только две корочки. Каждая сторона поджаривается за 1 минуту. За какое наименьшее время можно приготовить завтрак?

Задача 2. Пять одинаковых яблок надо поровну разделить на шесть человек. Какое наименьшее количество разрезов надо сделать?

Задача 3. Нужно заготовить несколько кубометров бревнышек, которые потом придется распилить на поленья длиной 1 м. Какие бревнышки выгодней заготовить — трехметровые или четырехметровые? Все бревна одинакового диаметра.

Задача 4. Молодой человек торопится на свидание (возможно, деловое). Личного автотранспорта у него нет (пока). Он может отправиться к месту свидания пешком или вызвать по телефону такси. Пешком он может передвигаться со скоростью 6 км/ч; такси едет со скоростью 60 км/ч, но прибудет оно не раньше, чем через 24 мин. Как ему лучше поступить, если расстояние до места свидания 2,5 км? 3 км?

Задача 5. Найти наименьшее и наибольшее натуральные числа, составленные из всех различных цифр.

Задача 6. Найти наименьшее натуральное число, составленное из всех различных цифр, которое делится на 5.

Задача 7. Можно ли внутри равнобедренного треугольника поместить другой равнобедренный треугольник с такими же сторонами? А с большими сторонами?

Задача 8. Вы приготовили для гостей торт круглой формы, но не знаете точно, сколько человек будет за столом — трое или четверо. Какое наименьшее число разрезов нужно заранее сделать, чтобы в любом случае все могли получить торта поровну без дополнительных разрезов?

Задача 9. Существуют ли натуральные числа m и n такие, что $m^2 - n^2 = 1010$?

Задача 10. Существует ли трехзначное число, которое уменьшается втрое от перестановки начальной и конечной цифр?

Задача 11. Мальчиш-Плохиш хочет купить варенье, печенье и конфеты. Если он купит только бочку варенья, то у него останется 3 доллара, а если же только корзину печенья, то 4 доллара, а если только коробку конфет, то останется 8 долларов. Хватит ли у Плохиша денег, чтобы купить бочку варенья и корзину печенья?

Задача 12. Утром в магазин привезли шесть бидонов молока, в которых было 15 л, 16 л, 18 л, 19 л, 20 л, 31 л. До обеденного перерыва было полностью продано молоко из трех бидонов, а к закрытию магазина продали целиком молоко еще из двух бидонов. Оказалось, что до обеда молока было продано вдвое больше, чем после обеда. Из каких бидонов было продано молоко до обеденного перерыва?

Задача 13. Какое максимальное число острых углов может иметь выпуклый многоугольник?

Задача 14. Найти наибольшее четное пятизначное число, первые три цифры которого образуют число, представляющее точный квадрат, а последние три цифры — точный куб.

Задача 15. Улитка проползла отрезок длиной 1 м, повернула на 90° , проползла еще отрезок длиной 1 м и остановилась. Так она проделала три раза подряд: каждый раз после того, как проползала 1 м, поворачивала направо или налево и еще проползала 1 м. Каково может быть расстояние между началом и концом ее пути?

Задача 16. На столе лежат книги, которые надо упаковать. Если их связывать по 4, по 5 или по 6 в пачку, то каждый раз остается одна лишняя книга, а если связывать по 7 в пачку, то лишних книг не остается. Какое наименьшее число книг может лежать на столе?

Задача 17. Равны ли два треугольника, если они имеют по три равных угла и по две равных стороны?

Задача 18. При каких целых значениях n функция $f(n) = (n^2 - n - 17)/(n - 2)$ принимает наименьшее целое значение?

Задача 19. На 1000 руб. нужно купить елочные игрушки. Они продаются наборами. Набор, состоящий из 20-ти игрушек, стоит 40 руб.; набор, состоящий из 35-ти игрушек, стоит 60 руб.; набор, состоящий из 50-ти игрушек, стоит 90 руб. Сколько и каких наборов нужно купить, чтобы было куплено наибольшее количество игрушек?

Задача 20. Найдите все натуральные числа, куб которых — пятизначное число с последней цифрой 3.

Задача 21. Однажды вечером на хуторе близ Диканьки Пацюк пригласил своих приятелей восемнадцать Эников и двух Бэников покушать вареников со сметаной. Все ели вареники, разместившись за двумя столами, на которых было подано одинаковое количество вареников. В результате все вареники были съедены. Известно, что Пацюк съел вареников больше, чем кто-либо другой; Эники съели вареников поровну, а каждый из Бэников съел вареников не меньше, чем другой Бэник. Известно также, что Пацюк и один из Бэников съели вместе столько же вареников, сколько двое Эников. Сколько Бэников и Эников сидели за одним столом с Пацюком?

1.3. Когда экстремум найти нетрудно

Конечно, нам пришлось потрудиться; мы с Энди даже поворчали немало: легко ли целый день вскрывать конверты и вынимать из них доллар за долларом!

О. Генри, "Супружество как точная наука"

Во многих задачах найти наилучший вариант или экстремальное значение функции можно исходя из довольно очевидных рассуждений. Пусть, например, требуется определить наименьшее время, за которое можно совершить некоторое путешествие при заданных условиях. Можно взять наугад какой-либо вариант движения и посмотреть, нельзя ли уменьшить время, затраченное на дорогу. Если выбранный вариант допускает такую возмож-

ность, то он не наилучший. Тогда необходимо понять, что в этом варианте нужно изменить, чтобы возможность уменьшения времени исключилась. Рассмотрим этот способ на примере решения следующих простых задач.

Задача 1. На дороге, соединяющей два цеха завода, нужно построить столовую, в которой будут обедать рабочие обоих цехов. В первом цехе работают 1000 человек, а во втором 500 человек. В каком месте нужно построить столовую, чтобы общее расстояние до нее, которое будут проходить рабочие из обоих цехов, было наименьшим?

Решение 1. Предположим, что условие задачи уже выполнено. Мысленно передвинем столовую чуть-чуть ближе к первому цеху на расстояние Δx . Тогда расстояние, которое будут проходить все рабочие первого цеха, уменьшится на $1000\Delta x$. Расстояние, которое будут проходить все рабочие второго цеха, напротив, увеличится на $500\Delta x$. Общее расстояние, которое будут проходить рабочие из обоих цехов, при этом уменьшится на $1000\Delta x - 500\Delta x = 500\Delta x$. Итак, если столовую можно передвинуть ближе к первому цеху, то это не наилучший вариант. Следовательно, столовую нужно построить рядом с первым цехом.

Решение 2. Обозначим расстояние между цехами через l , а расстояние от первого цеха до столовой через x . Тогда общее расстояние, которое будут проходить рабочие из обоих цехов $s = 1000 \cdot x + 500 \cdot (l - x) = 500 \cdot (l + x)$. Поскольку $x \geq 0$, наименьшее значение s будет при $x = 0$.

Вопрос. Как изменится ответ, если количество рабочих в первом и втором цехах будет иным (например, в первом 1000, а во втором 3000 человек)? Как зависит ответ от отношения этих чисел? Каков будет ответ, если в обоих цехах рабочих поровну? если в одном цехе на одного человека больше, чем в другом?

Задача 2. Два брата купили в городе велосипед и отправились домой в деревню, которая находится на расстоянии 30 км. Вдвоем на велосипеде братья не помещаются. Каждый из них может идти пешком со скоростью 6 км/ч и ехать на велосипеде со ско-

ростью 15 км/ч. За какое наименьшее время братья смогут добраться до дома? Велосипед можно оставлять на дороге без присмотра.

Решение. Понятно, что каждому из братьев часть пути можно проехать на велосипеде, а остальной путь придется пройти пешком. Предположим, первый из братьев сразу сел на велосипед, проехал больше половины пути и, оставив велосипед на дороге, остальное расстояние прошел пешком. Тогда он доберется до дома быстрее второго брата и будет его некоторое время дожидаться. Если бы брат-1 оставил велосипед немного раньше, то брат-2 добрался бы до дома быстрее, и тем самым время, затраченное на дорогу, было бы меньше. Наверняка, добравшись до дома, брат-2 сумеет растолковать эту простую идею своему несообразительному братцу. Если же брат-1 проехал на велосипеде меньше половины пути, то он доберется до дома последним. Возможно, в тот момент, когда брат-2 будет его обгонять на велосипеде, брат-1 поймет, что его решение не наилучшее. Вывод ясен: брат-1 поступит мудро, если оставит велосипед ровно на середине пути. Тогда оба брата доберутся до дома одновременно, и время путешествия составит четыре часа. В противном случае один из братьев будет дожидаться другого, значит время, затраченное на дорогу, можно было уменьшить.

Вопрос. Как изменится ответ, если ходовые качества братьев различны? Пусть, например, брат-1 ходит со скоростью 6 км/ч, а брат-2 ходит со скоростью 5 км/ч. На велосипеде оба брата могут ехать со скоростью 15 км/ч.

Задача 3. Двое туристов хотят попасть на станцию, расположенную на расстоянии 60 км. Они торопятся на поезд, который отправляется ровно через три часа. Каждый из них может идти пешком со скоростью 5 км/ч. Местный житель предлагает доставить их на своем мотоцикле, скорость которого 50 км/ч. Мотоцикл без коляски; его владелец может посадить только одного пассажира, а затем вернуться за вторым. Смогут ли туристы успеть на поезд?

Решение. Найдем наименьшее время, за которое туристы смогут добраться до станции. Очевидно, что каждому из туристов только часть пути до станции удастся проехать на мотоцикле, а другую часть — "на своих двоих" (иначе на поезд не успеть). Владелец мотоцикла, не доехав до станции, высадит первого пассажира и вернется за вторым. Второй турист должен с самого начала упорно топать пешком до тех пор, пока его не подберет мотоцикл. Предположим, что кто-то из туристов оказался на станции первым и дожидается своего товарища. Тогда этот вариант поездки не самый лучший. Время путешествия можно было бы уменьшить. Для этого нужно было бы высадить первого пассажира раньше (если он добрался первым) либо позже (если он добрался последним). Следовательно, наименьшее время будет в том случае, когда оба туриста доберутся до станции одновременно.

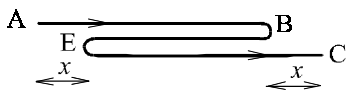


Рис. 1.7

Пусть туристы первоначально находились в пункте А, первого пассажира высадили в точке В на расстоянии $BC = x$ от станции С, а второй турист, выйдя из точки А, встретил мотоцикл в точке Е (рис. 1.7). Поскольку оба туриста прошли пешком одинаковый путь, $AE = BC = x$. Время, за которое первый прошел пешком участок ВС, равно $x/5$ (ч). За это время мотоцикл проехал путь $BE + EC$, равный $(60 - 2 \cdot x) + (60 - x) = 120 - 3 \cdot x$ (км). Отсюда получаем уравнение

$$(120 - 3x)/50 = x/5$$

и находим $x = 120/13$ (км). Время, затраченное каждым туристом, составляет $t = x/5 + (60 - x)/50 = 186/65$ (ч). Это почти на 8,3 мин. меньше трех часов. Туристы успеют на поезд.

Задача 4. Регулярный прием витаминов "Супер" снижает вероятность заболевания гриппом на 20 %. Если принимать витамины "Супер Плюс", то вероятность заболевания гриппом снижается

на 30 %, а употребление витаминов "Супер Плюс Плюс" снижает вероятность заболевания гриппом на 50 % .

Вообразите, что ваш организм очень подвержен заболеванию гриппом, и без употребления витаминов вы обязательно заболееете (с вероятностью 100 %). Аптекарь уверяет вас, что для максимального эффекта вам необходимо принимать витамины всех трех типов, тогда вероятность заболевания уменьшится на $20 \% + 30 \% + 50 \% = 100 \%$. Согласны ли вы с ним? Считаем, что реклама абсолютно правдива, и эффективность каждого типа витаминов не уменьшается из-за соседства в вашем организме с витаминами других типов.

Решение. По-видимому, аптекарь не очень ясно представляет себе, как вычислять вероятность событий, либо просто лукавит. Рассчитаем вероятность заболевания в том случае, если принимать витамины всех трех типов. Если принимать витамины "Супер", то вероятность заболеть снижается на 20 % и составит величину $p_1 = 1 - 0,2 = 0,8$. Если вдобавок принимать витамины "Супер Плюс", то вероятность заболевания гриппом составит $p_2 = p_1 \cdot (1 - 0,3) = 0,56$. Если же употребить еще и "Супер Плюс Плюс", то вероятность заболевания гриппом составит $p_3 = p_2 \cdot (1 - 0,5) = 0,28$. Это лучше, чем гарантированно заболеть, но еще не означает гарантию не заболеть.

Задача 5. В лаборатории имеются три различных сплава. Первый содержит 40 % меди и 60 % никеля, второй — 60 % меди и 40 % кобальта, третий — 60 % кобальта и 40 % никеля. Для эксперимента требуется 1 кг нового сплава, который содержал бы 40 % кобальта и как можно меньше меди. Как его изготовить из имеющихся сплавов?

Решение. Пусть для изготовления нового сплава взяли x (кг) первого сплава, y (кг) второго сплава и z (кг) третьего сплава. По условию $x + y + z = 1$. Тогда количество кобальта в новом сплаве равно $0,4y + 0,6z$, а количество меди m в новом сплаве равно $0,4x + 0,6y$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2y + 3z = 2, \\ 2x + 3y = 5m. \end{cases}$$

По условию $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. В первых двух уравнениях системы выразим x и z через y :

$$x = (1 - y)/3, \quad z = 2 \cdot (1 - y)/3.$$

Подставляя x и z в третье уравнение, получим $5 \cdot m = (2 + 7y)/3$. Как видим, содержание меди в новом сплаве зависит только от y , при этом минимальным оно будет, если $y = 0$. Итак, надо взять $1/3$ кг первого сплава и $2/3$ кг третьего сплава.

Вопрос

Как изменится решение, если из первых двух уравнений выразить y и z через x ?

Иногда функция, экстремум которой необходимо найти, оказывается довольно простой (например, квадратным трехчленом). Как только обнаруживается этот факт, решение задачи не вызывает затруднений. Для достижения цели нам потребуется знание следующего экстремального свойства квадратичной функции $y(x) = ax^2 + bx + c$: при $x = -b/2a$ функция $y(x)$ принимает наименьшее значение, если $a > 0$, и наибольшее значение, если $a < 0$. Для доказательства нужно представить $y(x)$ в виде $y(x) = a(x + b/2a)^2 + c - b^2/4a$ и заметить, что $(x + b/2a)^2 \geq 0$.

Задача 6. Сумма двух чисел равна 18. Какое наибольшее значение может иметь произведение этих чисел?

Решение. Обозначим одно из чисел через x , тогда другое будет $18 - x$. Произведение этих чисел представляет собой квадратный трехчлен $x \cdot (18 - x)$. Максимум этой функции, очевидно, достигается при $x = 9$, поэтому наибольшее значение произведения равно 81.

Вопрос

В этой задаче максимум достигается, когда оба числа одинаковы. Это случайность или нет? Пусть сумма двух чисел равна некоторой заданной величине a . Можно ли ожидать, что наибольшим произведение этих чисел будет в том случае, если каждое из них равно $a/2$?

Задача 7. Произведение двух положительных чисел равно 2. Какое наименьшее значение может принимать сумма этих чисел?

Решение 1. Обозначим одно из чисел через x , тогда другое будет $2/x$. Сумма этих чисел равна $x + 2/x$. Задачу можно теперь сформулировать следующим образом: при каком наименьшем положительном значении параметра a уравнение

$$x + 2/x = a \quad (1.7)$$

имеет действительные положительные решения? Искомое значение параметра как раз и будет наименьшим значением суммы $x + 2/x$. Уравнение (1.7) сводится к квадратному:

$$x^2 - ax + 2 = 0. \quad (1.8)$$

Для того чтобы (1.8) имело решения, дискриминант должен быть неотрицательным, т. е. $a^2 - 8 \geq 0$. Наименьшее положительное значение параметра, которое удовлетворяет этому условию, $a = 2\sqrt{2}$. При этом $x = 2/x = \sqrt{2}$.

Решение 2. Пользуясь тем, что число x положительное, представим сумму $x + 2/x$ в таком виде:

$$x + 2/x = (\sqrt{x} - \sqrt{2/x})^2 + 2\sqrt{2}. \quad (1.9)$$

Очевидно, что наименьшее значение выражения (1.9) будет достигаться при $x = 2/x = \sqrt{2}$.

Вопрос 1

В двух последних задачах экстремум достигается в том случае, когда оба слагаемых одинаковы. Что общего в двух последних задачах? Можно ли ожидать, что минимум суммы двух положительных чисел с фиксированным произведением достигается, когда оба числа одинаковы?

Вопрос 2

Мы научились находить минимум функции вида $f(x) = x + c/x$ при $x > 0$, $c > 0$. Как изменится решение, если задано произведение двух отрицательных чисел и требуется найти наибольшее значение их суммы?

Упражнение

Решите эту задачу, если произведение двух положительных чисел равно заданному числу $c > 0$. Примените прием, приведенный в решении 2. Постройте качественно график функции $f(x) = x + c/x$.

Задача 8. При каком значении параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + ax - 1 - a = 0$ принимает наименьшее значение?

Решение. Для ответа на поставленный вопрос вовсе не обязательно отыскивать корни x_1, x_2 квадратного уравнения. Гораздо удобнее воспользоваться тождеством

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2.$$

По теореме Виета $x_1 + x_2 = -a$, $x_1x_2 = -1 - a$. Отсюда

$$x_1^2 + x_2^2 = a^2 + 2a + 2 = (a + 1)^2 + 1.$$

Наименьшее значение суммы квадратов корней достигается, очевидно, при $a = -1$.

В ряде случаев функцию, на первый взгляд непохожую на квадратичную, удастся трансформировать в квадратный трехчлен с помощью удачной замены переменной. Продемонстрируем этот прием на примере следующей задачи.

Задача 9. Найти наименьшее значение функции $y = (x^4 + 1)/(x^2 + 1)$.

Решение 1. Представим функцию $y(x)$ в виде

$$y = \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1} = \frac{x^4 - 1 + 2}{x^2 + 1} = x^2 - 1 + \frac{2}{x^2 + 1}.$$

Сделаем замену $t = x^2 + 1 \geq 1$ и запишем $y = t + 2/t - 2$. Теперь надо найти наименьшее значение функции $y(t)$ при $t \geq 1$. Используя результат задачи 7, получаем, что наименьшее значение $y_{\min} = 2\sqrt{2} - 2$ достигается при $t = \sqrt{2}$.

Решение 2. Введем переменную $t = x^2 \geq 0$, тогда $y = (t^2 + 1)/(t + 1)$. Сформулируем задачу следующим образом: при каком наименьшем положительном значении параметра a уравнение $t^2 + 1 = a \cdot (t + 1)$ имеет действительные положительные решения? Для существования его решения дискриминант должен быть неотрицательным, т. е. $a^2 + 4a - 4 \geq 0$. Отсюда получаем значение $a = 2\sqrt{2} - 2$. Остается убедиться, что при этом корень уравнения $t = \sqrt{2} - 1 > 0$.

Вопрос

Какие свойства функции $y(x)$ позволили сделать такую удачную замену переменной? Проверьте, получится ли этот прием для функции $y = (x^6 + 6)/(x^3 + 2)$.

Задача 10. Два автомобиля едут по двум пересекающимся под прямым углом дорогам по направлению к перекрестку. Первый автомобиль находится на расстоянии 3 км от перекрестка и его скорость 40 км/ч. Другой автомобиль находится на расстоянии 5 км от перекрестка и его скорость 60 км/ч. В какой момент расстояние между автомобилями будет наименьшим? Найдите это расстояние.

Решение. В момент времени t расстояния от автомобилей до перекрестка равны соответственно $|3 - 40 \cdot t|$ и $|5 - 60 \cdot t|$. Квадрат расстояния s между автомобилями можно найти по теореме Пифагора: $s^2 = (5 - 60 \cdot t)^2 + (3 - 40 \cdot t)^2$.

Наименьшие значения s и s^2 принимают одновременно, поэтому можно найти минимум квадратного трехчлена

$$\begin{aligned} y(t) &= (5 - 60 \cdot t)^2 + (3 - 40 \cdot t)^2 = \\ &= t^2 (40^2 + 60^2) - 2 \cdot t \cdot (5 \cdot 60 + 3 \cdot 40) + (5^2 + 3^2). \end{aligned}$$

Минимум достигается при

$$t = \frac{5 \cdot 60 + 3 \cdot 40}{40^2 + 60^2} = \frac{21}{260}.$$

Отсюда находим $\left| 3 - \frac{40 \cdot 21}{260} \right| = \frac{3}{13}$, $\left| 5 - \frac{60 \cdot 21}{260} \right| = \frac{2}{13}$, $s = \frac{\sqrt{13}}{13}$.

Вопрос

Как изменится решение этой задачи, если дороги, по которым едут автомобили, пересекаются под углом 60° ? Теперь теорему Пифагора применить нельзя. Есть ли другая теорема, с помощью которой можно найти сторону треугольника по двум другим сторонам и углу между ними?

Задача 10 имеет следующую более общую постановку. Два корабля движутся в море пересекающимися курсами. Начальное положение кораблей и их скорости $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ заданы (рис. 1.8, а). Определите, в какой момент расстояние между кораблями было (или будет) наименьшим. Найдите это расстояние.

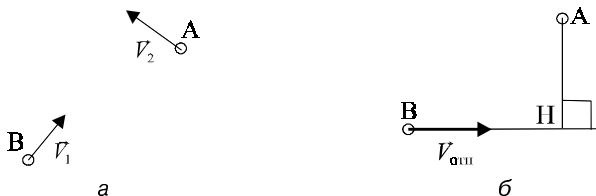


Рис. 1.8

Решение. В море нет никаких видимых неподвижных объектов, к которым можно "привязать" систему координат. Поэтому капитан второго корабля может перейти в систему отсчета, связанную со своим кораблем. В этой системе второй корабль (точка А) неподвижен, а первый (точка В) движется относительно второго со скоростью $\vec{V}_{отн} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$ вдоль прямой, по которой направлен вектор $\vec{V}_{отн}$ (рис. 1.8, б). Наименьшее расстояние между кораблями — перпендикуляр АН, опущенный из точки А на прямую, вдоль которой движется корабль В. Момент, в который расстояние минимально, $t_m = \pm BH / |\vec{V}_{отн}|$. Знак плюс — если точка В движется к Н, знак минус — если точка В удаляется от Н.

Задача 11. В заданный треугольник ABC вписать прямоугольник $MNKL$ наибольшей площади так, чтобы вершины M и L лежали на стороне AB , а N и K — на двух других сторонах.

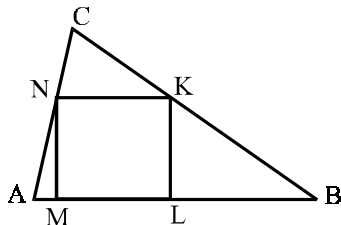


Рис. 1.9

Решение 1. Пусть прямоугольник $MNKL$ — искомый (рис. 1.9). Заметим, что треугольник NCK подобен треугольнику ABC (докажите это). Обозначим $k = CK / CB$. Тогда площадь S_1 треугольника NCK равна $S_0 \cdot k^2$, где S_0 — площадь треугольника ABC . Из двух треугольников AMN и LKB можно составить новый треугольник, если совместить точку N с точкой K , а также точку M с точкой L . Образованный таким образом новый составной треугольник также подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $KB / CB = 1 - k$ (докажите это). Площадь S_2 составного треугольника равна $S_0 (1 - k)^2$. Площадь прямоугольника $MNKL$ можно получить, вычитая из площади треугольника ABC сумму $S_1 + S_2 = S_0 \cdot (k^2 + (1 - k)^2)$. Чтобы площадь прямоугольника $MNKL$ была наибольшей, сумма $S_1 + S_2$ должна быть наименьшей. Таким образом, нужно найти минимум квадратного трехчлена $y(k) = k^2 + (1 - k)^2 = 2k^2 - 2k + 1$. Минимум достигается при $k = 1/2$, при этом площадь прямоугольника $MNKL$ составляет половину площади треугольника ABC .

Решение 2. Обозначим $AB = a$, $NK = x$, $MN = y$. Пусть высота, опущенная из вершины C , равна h . Из подобия треугольников NCK и ABC имеем $x/a = (h - y)/h$. Отсюда площадь прямоугольника $S_{MNKL} = xy = a(h - y)y/h$. Эта величина будет макси-

мальной при $y = h/2$ и составит половину площади треугольника ABC.

Задача 12. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $y = 3 \cos x + 4 \sin x$.

Решение 1. Преобразуем:

$$y(x) = 5 \cdot \left(\frac{3}{5} \cdot \cos x + \frac{4}{5} \cdot \sin x \right).$$

Здесь число 5 "появилось на сцене" следующим образом: $5 = \sqrt{3^2 + 4^2}$. Введем вспомогательный угол φ так, чтобы $\cos \varphi = 4/5$, $\sin \varphi = 3/5$ (проверьте, что $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$). Например, положим $\varphi = \arctg(3/4)$, тогда $y(x) = 5 \sin(x + \varphi)$. Теперь видно, что функция $y(x)$ — это синусоида, только с амплитудой 5 и сдвигом по фазе. Максимум $y_{\max} = 5$ достигается при $x_{\max} = \pi/2 - \varphi + 2\pi \cdot n$, минимум $y_{\min} = -5$ достигается, соответственно, при $x_{\min} = -\pi/2 - \varphi + 2\pi \cdot n$, ($n \in \mathbb{Z}$).

Вопрос

Можно ли применить этот прием для функции вида $y = a \cdot \cos x + b \cdot \sin x + c \cdot \cos(x + \alpha)$? Здесь a , b , c , α — произвольные числа.

Указание

Обратите внимание на тот факт, что в результате сложения двух синусоид с различными амплитудами получается опять же синусоида. Значит, складывая любое количество синусоид, мы опять получаем синусоиду.

Решение 2. Для того чтобы найти экстремальные значения функции $f(\alpha) = 3 \cos \alpha + 4 \sin \alpha$, рассмотрим точки на плоскости Oxy с координатами $y = \sin \alpha$, $x = \cos \alpha$. Эти точки лежат на окружности единичного радиуса с центром в начале координат, заданной уравнением $y^2 + x^2 = 1$. Точки, в которых функция прини-

мают постоянное значение $f(\alpha) = c$, лежат на прямой $3x + 4y = c$. Нам надо найти такие наибольшее и наименьшее значения c , чтобы прямая $3x + 4y = c$ и окружность имели общие точки. На плоскости Oxy сделаем эскиз окружности и проведем несколько прямых для различных (положительных и отрицательных) значений c . При увеличении $|c|$ увеличивается расстояние от начала координат до прямой $3x + 4y = c$. Экстремальным значениям параметра c соответствует случай, когда прямая касается окружности (рис. 1.10). В этом случае система уравнений

$$\begin{cases} y^2 + x^2 = 1, \\ 3x + 4y = c \end{cases}$$

имеет единственное решение. Выражая из второго уравнения системы y и подставляя в первое, получаем для x уравнение $25x^2 - 6c \cdot x + c^2 - 16 = 0$. Для того чтобы это уравнение имело единственное решение, дискриминант должен быть равным нулю. Отсюда получаем $36c^2 - 100 \cdot (c^2 - 16) = 0$ и находим $c = \pm 5$. Знак плюс дает наибольшее значение, знак минус — наименьшее значение.

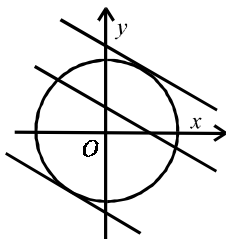


Рис. 1.10

Вопрос

Можно ли применить этот прием для поиска экстремумов функции $f(\alpha) = 3 \cdot \cos \alpha + 4 \cdot \sin(\alpha + \pi/4)$?

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Диагонали выпуклого четырехугольника пересекаются под прямым углом, сумма их длин равна 6. Какую наибольшую площадь может иметь этот четырехугольник?

Задача 2. Вдоль прямой улицы по одну сторону от нее стоят несколько домов. В каком месте улицы нужно поставить газетный киоск, чтобы сумма расстояний от него до всех домов была наименьшей?

Указание

Рассмотрите отдельно случаи, когда число домов четное и нечетное.

Задача 3. Дан выпуклый четырехугольник. Найти такую точку, чтобы сумма расстояний от нее до вершин четырехугольника была наименьшей.

Задача 4. Шины на передних колесах автомобиля изнашиваются после пробега 5000 км, а на задних колесах — после пробега 3000 км. Изношенные шины необходимо заменять. Какое наибольшее расстояние может проехать автомобиль с четырьмя новыми шинами до их замены?

Задача 5. Забором длины l нужно огородить с трех сторон участок пляжа прямоугольной формы. Какова наибольшая площадь этого участка?

Задача 6. Найти наибольшую площадь равнобедренной трапеции с периметром 4 и углом при основании 45° .

Задача 7. В полукруг радиусом R вписан прямоугольник так, что две его вершины лежат на диаметре, а две других — на полуокружности. Найти наибольшее значение площади такого прямоугольника.

Задача 8. В вершине A куба с ребром единичной длины сидит маленький паук. Как ему по поверхности куба перебраться в вершину B , наиболее удаленную от A , кратчайшим путем? Какова длина этого пути?

Указание

Возможно, при решении этой задачи вам захочется использовать алгебру векторов, производную функции или что-то в этом роде — ну что же, Бог в помощь! Однако заметим, что найти кратчайший путь может даже ребенок младшего школьного возраста (с вычислением длины пути у него, впрочем, могут быть затруднения).

Задача 9. На окружности, заданной уравнением $y^2 + x^2 = 1$, найти точку так, чтобы касательная, проведенная в этой точке, отсекала от осей координат треугольник наименьшей площади.

Задача 10. Найти множество значений следующих функций:

$$y = \sin x + \cos x, \quad y = 4 \cdot \sin x - \cos 2x + 3, \quad y = x^4 + (1 - x)^4,$$

$$y = \sin^2 x - 20 \cdot \cos x + 1, \quad y = \sin^4 x + \cos^4 x,$$

$$y = \sin^4 x + \cos^4 x, \quad y = 3x + 4\sqrt{1 - x^2}.$$

Задача 11. В треугольнике ABC $AB = BC = a$, угол при основании AC равен β . На высоте BM выбрали точку D так, чтобы сумма $AD^2 + BD^2 + CD^2$ была наименьшей. Найти длину MD .

Задача 12. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна h . Какую наименьшую длину может иметь медиана, проведенная к большему катету?

Задача 13. В правильном тетраэдре $ABCD$ проведено сечение плоскостью, параллельной ребрам AB и CD . Каково наибольшее значение площади этого сечения, если длина ребра тетраэдра равна единице?

Задача 14. Проведено сечение пирамиды плоскостью параллельной основанию так, чтобы произведение объемов получившихся частей было максимально. В каком отношении плоскость сечения делит высоту пирамиды?

Глава 2



Экстремум находим без помощи производной

Зададимся следующим вопросом: *как найти значение переменной, при котором функция $y(x)$ принимает экстремальное значение?* Многие школьники (и не только) уверенно дают следующий ответ: надо вычислить производную $y'(x)$, приравнять ее к нулю и решить получившееся уравнение. Ответ выглядит правдоподобно, но против него есть ряд возражений:

□ может оказаться, что точка, в которой производная функции равна нулю, не имеет никакого отношения к экстремуму.

Пример: в точке $x = 0$ производная функции $y(x) = x^3$ равна нулю, но экстремума в этой точке нет;

□ может оказаться, что в точке экстремума производной не существует. Пример: функция $y = |x|$ имеет производную во всех точках, кроме $x = 0$. Но как раз в этой единственной точке и достигается минимум функции.

Правильный ответ на поставленный вопрос должен быть следующим. Найдем все точки, в которых *может* достигаться экстремум. Такими критическими точками являются:

□ края интервалов, на которых требуется найти экстремум или определена функция;

□ точки, в которых производная функции равна нулю;

□ точки, в которых производной не существует.

Вычислим во всех этих точках значение функции и выберем из них наибольшее (наименьшее). Вопрос о том, являются ли корни

уравнения $y'(x) = 0$ точками экстремума, требует дополнительного исследования (вычисления второй производной y'').

В некоторых геометрических задачах требуется найти фигуру с оптимальными свойствами или длину пути при заданном условии и т. п. При этом функция $y(x)$, экстремум которой необходимо найти, может оказаться довольно сложной, и уравнение $y'(x) = 0$ "неподдающимся" решению методами элементарной математики. В то же время такие задачи зачастую имеют простое и изящное геометрическое решение. Наконец, как быть, если функция не одной, а нескольких переменных, к тому же связанных некоторыми соотношениями?* Однако не отчаивайтесь — есть доступные средства! В этой главе мы рассмотрим целый ряд "экстремальных" задач, решаемых методами элементарной математики, не используя понятие производной функции.

2.1. Наилучшее — это то, что невозможно улучшить

Внук, возвращаясь из школы, спрашивает с порога: "Бабушка, а что лучше — кол или единица?" Бабушка в ответ: "И то и другое, все хорошо, садись скорее обедать!"

Случай из практики

Лучшая рыба — это мясо, лучшее мясо — это колбаса, лучшая колбаса — это чулок, набитый деньгами.

Народная мудрость

Если внимательно прочитать название этого параграфа, то можно догадаться, что это готовый рецепт решения задачи поиска наилучшего. То есть если у вас не получается какую-то штуку

* Метод нахождения экстремума таких функций разработан в математическом анализе (метод множителей Лагранжа), но он выходит за пределы школьного курса математики.

улучшить (например, годовую оценку по математике), то она самая лучшая и есть, и нечего зря стараться! А если всерьез — надо доказать, что ее действительно нельзя улучшить. Занимаясь доказательством, вы разберетесь, почему ее невозможно улучшить или напротив, догадаетесь, как ее можно улучшить. Тем самым, вы совершите открытие (пусть, небольшое) и это принесет вам несомненную пользу.

Задача 1. Капитану теплохода необходимо найти кратчайший путь из порта А в порт В. На отрезке АВ находится центр круглого острова (рис. 2.1). Каков должен быть маршрут теплохода? Докажите, что найденный путь действительно кратчайший.

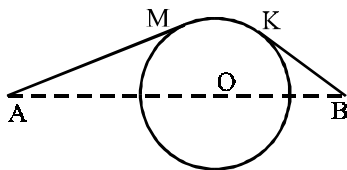


Рис. 2.1

Решение. Ответ угадывается достаточно просто: надо из точек А и В провести касательные к окружности АМ и ВК так, чтобы точки М и К лежали по одну сторону прямой АВ. Кратчайший маршрут из А в В будет состоять из отрезка АМ, дуги МК и отрезка КВ. Другой маршрут такой же длины получится, если отразить линию АМКВ симметрично относительно прямой АВ. Ясно, что достаточно рассмотреть только полуплоскость по одну сторону от прямой АВ.

Теперь надо доказать, что длина любого иного маршрута в рассматриваемой полуплоскости будет больше. Перебирать все возможные варианты и доказывать это для каждого конкретного пути — дело безнадежное (маршрутов бесконечно много). Надо исходить из какого-то общего принципа и сразу отбрасывать непригодные варианты. Сформулируем этот принцип так: если путь можно сделать короче, это не самый короткий путь.

Рассмотрим варианты маршрутов с этой точки зрения. Через M и K (рис. 2.2) из центра круга O проведем лучи OM_1 и OK_1 . Лучи MM_1 , KK_1 , прямая AB и полуокружность делят нашу полуплоскость на три области, доступные для мореплавания, обозначенные на рис. 2.2 буквами a , b , c . Для того чтобы попасть из A в B , необходимо пересечь лучи MM_1 и KK_1 хотя бы в одной точке каждый. Предположим, что некоторый маршрут (кандидат на звание "самый короткий") пересекает луч MM_1 в точке C , отличной от M . Тогда этот маршрут обязательно пересечет прямую AM в некоторой точке P , поскольку точки C и B лежат по разные стороны от прямой AM . Но тогда этот маршрут не самый короткий, т. к. отрезок AP короче пути ACP . Следовательно, кратчайший маршрут проходит через точку M . Аналогично доказываем, что кратчайший маршрут проходит через точку K . Итак, кратчайший маршрут проходит через M и K , следовательно, он содержит отрезки AM и KB .

Осталось доказать, что в области b самый короткий путь — это дуга MK . Предположим, что в области b кратчайший маршрут проходит через точку E , не лежащую на дуге MK . Проведем отрезок OE (рис. 2.3) и в той точке, где он пересекает окружность, проведем касательную S_1S_2 . Тогда маршрут MEK обязательно пересечет прямую S_1S_2 в двух точках D_1 и D_2 , поскольку точки M , K и точка E лежат по разные стороны от прямой S_1S_2 . Но тогда этот маршрут не самый короткий, т. к. отрезок D_1D_2 короче пути D_1ED_2 . Доказательство завершено.

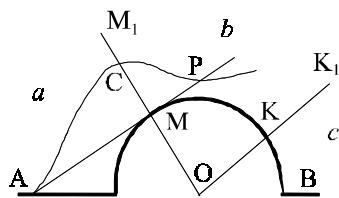


Рис. 2.2

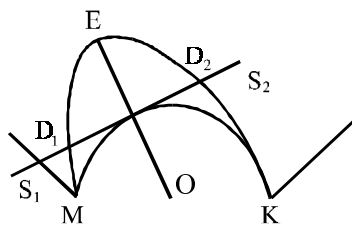


Рис. 2.3

Задача 2. В заданном прямоугольнике поместить треугольник наибольшей площади.

Решение. Пусть вершины треугольника ABC расположены внутри прямоугольника $MNKL$. Передвинем точки A , B , C так, чтобы площадь треугольника увеличилась. Продолжим отрезок AB за точку A до пересечения с какой-нибудь стороной прямоугольника в точке A_1 . Получим треугольник A_1BC большей площади. Итак, передвинув вершину A на границу прямоугольника, мы увеличили площадь треугольника. Перенесем таким способом все три вершины треугольника на границу прямоугольника, при этом площадь треугольника увеличилась. Можно ли, двигая вершины треугольника вдоль границ прямоугольника, еще увеличить площадь треугольника? Тут может быть два варианта:

- все вершины треугольника ABC лежат на разных сторонах прямоугольника (рис. 2.4, *а*);
- две вершины треугольника ABC лежат на одной стороне прямоугольника (рис. 2.4, *б*).

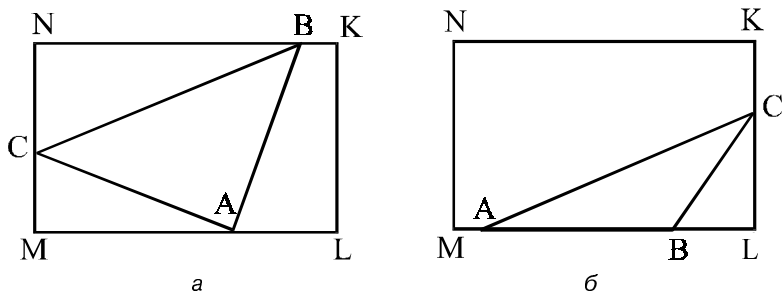


Рис. 2.4

Рассмотрим оба варианта. В первом варианте две из вершин треугольника (A и B на рис. 2.4, *а*) лежат на противоположных сторонах прямоугольника. Если теперь третью вершину C двигать по стороне прямоугольника MN , то будет меняться расстояние от точки C до прямой AB (если прямые AB и MN не параллельны). Следовательно, будет меняться площадь треугольника ABC . Двигая точку C по отрезку MN в нужную сторону (к точке N

на рис. 2.4, а), мы будем увеличивать площадь треугольника до тех пор, пока точки С и В не окажутся на одной стороне прямоугольника. Таким образом, мы придем ко второму варианту (что и как двигать, если прямые АВ и MN параллельны, решите самостоятельно).

Рассмотрим теперь второй вариант. Тут все ясно — надо отодвигать две вершины треугольника (например, точки А и В на рис. 2.4, б) друг от друга, чтобы увеличить основание треугольника (при этом площадь будет возрастать). Когда точки А и В совпадут с вершинами прямоугольника, эта возможность будет исчерпана. Теперь станем двигать вершину С по стороне прямоугольника так, чтобы увеличить расстояние от нее до прямой АВ. Когда точка С совпадет с вершиной прямоугольника К, и эта возможность будет исчерпана.

Итак, мы передвинули точки А, В, С в вершины прямоугольника, все время увеличивая площадь треугольника. В конечном состоянии площадь треугольника составляет половину площади прямоугольника. Рассмотренные перемещения вершин треугольника можно проделать для *любого* начального положения вершин А, В, С, поэтому площадь *любого* треугольника, расположенного внутри прямоугольника или на его границе, не превосходит половины площади прямоугольника.

Замечание

Эта задача имеет бесконечное количество решений (бесконечное количество треугольников, помещенных в заданный прямоугольник, имеют одинаковую максимально возможную площадь).

Задача 3. Сумма n чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ равна 1. Найдите наименьшее значение суммы их квадратов.

Решение. Исследуем, что произойдет с суммой квадратов *двух различных чисел*, если сблизить эти числа, не меняя их суммы. Пусть $0 < a < b$. Возьмем положительное число $\varepsilon < b - a$ и заменим числа a, b числами $a + \varepsilon$ и $b - \varepsilon$. Тем самым мы, не меняя значения суммы, сблизили числа. Тогда

$$(a + \varepsilon)^2 + (b - \varepsilon)^2 = a^2 + b^2 - 2\varepsilon \cdot (b - a - \varepsilon) < a^2 + b^2.$$

Как видим, сумма квадратов уменьшилась. Это означает, что если в наборе из n чисел с фиксированной суммой есть хотя бы два неравных числа, то такой набор *не может* давать решения задачи. Действительно, сблизив два неравных числа (и не изменяя остальных), можно было бы, не меняя суммы $x_1 + x_2 + \dots + x_n$, уменьшить сумму $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$. Значит, решение задачи может дать только такой набор, в котором все числа равны $1/n$. Осталось доказать, что такой набор *действительно дает решение* задачи.

Возьмем *любой иной* набор чисел $x_i = 1/n + \varepsilon_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, в котором *хотя бы одно* из чисел ε_i отлично от нуля. Тогда по условию задачи $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n = 0$. Сумма квадратов чисел этого набора

$$\begin{aligned} S &= (1/n + \varepsilon_1)^2 + (1/n + \varepsilon_2)^2 + \dots + (1/n + \varepsilon_n)^2 = \\ &= n \frac{1}{n^2} + 2 \cdot \frac{1}{n} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n) + (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2) = \\ &= 1/n + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2 > 1/n. \end{aligned}$$

Эта задача имеет красивую геометрическую интерпретацию. Пусть $n = 3$. Тогда условие $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ задает множество точек с координатами $(x_1; x_2; x_3)$ в трехмерном пространстве. Это множество представляет собой плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{a}$ с компонентами $(1; 1; 1)$. Сумма $S = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ представляет собой квадрат расстояния от некоторой точки этой плоскости до начала координат. Это расстояние будет минимальным, если вектор, проведенный из начала координат в точку плоскости, будет перпендикулярен к плоскости. Тогда искомый вектор с компонентами $(x_1; x_2; x_3)$ коллинеарен вектору $\vec{a}$, т. е. у искомого вектора все компоненты должны быть равны. Следовательно, $x_1 = x_2 = x_3 = 1/3$, и минимальное значение $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ равно $(1/3)^2 + (1/3)^2 + (1/3)^2 = 1/3$.

Упражнение

Подумайте, как изменится ответ, если заданная сумма чисел $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ равна не единице, а некоторому заданному числу. Докажите неравенство

$$\frac{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)}{n} \geq \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^2. \quad (2.1)$$

Обобщение 1 задачи 3. Этой задаче можно придать механическую интерпретацию. Есть n одинаковых пружин, соединенных последовательно в одну составную пружину. Эту составную пружину растянули так, что ее удлинение фиксировано и равно l . Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — удлинения составных частей, т. е. $x_1 + x_2 + \dots + x_n = l$. Тогда упругая энергия составной пружины пропорциональна величине $S = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$. Когда составная пружина придет в состояние устойчивого равновесия, ее упругая энергия будет иметь наименьшее значение. При этом удлинения всех ее частей будут одинаковыми и равными $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n = l/n$. Упругая энергия составной пружины в равновесном состоянии пропорциональна величине $S_0 = n(l/n)^2 = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2/n$. Поскольку $S \geq S_0$, получаем неравенство (2.1).

Обобщение 2 задачи 3. В выражении $S = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ все слагаемые совершенно равноправны (симметрия относительно замены индексов), поэтому естественно ожидать, что наименьшее значение S дадут равные значения переменных. Далее уже не очень сложно эту догадку доказать. Но рассмотрим такую задачу: *сумма n чисел равна l . Найдите наименьшее значение $S = k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + \dots + k_n x_n^2$, где $k_1, k_2, \dots, k_n$ — заданные положительные числа.* Здесь уже нет этой симметрии и угадать ответ непросто. Однако рассмотренный выше подход (исследовать, как меняется S при сближении двух неравных чисел, не меняя остальных) и тут приводит к успеху. Подумайте, какое надо взять число $\varepsilon > 0$, чтобы при сближении чисел a и b сумма $S = k_1 a^2 + k_2 b^2$ уменьшалась.

Дадим этой задаче механическую интерпретацию. Есть n пружин, жесткостью $k_1, k_2, \dots, k_n$, соединенных последовательно в одну составную пружину. Эту составную пружину растянули. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — удлинения составных частей, причем $x_1 + x_2 + \dots + x_n = l$. Тогда упругая энергия всех частей составной пружины $S = k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + \dots + k_n x_n^2$. Что подсказывает ваша физическая интуиция относительно величин $x_1, x_2, \dots, x_n$, если удлинение составной пружины фиксировано и она пришла в состояние равновесия?

Замечание

Решив задачу 3, мы получили не просто решение задачи: мы получили *метод решения* подобных задач.

Задача 4. Какой из n -угольников, вписанных в данную окружность, имеет наибольшую площадь?

Решение. Рассмотрим сначала случай $n = 3$, т. е. выясним, какой из треугольников, вписанных в данную окружность, имеет наибольшую площадь. Пусть в треугольнике ABC $AB > BC$ (рис. 2.5). Посмотрим, как изменится площадь этого треугольника, если, не меняя положения точек A и C , переместить точку B на дуге AC так, чтобы длины сторон AB и BC сблизились, т. е. уменьшилась их разность. Пусть точка B_1 на дуге AC такова, что $AB_1 = BC$. Чтобы сблизить длины сторон AB и BC , надо заменить точку B любой точкой дуги BB_1 . При этом высота треугольника, проведенная из вершины B , увеличится и соответственно увеличится его площадь. Это наблюдение можно использовать при $n > 3$.

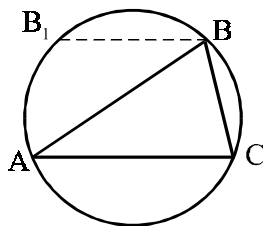


Рис. 2.5

Рассмотрим задачу как почти решенную. Предположим, что положения всех вершин кроме одной уже известны. Пусть это будет вершина B , а соседние с ней — вершины A и C . Тогда, перемещая точку B на дуге AC , мы будем менять только площадь треугольника ABC , а площадь остальной части n -угольника меняться не будет. Повторив приведенные ранее рассуждения, приходим к выводу, что неправильный n -угольник не является решением задачи. Действительно, если AB и BC — неравные соседние стороны этого n -угольника, то, не меняя положение остальных вершин, можно заменить вершину B какой-либо точкой дуги AC и тем самым увеличить площадь n -угольника. Следовательно, решением задачи может быть только правильный n -угольник.

Однако задача еще не решена! Осталось доказать, что площадь любого вписанного в окружность n -угольника *не больше* площади вписанного в эту окружность правильного n -угольника. Докажем это утверждение.

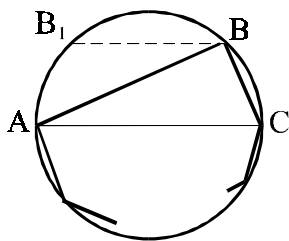


Рис. 2.6

Пусть P — вписанный в окружность n -угольник, отличный от правильного. Заменяя вершину B этого n -угольника точкой B_1 так же, как на рис. 2.5, мы получим новый n -угольник такой же площади, но отличающийся от P порядком следования сторон. Прделав эту операцию нужное число раз, мы, не изменив площади, переставим стороны n -угольника так, чтобы наибольшая и наименьшая стороны оказались рядом. На рис. 2.6 это стороны AB и BC соответственно. Тогда дуга AB больше, чем $360^\circ/n$, дуга BC меньше, чем $360^\circ/n$. Отложим на дуге AB_1B дугу AB_m , угловая величина

на которой $360^\circ/n$. Заменяв вершину B на точку B_m , мы получим n -угольник P_1 с большей площадью. При этом в n -угольнике P_1 есть по крайней мере одна сторона, стягивающая дугу величины $360^\circ/n$. Если n -угольник P_1 не является правильным, повторив с ним ту же операцию, мы придем к n -угольнику P_2 большей площади, в котором по крайней мере две стороны равны сторонам правильного n -угольника. За конечное число шагов мы придем к правильному n -угольнику, увеличивая площадь при каждом шаге.

Вы, конечно, заметили, что внешне несходные задачи 3 и 4 решены, по существу, одним способом. В этих задачах требовалось найти экстремум функции, зависящей от нескольких переменных. Поиск экстремума удалось разбить на последовательные шаги, на каждом из которых изменялись только две переменных, связанных определенным условием, а остальные не менялись. Так, в задаче 3 мы исследовали, как изменяется сумма квадратов двух чисел, в задаче 4 мы следили за поведением площади n -угольника при изменении удачным образом выбранных соседних сторон. При этом значение функции на каждом шаге изменялось монотонно (т. е. либо все время увеличивалось, либо все время уменьшалось).

Выясним теперь, что произойдет с произведением двух различных положительных чисел, если сблизить эти числа, не меняя их суммы. Пусть $0 < a < b$. Возьмем положительное число $\varepsilon < (b - a)/2$ и вместо чисел a и b рассмотрим числа $a + \varepsilon$ и $b - \varepsilon$. Тогда $(a + \varepsilon)(b - \varepsilon) = ab + \varepsilon \cdot (b - a - \varepsilon) > ab$.

Как видим, при сближении двух чисел с постоянной суммой их произведение растет. Используя этот результат, решим следующую задачу.

Задача 5. Среди треугольников с заданным периметром найти треугольник максимальной площади.

Решение. Подходящую связь площади и периметра дает, например, формула Герона: $S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c)$, где p — полу-

периметр, a , b , c — стороны треугольника. Зафиксируем сторону c и станем сближать длины сторон a и b , не меняя их суммы. Тем самым мы не меняем заданного периметра. Тогда в выражении для площади будет меняться только произведение $(p-a)(p-b) = p^2 - p(a+b) + ab$. В этом выражении меняется только последнее слагаемое ab , причем оно увеличивается при сближении длин сторон a и b . Таким образом, если в треугольнике есть две неравные стороны, то его площадь можно увеличить, не меняя периметра.

Пусть $a < b \leq c$. Заменяем длину наименьшей стороны на $(a+b+c)/3$, длину средней стороны заменим на

$$a+b-(a+b+c)/3 = (2a+2b-c)/3,$$

длину наибольшей стороны не меняем. При этом разность длин двух измененных сторон уменьшилась, т. к.

$$(2a+2b-c)/3 - (a+b+c)/3 = (a+b-2c)/3 < b-a$$

(докажите это). Из полученных таким образом отрезков можно сложить новый треугольник (докажите это) с большей площадью. В новом треугольнике, по крайней мере, одна сторона равна $(a+b+c)/3$. На следующем шаге точно так же поступаем с оставшимися двумя сторонами и в результате получаем правильный треугольник, площадь которого больше исходного, т. к. на каждом шаге возрастала.

Посмотрим, как обстоит дело, если задано произведение нескольких положительных чисел и требуется найти наименьшее значение их суммы. Сблизим два положительных числа, не меняя их произведения, и выясним, что происходит с их суммой. Пусть $0 < a < b$. Умножим число a на некоторое число $\lambda > 1$ и разделим b на λ , чтобы не изменить произведения. Вычислим разность между $a+b$ и $\lambda a + b/\lambda$:

$$(a+b) - \left(\lambda a + \frac{b}{\lambda} \right) = (1-\lambda) \cdot \left(a - \frac{b}{\lambda} \right).$$

Если выбрать λ так, чтобы $1 < \lambda < b/a$, то получим $a + b > \lambda a + b/\lambda$, т. е. при сближении двух положительных чисел с фиксированным произведением их сумма уменьшается.

Упражнение

Среди всех прямоугольных параллелепипедов заданного объема найдите тот, который имеет минимальную сумму длин ребер.

Задача 6. Для заданного треугольника ABC найти точку M, для которой сумма $MA^2 + MB^2 + MC^2$ наименьшая.

Решение. Предположим, что искомая точка M найдена. Пусть $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ — векторы, проведенные из точки M в вершины A, B и C. Тогда сумма $S = |\vec{r}_1|^2 + |\vec{r}_2|^2 + |\vec{r}_3|^2$ имеет наименьшее возможное значение. Пусть O — любая точка, отличная от M. Обозначим вектор $\vec{MO}$ через $\vec{x}$. Тогда сумма квадратов расстояний от точки O до вершин треугольника

$$S' = (\vec{r}_1 - \vec{x})^2 + (\vec{r}_2 - \vec{x})^2 + (\vec{r}_3 - \vec{x})^2 = S - 2\vec{x} \cdot (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3) + 3|\vec{x}|^2$$

должна быть больше S. В этом выражении последнее слагаемое неотрицательное, а второе можно сделать отрицательным. Для этого достаточно выбрать вектор $\vec{x}$ сонаправленным вектору $(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3)$, т. е. в виде $\vec{x} = \alpha \cdot (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3)$, где $\alpha > 0$. Тогда

$$S' = S - 2\alpha \cdot |\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3|^2 + 3\alpha^2 |\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3|^2.$$

За счет выбора α можно сделать $S' < S$ (для этого достаточно выбрать $0 < \alpha < 2/3$). Устранить это противоречие можно единственным образом. Сделать $S' < S$ за счет выбора величины α невозможно, если $\vec{r}_3 + \vec{r}_2 + \vec{r}_1 = 0$.

Вопрос

Для какой точки внутри треугольника выполняется это условие? Попробуйте проверить "характерные" точки треугольника (точки пересечения медиан, высот, биссектрис).

Оказывается, что искомая точка M — это точка пересечения медиан треугольника ABC (докажите это).

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Выясните, как ведет себя сумма $a^3 + b^3$ при сближении чисел a и b , если фиксирована их сумма. Докажите неравенство

$$\frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2} \right)^3.$$

Обобщите этот результат для случая n чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ и докажите неравенство

$$\frac{(x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3)}{n} \geq \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^3.$$

Задача 2. Выясните, как при сближении положительных чисел a и b ведет себя сумма $(a + 1/a)^2 + (b + 1/b)^2$.

Задача 3. Выясните, как при сближении положительных чисел a и b ведет себя произведение $(1 + 1/a) \cdot (1 + 1/b)$.

Задача 4. Выясните, как ведет себя сумма $1/(1+a) + 1/(1+b)$ при сближении положительных чисел a и b , если фиксировано произведение $a \cdot b = 1$.

Задача 5. Найдите наибольшее значение произведения $S = x_1^2 \cdot x_2^3 \cdot x_3^5$ положительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ с фиксированной суммой $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

Задача 6. При условии $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ найдите наименьшее значение суммы $S = x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2$.

Задача 7. Какой из n -угольников, вписанных в данный полукруг так, что одна из сторон совпадает с диаметром, имеет наибольшую площадь?

Задача 8. Докажите, что если сумма положительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ равна 1, то

$$\left(1 + \frac{1}{x_1} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{x_2} \right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{x_n} \right) \geq (n+1)^n.$$

Задача 9. Докажите, что если все положительные числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ больше 1, то

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_n} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}},$$

а если все эти числа меньше 1, то верно обратное неравенство.

Задача 10. Докажите, что если сумма положительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ равна 1, то

$$(x_1 + 1/x_1)^2 \cdot (x_2 + 1/x_2)^2 \cdot \dots \cdot (x_n + 1/x_n)^2 \geq (n^2 + 1)^2 / n.$$

Задача 11. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — положительные числа. Докажите неравенство Х. Гюйгенса:

$$(1+x_1) \cdot (1+x_2) \cdot \dots \cdot (1+x_n) \geq \left(1 + \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}\right)^n.$$

2.2. Применение неравенств для поиска экстремумов

Внемлите ж мне: могу равенство
Меж нами я восстановить.

А. С. Пушкин, "Египетские ночи"

Существует много глубоких, красивых и к тому же полезных неравенств, т. е. отношений больше — меньше между некоторыми наборами переменных. Иногда эти переменные должны соответствовать некоторому условию (например, быть положительными числами), иногда они ничем не связаны. Сам факт существования таких неравенств интригует воображение. Представьте, что вы можете взять два набора из *любых* n чисел по вашему выбору $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \dots, b_n)$, (причем n — тоже *любое* натуральное число), затем вычислить произведение $(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$ и квадрат такой суммы: $(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)$. Тогда у вас *обязательно* окажется, что

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2). \quad (2.2)$$

Согласитесь, это похоже на карточный фокус, и хочется его разгадать и поймать трюкача за руку с поличным. Однако поймать не удастся — здесь все по-честному. Числа вы можете взять *любые*, но соотношение (2.2) — *неравенство Коши — Буняковского* — будет выполняться для любых чисел, и это можно доказать.

Доказательство. Если все числа из одного набора равны нулю, то (2.2) превращается в верное равенство. Пусть теперь в наборе $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и в наборе $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ найдется хотя бы по одному числу, не равному нулю. Рассмотрим функцию

$$f(x) = (a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 \cdots + (a_nx + b_n)^2 = Ax^2 + 2Bx + C.$$

Здесь $A = a_1^2 + a_2^2 \cdots + a_n^2 > 0$, $B = a_1b_1 + a_2b_2 \cdots + a_nb_n$, $C = b_1^2 + b_2^2 \cdots + b_n^2 > 0$. Поскольку квадратный трехчлен $f(x)$ принимает только неотрицательные значения, выполнено условие $B^2 \leq A \cdot C$. Отсюда следует неравенство (2.2). Равенство возможно, только если $f(x_0) = 0$, т. е. при условии

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \cdots = \frac{b_n}{a_n} = -x_0.$$

Данное доказательство не единственное, есть и другие.

Замечание

Если полагать наборы чисел $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ координатами в n -мерном пространстве векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то неравенство (2.2) примет вид $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ и выражает собой свойство скалярного произведения векторов. Оно обращается в равенство, когда векторы сонаправлены.

Рассмотрим другое знаменитое неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}, \quad (2.3)$$

которое выполняется для неотрицательных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$. В равенство (2.3) превращается только в случае $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. При $n = 2$ оно имеет вид

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (2.4)$$

и доказывается очень просто. Существует много разных доказательств как алгебраических, так и геометрических. Приведем два примера.

Пример 1. Для двух неотрицательных чисел x_1, x_2 запишем $(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0$. Отсюда следует $x_1 - 2\sqrt{x_1 x_2} + x_2 \geq 0$.

Пример 2. Возьмем отрезок АВ длиной $(x_1 + x_2)$ и построим на нем как на диаметре полуокружность (рис. 2.7). Возьмем на АВ точку D так, что $AD = x_1$, и восстановим в точке D перпендикуляр к АВ до пересечения с полуокружностью в точке С. Из подобия прямоугольных треугольников АСD и ВСD получаем $DC = \sqrt{x_1 x_2}$. Очевидно, что отрезок DC не превосходит радиуса окружности, равного $(x_1 + x_2)/2$.

Неравенство (2.4) часто выступает в разных облициях, например, в таком: $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \leq \sqrt{2(x_1 + x_2)}$.

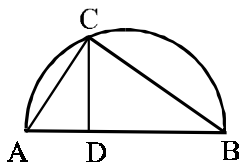


Рис. 2.7

Доказательство. Возьмем верное неравенство $0 \leq (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2$ и к обеим частям прибавим выражение $(x_1 + x_2)$. В результате получим

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 2x_1 + 2x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2} \Rightarrow x_1 + 2\sqrt{x_1 x_2} + x_2 \leq 2x_1 + 2x_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2 \leq 2 \cdot (x_1 + x_2) \Rightarrow \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \leq \sqrt{2(x_1 + x_2)}. \end{aligned}$$

Покажем теперь, как использовать доказанное неравенство (2.4) для доказательства неравенства (2.3) в общем случае при $n > 2$. Для четырех чисел x_1, x_2, x_3, x_4 запишем

$$x_1 \cdot x_2 \leq \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2, \quad x_3 \cdot x_4 \leq \left(\frac{x_3 + x_4}{2} \right)^2.$$

Перемножая эти неравенства, получаем

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \leq \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 \left(\frac{x_3 + x_4}{2} \right)^2.$$

Для чисел $a = (x_1 + x_2)/2$ и $b = (x_3 + x_4)/2$ согласно неравенству (2.4) имеем

$$\begin{aligned} a \cdot b &\leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \Rightarrow a^2 \cdot b^2 \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^4 \Rightarrow \\ \Rightarrow x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 &\leq \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{x_3 + x_4}{2} \right)^2 \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \right)^4. \end{aligned}$$

Для $n = 4$ неравенство доказано. Проводя аналогичные манипуляции, можно доказать (2.3) для $n = 2^p$, где натуральное число $p > 2$ (проверьте это). Применим теперь *метод спуска*^{*} для доказательства при всех остальных n . Предположим, что (2.3) доказано при $n = m + 1$. Докажем его при $n = m$. Имеем:

$$\begin{aligned} \sqrt[m]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_m} &= \left(x_1 \cdot x_2 \cdots x_m \cdot \sqrt[m]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_m} \right)^{\frac{1}{m+1}} \leq \\ &\leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_m + \sqrt[m]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_m}}{m+1}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

^{*} Метод спуска впервые применил французский математик Пьер Ферма (1601–1665) в своих знаменитых работах по теории целых чисел.

Перебросим $\sqrt[m]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_m}$ в левую часть (2.5) и запишем в виде

$$\left(1 - \frac{1}{m+1}\right) \cdot \sqrt[m]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_m} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_m}{m+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[m]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_m} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_m}{m}.$$

Неравенство (2.3) доказано.

Упражнение 1

Используя доказанные неравенства, докажите самостоятельно для положительных чисел неравенство между средним геометрическим и средним гармоническим:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}.$$

Вот еще пример более скромного, но очень полезного неравенства, верного для любых x :

$$|\sin x| \leq |x|. \quad (2.6)$$

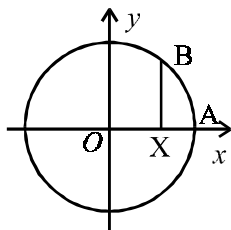


Рис. 2.8

Для доказательства (2.6) рассмотрим на координатной плоскости Oxy окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Любому числу x на окружности соответствует некоторая точка В, т. е. число $|x|$ — это длина дуги АВ, где точка $A(1; 0)$ — начало отсчета (рис. 2.8). Заметим, что длина дуги АВ может быть и больше 2π . Опустим из В перпендикуляр ВХ

на ось абсцисс. Тогда $|\sin x| = BX$. Осталось показать, что длина отрезка BX всегда не больше длины дуги AB . Действительно, в прямоугольном треугольнике ABX катет BX не больше гипотенузы AB , а длина отрезка AB не больше длины дуги AB . Равенство возможно только, если точка B совпадает с точкой A , т. е. при $x = 0$.

Упражнение 2

Докажите, что при $|x| < \pi/2$ выполняются неравенства $|\operatorname{tg} x| \geq |x|$,
 $|\sin x + \operatorname{tg} x| \geq 2|x|$.

В предыдущем параграфе мы уже доказали методом сближения неравенство (2.1) между средним арифметическим и средним квадратичным:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}.$$

Докажем теперь его с помощью неравенства (2.4). Имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^2 &= \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + \dots + 2x_{n-1}x_n}{n^2} \leq \\ &\leq \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + (x_1^2 + x_2^2) + (x_1^2 + x_3^2) + \dots + (x_{n-1}^2 + x_n^2)}{n^2} = \\ &= \frac{n \cdot (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)}{n^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь применение этих знаменитых неравенств в задачах.

Задача 1. Найти наименьшее значение функции

$$f(x) = (x^4 + 4)/x^2.$$

Решение. Применяя неравенство (2.4) к числам $x_1 = x^2$, $x_2 = 4/x^2$, получаем $f(x) = x^2 + 4/x^2 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot 4/x^2} = 4$.

Таким образом, наименьшее значение функции равно 4. Это значение достигается, когда $x_1 = x_2$, т. е. при $x = \pm\sqrt{2}$.

Задача 2. Найти наименьшее значение функции $f(x) = x^2 + 3/x$ при $x > 0$.

Решение. Здесь попытка "лобового" применения неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим ничего не дает: произведение слагаемых x^2 и $3/x$ не является константой. Пойдем обходным путем. Разобьем слагаемое $3/x$ на два: $3/x = 3/2x + 3/2x$. Теперь $f(x)$ представлено суммой трех слагаемых, произведение которых равно $x^2 \cdot 3/2x \cdot 3/2x = 9/4$. Применяя для наших трех слагаемых неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, получаем

$$f(x) = x^2 + \frac{3}{2x} + \frac{3}{2x} \geq 3\sqrt[3]{9/4}.$$

Равенство достигается, когда $x^2 = 3/2x$, т. е. при $x = \sqrt[3]{3/2}$.

Этот успех вдохновляет рассмотреть более общий случай.

Задача 3. Найти при $x > 0$ наименьшее значение функции $f(x) = ax^n + b/x^m$, где m и n — натуральные числа, a и b — любые положительные числа.

Решение. Представим функцию следующим образом:

$$f(x) = \left(\frac{a}{m} x^n + \frac{a}{m} x^n + \dots + \frac{a}{m} x^n \right) + \left(\frac{b}{nx^m} + \frac{b}{nx^m} + \dots + \frac{b}{nx^m} \right).$$

Здесь в первых скобках взято m слагаемых, а во вторых скобках взято n слагаемых. Теперь произведение всех $(m+n)$ слагаемых — константа, равная $(a/m)^m \cdot (b/n)^n$. Согласно неравенству (2.3),

$$f(x) \geq (m+n) \cdot \left(\frac{a}{m} \right)^{\frac{m}{m+n}} \cdot \left(\frac{b}{n} \right)^{\frac{n}{m+n}}.$$

Минимум достигается, когда $ax^n / m = b / nx^m$, т. е. при $x = \sqrt[m+n]{bm/na}$.

Задача 4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$$f(x) = a \cdot \cos x + b \cdot \sin x.$$

Решение. Эта задача была уже решена в параграфе 1.3 методом введения вспомогательного угла. Теперь решим ее другим способом. Применяя неравенство (2.2) к наборам из чисел (a, b) и $(\cos x, \sin x)$, получим

$$(a \cdot \cos x + b \cdot \sin x)^2 \leq (a^2 + b^2) \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) \Leftrightarrow \\ -\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \cdot \cos x + b \cdot \sin x \leq \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Равенство выполняется при $b/a = \sin x / \cos x$.

Задача 5. Найти наибольшее значение функции

$$f(x_1, x_2) = \frac{(3x_1 + 5x_2)^2}{x_1^2 + x_2^2} \text{ при } x_1 > 0, x_2 > 0.$$

Решение. Рассмотрим два набора из двух чисел. Первый набор: $(3; 5)$, а второй набор — $(x_1 / \sqrt{x_1^2 + x_2^2}; x_2 / \sqrt{x_1^2 + x_2^2})$.

Запишем для этих двух наборов неравенство (2.2):

$$\left(\frac{3 \cdot x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + \frac{5 \cdot x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right)^2 \leq (3^2 + 5^2) \cdot \left(\frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \right) = 34.$$

Наибольшее значение $f(x)$ достигается при $3/5 = x_1/x_2$.

Задача 6. Какие размеры должен иметь спичечный коробок заданного объема V , чтобы площадь его полной поверхности была минимальна? Спичечный коробок состоит из футляра и собственно коробочки (рис. 2.9).

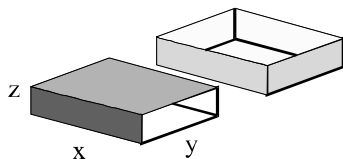


Рис. 2.9

Решение. Пусть x — длина, y — ширина, z — высота футляра. Площадь S полной поверхности футляра вместе с коробочкой равна $4xz + 3xy + 2yz$. По условию $V = xyz$ — заданная величина. Отсюда $S = 4V/y + 3V/z + 2V/x$. Применяя к этим трем слагаемым неравенство (2.3), получаем

$$S \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{4V}{y} \cdot \frac{3V}{z} \cdot \frac{2V}{x}} = 3 \cdot \sqrt[3]{24V^2}.$$

Равенство достигается, когда все три слагаемые равны, т. е. при $3V/z = 2V/x = 4V/y = \sqrt[3]{24 \cdot V^2}$. Отсюда находим $x = \sqrt[3]{V/3}$, $y = 2x$, $z = 3x/2$.

Заметим, что у имеющих в продаже спичечных коробков размеры сильно отличаются от найденных нами.

Задача 7. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = \frac{2x-1}{2x-x^2-4}.$$

Решение. Если $f(x)$ принимает наименьшее значение, то $g(x) = -f(x)$ принимает наибольшее значение. Сделаем замену $y = (2x-1)/2$. Отсюда $x = y + 1/2$. Преобразуем

$$g(x) = \frac{-2y}{2y+1-(y+1/2)^2-4} = \frac{2y}{y^2+13/4-y} = \frac{2}{y+13/4y-1}.$$

Максимум достигается при минимальном значении выражения $y+13/4y$, т. е. при $y = 13/4y$. Отсюда находим минимальное значение функции $f_{\min} = 2/(1-\sqrt{13})$.

Задача 8. Из круга радиусом R вырезать развертку конуса наибольшего объема.

Решение. Развертку конуса можно получить, вырезая из круга сектор с углом α . При этом длина окружности в основании конуса равна $R \cdot (2\pi - \alpha)$, т. е. радиус окружности основания конуса будет $r = R \cdot (1 - \alpha / 2\pi)$. Длина образующей конуса равна R . Отсюда найдем высоту h и объем конуса V :

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Поскольку $V > 0$, то максимум объема достигается одновременно с максимумом $V^2(r)$. Таким образом, нужно найти наибольшее значение функции $r^4(R^2 - r^2)$. Обозначим $x = r^2$ и найдем максимум функции $y(x) = x^2(R^2 - x)$. Применяя неравенство (2.3) к тройке чисел $x/2$, $x/2$, $R^2 - x$, получаем:

$$\frac{x/2 + x/2 + R^2 - x}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot (R^2 - x)},$$

$$\text{т. е. } x^2(R^2 - x) \leq 4R^6/27.$$

Наибольшее значение $y(x)$ достигается, когда $x/2 = R^2 - x$. Отсюда находим $r = R\sqrt{2/3}$, $\alpha = 2\pi \cdot (1 - \sqrt{2/3})$.

Задача 8. Трансформатор необходимо сконструировать так, чтобы его крестообразный железный сердечник заполнял как можно большую часть полости круглой обмотки (рис. 2.10). Какую максимальную часть площади круга можно заполнить сердечником?

Решение. Пусть R — радиус круга, угол АОВ равен α . Тогда площадь S крестообразного сердечника получим, вычитая из удвоенной площади прямоугольника ACDE площадь квадрата MNKL. Площадь прямоугольника ACDE и площадь квадрата MNKL равны соответственно $S_1 = 2R^2 \sin 2\alpha$, $S_2 = 4R^2 \sin^2 \alpha = 2R^2(1 - \cos 2\alpha)$.

Отсюда находим площадь $S = 2S_1 - S_2 = 2R^2(2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha - 1)$.

Применив неравенство (2.2) к наборам чисел $(2; 1)$ и $(\sin 2\alpha; \cos 2\alpha)$, получим

$$S \leq 2R^2 \left(\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha} - 1 \right) = 2R^2 (\sqrt{5} - 1).$$

Максимальной площадь будет при $\sin 2\alpha / \cos 2\alpha = 2/1$. При этом доля площади, занятой сердечником, составляет $S / \pi \cdot R^2 = 2 \cdot (\sqrt{5} - 1) / \pi \approx 0,8$.

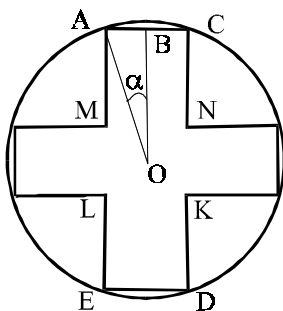


Рис. 2.10

Задача 9. Найти наибольшее значение функции нескольких переменных

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n)^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2},$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n$ — заданные числа.

Решение. Зафиксируем значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ и рассмотрим квадратичную функцию одной переменной t :

$$\begin{aligned} f(t) &= (a_1 - t \cdot x_1)^2 + (a_2 - t \cdot x_2)^2 + \dots + \\ &+ (a_n - t \cdot x_n)^2 = A \cdot t^2 - 2B \cdot t + C. \end{aligned}$$

Здесь $A = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$, $B = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$, $C = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$. Так как $f(t)$ при всех значениях t принимает

неотрицательные значения, дискриминант квадратного трехчлена не больше нуля, т. е. $B^2 \leq A \cdot C$. Отсюда

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2).$$

Таким образом, наибольшее значение $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ равно $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$ и достигается при $a_1 / x_1 = \dots = a_n / x_n$.

Задача 10. Внутри прямого угла дана точка А, удаленная от сторон угла на расстояния a и b . Найти минимальную длину отрезка, проходящего через А с концами на сторонах угла.

Решение. Пусть М, N — основания перпендикуляров, проведенных из точки А к сторонам угла (рис. 2.11), ВС — искомый отрезок, $AM = a$, $AN = b$, угол ВСО равен α . Прямоугольные треугольники ВАМ и АСN подобны, и при изменении угла ВСО коэффициент подобия меняется. Используем коэффициент подобия в качестве переменной, от которой зависит длина отрезка ВС. Обозначим $AB/AC = x$. Из подобия треугольников находим $BC = AC \cdot (1 + x)$, $NC = a/x$, $AC^2 = b^2 + a^2/x^2$,

$$BC^2 = (1 + x)^2 \cdot \left(b^2 + \frac{a^2}{x^2} \right) = a^2 + b^2 + \frac{a^2}{x^2} + 2b^2x + 2\frac{a^2}{x} + b^2x^2.$$

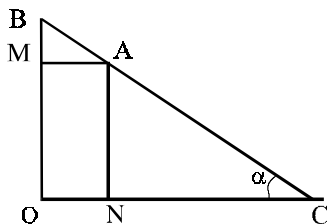


Рис. 2.11

В этом выражении первые два слагаемых — константы, поэтому нам надо найти наименьшее значение функции

$$F(x) = b^2x^2 + 2b^2x + \frac{2a^2}{x} + \frac{a^2}{x^2}.$$

Разобьем каждое из средних слагаемых поровну на две части и сгруппируем все слагаемые в две группы следующим образом:

$$F(x) = \left(b^2 x^2 + \frac{a^2}{x} + \frac{a^2}{x} \right) + \left(b^2 x + b^2 x + \frac{a^2}{x^2} \right).$$

Теперь заметим, что произведения слагаемых в обеих скобках — константы. Применяя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, обнаруживаем, что минимум выражений в обеих скобках достигается одновременно (когда все слагаемые в скобках равны), т. е. при $x = \sqrt[3]{a^2 / b^2}$. Отсюда находим

$$F_{\min} = 3 \cdot (a\sqrt[3]{ab^2} + b\sqrt[3]{a^2b}) \quad \text{и} \quad \text{искомый отрезок} \\ BC = \sqrt{a^2 + 3 \cdot (a\sqrt[3]{ab^2} + b\sqrt[3]{a^2b}) + b^2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Выясните без калькулятора, что больше: $\sqrt{2001} + \sqrt{2003}$ или $2\sqrt{2002}$.

Задача 2. Найти при $x > 0$ наименьшее значение функции $f(x) = 2x^3 + 3/\sqrt{x}$.

Задача 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = x^6 + y^6$, если $x^2 + y^2 = 1$.

Задача 4. Найти максимальный объем цилиндра, вписанного в сферу радиусом R .

Задача 5. Найти область значений функции $y = x^2 \sqrt{4 - x^2}$.

Задача 6. Среди всех прямых призм с квадратным основанием и заданным объемом найти ту, которая имеет минимальную площадь поверхности.

Задача 7. В конус с высотой H и радиусом основания R вписан цилиндр так, что одно его основание лежит на основании конуса,

а другое принадлежит боковой поверхности. Найдите максимальный объем такого цилиндра.

Задача 8. Для любых положительных чисел a, b, c найдите наименьшее значение суммы

$$S = \sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{a+c}{b}} + \sqrt{\frac{c+b}{a}}.$$

Задача 9. Для чисел $a \geq -0,5$, $b \geq -0,5$, $c \geq -0,5$, связанных условием $a+b+c=1$, найдите наибольшее значение суммы $S = \sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1}$.

Задача 10. Для положительных чисел x, y, z , связанных условием $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, найдите наименьшее значение

$$S = \frac{xy}{z} + \frac{zy}{x} + \frac{xz}{y}.$$

Задача 11. Докажите, что для любых положительных a, b, c, d выполняются следующие неравенства:

- 1) $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{a^2/b} + \sqrt{b^2/a}$.
- 2) $\sqrt{(a+b)(c+d)} \geq \sqrt{ad} + \sqrt{bc}$.
- 3) $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ac} + c^2\sqrt{ab}$.
- 4) $(a+b+c) \cdot (a^2 + b^2 + c^2) \geq 9abc$.
- 5) $a^2(1+b^2) + b^2(1+c^2) + c^2(1+a^2) \geq 6abc$.
- 6) $ab + bc + ca \geq \sqrt{abc} \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$.

2.3. Вариации на тему неравенств

В этом разделе мы рассмотрим несколько задач прикладного характера. Во всяком случае, внешне эти задачи довольно похожи на прикладные. В каждой задаче мы постараемся построить простую математическую модель и проследим, как ответ зависит от параметров модели.

Вариация 1. Продавать надо "с умом"

Представьте, что вы — менеджер компании, которая занимается продажей персональных компьютеров. Ваша компания заказывает компьютеры у поставщика и доставляет их на склад, откуда их затем отправляют покупателям. В течение года ваша компания заказала 2400 компьютеров, которые могут быть доставлены на склад все сразу либо несколькими партиями. Раскупаются компьютеры в течение года равномерно, т. е. в среднем 200 штук в месяц. Доставка одной партии на склад (независимо — крупной или мелкой) обходится компании в 1000 руб. Хранение на складе одного компьютера в течение года обходится в 30 руб. Решите, какими партиями нужно заказывать компьютеры, чтобы доставка и хранение в течение года обходились компании как можно дешевле.

Решение. Предположим, что вы решили заказать все компьютеры одной партией. Тогда затраты на доставку составят 1000 руб. В начале года на складе окажутся 2400 компьютеров, а в конце года они все будут проданы. Следовательно, в среднем на складе в течение года будет храниться 1200 компьютеров и затраты на хранение составят $30 \cdot 1200 = 36000$ руб. Таким образом, суммарные затраты составят 37000 руб. В этом варианте затраты на доставку — сущие пустяки в сравнении с оплатой хранения.

Посмотрим, как изменятся суммарные затраты, если заказать компьютеры двумя партиями по 1200 штук. Тогда затраты на доставку составят $2 \cdot 1000 = 2000$ руб. В течение каждого полугодия (стало быть, в течение всего года) на складе в среднем будет храниться 600 компьютеров, поэтому затраты на хранение составят $30 \cdot 60 = 18000$ руб. Суммарные затраты теперь составят $2000 + 18000 = 20000$ руб. Это довольно существенный выигрыш в сравнении с первым вариантом. Может быть, надо осуществлять поставку очень мелкими партиями (скажем, по 2 штуки)? Тогда среднее количество компьютеров на складе в течение всего года будет невелико (1 штука) и затраты на хранение составят 30 руб. — сущая безделица! Однако тогда придется заказать 1200 партий и доставка их обойдется в $1200 \cdot 1000 = 1200000$ руб. Это будет серьезным ударом по финансовому положению вашей компании.

Итак, если разделить весь объем поставки на две части, то общие затраты снижаются, но если количество частей будет велико, то затраты станут непозволительно большими.

Очевидно, существует какой-то оптимальный вариант, в котором суммарные затраты будут минимальными. Пусть в каждой партии будет x компьютеров, тогда количество партий равно $2400/x$. Затраты на доставку составят $1000 \cdot 2400/x = 240 \cdot 10^4/x$ руб. На складе в среднем будет храниться $x/2$ компьютеров, и затраты на хранение составят $15 \cdot x$ руб. Таким образом, суммарные затраты составят $240 \cdot 10^4/x + 15 \cdot x$ руб. Нам нужно определить, при каком значении x функция $y(x) = 240 \cdot 10^4/x + 15 \cdot x$ принимает наименьшее значение. Используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, получим:

$$240 \cdot 10^4/x + 15 \cdot x \geq 2\sqrt{(240 \cdot 10^4/x) \cdot 15x} = 12000.$$

Итак, минимум суммарных затрат равен 12000 руб. и достигается, когда $240 \cdot 10^4/x = 15 \cdot x$, т. е. при $x = 400$.

Упражнение

Решите эту задачу в общем случае, когда доставка одной партии стоит a руб., а хранение — b руб. Как быть в том случае, если значение x , при котором достигается минимум затрат, оказалось нецелым числом?

Вариация 2. Что нам стоит мост построить?

"Мы строили, строили и, наконец, построили!"

Речь Чебурашки по случаю окончания строительства

Представьте, что вам необходимо составить смету строительства моста через реку. Место для строительства уже выбрано; ширина реки в этом месте $L = 1000$ м. Стальная конструкция моста состоит из нескольких одинаковых пролетов, поставленных на

состоит из нескольких одинаковых пролетов, поставленных на бетонные опоры (рис. 2.12).

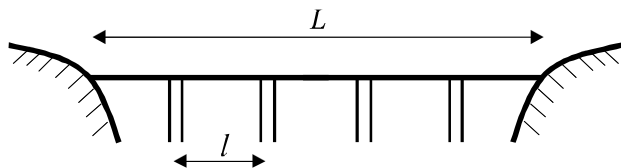


Рис. 2.12

Вам необходимо решить, какой длины должен быть пролет (или сколько потребуется опор), чтобы стоимость постройки моста была наименьшей. Для решения этого вопроса имеются следующие данные. Стоимость постройки моста складывается из стоимости опор и стоимости стальной конструкции. Установка каждой бетонной опоры в русле реки обходится $p_1 = 25000$ тыс. руб., поэтому стоимость установки всех опор $p_{\text{опор}} = p_1 \cdot n$, где n — количество опор. Стоимость конструкции определяется ее объемом (один кубометр конструкции стоит $p_2 = 40$ тыс. руб.). Объем одного пролета зависит от его длины. Чем больше длина пролета l , тем больше площадь S его поперечного сечения (это условие определяет прочность конструкции). Вообще говоря, зависимость $S(l)$ достаточно сложная. Приближенно можно считать, что S прямо пропорциональна l , т. е. $S = a \cdot l$, где $a = 0,04$ м. Таким образом, стоимость стальной конструкции определяется по формуле $p_{\text{сталь}} = p_2 \cdot a \cdot l \cdot L$ (тыс. руб.) Если выразить длину пролета через количество опор: $l = L/(n+1)$, то общую стоимость моста можно записать в виде зависимости от количества опор:

$$p_{\text{мост}}(n) = p_{\text{опор}} + p_{\text{сталь}} = p_1 \cdot n + p_2 \frac{aL^2}{n+1}. \quad (2.7)$$

Осталось выбрать значение для натурального числа n так, чтобы величина $p_{\text{мост}}$ была наименьшей.

Решение. Убедимся сначала, что поставленная задача корректна, т. е. существует такое натуральное число n , что функция $p_{\text{мост}}(n)$ принимает наименьшее значение. Если взять число n достаточно большим, то второе слагаемое в (2.7) будет очень мало, зато первое слагаемое будет велико (установка большого количества опор обойдется очень дорого). Может быть, следует построить мост вовсе без опор (в один пролет длиной L)? Тогда можно сэкономить на установке опор! Однако у такого длинного пролета площадь поперечного сечения должна быть велика, и такой мост потребует слишком много дорогостоящей стали. Ясно, что количество опор не должно быть очень большим, но и не слишком маленьким, т. е. количество опор должно быть оптимальным. Для удобства запишем зависимость (2.7) в виде

$$p_{\text{мост}}(n) = p_1 \cdot (n+1) + p_2 \cdot \frac{aL^2}{n+1} - p_1.$$

Заметим, что первые два слагаемых зависят от одной переменной $n+1$, а последнее слагаемое — постоянная. Применяя к первым двум слагаемым неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, получим

$$p_1 \cdot (n+1) + p_2 \cdot \frac{a \cdot L^2}{n+1} \geq 2\sqrt{p_1 p_2 a L^2}.$$

Таким образом, минимальная стоимость постройки моста составляет $2\sqrt{p_1 p_2 a L^2}$ и достигается при $n = L\sqrt{ap_2 / p_1} - 1$. Подставляя численные данные, приходим к выводу, что мост должен состоять из восьми пролетов по 125 м. Стоимость строительства составит $2\sqrt{25000 \cdot 40 \cdot 0,04 \cdot 1000^2} = 400000$ тыс. руб.

Вопрос

Как быть, если для иных значений параметров p_1 , p_2 , a , L вычисленное число опор окажется нецелым?

Вариация 3. Мост через овраг

Необходимо построить мост через симметричный овраг шириной $2L$, склоны которого образуют одинаковый угол α с горизонтом. В отличие от моста через реку, высота бетонных опор неодинакова и зависит от расстояния до края оврага. Кроме того, существуют два различных варианта моста: с центральной опорой и без центральной опоры (рис. 2.13, а, б).

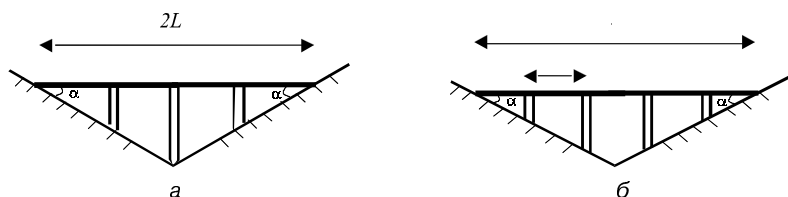


Рис. 2.13

Стоимость одной бетонной опоры $p_{\text{опор}}$ пропорциональна ее высоте, т. е. $p_{\text{опор}} = p_1 \cdot h$, где h — высота опоры в метрах, p_1 — стоимость погонного метра опоры. Таким образом, стоимость всех опор $p_0 = p_1 \cdot H$, где H — суммарная высота всех опор. Стоимость стальной конструкции моста по-прежнему определяется ее объемом, т. е. $p_{\text{ст}} = p_2 \cdot a \cdot l \cdot 2L$, где l — длина одного пролета. Общая стоимость моста равна $p_{\text{мост}} = p_0 + p_{\text{ст}} = p_1 \cdot H + p_2 \cdot a \cdot l \cdot 2L$.

Теперь необходимо выбрать значение длины пролета l (или количества опор n) так, чтобы величина $p_{\text{мост}}$ была наименьшей.

Решение. Рассмотрим вариант моста с центральной опорой (рис. 2.13, а). Пусть весь мост состоит из $2n$ пролетов, так что длина одного пролета $l = L/n$. Тогда стоимость стальной конструкции $p_{\text{ст}} = p_2 \cdot a \cdot 2L^2/n$. Высоту первой от края оврага опоры обозначим через h_0 . Тогда высоты следующих по порядку опор будут $2h_0, 3h_0, 4h_0$, т. е. составляют арифметическую прогрессию.

Высота всех опор на одном склоне оврага (без центральной) составляет $h_0 \cdot n \cdot (n-1)/2$. Высота центральной опоры равна $h_0 \cdot n$, поэтому суммарная длина всех опор равна $2 \cdot h_0 n \cdot (n-1)/2 + h_0 n = h_0 n^2$. Выразим величину h_0 через данные в условии задачи: $h_0 = l \cdot \operatorname{tg} \alpha = L \cdot \operatorname{tg} \alpha / n$ и получим выражение для стоимости моста

$$p_{\text{мост}}(n) = p_1 L \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot n + 2 p_2 a L^2 / n.$$

Применяя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, получаем

$$p_1 L \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot n + p_2 \cdot 2 a L^2 / n \geq 2 \sqrt{2 a \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot L^3 \cdot \operatorname{tg} \alpha}.$$

Таким образом, минимальная стоимость постройки моста составляет и достигается при $n = \sqrt{2 a \cdot p_2 \cdot L / p_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha}$. Обратите внимание на то, что зависимость $n(L)$ иная, чем для моста через реку.

Упражнение

Рассмотрите вариант моста без центральной опоры и найдите минимальную стоимость моста. Сравните между собой по стоимости варианты а и b.

Вариация 4. Покупать новую или чинить старую?

Надо быть очень богатым, чтобы позволить себе покупать дешевые вещи.

Народная мудрость

Всякая бытовая техника, как известно, рано или поздно приходит в негодность. Тогда перед нами встает вопрос: покупать новую или чинить старую? Починка обойдется, конечно, дешевле, чем покупка новой техники, зато новая техника прослужит дольше. Вопрос о покупке новой техники не обязательно связан с ее поломкой. С течением времени эксплуатационные качества техники падают (например, водопроводные трубы ржавеют, обувь изнашивается и теряет свой первоначальный блеск и т. п.), и на под-

держание ее в рабочем состоянии приходится тратить все больше и больше. Когда эти затраты становятся достаточно велики, возникает подозрение, что покупка новой вещи будет выгодней, чем поддержание старой в надлежащем виде. Но когда именно следует это сделать, чтобы не тратить средства впустую? Рассмотрим следующую задачу.

Покупка нового автомобиля. Новый автомобиль стоит 200 тыс. руб. Для того чтобы он все время был "на ходу", в первый год после покупки необходимо затратить 6 тыс. руб. (оплата техосмотра, налога и т. п.). В последующие годы эти затраты будут больше (некоторые детали изнашиваются и потребуют замены). Для простоты будем считать, что в каждом следующем году эти расходы на 4 тыс. руб. больше, чем в предыдущем. Через сколько лет эксплуатации следует заменить автомобиль?

Решение. Будем полагать, что цены неизменны и не будем учитывать выручку от продажи старой машины. Посчитаем, каковы будут среднегодовые расходы за n лет эксплуатации купленного автомобиля. Ежегодные расходы составляют арифметическую прогрессию, первый член которой равен 6 тыс. руб., а последний равен $6 + 4 \cdot (n - 1)$ тыс. руб. Расходы на эксплуатацию за n лет составят таким образом $n \cdot (2n + 4)$ тыс. руб. Общий расход за все n лет равен $200 + n \cdot (2n + 4)$ тыс. руб. Разделив эту сумму на n , получаем средний ежегодный расход $S = 200/n + 2n + 4$. Применяя к первым двум слагаемым неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, найдем минимальное значение S . Оно достигается при $n = 10$. Таким образом, чтобы автомобиль не обошелся слишком дорого, его следует заменить на новый через 10 лет после покупки.

Вопрос

Как изменится ответ с учетом выручки от продажи старой машины, которая составляет 50 тыс. руб.?

Вариация 5. Сколько надо удобрений?

Некий огородник выращивает на своем небольшом участке картофель. Почва на его участке истощенная. Если не вносить удобрения, то урожай составляет 3 ц. Если же внести в почву перегной, то урожай сначала будет выше, но в последующие годы опять начнет уменьшаться. Данные об урожайности приведены в табл. 1. Стоимость перегноя составляет 2200 руб., а ежегодные расходы на выращивание урожая составляют 500 руб. Как часто следует вносить перегной, чтобы себестоимость выращенного картофеля была наименьшей?

Таблица 1. Зависимость урожайности от времени внесения удобрений

Год после внесения удобрений	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Урожай в центнерах	18	16	14	12	10	8,5	7	5,5	4	3

Решение. Как видно из таблицы, эффект от внесения удобрений полностью исчезает на десятый год. Рассчитаем среднегодовой расход на выращивание 1 ц картофеля за n лет после внесения удобрений. Для этого, исходя из табл. 1, составим табл. 2.

Таблица 2. Среднегодовой расход на выращивание 1 ц картофеля

Кол-во лет после внесения удобрений	1	2	3	4	5	6	7	8
Урожай за этот срок (ц)	18	34	48	60	70	78,5	85,5	91
Расходы за этот срок (руб)	2700	3200	3700	4200	4700	5200	5700	6200
Расход на 1 ц в год (руб)	150	94,1	77	70	67,1	66,2	66,6	68,1

Вторая строка табл. 2 получена суммированием годовой урожайности. Аналогично, третья строка табл. 2 получена суммированием расходов. Последняя строка табл. 2 получена делением третьей строчки на вторую. Из последней строчки табл. 2 видно, что наименьший среднегодовой расход на выращивание 1 ц картофеля будет через шесть лет после внесения перегноя. Таким образом, перегной нужно вносить раз в шесть лет.

Вариация 6. О пользе витаминов

Режим питания нарушать нельзя!

*Девиз Пончика
из м/ф "Незнайка на Луне"*

Завхоз школы-интерната собирается закупить фрукты для школьных завтраков. Согласно диетическим нормативам, ежедневная порция фруктов (на одного школьника) должна содержать не менее 3 г витамина С и 2 г витамина А. У завхоза имеется возможность закупить абрикосы по цене 50 руб./кг и вишню по цене 80 руб./кг. Содержание витаминов в этих фруктах приведено в табл. 3.

Таблица 3. Содержание витаминов

витамины	абрикосы	вишня
А	2 %	1 %
С	1 %	3 %

Сколько граммов абрикосов и вишни должна содержать ежедневная порция одного школьника, чтобы удовлетворять диетическим нормативам и при этом стоимость порции была бы наименьшей?

Решение. Пусть одна порция состоит из x (г) абрикосов и y (г) вишни. По условию задачи необходимо, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{cases} 0,01x + 0,03y \geq 3, \\ 0,02x + 0,01y \geq 2. \end{cases} \quad (2.8)$$

При этом нужно, чтобы стоимость одной порции (в коп.) $S = 5x + 8y$ была наименьшей.

Рассмотрим множество точек на координатной плоскости Oxy , заданное системой (2.8). Первое неравенство задает все точки, лежащие выше или на прямой $y = 100 - x/3$. Второе неравенство задает все точки, лежащие выше или на прямой $y = 200 - 2x$ (рис. 2.14). Заштрихованная область Ω на рис. 2.14 состоит из всех точек $x \geq 0, y \geq 0$, удовлетворяющих системе (2.8). Среди всех таких точек необходимо найти одну точку, для которой величина $S = 5x + 8y$ принимает наименьшее значение.

Построим семейство Σ прямых $y = (S - 5x)/8$ для различных значений параметра S . При небольших значениях S прямые семейства Σ не пересекаются с областью Ω (прямая 1 на рис. 2.14). При больших значениях S имеется отрезок прямой из семейства Σ , принадлежащий области Ω (прямая 2 на рис. 2.14). Очевидно, что при некотором наименьшем значении S прямая семейства Σ пройдет через угловую точку А, принадлежащую области Ω . Решая систему уравнений

$$\begin{cases} y = 100 - x/3, \\ y = 200 - 2x, \end{cases}$$

находим координаты точки А: $x = 60, y = 80$. Итак, порция фруктов должна состоять из 60 г абрикосов и 80 г вишни.

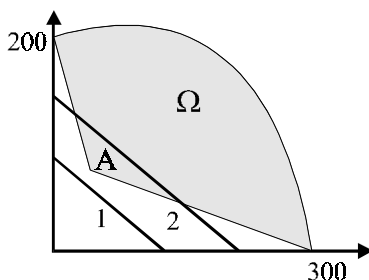


Рис. 2.14

Упражнение

Подставив $y = (S - 5x)/8$ в неравенства (2.8), получите систему неравенств

$$\begin{cases} S \geq 1600 - 11x, \\ S \geq 800 - 7x/3. \end{cases}$$

На координатной плоскости OxS постройте область, заданную этой системой. Найдите в ней точку, имеющую наименьшую координату S .

Вариация 7. Хватит или нет?

Из каменоломни нужно вывезти 870 т каменных глыб. Для этого имеются 17 железнодорожных платформ грузоподъемностью 58 т каждая. Известно, что вес каждой глыбы не более 8 т. Достаточно ли имеющихся платформ для перевозки всех глыб?

Решение. На имеющиеся 17 платформ можно погрузить 986 т, поэтому грузоподъемности вполне хватает; даже остается запас в 116 т. Если бы все глыбы были песчинками, тогда можно было бы загрузить доверху 15 платформ и две платформы остались бы свободными. Беда в том, что глыбы могут быть и большими. Крупные глыбы не дают полностью использовать грузоподъемность платформ. Может надо перетасовать глыбы и загрузить платформы иначе? Вот если бы нам было известно количество глыб, ответить на вопрос задачи было бы легко. На одну платформу 7 глыб помещаются в любом случае. Нам надо организовать погрузку так, чтобы контролировать, сколько осталось непогруженных глыб и свободных платформ.

Начнем загружать платформы по очереди. Как только получится перегруз, последнюю глыбу снимем и положим на землю рядом с платформой. Когда мы таким образом загрузим 14 платформ, на земле рядом с ними будут лежать 14 глыб. Общий вес погруженных и лежащих на земле глыб больше, чем $14 \cdot 58 \text{ т} = 812 \text{ т}$, поэтому вес оставшихся глыб меньше, чем $870 - 812 = 58 \text{ т}$. Лежащие на земле глыбы поместятся на две платформы, а оставшиеся глыбы поместятся на последнюю семнадцатую платформу.

Вопрос

Нельзя ли в этой задаче обойтись 16 платформами? Возьмем плохой случай — все глыбы крупные: 108 глыб весом по 8 т и одна глыба 6 т. Тогда на 15 платформ можно погрузить $15 \cdot 7 = 105$ глыб по 8 т. Оставшиеся три глыбы по 8 т и одна глыба весом 6 т поместятся на шестнадцатую платформу. Семнадцатая платформа остается неиспользованной! Согласны ли вы с этими рассуждениями? Насколько они убедительны? Действительно ли взят самый плохой случай? Какой случай можно считать самым плохим?

Очевидно, что самый плохой случай — это когда все 17 платформ имеют большой недогруз, и его нельзя устранить перетасовкой глыб, т. к. все глыбы одинакового веса. Пусть на каждой из 17 платформ лежит n глыб. Тогда вес каждой глыбы составляет $870/(17n)$ т, а недогруз каждой платформы составляет $(58 - 870/17)$ т. Если выбрать n так, чтобы выполнялось условие $58 - 870/17 < 870/(17n)$, то устранить недогруз невозможно. По условию задачи $870/(17n) < 8$. Отсюда для n получаем

$$6\frac{27}{68} < n < 7\frac{1}{2}.$$

Упражнение

Проверьте, что для 18 платформ такой плохой случай организовать нельзя.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Среди всех чисел x, y , которые удовлетворяют неравенствам $y + 2x \geq 2$, $3y + 2x \geq 6$, найти такие, чтобы сумма $x + y$ была наименьшей.

Задача 2. Из квадратного листа жести размерами $a \times a$ надо изготовить ящик, открытый сверху, вырезая по углам равные квадраты и загибая затем края. Какова должна быть сторона отрезаемого квадрата, чтобы получился ящик максимального объема?

Задача 3. Цена бриллианта пропорциональна квадрату его веса. Как изменится стоимость бриллианта, если его распилить на несколько частей?

Задача 4. Найти экстремумы функции $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

Задача 5. Найти наименьшее значение функции $y = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$ при $0 < x < \pi/2$.

Задача 6. Найти наименьшее значение функции

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + \frac{1}{x^2 y^2}.$$

Задача 7. Найти наименьшее значение функции

$$y = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4|.$$

Задача 8. Доказать неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79} + \sqrt{80}} > 4.$$

Задача 9. Найти объем цилиндра, вписанного в сферу радиуса R с максимальной площадью полной поверхности.

Задача 10. Длины двух медиан треугольника равны 3 и 4. Какую наибольшую площадь может иметь этот треугольник?

Задача 11. Забором длиной l требуется оградить участок в форме прямоугольника с примыкающим к нему полукругом, диаметром которого служит одна из сторон прямоугольника. Найдите наибольшее значение площади такого участка.

Задача 12. Забором длиной l требуется оградить участок в форме прямоугольника с примыкающим к нему равносторонним треугольником, стороной которого служит одна из сторон прямоугольника. Найдите наибольшее значение площади такого участка.

Задача 13. Вес нескольких ящиков с грузом составляет 10 т, причем каждый ящик весит не более 1 т. За какое наименьшее количество поездок можно перевезти все эти ящики на трехтонном грузовике? Перегружать автомобиль нельзя.

Задача 14. Месторождение руды А находится на некотором удалении от реки, на берегу которой расположен металлургический

комбинат В. Руду из А в В можно привезти по железной дороге до реки, а затем на баржах по реке. Стоимость перевозки тонны руды на 1 км по железной дороге вдвое дороже, чем водным путем. Где на берегу реки надо построить пристань и проложить к ней из А железную дорогу, чтобы транспортировка руды была самой дешевой?

Задача 15. Путешественник должен пересечь пустыню. За сутки он может проходить не более 20 км и нести с собой трехсуточный запас воды. Если путешественник на протяжении суток окажется без воды, он погибнет. Водой он может запастись в неограниченном количестве только в начальном пункте маршрута. В конце суточных переходов он может устраивать склады с запасами воды для использования их в будущем. За какое наименьшее время путешественник сможет пересечь пустыню длиной 80 км? 100 км?

Глава 3



О том, как с помощью гирек построить кратчайшую транспортную сеть, и о том, как можно растянуть бычью шкуру

3.1. Экстремум в геометрических задачах

Вот — новый поворот!
Что он нам несет?
Пропась или взлет?
Омут или брод?
И не разберешь, пока не повернешь!

*Из репертуара группы
"Машина времени"*

Часто успех решения приносит изменение формулировки задачи, перевод задачи на другой "язык", например, с языка алгебры на язык геометрии. При этом переходе открывается иной, неожиданный подход к решению, который было бы невозможно увидеть в рамках "алгебраического взгляда" на условие задачи. Разберем следующий пример.

Пример 1. Найти наименьшее значение функции

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{(4,5 - x)^2 + 16}. \quad (1)$$

Что напоминает каждое из слагаемых в (1)? Теорему Пифагора! Точнее — формулу для расстояния между двумя точками на координатной плоскости Oxy . Так, например, выражение $\sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{(x-0)^2 + (0 \pm 2)^2}$ можно интерпретировать как расстояние от точки M с координатами $(x; 0)$ до точки A с координатами $(0; 2)$ или $(0; -2)$. Тогда выражение $\sqrt{(4,5-x)^2 + 16}$ — это расстояние от точки M до точки B с координатами $(4,5; 4)$ или $(4,5; -4)$. Точка M расположена на оси абсцисс, и поэтому дадим задаче следующую геометрическую формулировку.

Задача 1. Дана прямая l и две точки A и B , не лежащие на прямой. На прямой l найти точку M , чтобы сумма расстояний от нее до точек A и B была минимальна.

Это очень известная и древняя задача (автором ее считают Герона Александрийского), и ее решение наверняка вам знакомо. Вот оно. Если точки A и B лежат по разные стороны от прямой l , то решение очевидно: искомая точка M — это точка пересечения отрезка AB с прямой l . Если точки A и B лежат по одну сторону от прямой l , тогда M — это точка пересечения отрезка AB_1 с прямой l , где B_1 — точка, симметричная B относительно прямой l (рис. 3.1). Докажите самостоятельно, что для любой другой лежащей на прямой l точки M_1 выполняется неравенство $AM_1 + M_1B > AM + MB$.

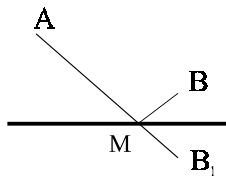


Рис. 3.1

Упражнение

Используя этот результат, решите следующую задачу. Дан острый угол и точка A внутри него. Найти на сторонах угла точки B и C так, чтобы периметр треугольника ABC был минимальным. Обратите внимание на тот факт, что заданный угол обязан быть острым.

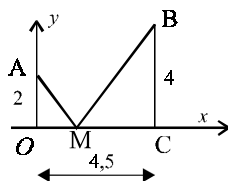


Рис. 3.2

Возвращаясь к нашему примеру, убеждаемся, что точка М делит отрезок ОС в отношении $OM : MC = 1 : 2$ (рис. 3.2). Здесь точка С — проекция точки В на ось абсцисс — имеет координаты $(4, 5; 0)$. Итак, мы нашли значение переменной $x = 3/2$, которое дает минимум $f(x)$, и теперь находим минимальное значение функции $f(1,5) = 7,5$.

Рассмотрим несколько задач, имеющих довольно изящные геометрические решения.

Задача 2. Дана прямая l и две точки А и В, лежащие по одну сторону от прямой. На прямой l найти точку М, чтобы угол АМВ был максимальным.

Решение. Убедимся сначала, что такая точка существует. Поместим точку М в точку пересечения прямой АВ с прямой l . Тогда угол АМВ равен нулю. Будем смещать точку М по прямой l . При этом угол АМВ будет сначала возрастать, но когда М сдвинется очень далеко, он станет опять малым (угол АМВ обращается в ноль при бесконечном удалении точки М). Между этими крайними случаями угол АМВ должен где-нибудь стать максимальным, и график зависимости угла от положения точки М на прямой l имеет вид, показанный на рис. 3.3.

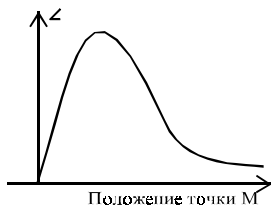


Рис. 3.3

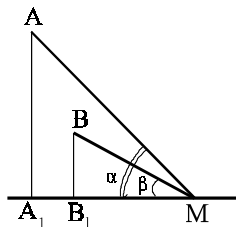


Рис. 3.4

Можно пойти алгебраическим путем и поискать функцию, монотонно зависящую от угла AMB . В качестве такой функции можно взять, например, тангенс угла AMB .

Пусть A_1 и B_1 — основания перпендикуляров, опущенных из A и B на l (рис. 3.4). Обозначим $MB_1 = x$, $A_1B_1 = c$, $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $\angle AMA_1 = \alpha$, $\angle BMB_1 = \beta$. Отсюда $\angle AMB = \alpha - \beta$,

$$f(x) = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{a}{x+c} - \frac{b}{x}}{1 + \frac{ab}{x(x+c)}} = \frac{(a-b)x - bc}{x^2 + xc + ab}.$$

Теперь необходимо найти максимум $f(x)$. Такое решение выглядит малопривлекательным из-за сложности. Попробуем рассмотреть сначала более простой случай, когда $AB \perp l$. В этом случае $c = 0$, при этом

$$f(x) = \frac{a-b}{x + ab/x}.$$

Максимум $f(x)$ достигается одновременно с минимумом знаменателя (какое неравенство тут можно применить?). Поэтому максимум $f(x)$ достигается при $x = \sqrt{ab}$. Отрезок длиной $\sqrt{ab}$ построить несложно (как?). Но как быть в общем случае? Короче говоря, мы пойдем другим путем! Разглядывая рис. 3.3, легко заметить одно обстоятельство. Если в какой-нибудь точке M_1 угол AMB не достигает своего максимума, то на прямой l находится еще одна точка M_2 , для которой $\angle AM_2B = \angle AM_1B$, причем точки M_1 и M_2 лежат по разные стороны от той точки, которая дает максимальный угол. Итак, на прямой l существуют две точки, дающие одинаковое (не максимальное) значение угла AMB . Возникает вопрос: где на плоскости находятся все точки M , дающие одинаковые значения угла AMB ? И на этот вопрос легко ответить! Надо вспомнить свойство вписанных углов: все точки M , лежащие на дуге окружности, проходящей через A и B дают одинаковое значение угла AMB . Осталось понять, какая именно окружность, проходящая через точки A и B , дает максимальное

значение угла? На этот вопрос тоже легко ответить! Такая окружность должна иметь только одну общую точку с прямой l , т. е. касаться прямой. Точка касания M и будет искомой. Задача почти решена. Осталось построить искомую окружность.

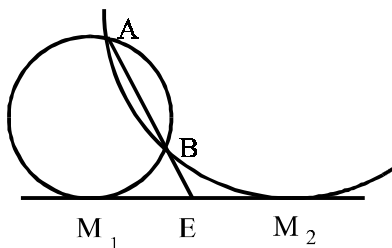


Рис. 3.5

Пусть прямая AB пересекает прямую l в точке E , искомая окружность касается прямой l в точке M (рис. 3.5). По теореме о секущей и касательной, проведенных из точки E , имеем: $EM = \sqrt{AE \cdot BE}$. Отрезки AE и BE известны, поэтому нетрудно построить отрезок EM (как?). Заметим, что отрезок $\sqrt{AE \cdot BE}$ можно отложить на прямой l как вправо, так и влево от точки E . Таким образом получаем два возможных положения искомой точки: M_1 и M_2 . Теперь уже нетрудно найти центр и радиус искомой окружности. Построим в точке M_1 (или M_2) перпендикуляр к прямой l , а также серединный перпендикуляр к отрезку AB . Точка пересечения построенных прямых и будет центром искомой окружности.

Остались невыясненными следующие вопросы: какая из двух точек M_1 или M_2 дает максимальное значение угла AMB ? Как построить искомую окружность, если отрезок AB параллелен прямой l ? Разберитесь с этими вопросами самостоятельно.

Из этой задачи можно извлечь очень ценные наблюдения. Задумайтесь, какой аспект приведенных рассуждений сыграл ключевую роль в решении? По-видимому, два момента оказались очень важными. Первый — когда мы стали рассматривать *все точки*

плоскости, для которых значение угла *одинаковое*. Это частный случай более общего понятия *линии уровня* функции, определенной на множестве точек плоскости. Так называются линии, соединяющие все точки плоскости, для которых функция принимает одинаковое значение. В нашей задаче этой функцией был угол, под которым виден отрезок АВ из некоторой точки плоскости. Но линии уровня можно построить для любой функции положения точки. В действительности, вы уже знакомы с этим понятием. Вспомните, на географических картах нанесены такие линии. Они показывают рельеф местности. Там функция — это высота точки поверхности Земли над уровнем моря. На карте линии постоянного значения высоты (линии уровня) нанесены с определенным интервалом, например, через каждые 100 м, но легко понять, что через любую точку земной поверхности можно всегда провести линию уровня, поскольку каждая точка находится на *какой-нибудь* высоте (а если точка на дне океана?). На географической карте линии уровня служат для того, чтобы увидеть расположение и форму горных хребтов, крупных оврагов и отдельных горных вершин. Глядя на линии уровня, можно даже увидеть, какие склоны крутые, а какие пологие (обдумайте, как это определить).

Для функции от двух переменных (координат точки на плоскости) линии уровня играют ту же роль, что и график для функции от одной переменной. Таким образом, если вы представляете, как устроена какая-либо функция от двух переменных, вы можете схематично построить семейство линий уровня этой функции и разобраться, в каких точках функция принимает наибольшее и наименьшее значения. Обдумайте, как выглядит линия уровня, проходящая через вершину горы. Может ли линия уровня быть самопересекающейся?

Второй важный момент в решении — когда мы выяснили, что окружность (линия уровня) должна касаться прямой l . В нашей задаче точка М перемещалась не по всей плоскости, а по заранее заданной траектории (вдоль прямой l).

Легко видеть, что если в процессе движения точка М *пересекает* линии уровня, то в эти моменты функция *не достигает* своего

экстремального значения, поскольку точка М переходит на новую линию уровня, для которой значение функции либо больше, либо меньше прежнего. Следовательно, экстремум может достигаться только в той точке, в которой заданная траектория *касается* линии уровня. Важно понять, что такая ситуация имеет место не только в решенной задаче, а всякий раз, когда ищется экстремум функции нескольких переменных при движении *по заданному пути*.

Упражнение 1

Выясните, что представляют собой линии уровня некоторых простейших функций положения точки на плоскости:

- функция — это расстояние до заданной точки А;
- функция — это расстояние до заданной прямой l ;
- функция — это сумма расстояний до двух заданных пересекающихся прямых l_1 и l_2 ;
- функция — это разность расстояний до двух заданных пересекающихся прямых l_1 и l_2 ;
- функция — это отношение расстояний до двух заданных пересекающихся прямых l_1 и l_2 .

Упражнение 2

Постройте линии уровня более сложных функций:

- функция — это сумма расстояний до точек А и В;
- функция — это разность расстояний до точек А и В;
- функция — это отношение расстояний до точек А и В;
- функция — это произведение расстояний до заданных пересекающихся прямых l_1 и l_2 ;
- функция — это произведение расстояний от заданных точек А и В.

Задача 3. Две пересекающиеся дороги образуют угол, внутри которого протекает ручей. Всадник, едущий по первой дороге, хочет, не доезжая до перекрестка, свернуть к ручью, напоить своего коня и выехать на другую дорогу. Как ему это сделать, чтобы длина пути по бездорожью была наименьшей?

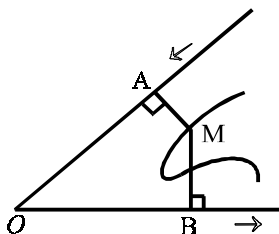


Рис. 3.6

Решение. Очевидно, что участки пути AM и MB (от дороги к ручью и от ручья на другую дорогу) должны быть перпендикулярами к соответствующим сторонам угла (рис. 3.6). Вот только где именно на берегу ручья надо выбрать точку M , чтобы сумма $AM + MB$ была минимальной? Построим линии уровня для функции $f(M) = x + y$, где x, y — расстояния от точки M до сторон угла, т. е. найдем множество точек, для которых значение $f(M)$ равно некоторому заданному числу c .

Указание

Рассмотрите сначала частный случай, когда дороги образуют прямой угол. Дороги могут служить осями координат, и надо только догадаться, какую линию задает на плоскости уравнение $x + y = c$.

Одно из слагаемых x, y может быть равным нулю, тогда искомому множеству принадлежит точка M_1 , лежащая на стороне угла и удаленная от другой стороны на расстояние c . Если другое слагаемое равно нулю, тогда искомому множеству принадлежит точка M_2 на другой стороне угла, при этом $OM_1 = OM_2 = a$ (рис. 3.7). Возникает подозрение, что и остальные точки отрезка M_1M_2 принадлежат искомому множеству. Проверим его.

Пусть M — любая точка отрезка M_1M_2 . Соединим ее с вершиной угла O . Получились два треугольника $МOM_1$ и $МOM_2$. Сумма их площадей, равная $a \cdot (x + y) / 2$, составляет площадь треугольника M_2OM_1 . Значит, сумма $(x + y)$ не зависит от положения точки M на отрезке M_1M_2 . Подозрение оказалось вер-

ным! Итак, искомые линии уровня — это отрезки, лежащие внутри угла и перпендикулярные к биссектрисе угла. Теперь на берегу ручья надо найти такую точку М, чтобы прямая, проведенная через нее перпендикулярно к биссектрисе угла, была наименее удалена от точки О.

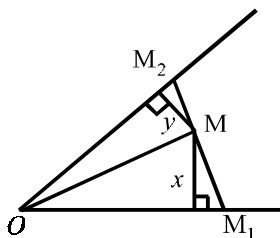


Рис. 3.7

Задача 4. В треугольнике ABC все стороны различны. Найдите в треугольнике такую точку М, сумма расстояний от которой до всех сторон треугольника будет наименьшей.

Решение 1. Пусть $a > b > c$ — стороны треугольника ABC. Обозначим расстояния от точки М до этих сторон соответственно через x, y, z . Соединим точку М с вершинами треугольника. Так как сумма площадей получившихся треугольников АМВ, АМС, ВМС составляет площадь S треугольника ABC, то $x \cdot a + y \cdot b + z \cdot c = 2S$. Отсюда

$$\frac{x \cdot a}{2S} + \frac{y \cdot b}{2S} + \frac{z \cdot c}{2S} = 1 \Rightarrow \frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} = 1,$$

где $h_a < h_b < h_c$ — высоты в треугольнике ABC. Если теперь в левой части этого равенства заменить h_b и h_c на h_a , то сумма увеличится и мы получим неравенство

$$\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_a} + \frac{z}{h_a} \geq 1,$$

т. е. для любой точки М имеем $x + y + z \geq h_a$. Следовательно сумма $x + y + z$ достигает минимума только при $x + y + z = h_a$, т. е. когда искомая точка М совпадает с вершиной А.

Решение 2. Возьмем любую точку внутри треугольника ABC и будем ее двигать так, чтобы сумма $x + y + z$ расстояний от нее до сторон треугольника все время уменьшалась. Сначала будем ее двигать так, чтобы сумма $x + y$ была постоянной, а расстояние z уменьшалось. Докажите, что тогда точка M рано или поздно окажется на стороне b или c . При этом одно из слагаемых станет равным нулю. Затем будем двигать ее по стороне треугольника. Докажите, что тогда точка M рано или поздно окажется в вершине A .

Задача 5. Два поселка A и B расположены на разных берегах реки и на разном удалении от берегов (рис. 3.8, a). Где на реке надо построить мост CD , чтобы дорога из A в B имела наименьшую длину? Берега реки — параллельные прямые, мост перпендикулярен берегам.

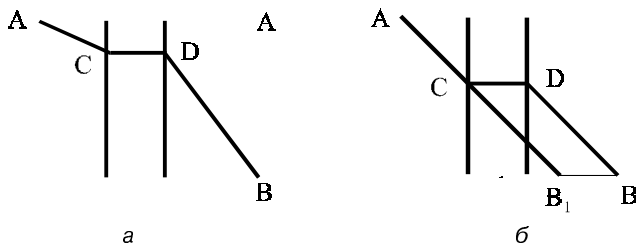


Рис. 3.8

Решение. Если бы ширина реки была очень маленькой (не река, а ручеек шириной в один шаг), то решение было бы очевидно: надо соединить точки A и B прямой и там, где эта прямая пересечет реку, там и строить мост (попросту говоря, перешагнуть ручеек). Нельзя ли реку сделать нулевой ширины? Возьмем один берег реки и сдвинем его на ширину реки, совместив оба берега. При этом сдвинется вся полуплоскость, и поселок B займет новое положение B_1 (рис. 3.8, b). Соединим A и B_1 и в точке C , где отрезок AB_1 пересечет совмещенные два берега, построим мост (настоящего размера, не нулевого). После этого вернем берег на прежнее место. Докажите самостоятельно, что длина любой иной дороги будет больше.

Задача 6. Два поселка А и В расположены по одну сторону от железной дороги. Где надо расположить железнодорожную платформу заданной длины, чтобы сумма расстояний от поселков до нее была минимальной?

Решение. Пусть прямая l — это железная дорога. Опустим из точек А и В перпендикуляры AA_1 и BB_1 на прямую l . Если длина платформы CE больше длины отрезка A_1B_1 , то платформу надо расположить так, чтобы отрезок CE содержал в себе отрезок A_1B_1 . При этом сумма расстояний от поселков до платформы равна $AA_1 + BB_1$. Если длина платформы CE меньше длины отрезка A_1B_1 , то отрезок CE должен содержаться внутри отрезка A_1B_1 , и надо найти такое положение точки С, чтобы сумма отрезков AC и BE была минимальной.

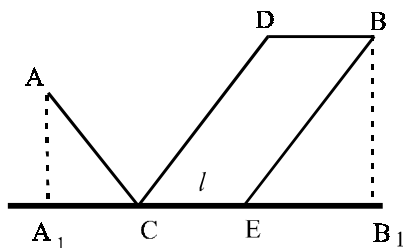


Рис. 3.9

Рассмотрим предельный случай, когда платформа нулевой длины. Тогда задача сводится к решенной ранее: надо на прямой l найти такую точку, чтобы сумма расстояний от нее до двух заданных точек была минимальной. Как сделать длину платформы нулевой? Очень просто: надо сделать параллельный перенос отрезка BE на вектор EC . При этом точка E совпадет с точкой C , а точка B переместится в положение D (рис. 3.9). Теперь на прямой l находим искомую точку C . Докажите, что при любом ином положении платформы CE сумма $AC + BE$ будет больше.

Задача 7. Мальчик хочет переплыть реку так, чтобы его как можно меньше снесло течением. Под каким углом к берегу реки он должен плыть, если скорость течения 2 м/с, а скорость, с которой мальчик может плыть в стоячей воде, 1 м/с?

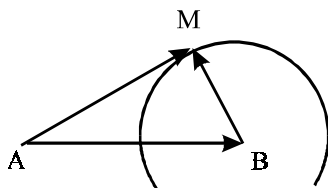


Рис. 3.10

Решение. Результирующий вектор скорости мальчика относительно берега — сумма вектора скорости течения и вектора собственной скорости мальчика. Надо, чтобы результирующий вектор составлял наибольший угол с направлением течения. Пусть вектор AB длиной 2 — это скорость течения, вектор $\vec{V}_M$ длиной 1 — собственная скорость мальчика. Совместим конец вектора AB и начало вектора $\vec{V}_M$ и будем вращать вектор $\vec{V}_M$ вокруг его начала, меняя направление. Конец вектора $\vec{V}_M$ опишет окружность радиусом 1 (рис. 3.10). Нужно найти на этой окружности такую точку M , чтобы угол между векторами AB и AM был максимальным. Нетрудно видеть, что для этого прямая AM должна касаться окружности, при этом синус угла будет равен отношению длин векторов $\vec{V}_M$ и AB , т. е. угол равен 30° .

Задача 8. Дан прямоугольник $ABCD$ со сторонами длиной a и b . Нужно построить прямоугольник наибольшей площади так, чтобы вершины A, B, C, D были расположены на всех его сторонах.

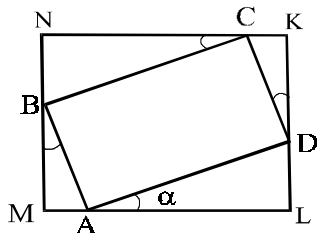


Рис. 3.11

Решение. Пусть прямоугольник $MNKL$ — искомый. Заметим, что прямоугольник $MNKL$ однозначно определяется углом между стороной MN и отрезком AB (рис. 3.11). Обозначим этот угол через α . Прямоугольник $MNKL$ состоит из прямоугольника $ABCD$ и четырех прямоугольных треугольников. Заметим, что каждые два прямоугольных треугольника, не имеющие общей вершины, равны (докажите это). Для того чтобы площадь $MNKL$ была наибольшей, нужно чтобы сумма площадей двух прямоугольных треугольников с общей вершиной тоже была наибольшей. Запишем эту сумму площадей как функцию переменной α :

$$f(\alpha) = \sin \alpha \cos \alpha \cdot (a^2 + b^2)/2.$$

Произведение $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ будет максимальным при $\alpha = \pi/4$, при этом прямоугольник $MNKL$ — квадрат со стороной $(a+b)/\sqrt{2}$.

Задача 9. Доказать, что для любого прямоугольного треугольника выполняется неравенство $0,4 < r/h < 0,5$, где r и h — соответственно радиус вписанной окружности и высота, опущенная на гипотенузу.

Решение. Обозначим катеты через a , b , гипотенузу через c . Тогда $r = 2S/(a+b+c)$, $h = 2S/c$, где S — площадь треугольника. Отсюда

$$\frac{r}{h} = \frac{c}{a+b+c} < \frac{c}{c+c} = 0,5.$$

Пусть угол против катета a будет α . Тогда $a = c \cdot \sin \alpha$, $b = c \cdot \cos \alpha$, $a+b+c = c \cdot (\sin \alpha + \cos \alpha + 1) \leq c \cdot (\sqrt{2} + 1)$, т. к. максимальное значение функции $f(\alpha) = \sin \alpha + \cos \alpha$ равно $\sqrt{2}$. Отсюда

$$\frac{r}{h} = \frac{c}{a+b+c} \geq \frac{c}{c \cdot (\sqrt{2} + 1)} = \sqrt{2} - 1 > 0,4.$$

Задача 10. Через точку A , лежащую внутри данного угла, провести прямую, отсекающую от него треугольник минимальной площади.

Решение. Пусть BC — искомая прямая и треугольник OBC имеет наименьшую возможную площадь. Обозначим длины отрезков AB и AC через x и y . Нетрудно заметить, что если мы станем поворачивать прямую вокруг точки A , то отношение x/y будет меняться. Каково же это отношение для искомой прямой?

Наводящие соображения. Воспользуемся тем фактом, что площадь треугольника OBC экстремальна. Если повернуть прямую BC вокруг точки A совсем чуть-чуть, то площадь треугольника должна *почти не измениться*. Эту идею образно и точно И. Кеплер выразил так: "*по обе стороны от места наибольшего значения убывание вначале нечувствительно*" (в случае наименьшего значения будет возрастание, но все равно *нечувствительное*). Повернем отрезок BC на очень малый угол α так, что он занял новое положение B_1C_1 (рис. 3.12). Тогда площади треугольников OBC и OB_1C_1 примерно равны. Длины отрезков AB_1 и AC_1 очень мало отличаются от длин отрезков AB и AC и примерно равны x и y . Следовательно, равны площади треугольников ABV_1 и ACC_1 . Приравнивая эти площади, получаем

$$\frac{1}{2}x^2 \sin \alpha \approx \frac{1}{2}y^2 \sin \alpha, \text{ т. е. } x \approx y.$$

Приходим к выводу, что отрезок BC , который дает треугольник минимальной площади, точкой A должен делиться пополам.

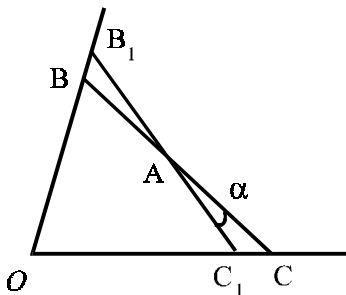


Рис. 3.12

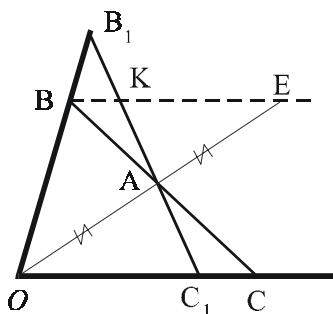


Рис. 3.13

Доказательство. Построим искомую прямую BC . Это совсем несложно: надо на прямой OA от точки O отложить отрезок $OE = 2 \cdot OA$ и через точку E провести прямую l параллельно одной стороне угла. Точка пересечения прямой l с другой стороной угла и будет искомой точкой B (рис. 3.13). Проведя прямую через A и B , получим треугольник OBC . Докажем, что его площадь наименьшая. Возьмем на стороне угла точку C_1 ближе к вершине угла, чем точка C . Проведем через A и C_1 прямую, получим треугольник OC_1B_1 . Его площадь S_1 можно получить так: к площади S треугольника OBC прибавить площадь треугольника ABV_1 и вычесть площадь треугольника ACC_1 . Прямая l пересечет отрезок C_1B_1 в точке K , при этом треугольники ABK и ACC_1 равны. Но треугольник ABK целиком содержится внутри треугольника ABV_1 , поэтому прибавляемая к S площадь больше вычитаемой и $S < S_1$. Аналогично рассмотрите случай, когда точка C_1 выбирается дальше от вершины угла, чем точка C .

Задача 11. Дан треугольник ABC . Найти на плоскости такую точку M , чтобы сумма радиусов окружностей, описанных около треугольников ACM и BCM , была наименьшей.

Решение. Если мы станем двигать точку M по плоскости, то обе окружности будут меняться. Что же тогда будет оставаться неизменным? Неизменным остается тот факт, что стороны AC и BC являются хордами окружностей! Хорда всегда не больше диаметра, поэтому $2(R_1 + R_2) \geq AC + BC$. Наименьшим значение $R_1 + R_2$ будет в случае равенства, т. е. $2R_1 = AC$, $2R_2 = BC$.

Тогда углы $\angle AMC$ и $\angle BMC$ — прямые (вписанные углы, опираются на диаметры). Следовательно, точка M совпадает с основанием высоты треугольника, опущенной на сторону AB .

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Из всех треугольников с заданной стороной и заданным противолежащим углом найти треугольник с максимальной площадью.

Задача 2. Из всех треугольников с заданным основанием и заданной высотой, опущенной на нее, найти треугольник с минимальным периметром.

Задача 3. Из всех прямоугольных треугольников с заданной суммой катета и гипотенузы найти треугольник с максимальной площадью.

Задача 4. Из всех треугольников с заданным основанием и заданной высотой, опущенной на это основание, найти треугольник с наименьшим радиусом описанной около него окружности.

Задача 5. На шахматной доске построена окружность наибольшего радиуса, не пересекающая ни одной черной клетки. Найти радиус этой окружности.

Задача 6. Поселки A и B разделены двумя реками. Требуется построить мосты через эти реки так, чтобы дорога из A в B была наименьшей длины (рис. 3.14).



Рис. 3.14

Задача 7. Дана окружность с центром O . Радиус OA точками B и C поделен на три одинаковых отрезка. Точка M лежит на окружности. Найти наибольшее значение угла $\angle CMB$.

Задача 8. На окружности радиуса R даны точки A и B , расстояние между которыми l . Какое наибольшее и наименьшее значения может принимать сумма $AC^2 + BC^2$, если точка C лежит на той же окружности?

Задача 9. Какой наибольший объем может иметь тетраэдр с заданными длинами трех ребер, выходящих из одной вершины?

Задача 10. Среди всех прямоугольных параллелепипедов с заданной площадью поверхности найти тот, который имеет максимальный объем.

Задача 11. На стороне BC прямоугольника $ABCD$ взята точка M так, что $MC = MB$, на стороне CD взята точка N так, что $CN = 2 \cdot DN$. При каком отношении сторон прямоугольника угол MAN будет наибольшим?

Задача 12. На плоскости дана окружность с центром O и две точки A и B вне ее. Найти на окружности такую точку M , чтобы угол AMB был: а) наименьшим, б) наибольшим.

Задача 13. В треугольнике ABC длины сторон AC , BC и AB равны соответственно 4, 3, 5. Прямая, проведенная параллельно стороне AC , пересекает отрезки BC и AB в точках P и Q , а медиану CM — в точке E . Найти наименьшее значение суммы площадей треугольников CPE и EMQ .

3.2. Минимум энергии, сумма длин и "оптические" свойства экстремумов

Физика не только дает нам повод к решению проблем; она еще помогает нам найти к этому средство. Это происходит двояким путем. Во-первых, она дает нам предчувствие решения; во-вторых, подсказывает ход рассуждений.

А. Пуанкаре

Давайте присмотримся внимательней к задаче Герона Александрийского (задача 1 в самом начале главы 3). Она гораздо глубже,

чем кажется на первый взгляд. Для двух заданных лежащих по одну сторону от прямой l точек A и B мы нашли на l такую точку M , что сумма расстояний MA и MB минимальна.

Обратим теперь внимание на то обстоятельство, что углы, образуемые отрезками MA и MB с прямой l , получились равными. Это обстоятельство напоминает что-то, относящееся не к геометрии, а совсем "из другой оперы". Что же именно? Ну, конечно же, один из законов оптики — закон отражения от зеркала: *угол падения равен углу отражения*. "Ну и что здесь особенного? Ведь мы нашли точку M как раз с помощью зеркального отражения, — скажете вы. — Что из этого следует?" Смотрите сами: представим, что прямая l — это зеркало. Из точки A выходит световой луч, отражается от зеркала и попадает в точку B *по кратчайшему пути!* То есть если предположить, что световой луч всегда предпочитает двигаться по кратчайшему пути между точками A и B (с неизменным условием отразиться от зеркала), то как следствие этого предположения получается оптический закон отражения. Случайное совпадение? Вряд ли! Исследуем более общую ситуацию.

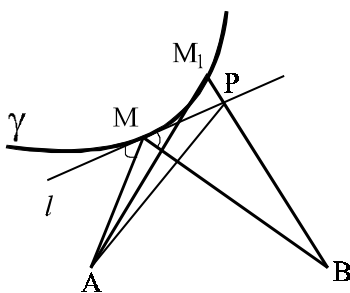


Рис. 3.15

Пусть точки A и B лежат по одну сторону от выпуклой кривой γ , которая обращена своей выпуклостью к этим точкам (рис. 3.15). Рассмотрим кривую γ как зеркало. Найдём на ней такую точку M , в которой выполняется закон отражения (отрезки AM и BM образуют одинаковые углы с касательной l , проведенной к кривой γ

в точке М). Проверим, минимальна ли для точки М сумма $AM + MB$. Пусть M_1 — любая другая точка кривой γ . Соединим M_1 с точками А и В. Отрезок M_1B пересечет прямую l в некоторой точке Р. Тогда из задачи Герона следует, что $PA + PB > AM + MB$. Кроме того, $M_1B + M_1A = M_1P + PB + M_1A > PA + PB$, поскольку $M_1P + M_1A > PA$. Отсюда следует $M_1A + M_1B > MA + MB$. Как видим, и в случае выпуклого зеркала свет предпочитает двигаться *по кратчайшему пути*.

Если уж речь зашла о законах оптики, то давайте вспомним еще закон преломления света на границе раздела двух сред: если α_1 и α_2 — значения угла между световым лучом и нормалью к поверхности раздела соответственно в первой и второй средах, то

$$\frac{\sin \alpha_1}{c_1} = \frac{\sin \alpha_2}{c_2}. \quad (1)$$

Здесь c_1 и c_2 — значения скорости света соответственно в первой и второй средах. Тут уже правило кратчайшего пути не выполняется. Кратчайший путь между точками А и В — это отрезок АВ, а не ломаная АМВ.

Однако жалко отказываться от такой привлекательной идеи! Может быть, наше предположение о загадочном свойстве светового луча выбирать себе среди всех возможных кратчайший путь *не вполне точное*? Может быть, световой луч выбирает в каком-то смысле "наилучший" путь, который *совпадает* с кратчайшим в случае отражения от зеркала? В чем общность и в чем принципиальная разница между отражением от зеркала и преломлением на границе раздела двух сред? В обоих случаях световой луч *меняет направление* своего движения — это *общность*. При отражении от зеркала луч возвращается в ту же область пространства, откуда исходит, а в случае преломления попадает в *другую среду* и далее распространяется с *другой* скоростью — это *отличие*. Возможно, свет выбирает из всех возможных путей тот, по которому можно пройти *за кратчайшее время*?

Исследуем эту гипотезу. Пусть точки А и В находятся по разные стороны от прямой l (рис. 3.16). На прямой l выберем точку М

так, что углы α_1 и α_2 , образуемые отрезками AM и MB с перпендикуляром к l , связаны соотношением (1). Будет ли время прохождения света по пути AMB наименьшим из всех возможных? Возьмем на прямой l другую точку M_1 и сравним величины времени прохождения света по линиям AMB и AM_1B . Опустим из точки M_1 перпендикуляры M_1K и M_1N на прямые AM и MB соответственно. Тогда $AM_1 > AK = AM + MK$, $M_1B > NB = MB - MN$. Углы MM_1K и MM_1N равны соответственно α_1 и α_2 (докажите это). В прямоугольном треугольнике MM_1K катет $MK = MM_1 \cdot \sin \alpha_1$. Аналогично, из прямоугольного треугольника MM_1N находим $MN = MM_1 \cdot \sin \alpha_2$. Время прохождения света по линии AM_1 будет

$$t_{AM_1} = \frac{AM_1}{c_1} > \frac{AM}{c_1} + \frac{MM_1 \cdot \sin \alpha_1}{c_1}.$$

Аналогично, время прохождения света по линии M_1B будет

$$t_{M_1B} = \frac{M_1B}{c_2} > \frac{MB}{c_2} - \frac{MM_1 \cdot \sin \alpha_2}{c_2}.$$

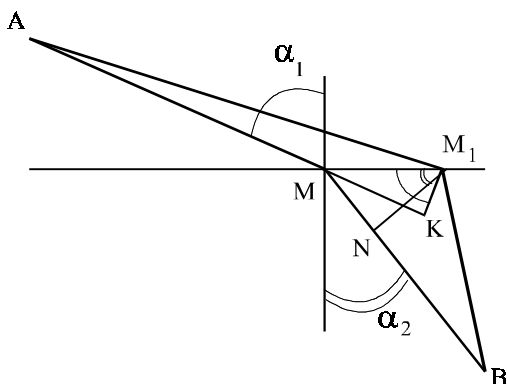


Рис. 3.16

Складывая эти два неравенства, получаем

$$t_{AM|B} = \frac{AM_1}{c_1} + \frac{M_1B}{c_2} > \frac{AM}{c_1} + \frac{MB}{c_2} = t_{AMB}.$$

Это поразительное свойство светового луча было отмечено еще в XVII веке выдающимся французским математиком П. Ферма. Таким образом, законы отражения и преломления света можно сформулировать в виде принципа Ферма: *среди всех возможных путей между двумя заданными точками свет распространяется по тому пути, который дает наименьшее время.** Впоследствии физики сумели сформулировать некоторые общие физические законы в виде "принципа экстремума".**

Оставим пока в стороне интригующий вопрос: *каким образом свет выбирает из всех возможных путей тот, по которому можно пройти за кратчайшее время (посылает кого-нибудь на разведку, что ли?)*. Пусть в этом вопросе о природе света досконально разберется физика, в конце концов, это ее прямая обязанность. Удовлетворимся тем, что законы оптики можно сформулировать в виде общего экстремального принципа. Просто отметим еще один факт, подтверждающий, что *математика — это язык, на котором с нами говорит природа*.

Задача Герона имеет еще интересную механическую интерпретацию. Представим, что прямая l — это длинная жесткая спица, по которой может скользить без трения надетое на нее маленькое колечко M . Проденем сквозь колечко длинную нерастяжимую нить и перебросим ее концы через маленькие гвоздики, вбитые в точках A и B . Подвесим на концах две одинаковых гирьки X и Y , как показано на рис. 3.17. Вся система будет находиться в равновесии. В этом случае, как мы знаем, потенциальная энергия системы гирек будет минимальна. При этом сумма расстояний

* В то время считалось, что свет распространяется мгновенно, и сам П. Ферма сформулировал свой принцип так: *свет распространяется по тому пути, для которого сопротивление среды наименьшее*.

** Например, следующего: *выпавший из рук молоток всегда падает в то место, где сможет причинить наибольшие повреждения*.

$XA + YB$ будет максимальна, и поскольку нить нерастяжима, то сумма расстояний $AM + MB$ будет минимальна.

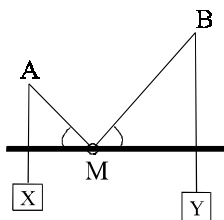


Рис. 3.17

Кольцо M неподвижно, поэтому векторная сумма всех сил, действующих на кольцо, равна нулю. В балансе сил в направлении, перпендикулярном спице, участвует сила нормальной реакции со стороны спицы. А вдоль спицы вклад в баланс сил дают только силы натяжения нити. Поскольку силы натяжения нити, действующие на колечко с разных сторон, одинаковы по величине и проекции этих сил на направление спицы равны, то *углы, образуемые отрезками нити AM и BM со спицей, тоже равны!* Мы опять пришли к прежнему результату, но другим путем.

Попробуем применить этот забавный подход в других задачах. В задаче 5 предыдущего раздела надо было найти, где построить мост через реку, чтобы дорога из A в B была кратчайшей. Переиначим эту задачу на механический лад.

Пусть река — это две параллельных направляющих спицы, по которым может без трения и перекося скользить надетая на них планка MN . Привяжем к концам планки две нити, перебросим их через маленькие гвоздики, вбитые в точках A и B , и подвесим на концах две одинаковые гирьки X и Y (рис. 3.18). Опять же, в равновесии планка будет неподвижна, натяжение обеих нитей одинаково, и проекции сил натяжения на направление спиц будут равны. Следовательно, углы, образуемые нитями AM и BN со спицами, тоже одинаковы. Дальше уже совсем нетрудно догадаться, как найти такое положение планки.

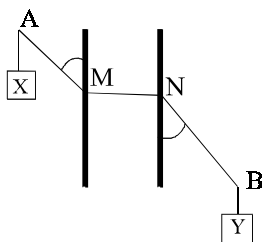


Рис. 3.18

Упражнение

Решите таким же методом задачу 6 о железнодорожной платформе из предыдущего параграфа.

Попробуем подобрать механическую аналогию для задачи о преломлении светового луча на границе раздела двух сред. Теперь точки A и B находятся по разные стороны от направляющей спицы, по которой может скользить без трения маленькое кольцо. Если мы опять привяжем к кольцу две нити и, перебросив концы нитей через гвоздики A и B, подвесим на нитях одинаковые гирьки, то у нас ничего хорошего не выйдет, поскольку нити в равновесии образуют со спицей одинаковые углы. В чем причина неудачи? Очевидно, в том, что мы не отразили в нашей конструкции *различие* двух сред. Как это исправить? Очевидно, придется взять *различные* гирьки.

Итак, подвесим на нитях гирьки разной массы m_1 и m_2 . Теперь натяжения нитей будут тоже различны и пропорциональны величинам m_1 и m_2 . Проекции сил натяжения обеих нитей на спицу должны быть равными, поэтому они связаны с углами α_1 и α_2 соотношением $m_1 \cdot \sin \alpha_1 = m_2 \cdot \sin \alpha_2$. Осталось догадаться, какими должны быть массы m_1 и m_2 , чтобы полученное соотношение описывало закон преломления.

Рассмотрим еще одну важную во многих отношениях задачу, в которой физика также может подсказать ход рассуждений.

Задача 1. Три деревни (точки А, В, С) надо соединить сетью дорог так, чтобы из любой деревни можно было попасть в любую другую и суммарная длина всех дорог была бы минимальной.

Наводящие соображения. Может быть, надо просто соединить точки А, В, С двумя отрезками с одним общим концом (например, АВ и АС) и этого будет достаточно? Очевидно, что наибольшая сторона треугольника АВС не должна быть среди этих отрезков. Проверим эту гипотезу "на прочность".

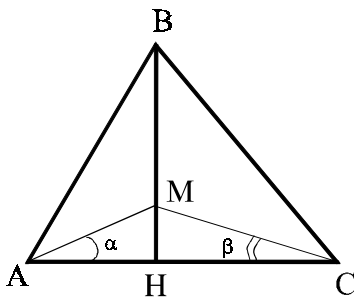


Рис. 3.19

Пусть наибольший угол А в треугольнике АВС — острый. Опустим из вершины В высоту ВН (рис. 3.19). Тогда высота ВН лежит внутри треугольника АВС. Если взять точку Н в качестве развилки, в которой соединяются дороги из точек А, В и С, то суммарная длина всех дорог будет $ВН + АС < АС + АВ$. Таким образом, гипотеза не оправдалась, по крайней мере, для остроугольного треугольника АВС. Можно ли еще уменьшить длину дорожной сети? Возьмем на отрезке ВН точку М. Пусть $АН = y$, $СН = z$, $\angle МАН = \alpha$, $\angle МСН = \beta$. Тогда для развилки в точке М длина дорожной сети будет

$$S_M = \frac{y}{\cos \alpha} + \frac{z}{\cos \beta} + ВН - МН.$$

Поскольку $МН = y \cdot \operatorname{tg} \alpha = z \cdot \operatorname{tg} \beta$, получаем

$$S_M = \frac{y}{\cos \alpha} + \frac{z}{\cos \beta} + ВН - \frac{1}{2}(y \cdot \operatorname{tg} \alpha + z \cdot \operatorname{tg} \beta).$$

Сравним ее с длиной $S_H = y + z + BH$. Вычислим разность

$$\begin{aligned} S_M - S_H &= y \cdot \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right) + z \cdot \left(\frac{1}{\cos \beta} - 1 \right) - \frac{1}{2} (y \cdot \operatorname{tg} \alpha + z \cdot \operatorname{tg} \beta) = \\ &= y \cdot \frac{1}{\cos \alpha} (1 - \cos \alpha - 0,5 \cdot \operatorname{tg} \alpha) + z \cdot \frac{1}{\cos \beta} (1 - \cos \beta - 0,5 \cdot \operatorname{tg} \beta). \end{aligned}$$

Преобразуем выражения в скобках следующим образом:

$$\begin{aligned} (1 - \cos \alpha - 0,5 \cdot \operatorname{tg} \alpha) &= \sin(\alpha/2) \cdot \left(2 \sin(\alpha/2) - \frac{\cos(\alpha/2)}{\cos \alpha} \right), \\ (1 - \cos \beta - 0,5 \cdot \operatorname{tg} \beta) &= \sin(\beta/2) \cdot \left(2 \sin(\beta/2) - \frac{\cos(\beta/2)}{\cos \beta} \right). \end{aligned}$$

Видно, что если выбрать углы α и β достаточно малыми (точку М близко к точке Н), то выражения в скобках будут отрицательными, т. е. $S_M < S_H$. Итак, можно еще уменьшить длину дорожной сети. Следовательно, для остроугольного треугольника АВС нужно найти внутри такую точку М (развилку), для которой сумма $MA + MB + MC$ была бы минимальной. Приступим к поиску!

Решение 1 (механическое). Расстелим на столе план местности, отметим на нем нужные точки А, В, С и затем просверлим в столешнице в этих местах маленькие отверстия. Возьмем три нити, свяжем их концы в один узелок и, продев свободные концы нитей в отверстия, подвесим на них три одинаковые гирьки X, Y, Z (рис. 3.20). Гирьки опустятся, нити натянутся, и... узелок окажется в искомой точке М!

Действительно, в равновесии потенциальная энергия гирек минимальна, поэтому сумма длин АХ, ВУ и СZ максимальна. Следовательно, сумма $MA + MB + MC$ минимальна. Поскольку узелок находится в равновесии, то векторная сумма всех трех сил натяжения нитей, действующих на узелок, равна нулю. Но силы натяжения нитей одинаковы по величине, поэтому углы между нитями должны быть тоже одинаковыми, то есть равными 120° (докажите это). Итак, искомая точка такова, что стороны треугольника АВС видны из нее под углом 120° .

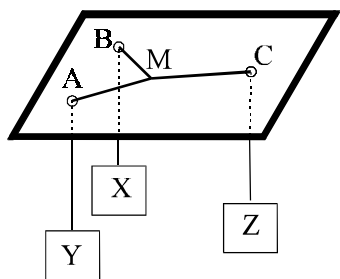


Рис. 3.20

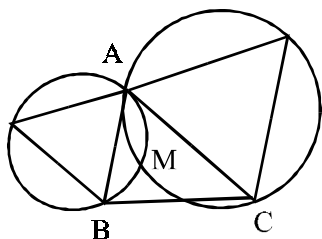


Рис. 3.21

Как построить эту точку циркулем и линейкой? Это несложно! Нужно построить на сторонах AB и AC правильные треугольники так, чтобы они были вне треугольника ABC . Затем описать около обоих правильных треугольников окружности (рис. 3.21). Эти окружности помимо точки A будут пересекаться еще в одной точке M . Если построенная таким образом точка M лежит внутри треугольника ABC (она называется точкой Торичелли), то она и будет искомой (докажите это). А если точка M окажется вне треугольника ABC ? Какова в этом случае будет кратчайшая сеть дорог? Может ли наш узелок, в котором связаны нити, проскочить в одно из отверстий? Решите эти вопросы самостоятельно.

Решение 2 (оптическое). Эта задача кажется родственной задаче Герона. Попробуем установить более тесную связь между двумя задачами. Представим, что расстояние от вершины C до развилки M нам известно. Тогда точка M лежит где-то на окружности заданного радиуса с центром C (рис. 3.22).

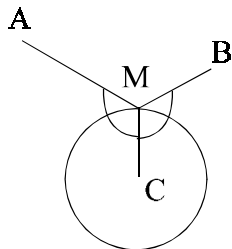


Рис. 3.22

больший угол A меньше 120° , M — любая точка внутри треугольника. Повернем треугольник ABM вокруг вершины A на угол 60° . Пусть B_1 , M_1 — образы точек B и M (рис. 3.23). Тогда длина ломаной B_1M_1MC будет равна сумме $MA + MB + MC$ (докажите это). Очевидно, что длина ломаной будет минимальной, когда она совпадает с отрезком B_1C . В этом случае все три отрезка B_1M_1 , M_1M , MC лежат на одной прямой и углы AMC и AM_1B_1 равны 120° . Значит, из точки M все стороны треугольника ABC видны под углом 120° .

Итак, мы построили кратчайшую транспортную сеть, соединяющую три деревни. Можно ли использовать полученные результаты для построения сети в случае $n > 3$ деревень? Сформулируем возникающую перед нами задачу.

Даны $n > 3$ точек на плоскости. Требуется соединить их сетью отрезков, имеющих наименьшую общую длину.

Сетью мы называем набор из конечного числа таких отрезков, что любые две исходные точки (деревни) являются концами ломаной из отрезков этого набора. Все остальные концы отрезков сети мы назовем развилками. Используя результаты, полученные при $n = 3$, докажите следующие свойства минимальных сетей:

Свойство 1. Из любой развилки выходят ровно три отрезка, причем угол между любыми двумя из них равен 120° .

Свойство 2. Из любой деревни выходит один, два или три отрезка. Если из деревни выходят два отрезка, то угол между ними не менее 120° , если же выходят три отрезка, то углы между ними равны 120° .

Свойство 3. Никакие отрезки сети не образуют замкнутую ломаную.

В общем виде задача о транспортной сети не решена. Можно заметить, что сети бывают двух типов:

- состоящие только из отрезков, соединяющих деревни (такая сеть называется остовной);
- сети, содержащие развилки (их называют сетями Штейнера). Среди всех остовных сетей (их конечное число) минимальную

можно найти перебором. Но никаких общих методов поиска минимальных сетей Штейнера пока нет. Отдельные частные случаи решения общей задачи получены только при $n \leq 5$.

Упражнение

Постройте минимальную сеть для четырех деревень в вершинах квадрата.

Указание

Выясните сначала, сколько развилок должна содержать такая сеть.

Задача 2. На ободе колеса радиусом R отмечены точки A , B и C так, что дуги AB и BC равны α (рис. 3.24). Колесо катится по ровной дороге. Найти наименьшее и наибольшее значения суммы расстояний от точек A , B и C до дороги.

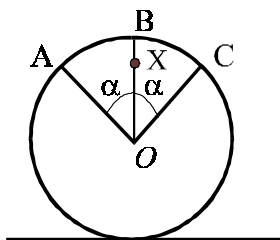


Рис. 3.24

Решение. Поместим в точки A , B и C одинаковые точечные массы m . Тогда сумма расстояний от точек A , B и C до дороги пропорциональна потенциальной энергии системы масс (если принять дорогу за нулевой уровень энергии). Тут явно к месту будет вспомнить о центре масс. Найдем его высшее и низшее положения — и задача будет решена. Пусть O — центр круга. Тогда центр масс нашей системы (точка X) будет лежать на отрезке OB . Расстояние от X до центра круга равно

$$OX = \frac{m \cdot (R + R \cos \alpha + R \cos \alpha)}{3m} = \frac{R \cdot (1 + 2 \cos \alpha)}{3}.$$

Очевидно, что наивысшее положение точки X относительно дороги будет $x_{\max} = R + R \cdot (1 + 2 \cos \alpha) / 3$, а низшее — $x_{\min} = R - R \cdot (1 + 2 \cos \alpha) / 3$. Таким образом, наибольшее и наименьшее значения искомой суммы расстояний будут соответственно $x_{\max} = R \cdot (4 + 2 \cos \alpha) / 3$ и $x_{\min} = 2R \cdot (1 - \cos \alpha) / 3$.

Замечание

В случае $\alpha = 120^\circ$ максимум и минимум совпадают (сумма расстояний от точек A , B и C до дороги не меняется при вращении колеса). Каков будет ответ, если $\alpha > 120^\circ$?

Задача 3. На сторонах заданного остроугольного треугольника ABC найти три точки M , N , P так, чтобы периметр треугольника MNP был минимальным.

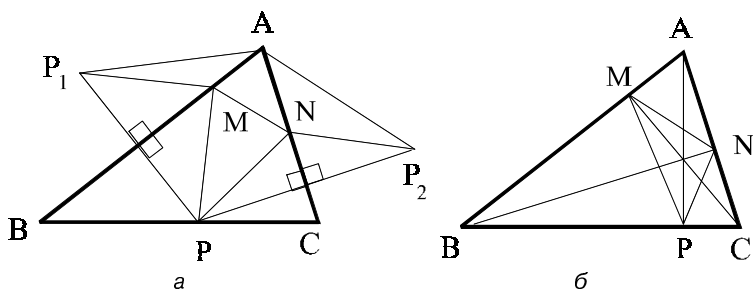


Рис. 3.25

Решение. Предположим, что положение одной из точек (например, точки P на стороне BC) нам уже известно. Тогда задача сводится к поиску таких точек M и N на сторонах AC и AB заданного угла A , чтобы периметр треугольника MNP был минимальным (см. упражнение к задаче 1 в разд. 3.1). Пусть P_1 и P_2 — зеркальные отражения точки P относительно прямых AB и AC (рис. 3.25, а). Тогда длина ломаной P_1MNP_2 равна периметру треугольника MNP . Очевидно, эта длина будет минимальной, если ломаная совпадает с отрезком P_1P_2 . При этом искомые точки M и N — это точки пересечения прямой P_1P_2 со сторонами AB и AC заданного треугольника. Осталось выяснить, как надо выбрать точку P , чтобы

длина отрезка P_1P_2 была минимальной. Соединим точки P_1 и P_2 с вершиной A и заметим, что треугольник P_1AP_2 равнобедренный (длина его боковых сторон равна длине отрезка AP). В равнобедренном треугольнике P_1AP_2 угол P_1AP_2 вдвое больше угла BAC . Основание $P_1P_2 = 2 \cdot AP \cdot \cos \angle BAC$ будет минимальным, когда длина AP будет наименьшей. Следовательно, AP — высота треугольника ABC . Эти рассуждения также применимы и для точек M и N , поэтому точки M , N , P — это основания высот треугольника ABC (рис. 3.25, б).

Замечание

Из задачи Герона следует, что любые две стороны треугольника MNP (он называется ортоцентрическим) образуют одинаковые углы с соответствующей стороной треугольника ABC . Представьте бильярдный стол в виде треугольника ABC . Если пустить идеальный бильярдный шар (без трения) по какой-нибудь стороне треугольника MNP , то шар станет отражаться от стенок стола по закону зеркального отражения и будет двигаться периодически по периметру треугольника MNP . Исследуйте, существуют ли другие замкнутые периодические траектории шара в таком треугольном бильярде.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Найти такую точку M , чтобы сумма расстояний от нее до вершин заданного выпуклого четырехугольника была наименьшей.

Задача 2. Внутри острого угла заданы две точки A и B . Найти на сторонах угла такие точки C и D , чтобы периметр четырехугольника $ABCD$ был минимальным.

Задача 3. В прямоугольнике $ABCD$ сторона AB равна a , сторона BC равна b . Точка M лежит на стороне CD . Найдите наибольшее и наименьшее значения $AM + MB$.

Задача 4. В каком направлении надо провести через город A железную дорогу (прямую), чтобы сумма расстояний до нее от двух поселков A и B была наименьшей?

Задача 5. Как надо проложить железную дорогу (прямую), чтобы сумма расстояний до нее от трех поселков А, В, С была наименьшей?

Задача 6. Дана точка А, лежащая внутри заданного угла с вершиной О. Через точку А провести прямую, пересекающую стороны угла в точках В и С так, чтобы сумма длин $ОВ + ОС$ была минимальной.

Задача 7. Через точку, лежащую внутри данного угла с вершиной О провести прямую, пересекающую стороны угла в точках В и С так, чтобы периметр треугольника ОВС был минимальным.

Задача 8. На ободе колеса радиусом 1 отмечены $(n + 1)$ точек A_0, A_1, A_2, A_n так, что n дуг $A_k A_{k+1}$ ($k = 0, 1, 2 \dots n-1$) равны α градусов ($\alpha \leq 360^\circ/n$). Колесо катится по ровной дороге. Найдите наименьшее и наибольшее значения суммы расстояний от точек A_0, A_1, A_2, A_n до дороги.

Задача 9. Дана окружность с центром О и точка А вне ее. На окружности выбраны точки М и N так, что угол MON равен α . Найдите наибольшее и наименьшее значения $AM + AN$.

Задача 10. Пешеход направляется из поселка А в поселок В. Дороги между поселками нет, расстояние между ними по прямой 8 км. Неподалеку проходит дорога (прямая) так, что оба поселка находятся от нее по одну сторону на одинаковом расстоянии 2 км. Скорость пешехода по бездорожью 3 км/ч, по дороге 6 км/ч. За какое наименьшее время он может пешком добраться из А в В?

Задача 11. Гонец на коне послан с письмом из поселка А в поселок В. Дороги между поселками нет, но неподалеку проходит дорога (прямая) так, что оба поселка находятся по разные стороны от нее на расстояниях соответственно 4 км и 8 км. Расстояние между поселками по прямой 20 км. Скорость коня по бездорожью 8 км/ч, а по дороге конь может скакать со скоростью 16 км/ч. За какое наименьшее время гонец сможет доставить письмо из А в В?

Задача 12. Даны две концентрические окружности с центром O . Через точку A , лежащую внутри меньшей из них, проведите луч так, чтобы его отрезок, заключенный между окружностями, был: а) наименьшим, б) наибольшим.

Задача 13. На плоскости задан угол с вершиной O и внутри него задана точка M . Найдите на сторонах угла точки B и C такие, что отрезки OB и OC равны, и сумма $MB + MC$ имеет наименьшее значение.

Задача 14. В треугольнике ABC все углы различны. На описанной около треугольника ABC окружности найдите такую точку M , чтобы сумма расстояний от нее до вершин треугольника была наименьшей.

3.3. Задача Дидоны и родственные ей задачи

Столько купили земли и дали ей имя Бирса,
Сколько смогли окружить бычьей шкурой.

Вергилий, "Энеида"

Дидона — древняя финикийская царевна, дочь тирского царя, бежала из дома и поплыла на корабле на запад вдоль африканского побережья Средиземного моря. Высадившись на берегу нынешнего Тунисского залива, она захотела заложить в этом месте город и вступила в переговоры с туземцами. Местный вождь согласился продать ей такой участок земли, который она сможет охватить бычьей шкурой. Тогда Дидона разрежала шкуру на узкие полоски, связала их воедино и окружила получившейся петлей приличную территорию, на которой основала крепость — будущий город Карфаген.

По-видимому, это первое известное нам практическое решение геометрической задачи поиска экстремума. История не сохранила точных сведений, какой формы был участок, охваченный бычьей шкурой. Ну что же, представьте себя в роли древней финикийской царевны и решите вопрос: *какая из всех замкнутых плоских*

кривых заданной длины охватывает максимальную площадь? (За неимением бычьей шкуры вы можете поэкспериментировать с обыкновенной ниткой.)

Наверное, интуиция довольно быстро подскажет вам, что это окружность. Мы знаем, что из всевозможных геометрических фигур круг обладает массой различных достоинств (вспомните, какую роль в технике играет колесо!), и охотно соглашаемся приписать окружности такое экстремальное свойство. Однако одно дело верить, другое дело доказать. Сейчас невозможно установить, когда впервые была высказана гипотеза о наибольшей вместимости круга. Во всяком случае, Аристотель (IV век до н. э.) пользуется этим фактом как известным. Основные пути решения задачи Дидоны или, как ее называют по-другому, *классической изопериметрической задачи* были намечены еще во времена античности. Строгое доказательное оформление этих идей было сделано математиками гораздо позже. Мы приведем схему изящного доказательства Я. Штейнера. Основная идея этого доказательства очень проста и нам уже знакома: *то, что можно улучшить, не может быть наилучшим.*

Теорема. Из всех изопериметрических замкнутых плоских кривых окружность является экстремальной (охватывающей максимальную площадь).

Лемма 1. Экстремальная кривая выпукла*.

Доказательство. Если кривая не выпукла, то на ней найдутся две точки A и A_1 такие, что обе дуги ABA_1 и AB_1A_1 , соединяющие точки A и A_1 , лежат по одну сторону от прямой AA_1 (рис. 3.26). Заменив одну из дуг ее зеркальным отражением относительно прямой AA_1 , мы получим кривую той же длины, но большей площади.

* Выпуклой называют кривую, обладающую следующим свойством: если обе точки A и B принадлежат области, охваченной кривой, то весь отрезок AB принадлежит этой области. Заметим, что понятие выпуклости играет в математике большую роль. Например, выпуклыми могут быть не только кривые линии, но и фигуры, функции и даже множества.

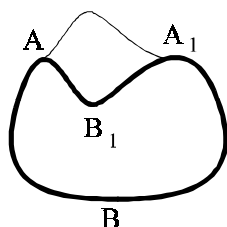


Рис. 3.26

Лемма 2. Если точки A и B делят длину экстремальной кривой пополам, то хорда AB делит площадь фигуры пополам.

Доказательство. Если хорда AB делит площадь на две неравные части, то большую часть можно зеркально отразить относительно прямой AB и, взяв большую часть вместе с ее зеркальным отражением, получить новую фигуру с тем же периметром, но большей площади.

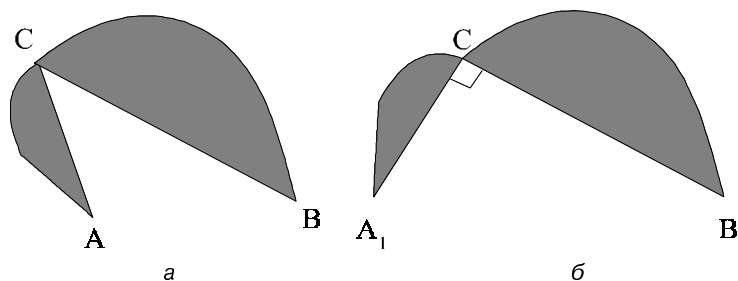


Рис. 3.27

Лемма 3. Пусть точки A и B делят длину экстремальной кривой пополам, и точка C любая точка кривой. Тогда угол ACB — прямой.

Это центральное место доказательства. Прием, применяемый далее, носит название шарнирного метода Я. Штейнера.

Доказательство. Допустим, что угол ACB не является прямым (рис. 3.27, а). Площадь, ограниченная дугой ACB и хордой AB , разбита на три части: треугольник ACB и два сегмента, прилежащие к хордам AC и CB . Представим, что сегменты жесткие

(вырезаны из картона), а в точке C находится шарнир, соединяющий два сегмента. Повернем хорду CA вместе с прилегающим к ней сегментом вокруг шарнира так, чтобы угол между хордами стал прямым. Точка A перейдет в новое положение A_1 , при этом длина дуги ABC и площади сегментов не изменятся (рис. 3.27, б). Площадь треугольника BCA_1 больше, чем треугольника BCA , т. к. из всех треугольников с заданными длинами двух сторон максимальную площадь имеет прямоугольный треугольник. Теперь отразим полученную фигуру относительно A_1B . В результате получаем фигуру с тем же периметром, но большей площади. Лемма доказана.

Мы пришли к следующему: экстремальная кривая — это множество точек C , из которых хорда AB , делящая длину экстремальной кривой пополам, видна под углом 90° , т. е. эта кривая — окружность. Разве не восхитительно? И хотя тут есть нюансы (изначально предполагается, что экстремальная кривая *существует*), все равно восхитительно! Из доказанной теоремы Я. Штейнер вывел ряд поразительных следствий. Приведем два из них.

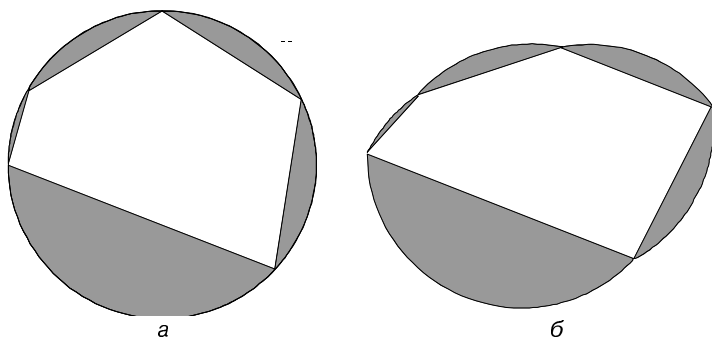


Рис. 3.28

Следствие 1. Впишем в окружность многоугольник. Сегменты круга, отсекаемые сторонами многоугольника, будем считать жесткими. Представим, что эти сегменты соединены в вершинах многоугольника шарнирами (рис. 3.28, а). Деформируем всю

конструкцию, изменив угол между какими-либо двумя соседними сторонами многоугольника (при этом остальные углы в шарнирных вершинах многоугольника тоже изменятся). В результате получится новая кривая, состоящая из дуг окружности и имеющая ту же длину, что и окружность (рис. 3.28, б). Согласно изопериметрической теореме площадь, ограниченная новой кривой, меньше площади круга. Но площади жестких сегментов не изменились, значит, площадь уменьшилась только за счет многоугольника. Следовательно, *из всех многоугольников с заданными длинами и порядком следования сторон наибольшую площадь имеет тот, который можно вписать в окружность.*

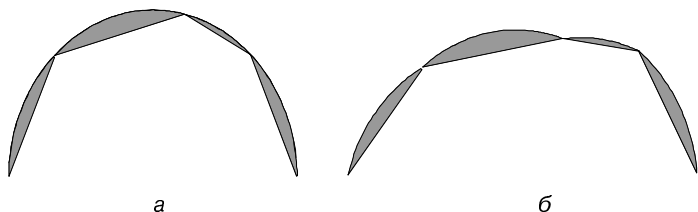


Рис. 3.29

Следствие 2. Впишем в данный полукруг ломаную линию так, что концы ее лежат на диаметре (рис. 3.29, а). Опять же, будем считать, что звенья ломаной соединены шарнирами, а сегменты круга, отсекаемые этими звеньями, жесткие.

Переместим концы ломаной вдоль прямой, на которой лежит диаметр (эту прямую мы считаем заданной). Так мы получим новую кривую, состоящую из дуг полуокружности той же длины, что и полуокружность (рис. 3.29, б). Согласно изопериметрической теореме площадь, ограниченная новой кривой и заданной бесконечной прямой, меньше площади полукруга. Но сегменты круга жесткие, и поэтому площадь уменьшилась за счет деформированного многоугольника. Отсюда теорема: *даны по длине и порядку следования стороны многоугольника, за исключением одной стороны. Площадь многоугольника будет наибольшей в том случае, если многоугольник вписан в круг, диаметром которого является первоначально не заданная сторона.*

Задача для исследования

Какой из многоугольников заданного периметра имеет наибольшую площадь? В разделе 2.1 мы уже выяснили, что из всех треугольников с заданным периметром максимальную площадь имеет правильный. Верно ли это утверждение для любого n -угольника при $n > 3$?

Вариации задачи Дидоны

Вариация 1. Если Дидона купила участок не в глубине континента, а на берегу (так сказать, с видом на море), то задача несколько меняется: береговая линия служит частью границы. Решим задачу, считая, что береговая линия прямая. Требуется сделать максимальной площадь, ограниченную бесконечной прямой l и кривой γ заданной длины.

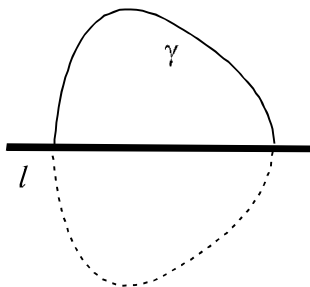


Рис. 3.30

Решение. Рассмотрим берег моря как зеркало (рис. 3.30). Тогда кривая γ вместе со своим зеркальным отражением представляет собой замкнутую кривую удвоенной длины. Площадь, ограниченная этой замкнутой кривой, также вдвое больше площади, максимум которой нам надо найти. Эта площадь максимальна, когда замкнутая кривая — окружность. Следовательно, участок Дидоны должен быть полукругом с центром на берегу моря.

Вариация 2. Не исключено, что местный вождь уступил царевне неудобную часть побережья в районе мыса. Решим задачу в такой постановке: дан угол меньше 180° (бесконечная часть плос-

кости между двумя лучами, проведенными из точки O). Найти линию заданной длины, отсекающую от угла наибольшую площадь.

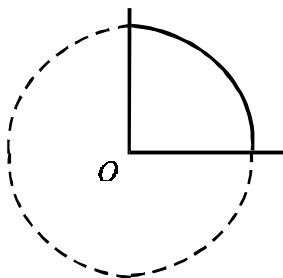


Рис. 3.31

Решение. Рассмотрим сначала частный случай, когда угол прямой. Применив два зеркальных отражения относительно сторон угла (рис. 3.31), мы опять приходим к замкнутой кривой, которая должна быть окружностью. Для каких еще значений угла мы можем использовать такой прием? Очевидно, для всех углов, равных $180^\circ/n$ (n — натуральное). Во всех этих частных случаях решение будет одно: кривая должна быть дугой окружности с центром в вершине угла. Было бы довольно странно, если бы при других значениях угла решение было иным. Гипотеза о том, что при любых значениях угла искомая кривая — дуга окружности, выглядит довольно правдоподобно. Займемся доказательством этой гипотезы. Будем при этом предполагать, что для любого угла меньше 180° существует кривая γ (экстремальная), которая отсекает от угла площадь больше, чем любая другая линия той же длины.

Лемма 1. Экстремальная кривая γ симметрична относительно биссектрисы угла.

Доказательство. Сделаем зеркальное отражение кривой γ относительно биссектрисы угла. Получим кривую $\tilde{\gamma}$, той же длины, что кривая γ , и отсекающую от угла такую же площадь. С другой стороны, поскольку кривая γ — экстремальная, то она отсекает

площадь большую, чем кривая $\tilde{\gamma}$. Получаем противоречие, следовательно, кривые γ и $\tilde{\gamma}$ совпадают.

Следствие. Концы экстремальной кривой равноудалены от вершины угла.

Лемма 2. Пусть A и B — концы экстремальной кривой, лежащие на разных сторонах угла O . Тогда все точки C экстремальной кривой имеют одинаковое значение угла ACB .

Доказательство. Пусть C — любая точка экстремальной кривой γ . Соединим ее с точками A и B . Площадь, отсекаемая кривой γ от угла, состоит из четырехугольника $OACB$ и сегментов, прилегающих к хордам CA и CB . Представим, что сегменты жесткие, а в точке C хорды соединены шарниром. Будем двигать точки A и B вдоль сторон угла (рис. 3.32), сохраняя равенство отрезков OA и OB (при этом точка C будет смещаться и угол ACB будет меняться).

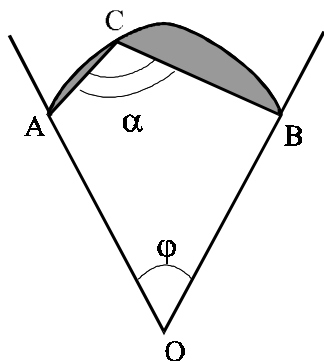


Рис. 3.32

Площадь, отсекаемая кривой γ от угла, будет изменяться только за счет площади четырехугольника $OACB$. Обозначим $OA = OB = l$, $CA = a$, $CB = b$, $\angle AOB = \varphi$, $\angle ACB = \alpha$. Площадь S четырехугольника $OACB$, составленного из треугольников ACB и OAB , равна $(l^2 \sin \varphi + ab \sin \alpha)/2$. Выражая квадрат длины отрезка AB из треугольников ACB и OAB по теореме косинусов, получим

$a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha = 4l^2 \sin^2(\varphi/2)$. Отсюда площадь S можно выразить как функцию угла α :

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}{4 \sin^2(\varphi/2)} \right) \sin \varphi + \frac{1}{2} ab \sin \alpha.$$

Преобразуем это выражение следующим образом:

$$\begin{aligned} S &= \frac{(a^2 + b^2) \sin(\varphi/2) \cos(\varphi/2) - 2ab \cos \alpha \sin(\varphi/2) \cos(\varphi/2)}{4 \sin^2(\varphi/2)} + \\ &+ \frac{1}{2} ab \sin \alpha = \frac{a^2 + b^2}{4 \operatorname{tg}(\varphi/2)} - \frac{ab(\cos \alpha \cos(\varphi/2) - \sin \alpha \sin(\varphi/2))}{2 \sin(\varphi/2)} = \\ &= \frac{a^2 + b^2}{4 \operatorname{tg}(\varphi/2)} - \frac{ab \cos(\alpha + \varphi/2)}{2 \sin(\varphi/2)}. \end{aligned}$$

Максимум площади достигается при $\cos(\alpha + \varphi/2) = -1$, т. е. при $\alpha = \pi - \varphi/2$. Таким образом, если для любой точки C угол ACB не равен $\pi - \varphi/2$, то можно было бы, изменив значения угла ACB , увеличить площадь четырехугольника $OACB$ и тем самым увеличить площадь, отсекаемую экстремальной кривой.

Замечание

При изменении положения хорд AC и BC может произойти следующая неприятность: некоторые части сегментов могут оказаться за границами мыса (рис. 3.33). В этом случае выступающую за пределы мыса часть сегмента σ параллельным переносом сместим вдоль стороны угла дальше от вершины и зеркально отразим ее относительно стороны угла так, чтобы отраженный участок σ' не накладывался на другие участки. При этом кривая γ окажется разорванной на отдельные куски, и охватываемая ею область — составленной из отдельных участков (такую область называют многосвязной). Однако общая длина всех кусков и общая площадь всех участков не изменятся.

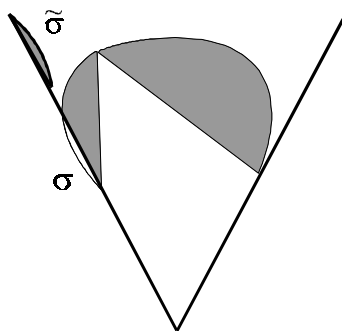


Рис. 3.33

Подводя итог, осталось заметить, что кривая, из всех точек которой отрезок AB виден под одинаковым углом, — это дуга окружности.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. В трапеции длины диагоналей равны 5 и 6. Какую наибольшую площадь может иметь эта трапеция?

Задача 2. Какая из двух фигур имеет большую площадь: круг, вписанный в квадрат с единичной площадью, или квадрат, вписанный в круг с единичной площадью? Какая из этих двух фигур имеет больший периметр?

Задача 3. Найдите наименьший радиус круга, в котором можно разместить треугольник со сторонами длиной 4, 5 и 7.

Задача 4. Докажите, что из всех многоугольников заданного периметра наибольшую площадь имеет правильный.

Задача 5. Впишите в полукруг прямоугольник $ABCD$ наибольшей площади так, чтобы вершины A и D лежали на диаметре, а вершины B и C — на полуокружности.

Задача 6. На сторонах заданного угла находятся концы отрезка AB . Найдите наибольшую площадь треугольника, отсекаемого отрезком AB от угла, если длина отрезка AB равна l .

Задача 7. Отрезок $AC = a$ и отрезок $BC = b$ соединены шарниром в точке C . Точки A и B находятся на сторонах прямого угла с вершиной O . Найдите наибольшее значение площади четырехугольника $OACB$. Как изменится решение, если угол, на сторонах которого находятся точки A и B , будет отличен от прямого?

Задача 8. Концы нерастяжимой нити привязаны к концам палочки. Какую форму должна иметь нить, чтобы площадь, охваченная получившейся петлей, была максимальна?

Задача 9. Дан правильный треугольник со стороной, равной единице. Какую наименьшую длину имеет линия, которая делит его на две равновеликие части?

Задача 10. Два ромба $ABCD$ и $CKNM$ со сторонами единичной длины каждый расположены так, что их диагонали AC и CN находятся на одной прямой (точка C на отрезке AN). Вершины A и N фиксированы ($AN = 1 + \sqrt{3}$), а точка C может двигаться по прямой AN . Найдите максимальное и минимальное значения суммы площадей этих ромбов.

Задача 11. Найти длины сторон параллелограмма $ABCD$ наибольшей площади, если известно, что его вершина A удалена от середины сторон BC и CD соответственно на 6 и 8.

Задача 12. Дан угол с вершиной O . Требуется найти внутри угла точку A и на сторонах угла точки B и C так, чтобы отрезки AB и AC были длиной 1, и площадь четырехугольника $OBAC$ была максимальной.

Задача 13. В треугольнике ABC $\angle ABC = 120^\circ$, $AB = BC = 1$. Найдите максимальную площадь такого прямоугольника $AMNK$, чтобы вершины треугольника B и C лежали на сторонах прямоугольника.

Глава 4



Где быть экстремуму — диктует параметр

4.1. Исследуем все возможности

Неужели не хочется вам,
Натыкаясь на скалы и мели,
Тем не менее, плыть по волнам?
В бурном море людей и событий,
Не щадя живота своего,
Совершите вы массу открытий,
Иногда не желая того!

Из х/ф "Двенадцать стульев"

Когда в условии задачи присутствует параметр, ее решение — более трудная проблема по сравнению с решением задачи, в которой указаны конкретные числовые данные. Решить задачу с параметром — это значит, во-первых, определить, для каких значений параметра решение существует и сколько решений существует; во-вторых, найти целое семейство решений при всех возможных значениях параметра. На этой дороге вам может встретиться немало трудностей. Например, нужно будет выяснить, не происходит ли при каких-нибудь "критических" значениях параметра качественное изменение решения или появление новых вариантов решения. Короче говоря, параметр, как и Восток, — дело тонкое!

Особенно каверзными в этом отношении могут быть геометрические задачи. Рассмотрим, например, справедливость такого утверждения: *на плоскости даны три окружности так, что любые две из них касаются внешним образом. Тогда существует ровно одна окружность, касающаяся трех данных внешним образом.*

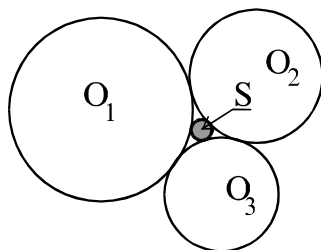


Рис. 4.1

Рисунок 4.1, казалось бы, подтверждает правоту этого утверждения. Три окружности O_1 , O_2 и O_3 касаются друг друга и маленькая окружность S , "зажатая" между ними, касается всех трех. Очевидно, что в криволинейный треугольник с вершинами в точках касания окружностей O_1 , O_2 и O_3 можно вписать только одну окружность S . Тем не менее, утверждение *неверное*!

Посмотрим на этот рисунок с другой точки зрения. Будем считать три окружности O_1 , O_2 и S данными. Окружность O_3 касается этих трех данных, но иным образом. Она не "зажата" между ними. Если приглядеться, то можно заметить, что в криволинейный треугольник, с вершинами в точках касания окружностей O_1 , O_2 и S можно вписать маленькую окружность γ . Таким образом, две окружности O_3 и γ могут касаться внешним образом *трех данных окружностей* O_1 , O_2 и S . Здесь параметр сыграл с нами злую шутку. На рис. 4.1 радиусы окружностей O_1 , O_2 и O_3 различаются не очень сильно. Если бы два радиуса были примерно одинаковыми, а третий был, скажем, в 5 раз меньше, то неправота утверждения была бы заметна.

Рассмотрим несколько задач, в которых главную роль играет параметр, и будем рассматривать все возможные значения параметра.

Задача 1. Через вершину конуса провести плоскость так, чтобы площадь сечения была максимальной.

Решение. Сечением конуса будет равнобедренный треугольник, боковые стороны которого являются образующими конуса. Пусть длина боковых сторон равна l , а угол между ними α . Тогда пло-

щадь сечения $S = (l^2 \sin \alpha) / 2$ будет максимальной при наибольшем возможном значении $\sin \alpha$. Угол α может меняться в диапазоне $0 \leq \alpha \leq 2\beta$, где β — угол между осью конуса и его образующей. Если $2\beta > \pi/2$, то площадь сечения будет максимальной при $\alpha = \pi/2$, т. е. $S_{\max} = l^2 / 2$. Если же $2\beta < \pi/2$, то $S_{\max} = (l^2 \sin \beta) / 2$, причем искомое сечение проходит через ось конуса.

Здесь параметр — это угол β , а качественное изменение решения происходит при "критическом" значении $\beta_{cr} = \pi/4$.

Задача 2. На диаметре AC окружности радиусом R взята точка E, удаленная от центра на расстояние a . Проведите через нее хорду BD так, чтобы площадь четырехугольника ABCD была максимальной. Найдите эту площадь.

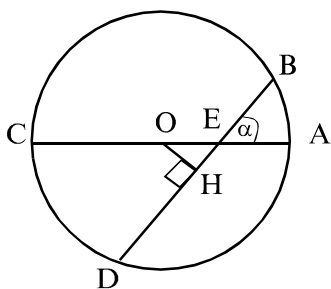


Рис. 4.2

Решение. Здесь, очевидно, параметром служит расстояние $OE = a$. Обозначим $\angle BEA = \alpha$, тогда площадь S четырехугольника ABCD равна $R \cdot BD \cdot \sin \alpha$. Опустим из O перпендикуляр OH на хорду BD. Из прямоугольного треугольника OEH (рис. 4.2) находим $OH = a \cdot \sin \alpha$. Из прямоугольного треугольника OHB находим катет $BH = \sqrt{R^2 - a^2 \sin^2 \alpha}$ и хорду $BD = 2 \cdot BH = 2 \cdot \sqrt{R^2 - a^2 \sin^2 \alpha}$. Отсюда получаем

$$S = 2 \cdot R \sin \alpha \cdot \sqrt{R^2 - a^2 \sin^2 \alpha} = 2R \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha (R^2 - a^2 \sin^2 \alpha)}.$$

Площадь будет максимальной, если будет максимальным подкоренное выражение. Обозначим $x = \sin^2 \alpha$ и найдем максимум подкоренного выражения $f(x) = x \cdot (R^2 - a^2 x)$. Максимум квадратного трехчлена достигается при $x = R^2 / 2a^2$, откуда максимальная площадь $S_{\max} = R^3 / a$.

Теперь присмотримся внимательней к полученному результату. В предельном случае $a = 0$ формула $S_{\max} = R^3 / a$ дает явный абсурд. В чем причина? Ну, конечно же, ведь переменная $x = \sin^2 \alpha$ не может быть больше единицы! Найденное решение справедливо только при $R^2 / 2a^2 \leq 1$, т. е. при $a \geq R / \sqrt{2}$. Если же $a < R / \sqrt{2}$, то максимум площади достигается при $\sin \alpha = 1$. В этом случае $S_{\max} = 2R \cdot \sqrt{R^2 - a^2}$. Задача решена. Мы нашли критическое значение параметра $a_{cr} = R / \sqrt{2}$, при котором происходит качественное изменение решения. Сформулируем ответ: при $a > a_{cr}$ угол между хордой BD и диаметром AC равен $\arcsin(R / a\sqrt{2})$, площадь четырехугольника ABCD равна R^3 / a . При $a < a_{cr}$ хорда BD должна быть перпендикулярна диаметру AC, при этом искомая площадь равна $2R\sqrt{R^2 - a^2}$.

Задача 3. В окружности радиуса 1 проведена хорда AB длиной a . Найдите наибольшее и наименьшее значения суммы расстояний от точек A и B до заданной прямой, проходящей через центр окружности.

Решение. Сделав пару эскизов, мы заметим, что могут быть два различных случая расположения хорды AB и заданной прямой l : когда точки A и B лежат по одну сторону от прямой (рис. 4.3) и когда точки A и B лежат по разные стороны от прямой. В последнем случае хорда пересекает прямую l в некоторой точке E (рис. 4.4).

Опустим из точек A и B перпендикуляры AC и BD на l . В первом случае получится прямоугольная трапеция CABD, во втором — два прямоугольных треугольника ACE и BED. Соединим центр

окружности с серединой хорды М. Длина отрезка $OM = \sqrt{1 - a^2/4}$ задана, и положение хорды на окружности определяется углом между OM и прямой l . Этот угол α и будем считать переменной, от которой зависит искомая сумма расстояний S . Из соображений симметрии видно, что достаточно рассмотреть изменение переменной в интервале $0 < \alpha < \pi$. Сразу найдем значение переменной, при котором происходит переход от первого случая ко второму. Когда точка А (или точка В) лежит на прямой l , получаем $\sin \alpha = a/2$.

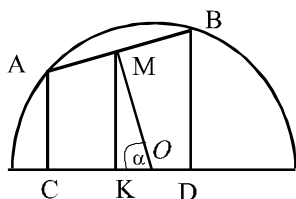


Рис. 4.3

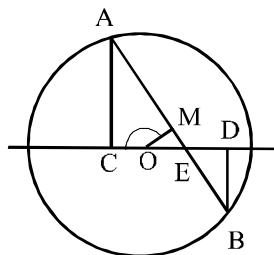


Рис. 4.4

Первый случай имеем при $\arcsin(a/2) < \alpha < \pi - \arcsin(a/2)$. Второй случай реализуется при $\alpha < \arcsin(a/2)$, а также при $\pi - \arcsin(a/2) < \alpha < \pi$.

В первом случае из точки М опустим перпендикуляр МК на прямую l . Тогда МК — средняя линия трапеции САВD, при этом $AC + BD = 2MK$. Из прямоугольного треугольника ОМК $МК = \sin \alpha \sqrt{1 - a^2/4}$. Отсюда сумма оснований трапеции $S(\alpha) = 2 \sin \alpha \sqrt{1 - a^2/4}$.

Во втором случае из прямоугольных треугольников ACE и BED находим $S(\alpha) = AC + BD = (AE + BE)|\cos \alpha| = a \cdot |\cos \alpha|$. Здесь знак модуля учитывает возможность отрицательных значений $\cos \alpha$.

Осталось определить максимум и минимум функции $S(\alpha)$ на исследуемом интервале. Можно заметить, что график этой функ-

ции симметричен относительно прямой $\alpha = \pi/2$, поэтому достаточно найти экстремумы на интервале $0 < \alpha < \pi/2$. Поскольку $\cos \alpha$ — функция убывающая, а $\sin \alpha$ — возрастающая, то минимум, очевидно, достигается при $\alpha = \arcsin(a/2)$. При этом

$$S_{\min} = a \cdot \sqrt{1 - a^2/4}.$$

Чтобы выяснить, где максимум, надо сравнить между собой значения $S(0) = a$ и $S(\pi/2) = 2\sqrt{1 - a^2/4}$. Сравнивая, приходим к выводу, что при $a > \sqrt{2}$ $S_{\max} = a$; при $a \leq \sqrt{2}$ $S_{\max} = 2 \cdot \sqrt{1 - a^2/4}$.

Замечание

В предельных случаях $a = 2$ (хорда АВ — диаметр) и $a \ll 1$ решения задачи довольно очевидно. Но эти решения качественно различны. При $a = 2$ максимум достигается, когда хорда АВ перпендикулярна l , т. е. точки А и В по разные стороны от l . При $a \ll 1$ максимум достигается, когда почти совпадающие точки А и В лежат по одну сторону от прямой l . Предельные случаи сразу подсказывают, что существует критическое значение параметра, при котором происходит качественное изменение решения.

Задача 4. Выходя из леса, усталый и голодный охотник оказался в снежном поле на расстоянии $h = 1,6$ км от дороги, на которой расположена его охотничья избушка. Скорость передвижения охотника по бездорожью 3 км/ч, а по дороге 5 км/ч. За какое наименьшее время охотник сможет добраться до своей избушки, если расстояние s до нее напрямик: а) 2,4 км; б) 1,8 км?

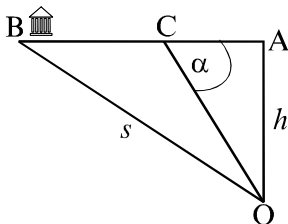


Рис. 4.5

Решение. Пусть O — точка, в которой находится охотник, OA — перпендикуляр к дороге, точка B — избушка (рис. 4.5). Ясно, что охотник должен двигаться по бездорожью по прямой и выйти на дорогу в некоторой точке C , принадлежащей отрезку AB . Обозначим $AB = l$, $\angle OCA = \alpha$. Время, которое затратит охотник на весь путь до своей избушки, равно

$$t = \frac{h}{3\sin \alpha} + \frac{l - h \cdot \operatorname{ctg} \alpha}{5} = \frac{h}{3\sin \alpha} \left(1 - \frac{3}{5} \cos \alpha \right) + \frac{l}{5}.$$

Нам необходимо найти минимальное значение функции

$$f(\alpha) = \frac{1}{\sin \alpha} \left(1 - \frac{3}{5} \cos \alpha \right)$$

на интервале $\arcsin(h/s) \leq \alpha \leq \pi/2$. Используем "универсальную" тригонометрическую замену, т. е. перейдем к переменной $\varepsilon = \operatorname{tg}(\alpha/2) > 0$. Тогда

$$\sin \alpha = \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon^2}, \quad \cos \alpha = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2},$$

$$f(\varepsilon) = \left(\frac{1 + \varepsilon^2}{2\varepsilon} \right) \cdot \left(1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \right) = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon} + 4\varepsilon \right) \geq \frac{2}{5} \cdot \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} \cdot 4\varepsilon} = \frac{4}{5}.$$

Здесь мы использовали неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом. Минимальное значение функции $f(\varepsilon)$, равное $4/5$, достигается при $\varepsilon = 1/2$. Для оптимального угла α находим $\sin \alpha = 4/5$, $\cos \alpha = 3/5$. Для задачи а) имеем: $\sin \alpha = 4/5 > h/s$, $l = \sqrt{s^2 - h^2} \approx 1,8$ км, время в пути $t = 4h/15 + l/5 \approx 47,2$ мин. Для задачи б) имеем: $4/5 < h/s$. В этом случае минимум функции $f(\alpha)$ достигается за пределами интервала $(\arcsin(h/s), \pi/2)$. Тогда оптимальный путь будет по отрезку OB и время в пути $t = s/3 = 36$ мин.

Задача 5. Канал шириной 1 поворачивает под углом φ ($0 < \varphi < 180^\circ$) (рис. 4.6). Какова должна быть максимальная длина очень тонкого бревна, чтобы его можно было провести че-

рез поворот? Рассмотрите случаи $\varphi = 90^\circ, 120^\circ, 60^\circ, 30^\circ$. Какова должна быть наибольшая длина бревна, чтобы оно могло пройти любой поворот?

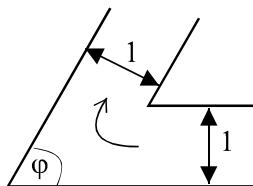


Рис. 4.6

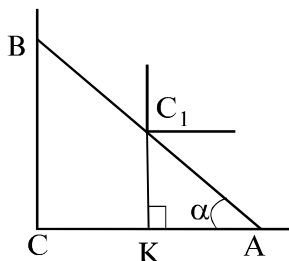


Рис. 4.7

Решение. Рассмотрим сначала прохождение бревна через поворот на угол 90° . Будем двигать бревно так, чтобы его концы опирались на внешний берег канала (рис. 4.7). Бревно пройдет поворот, если не заденет вершины угла внутреннего берега точки C_1 . Пусть α — угол между бревном и внешним берегом. Нетрудно видеть, что если удастся довести угол α до "критического" значения $\alpha_c = 45^\circ$ (при этом бревно займет положение AB), то дальше бревно пройдет поворот (из симметрии канала). Проведем из точки C_1 перпендикуляр к внешнему берегу C_1K . Из прямоугольного треугольника C_1KA находим $C_1A = 1/\sin 45^\circ = \sqrt{2}$. Отсюда максимальная длина бревна $l = 2C_1A = 2\sqrt{2}$.

Для поворота на угол 120° решение будет аналогичным, только теперь "критическое" значение $\alpha_c = 30^\circ$, ответ: $l = 2/\sin 30^\circ = 4$. Казалось бы, все ясно: для любого угла φ максимальная длина l бревна, проходящего поворот, равна $2/\sin(90^\circ - \varphi/2) = 2/\cos(\varphi/2)$. Однако не будем торопиться! Рассмотрим предельный случай очень малого угла φ (рис. 4.8).

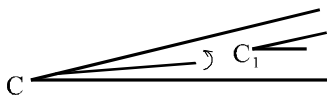


Рис. 4.8

Видно, что тут ситуация иная. Здесь выгоднее упереть конец бревна в вершину C и вращать бревно вокруг точки C . При этом максимальная длина "проходящего" бревна будет равна отрезку $CC_1 = 1/\sin(\varphi/2)$.

Выясним, для каких углов φ поворота канала выгодней второй способ (т. е. вращать бревно вокруг вершины C). Для этого надо решить неравенство

$$\frac{2}{\cos(\varphi/2)} < \frac{1}{\sin(\varphi/2)}.$$

Таким образом, максимальная длина бревна

$$l = \begin{cases} 2/\cos(\varphi/2), & \varphi^* < \varphi < \pi, \\ 1/\sin(\varphi/2), & 0 < \varphi < \varphi^*, \end{cases} \text{ где } \varphi^* = 2 \cdot \arctg \frac{1}{2}.$$

Для "наихудшего" угла поворота φ^* находим $\sin(\varphi^*/2) = 1/\sqrt{5}$. Поэтому максимальная длина бревна, способного пройти любой поворот, равна $\sqrt{5}$.

Вопрос

Каков будет ответ для $\varphi = 30^\circ$?

Задача 6. По каналу шириной 1 плывет прямоугольный плот размерами $h \times l$ (l — вдоль, h — поперек канала). На координатной плоскости параметров плота (h, l) найдите фигуру, множество точек которой — параметры "проходящего" плота. Решите задачу для случаев $\varphi = 90^\circ, 120^\circ, 60^\circ, 30^\circ$.

Решение. Рассмотрим сначала более простой случай $\varphi = 90^\circ$. Прежде всего заметим, что $l > 0$ и $0 < h < 1$. Эти условия выде-

ляют на координатной плоскости (h, l) "полуполосу" между осью ординат и прямой $h=1$. Поставим плот в "критическое" положение, в котором его сторона АВ образует угол $\alpha_c = 45^\circ$ с берегами (рис. 4.9). Тогда для прохождения плота необходимо выполнение условия $CM + h \leq CC_1$ (здесь точка М — середина отрезка АВ). Отсюда

$$\frac{l}{2 \cdot \operatorname{tg} 45^\circ} + h \leq \frac{1}{\sin 45^\circ}.$$

На координатной плоскости (h, l) этому неравенству удовлетворяют точки, лежащие не выше прямой MN, уравнение которой $l = 2\sqrt{2} - 2h$. Кажется бы, ответ готов: искомая фигура — это трапеция OMNP (рис. 4.10). Однако заметим, что мы рассматривали только те плоты, которые, проходя поворот, вращались вокруг своей оси.

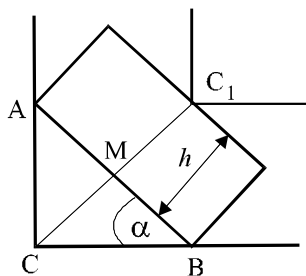


Рис. 4.9

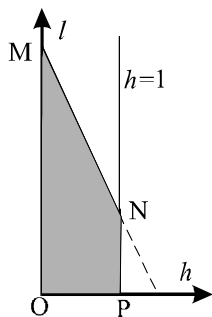


Рис. 4.10

Но плот можно провести через поворот, не меняя его ориентации на плоскости! Можно сначала двигать плот вдоль одной стороны угла до тех пор, пока он не упрется в вершину С, а затем двигать его вдоль другой стороны. Плот пройдет, если $l < 1$ (рис. 4.11). Таким образом, на координатной плоскости (h, l) к трапеции OMNP добавляется прямоугольный треугольник KLN, катеты

которого идут по линиям $l=1$ и $h=1$. Искомая фигура — это пятиугольник ОМКLP (рис. 4.12).

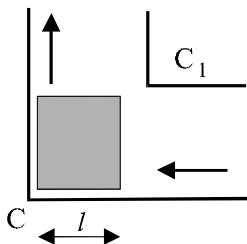


Рис. 4.11

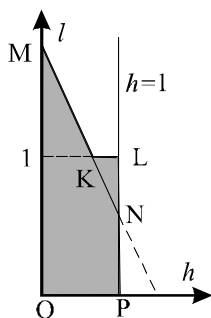


Рис. 4.12

Теперь можно рассмотреть произвольный угол φ . Сделайте соответствующий рисунок, аналогичный рис. 4.9, и получите условие проходимости для плота с вращением:

$$\frac{l_{\text{вращ}}}{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} + h \leq \frac{1}{\sin \frac{\varphi}{2}}. \quad (4.1)$$

Длина плота, проходимого без вращения (рис. 4.13), удовлетворяет неравенству

$$l_{\text{без вращ}} \leq \frac{1}{\sin \varphi} - \frac{1}{|\operatorname{tg} \varphi|}. \quad (4.2)$$

Здесь знак модуля учитывает возможность $\varphi > 90^\circ$. Выясним, для каких значений угла φ точка пересечения границ областей (4.1) и (4.2) на плоскости (h, l) находится внутри полосы $0 < h < 1$. Для этого надо подставить в (4.1) $h = 1$ и решить неравенство

$$\frac{1 - |\cos \varphi|}{\sin \varphi} > \frac{2 \cdot (1 - \sin(\varphi/2))}{\cos(\varphi/2)}. \quad (4.3)$$

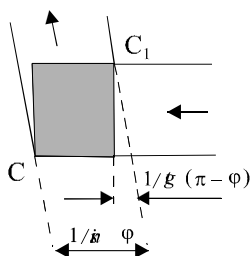


Рис. 4.13

Решая (4.3), находим $\varphi > \varphi_0 = 2 \arcsin(2/3)$. Итак, приходим к следующему ответу: при $\varphi > \varphi_0$ искомая фигура — это пятиугольник, а при $\varphi < \varphi_0$ искомая фигура — трапеция. Для $\varphi = 90^\circ$, 120° получается пятиугольник, а для $\varphi = 60^\circ$, 30° — трапеция, т. к. $\sin(60^\circ/2) < 2/3$.

Задача 7. В заданный треугольник вписать прямоугольник с наименьшей диагональю так, чтобы две вершины прямоугольника лежали на одной стороне треугольника, а две другие на двух других сторонах треугольника.

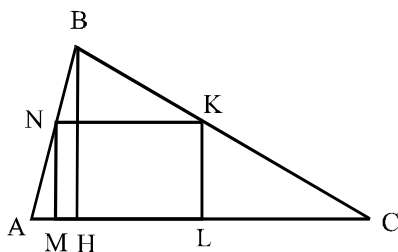


Рис. 4.14

Решение. Пусть прямоугольник MNKL со сторонами $KL = y$ и $NK = x$ — искомым (рис. 4.14). Обозначим длину стороны AC через a , длину высоты BH через h . Из подобия треугольников BNC и ABC следует $x/a = (h - y)/h = k$, где k — коэффициент подобия. Отсюда $y = h \cdot (1 - k)$, $x = a \cdot k$. Нам надо найти минимум функ-

ции $f(k) = x^2 + y^2 = a^2 k^2 + h^2(1-k)^2 = k^2(a^2 + h^2) - 2kh^2 + h^2$. Минимум этой квадратичной функции достигается при $k = h^2 / (h^2 + a^2)$. Отсюда находим $f_{\min} = a^2 h^2 / (h^2 + a^2) = 4S^2 / (h^2 + a^2)$, где $S = a \cdot h / 2$ — площадь треугольника ABC.

Казалось бы, задача решена. Увы, еще нет! Мы еще не выяснили, на какой из сторон треугольника ABC расположить две вершины прямоугольника. Нам надо выбрать такую сторону треугольника ABC, чтобы сумма квадрата стороны и квадрата высоты, опущенной на эту сторону, была наибольшей (величина $a^2 + h^2$ как раз и является параметром задачи). Итак, пусть a и b — длины двух сторон треугольника ABC, h_a , h_b — длины соответствующих высот. Сравним между собой величины $h_a^2 + a^2$ и $h_b^2 + b^2$. Для этого возьмем их разность

$$\begin{aligned} h_a^2 + a^2 - h_b^2 - b^2 &= a^2 - b^2 + \frac{4S^2}{a^2} - \frac{4S^2}{b^2} = \\ &= (a^2 - b^2) \cdot \left(1 - \frac{4S^2}{a^2 b^2} \right) = (a^2 - b^2) \cdot (1 - \sin^2 \varphi). \end{aligned}$$

Здесь использована формула $S = (ab \cdot \sin \varphi) / 2$, где φ — угол между сторонами a и b . Поскольку $\sin^2 \varphi < 1$, разность будет положительной при $a > b$. Итак, две вершины прямоугольника надо расположить на наибольшей из сторон треугольника ABC.

Задача 8. В треугольнике ABC через точку A провести прямую так, чтобы сумма расстояний до нее от точек B и C была наибольшей.

Решение. В этой задаче важно охватить все возможные случаи расположения треугольника ABC и прямой l , проведенной через точку A. Очевидно, что могут быть только два варианта:

1. Точки B и C лежат по одну сторону от l ;
2. Точки B и C лежат по разные стороны от l .

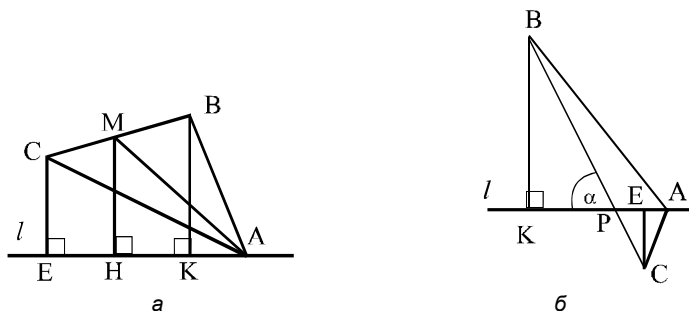


Рис. 4.15

Рассмотрим эти варианты.

Проведем перпендикуляры BK и CE к прямой l . В первом варианте (рис. 4.15, *a*) в трапеции $KBCE$ сумма оснований $BK + CE$ вдвое больше средней линии MN . Из прямоугольного треугольника AMH найдем $MN = AM \cdot \sin \angle MAN$. Для того чтобы длина MN была максимальной, прямую l нужно провести перпендикулярно к медиане AM . При этом сумма расстояний от B и C до прямой l равна $2AM$.

Во втором варианте сторона BC пересекает прямую l в некоторой точке P (рис. 4.15, *б*). Из прямоугольных треугольников BKP и CEP находим $BK + CE = BC \sin \alpha$, где α — угол между стороной BC и прямой l . Максимальное значение суммы $BK + CE$ достигается при $\alpha = 90^\circ$. При этом сумма расстояний от B и C до прямой l равна BC . Итак, мы пришли к следующему выводу. Если $2AM > BC$, то прямая l должна быть перпендикулярна медиане AM . В этом случае угол A острый. Если же $2AM < BC$, то прямая l должна быть перпендикулярна стороне BC . В этом случае угол A тупой (докажите это). В случае равенства $2AM = BC$ (угол A прямой) есть две различные прямые, дающие решение задачи.

Замечание

Если точки B и C лежат по одну сторону от прямой l , мы можем использовать связь между суммой длин и потенциальной энергией. Поместим в точки B и C одинаковые единичные массы и примем прямую l за нулевой уровень потенциальной энергии. Тогда сумма

расстояний от точек В и С до прямой l пропорциональна потенциальной энергии системы в однородном поле тяжести. Центр масс точек В и С, очевидно, находится в середине отрезка ВС — точке М. Для того чтобы потенциальная энергия была максимальной, отрезок АМ должен быть перпендикулярен прямой l .

Задача 9. Через точку пересечения двух окружностей провести секущую так, чтобы ее часть, заключенная внутри кругов, была наибольшей.

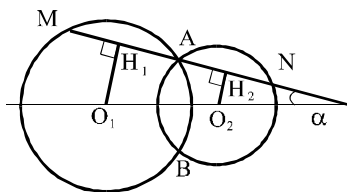


Рис. 4.16

Решение. Пусть две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках А и В. Проведем через точку А произвольную прямую, пересекающую окружность с центром O_1 в точке М, а окружность с центром O_2 в точке N. Проведем перпендикуляры O_1H_1 и O_2H_2 к секущей MN (рис. 4.16). Легко видеть, что $MN = 2 \cdot H_1H_2$. Поскольку H_1H_2 — проекция отрезка O_1O_2 на прямую MN, то $MN = 2 \cdot O_1O_2 \cos \alpha$, где α — угол между секущей и прямой O_1O_2 . Следовательно, чтобы длина отрезка MN была наибольшей, необходимо, чтобы $\alpha = 0$, т. е. секущая MN должна быть параллельна линии центров O_1O_2 . Казалось бы, задача решена. Однако обратите внимание на то, что наше решение основано на рис. 4.16. На этом рисунке точка А находится между точками М и N. Сделайте несколько эскизов и исследуйте все возможные случаи расположения точек А, М, и N. Нетрудно заметить, что есть еще две возможности:

1. Точки М и N расположены по одну сторону от точки А (рис. 4.17, а);
2. Одна из них совпадает с точкой А (рис. 4.17, б).

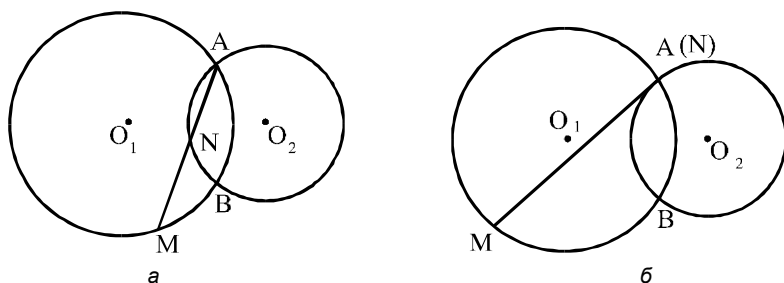


Рис. 4.17

В случае, если точка N лежит между A и M , частью секущей внутри кругов является не отрезок MN , а отрезок AM , т. е. хорда окружности! Наибольшей хордой является диаметр, поэтому необходимо выяснить, какой из отрезков больше: отрезок, параллельный прямой O_1O_2 , или же диаметр $2R$ большей окружности. Убедитесь, что во всех случаях $MN = 2 \cdot H_1H_2$. В результате приходим к следующему ответу.

Если $O_1O_2 > R$, то секущую надо провести параллельно линии центров O_1O_2 . Если $O_1O_2 < R$, то секущую надо провести через центр большей окружности. Если $O_1O_2 = R$, то существуют две секущие, удовлетворяющие условию задачи: первая параллельна линии центров O_1O_2 , другая проходит через центр большей окружности.

Вопрос

Каков ответ, если окружности O_1 и O_2 равны?

В заключение рассмотрим еще две задачи с несколько затейливым условием. Однако здесь мы ограничимся только указаниями, предоставляя их полное решение читателям.

Двое в одной лодке не считая геометрии

Пойти в поход — это значит: набрать побольше, отнести подальше и там все съесть.

Походная мудрость

На летних каникулах Петров и Васечкин отправились в водный поход по реке на байдарке. Речка оказалась интересной, и поход обоим очень понравился. Однако в последний день похода, когда все продукты питания уже закончились, друзья несколько приуныли. Они торопились добраться к вечеру до поселка на берегу реки, откуда можно уехать домой на автобусе.

Как назло, река на этом участке была очень извилистой. Хотя в среднем река текла в восточном направлении, ее русло поворачивало то направо, то налево и представляло собой последовательность одинаковых полуокружностей, диаметры которых расположены на одной прямой. Из-за этих нескончаемых поворотов скорость продвижения байдарки на восток была невелика.

"По-моему, двигаясь пешком по берегу, мы выиграем время. По моим наблюдениям мы плывем со скоростью 10 км/ч. Пешком мы будем идти со скоростью 5 км/ч, но зато по прямой. Не выписывая эти дурацкие петли, мы доберемся до поселка гораздо быстрее", — предложил Петров. Васечкин глубоко задумался. "Быстрее не получится", — заявил он после минутного раздумья. "Как это не получится, ведь мы же пойдем напрямую и срежем путь!" — горячился Петров и в доказательство показал рисунок, сделанный им в походном блокноте (рис. 4.18). Однако эти доводы Васечкина не убедили, и тот остался при своем мнении.

Вопрос 1

А вы с кем согласны — с Петровым или с Васечкиным?

Указание

Пеший путь будет быстрее, если только он, по меньшей мере, вдвое короче.

Несколько поворотов прошли в молчании. Вдруг наблюдательный Петров заметил, что река совсем обнаглела: излучины реки теперь представляли собой дуги одинаковых сопряженных окружностей в 240° . Петров немедленно оставил весло и взялся за блокнот. Изобразив на листке схему реки (рис. 4.19), он углубился в какие-то расчеты.

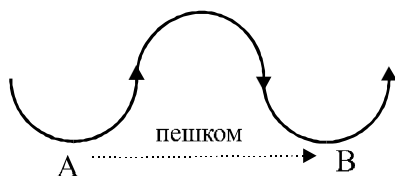


Рис. 4.18

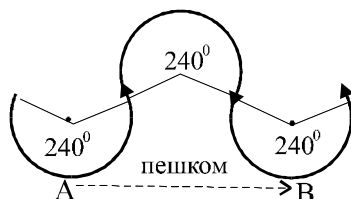


Рис. 4.19

"Кончай сушить весло! — окликнул его Васечкин. — Так мы и до утра не доберемся до поселка!" "Тихо! Чапай думает", — огрызнулся Петров и продолжил свои вычисления. "Готово! Нашел!" — радостно объявил он наконец. "Что нашел, недоеденный кусок колбасы?" — заинтересовался Васечкин. "Лучше! Решение проблемы нашел! — торжественно объявил Петров. — Теперь точно пешком быстрее получится", — добавил он и протянул блокнот другу. Васечкин тоже оставил весло и принялся внимательно изучать написанное.

Вопрос 2

Прав ли Петров в том, что теперь пешком будет быстрее?

"Сколько времени, по-твоему, мы сможем выиграть на каждой петле?" — наконец спросил Васечкин. "По моим наблюдениям, радиус поворотов $R=1$ км", — начал свои объяснения Петров, — длина участка реки между точками А и В (см. рис. 4.19) составляет $8\pi R/3 \approx 8,4$ км. Проплывем мы этот участок за 0,84 ч. Длина пешего пути между точками А и В составляет $2R\sqrt{3} \approx 3,44$ км. Пешком мы пройдем его за $3,44/5 = 0,688$ ч. Выигрыш на каждой петле составит $0,84 - 0,688 = 0,152$ ч или примерно 9 мин. Ну что, пристаем к берегу?" — спросил он,

берясь за весло. Вместо ответа Васечкин опять впал в глубокую задумчивость (он в походе исполнял обязанности капитана).

"Посмотри по карте, как далеко нам еще плыть", — обратился он к приятелю. "Придется проплыть еще десяток таких петель. По воде это займет почти восемь с половиной часов", — объявил Петров, поглядев в карту. "Не успеем на автобус, — вздохнул Васечкин. — Последний автобус отправляется через шесть часов тридцать минут", — объявил он, поглядев на часы. "Даже если пойдем пешком, то все равно не успеем. К тому же, топать с рюкзаками по берегу реки — значит уподобить себя выучным животным и уронить гордое звание водных туристов. Ладно, греби дальше, торопиться уже некуда".

Однако Петров не унимался. Он опять уткнулся в блокнот и принялся что-то вычислять. К его чести надо признать, что вскоре Петров действительно нашел решение проблемы. В результате ребята успели на автобус, при этом не полностью уронив гордое звание водных туристов.

Вопрос 3

Можно ли пройти участок АВ менее чем за 37 мин при условии, что даже с байдаркой в руках Петров и Васечкин могут идти пешком со скоростью 5 км/ч? За какое наименьшее время Петров и Васечкин могут пройти участок АВ?

О применении геометрии для полива капусты

Товарищи ученые,
не сомневайтесь, милые!
Коль что у вас не ладится
(ну, там, не тот эффект),
Мы живо к вам завалимся
с лопатами и вилами,
Денечек покумекаем —
и выправим дефект!

Из песни В. Высоцкого

Для полива капустного поля в форме квадрата со стороной 100 м агрофирма "Урожай Супер Плюс" собирается закупить поли-

вальные установки. Каждая такая установка орошает круг радиусом 10 м. Эти установки необходимо расположить так, чтобы каждая точка поля могла быть полита.

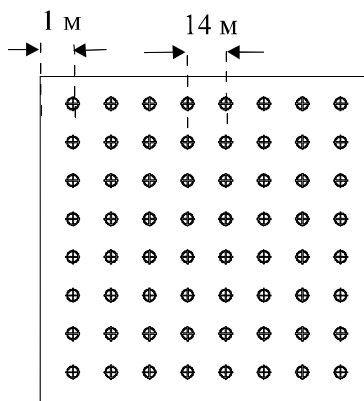


Рис. 4.20

Технический директор агрофирмы г-н Иванов, проведя расчеты, пришел к выводу, что необходимо закупить 64 таких установки и расположить их в шахматном порядке, как показано на рис. 4.20. Другой сотрудник агрофирмы — сторож дед Василий — с ним не согласен и полагает, что можно обойтись меньшим количеством поливальных установок и сэкономить немалые денежные средства. Дед Василий — народный умелец, самый опытный в округе пчеловод и непревзойденный рассказчик всяких историй. Однако уровень образования деда Василия, по мнению г-на Иванова, недостаточен (у Василия нет даже диплома о высшем образовании), поэтому его мнение не принимают всерьез.

Вопрос

Кто, по-вашему, прав в этом споре — г-н Иванов или дед Василий? Можно ли в проекте г-на Иванова уменьшить количество поливальных установок, изменив расстояние между соседними установками (сохраняя их расположение в шахматном порядке)? Можно ли уменьшить их количество, расставляя установки на поле другим способом? Какой способ расстановки самый экономный? Не забудьте, что каждая точка квадратного поля должна быть удалена от ближайшей установки не более чем на 10 м.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. На отрезке $[-2, 1]$ найти наибольшее значение функции $f(x) = x^4 - 2ax^2 + 3a^2$ в зависимости от параметра.

Задача 2. При каком значении параметра a уравнение $ax^2 + 3x + 2a^2 - 3 = 0$ имеет только целые корни?

Задача 3. Дорога, по которой проезжает ковбой Билли на своей лошадке Полли, пересекает железную дорогу под прямым углом (рис. 4.21). Подъезжая к железнодорожному переезду, Билли заметил поезд, мчащийся со скоростью 50 км/ч. Когда Билли находился на расстоянии 1,2 км от переезда, а паровозу оставалось 1,5 км до переезда, ковбою пришла в голову замечательная идея: ради спортивного интереса догнать поезд (хотя бы последний вагон) на своей лошадке Полли, которая может развивать скорость 30 км/ч (когда она в хорошем настроении). Сможет ли Билли осуществить свою замечательную идею, если длина поезда: а) 90 м, б) 100 м?

Задача 4. Горнолыжник на склоне горы оказался на пути схода лавины. Скорость V , которую может развить горнолыжник, зависит от угла α между направлением его движения и направлением вниз по склону: $V = V_m \cos \alpha$, где V_m — максимальная скорость лыжника (рис. 4.22). Найти зону безопасности, т. е. множество точек, из которых горнолыжник сможет уйти от лавины. Лавина движется с постоянной скоростью $U > V_m$, фронт лавины горизонтальный, шириной l .

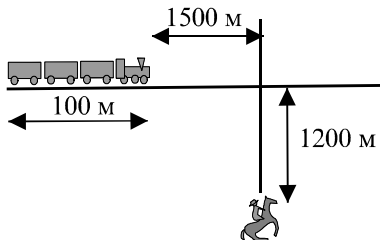


Рис. 4.21

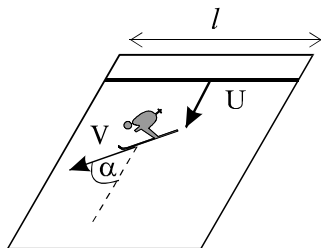


Рис. 4.22

Задача 5. Лодка спускается по течению реки на расстояние a км, а затем поднимается против течения на расстояние b км. Какова должна быть собственная скорость лодки, чтобы вся поездка продолжалась не более чем t часов?

Задача 6. Водоем имеет форму правильного треугольника. Между расположенными на берегу поселками А и В ходит паром. Велосипедист, который направляется из А в В, может воспользоваться паромом или ехать по берегу. При каком наименьшем отношении скорости велосипедиста к скорости парома переправа на пароме займет больше времени, чем поездка на велосипеде по берегу?

Задача 7. Проход через пролив шириной $2h$ стерегут два чудовища — Сцилла и Харибда. Каждое из чудовищ может мгновенно уничтожить любого мореплавателя, оказавшегося от них на расстоянии, меньшем R . Чудовища курсируют поперек пролива вдоль отрезка АВ от одного берега до другого с постоянной по величине скоростью U (рис. 4.23). Доплывая до берега, чудовища тут же разворачиваются назад и встречаются на середине пролива. Какую наименьшую скорость должен иметь корабль Одиссея, чтобы благополучно пройти пролив, если: а) $R/h = 0,5$, б) $R/h = 0,955$?

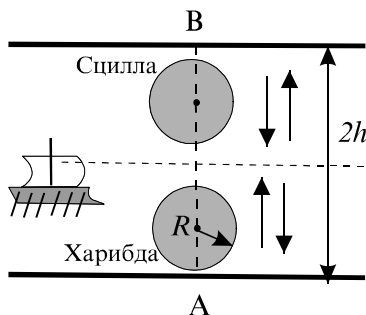


Рис. 4.23

Задача 8. Впишите в заданный треугольник прямоугольник с заданной длиной диагонали d . Сколько решений имеет задача?

Задача 9. Через точку пересечения двух окружностей провести секущую так, чтобы ее часть, заключенная внутри кругов, была наименьшей.

Задача 10. Площадь трапеции равна 1. Какую наименьшую длину может иметь наибольшая диагональ трапеции?

Задача 11. Хозяйка раскатала лист теста в форме квадрата 40×40 см, чтобы нарезать из него заготовок для пельменей (кругов диаметром 5 см). Какое максимальное число кругов она сможет нарезать из этого листа?

4.2. Сколько корней имеет уравнение?

Не пугайтесь этих уравнений. Они не такие страшные, как кажутся на первый взгляд. Скоро вы к ним привыкните, а потом они вам даже понравятся.

Однажды на лекции

Когда необходимо найти корни уравнения $f(x) = a$, неизбежно возникают такие вопросы: существует ли решение при данном значении a ? сколько существует решений? Для ответа на эти вопросы приходится исследовать свойства функции $f(x)$ и, в частности, ее экстремальные свойства, т. е. заниматься поиском наибольшего и наименьшего значений $f(x)$.

Рассмотрим несколько таких примеров, в которых большую пользу могут оказать нам знакомые уже приемы поиска экстремума.

Задача 1. Найдите все значения параметра a , при котором уравнение $\sqrt{3-x} + \sqrt{3+x} = a$ имеет единственное решение.

Решение. Эту задачу можно довольно просто решить, например, так. Заметим, что $|x| \leq 3$, $a \geq 0$. Возведем обе части уравнения в квадрат и получим

$$\sqrt{9-x^2} = \frac{1}{2}a^2 - 3.$$

График функции $y(x) = \sqrt{9 - x^2}$ представляет собой полуокружность радиусом 3 с центром в начале координат (рис. 4.24). График имеет с прямой $y = a^2/2 - 3$ единственную общую точку, только если прямая касается полуокружности, при $x = 0$. Отсюда следует ответ: $a = 2\sqrt{3}$.

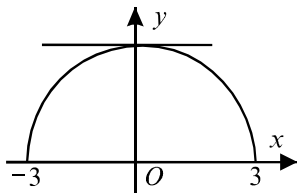


Рис. 4.24

Задача 2. Найдите все значения параметра a , при котором уравнение $\sqrt{2-x} + \sqrt{5-x^3} + \sqrt{1-3x^2} + \sqrt{5+x^3} + \sqrt{2+x} = a$ имеет единственное решение.

Решение. Теперь предложение возвести обе части уравнения в квадрат не вызывает энтузиазма. Вместе с тем, выражение в левой части равенства, несомненно, имеет что-то общее с рассмотренным в предыдущей задаче. Возможно, решая предыдущую задачу "в лоб", мы упустили какое-то свойство функции $f(x) = \sqrt{3-x} + \sqrt{3+x}$, которое могло бы дать нам другой подход к решению, пригодный и для задачи 2? Какое же свойство мы оставили без внимания? Рассматривая выражение $\sqrt{2-x} + \sqrt{5-x^3} + \sqrt{1-3x^2} + \sqrt{5+x^3} + \sqrt{2+x}$, можно заметить, что оно содержит "парные" радикалы, например $\sqrt{2-x}$ и $\sqrt{2+x}$. Они отличаются только знаком перед x . Это значит, что если заменить x на $(-x)$, эти радикалы просто поменяются местами, при этом их сумма не изменится. Правда, тут еще один радикал $\sqrt{1-3x^2}$ "без пары". При замене x на $(-x)$ он не меняет

своего значения. Что же из всего сказанного следует? Только то, что *если заменить x на $(-x)$, то левая часть равенства не изменится*. Но это означает, что корни уравнения тоже парные: если $x = \lambda$ — решение уравнения, то $x = -\lambda$ тоже будет решением. Следовательно, решение может быть *единственным* только в том случае, если оно равно нулю. Отсюда мгновенно получается ответ: $a = 1 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$, и получен он практически даром.

Теперь проясняется то общее свойство функций из обеих задач 1 и 2, которое мы не заметили сразу: $f(x) = f(-x)$. Такие функции называются *четными*. Обратите внимание на тот факт, что область определения функции $f(x)$ должна быть симметричной относительно точки $x = 0$ (иначе может оказаться, что значение $f(-x)$ не существует). Если же $f(x) = -f(-x)$, то функция *нечетная*. Так, например, функция $\sqrt{3-x}$ не является четной и не является нечетной, зато любая функция типа $y(x) = f(x) + f(-x)$ является четной.

Упражнение

Сконструируйте сами аналогичным образом из любой функции $f(x)$ нечетную функцию $y(x)$. Докажите, что любую функцию с симметричной областью определения можно представить в виде суммы четной и нечетной функций.

Если непрерывная функция $f(x)$ на некотором интервале имеет минимальное значение m и максимальное значение M , то уравнение $f(x) = a$ имеет на этом интервале хотя бы одно решение при всех $a \in [m, M]$. Если $f(x)$ монотонна (т. е. или возрастает, или убывает на всем интервале), то уравнение $f(x) = a$ при всех $a \in [m, M]$ имеет *единственное* решение на этом интервале (рис. 4.25, а). Если же $f(x)$ немонотонна (т. е. имеет участки возрастания и участки убывания), то *при некоторых значениях* $a \in [m, M]$ уравнение $f(x) = a$ имеет более одного решения на интервале (рис. 4.25, б).

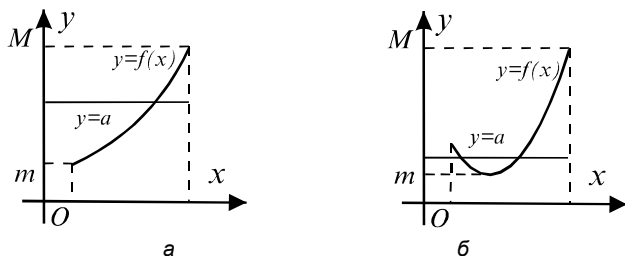


Рис. 4.25

Вопрос

Как обстоит дело с функцией

$$f(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{5-x^3} + \sqrt{1-3x^2} + \sqrt{5+x^3} + \sqrt{2+x}?$$

Может ли уравнение $f(x) = a$ иметь при некоторых a более одного решения? Является ли значение $1 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$ экстремальным для $f(x)$? Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$.

Задача 3. Сколько решений имеет уравнение $1 - x^2/2 = \cos x$?

Решение. Один корень $x = 0$ виден сразу. Нет ли других? Сразу же замечаем, что в обеих частях уравнения стоят четные функции. Поэтому если уравнение имеет несколько положительных корней, то ровно столько же и отрицательных. Построим графики функций $f(x) = \cos x$ и $g(x) = 1 - x^2/2$. Тут могут быть два варианта расположения этих графиков. В первом случае (рис. 4.26, а) помимо точки $x = 0$ других точек пересечения графиков нет, во втором случае (рис. 4.26, б) есть еще две точки. Какой же из вариантов правильный?

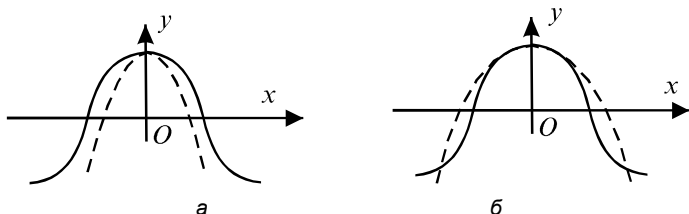


Рис. 4.26

Перепишем уравнение в виде $1 - \cos x = x^2 / 2$ и воспользуемся тождеством $1 - \cos x = 2 \sin^2(x/2)$. Теперь уравнение примет вид $\sin^2(x/2) = (x/2)^2$. Тут как раз к месту вспомнить неравенство $|\sin x| \leq |x|$, верное при всех значениях x . В равенство оно превращается только при $x = 0$, поэтому других корней нет.

Задача 4. Сколько решений имеет уравнение $\cos(\sin x) = \sin(\cos x)$?

Решение 1. С помощью формулы приведения запишем уравнение в виде: $\cos(\sin x) - \cos(\pi/2 - \cos x) = 0$ и воспользуемся тождеством

$$\cos a - \cos b = 2 \sin\left(\frac{b-a}{2}\right) \sin\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

В результате получим

$$2 \sin\left(\frac{\sin x - \cos x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sin x + \cos x}{2}\right) = 0.$$

Отсюда следует, что или $\sin x - \cos x = 2\pi n - \pi/2$, или $\sin x + \cos x = 2\pi n + \pi/2$, где n — целое число. Однако при всех целых n оба выражения $2\pi n - \pi/2$ и $2\pi n + \pi/2$ по модулю не меньше, чем $\pi/2$. В то же время, наибольшее по модулю значение выражений $\sin x - \cos x$ и $\sin x + \cos x$ равно $\sqrt{2}$. Поскольку $\pi/2 > \sqrt{2}$, то корней уравнение не имеет.

Решение 2. Заметим, что достаточно найти все корни на интервале длиной 2π , т. к. функции $\sin x$, $\cos x$ периодические. Далее заметим, что в обоих частях уравнения стоят четные функции, поэтому достаточно найти все корни на интервале $0 \leq x \leq \pi$. Рассмотрим поведение функций $\cos(\sin x)$ и $\sin(\cos x)$ при $0 \leq x \leq \pi/2$. На этом интервале переменная $\alpha = \sin x \geq 0$, и функция $f(\alpha) = \cos \alpha$ убывает. Для $\alpha > 0$ справедливо неравенство

$$\alpha > \sin \alpha. \quad (4.4)$$

Из монотонного убывания $\cos \alpha$ и неравенства (4.4) следует $\cos(\sin x) \geq \cos x$. С другой стороны, полагая в (4.4) $\alpha = \cos x$, получаем $\cos x > \sin(\cos x)$. Таким образом, при $0 \leq x \leq \pi/2$ имеем $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$. Осталось рассмотреть интервал $\pi/2 < x \leq \pi$. На этом интервале $0 > \cos x \geq -1$, поэтому $0 > \sin(\cos x)$. При этом $1 \geq \sin x > 0$, поэтому $\cos(\sin x) > 0$. Отсюда получаем $\cos(\sin x) > 0 > \sin(\cos x)$. Таким образом, неравенство $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$ верно при всех значениях переменного.

Задача 5. Решите уравнение $(16x^{200} + 1) \cdot (y^{200} + 1) = 16x^{100}y^{100}$.

Решение. На первый взгляд задача выглядит странно: уравнение всего одно, а неизвестных два. Но это обстоятельство и служит подсказкой. Тут явно присутствует какое-то экстремальное свойство выражений, из которых составлено уравнение.

Перепишем уравнение в виде

$$\left(16x^{100} + \frac{1}{x^{100}}\right) \cdot \left(y^{100} + \frac{1}{y^{100}}\right) = 16.$$

Теперь заметим, что

$$16x^{100} + \frac{1}{x^{100}} \geq 8, \quad y^{100} + \frac{1}{y^{100}} \geq 2$$

(какое неравенство мы использовали?). Перемножив эти неравенства, получим

$$\left(16x^{100} + \frac{1}{x^{100}}\right) \cdot \left(y^{100} + \frac{1}{y^{100}}\right) \geq 16.$$

Равенство возможно только при $16x^{100} = 1, y^{100} = 1$. Отсюда $x = \pm 1/\sqrt[50]{2}, y = \pm 1$.

Задача 6. Докажите, что при любом действительном значении параметра a уравнение $3a \cdot x^{2003} + 6x^5 + a^2 \cdot x^2 + a \cdot x - 1 = 0$ имеет на интервале $[0, 1]$ хотя бы один корень.

Решение. Заметим, что функция

$$f(x) = 3ax^{2003} + 6x^5 + a^2x^2 + ax - 1$$

непрерывна при всех значениях параметра, причем $f(0) = -1$, $f(1) = a^2 + 4a + 5 = (a + 2)^2 + 1 > 0$. Так как непрерывная функция принимает все значения между $f(0) < 0$ и $f(1) > 0$, то хотя бы в одной точке она принимает значение ноль.

Задача 7. Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x = 2z^2 / (1 + z^2), \\ y = 2x^2 / (1 + x^2), \\ z = 2y^2 / (1 + y^2). \end{cases}$$

Решение. Прежде всего, заметим, что неизвестные x, y, z неотрицательны и система уравнений симметрична относительно неизвестных x, y, z . Это наводит на мысль рассмотреть отношения $x/z, y/x, z/y$ (если только $xyz \neq 0$). Запишем уравнения в виде

$$\frac{x}{z} = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \frac{y}{x} = \frac{2x}{1+x^2}, \quad \frac{z}{y} = \frac{2y}{1+y^2}.$$

Заметим, что наибольшее значение правой части каждого уравнения равно 1 (докажите это.) Отсюда следуют неравенства $x \leq z, y \leq x, z \leq y$. Эти три неравенства будут верными только при условии $x = y = z$, т. к. каждое неизвестное удовлетворяет уравнению $x = 2x^2 / (1 + x^2)$. Решая его, находим два решения: $(0; 0; 0)$ и $(1; 1; 1)$.

Задача 8. Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 2yz\sqrt{1 - 4xy}, \\ z^2 + 1 = 2\sqrt{xy}. \end{cases}$$

Решение. Прежде всего, найдем область допустимых значений выражений, входящих в уравнения. Из первого уравнения полу-

чаем $xy \leq 1/4$, а из второго уравнения следует $2\sqrt{xy} \geq 1$. Отсюда $xy = 1/4$, $z = 0$, $x^2 = 1$. Система имеет два решения: $(1; 0,25; 0)$ и $(-1; -0,25; 0)$.

Задача 9. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 8, \\ \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{4 - y^2} + \sqrt{9 - z^2} + \sqrt{16 - t^2} = 6. \end{cases}$$

Решение 1. Прежде всего, заметим, что $|x| \leq 1$, $|y| \leq 2$, $|z| \leq 3$, $|t| \leq 4$. Радикалы во втором уравнении наводят на воспоминания о теореме Пифагора. Так, например, если x — это длина катета в прямоугольном треугольнике с единичной гипотенузой, то $\sqrt{1 - x^2}$ — это длина другого катета. Однако величина x в первом уравнении может быть и отрицательной, поэтому лучше считать ее одной из координат вектора единичной длины. Тогда $\sqrt{1 - x^2}$ — другая координата вектора.

Продолжим в этом геометрическом духе и сформулируем задачу так: на координатной плоскости Ouv даны четыре вектора $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$ длиной 1, 2, 3, 4 соответственно. Известно, что координата суммы этих векторов по оси Ou равна 8, координаты всех векторов по оси Ov неотрицательны, и их сумма равна 6. Какой вывод можно сделать о положении этих векторов на плоскости? Первое, что необходимо выяснить — какова длина векторной суммы $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4$. На этот вопрос ответить нетрудно: длина векторной суммы равна $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$. Сравнивая ее с суммой длин всех четырех векторов, приходим к выводу, что $|\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4| = |\vec{a}_1| + |\vec{a}_2| + |\vec{a}_3| + |\vec{a}_4|$, т. е. все четыре вектора коллинеарны и сонаправлены. Следовательно, координаты всех четырех векторов пропорциональны числам 8 и 6, т. е. $x/\sqrt{1 - x^2} = 4/3$. Отсюда: $x = 4/5$, а величины y , z , t соответственно в два, три и четыре раза больше.

Решение 2. В этой системе явно не хватает уравнений (всего два, а неизвестных четыре). Введем параметры a и b и расцепим каждое из уравнений на два уравнения. У нас получится две системы уравнений: первая относительно неизвестных x, t , вторая — относительно неизвестных y, z .

$$\begin{cases} x+t=4+b, \\ \sqrt{1-x^2}+\sqrt{16-t^2}=3+a; \end{cases} \quad \begin{cases} y+z=4-b, \\ \sqrt{4-y^2}+\sqrt{9-z^2}=3-a. \end{cases}$$

Теперь количество неизвестных совпадает с числом уравнений. Представим, что значения a и b нам известны, и начнем решать первую из этих систем. Сделаем замену переменных: $x = \sin \alpha$, $t = 4 \sin \beta$, где $0 < \alpha < \pi/2$, $0 < \beta < \pi/2$. Тогда

$$\sqrt{1-x^2} = \cos \alpha, \quad \sqrt{16-t^2} = 4 \cos \beta. \text{ Уравнения примут вид}$$

$$\begin{aligned} 4 \sin \beta &= 4 + b - \sin \alpha, \\ 4 \cos \beta &= 3 + a - \cos \alpha. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Возведем оба уравнения (4.5) в квадрат и сложим их, в результате получим:

$$16 = (4+b)^2 + (3+a)^2 - 2 \cdot ((4+b) \sin \alpha + (3+a) \cos \alpha) + 1.$$

Преобразуем полученное уравнение в виде

$$(4+b) \sin \alpha + (3+a) \cos \alpha = \frac{(4+b)^2 + (3+a)^2 - 15}{2}. \quad (4.6)$$

Чтобы уравнение (4.6) имело решение относительно α , необходимо выполнение условия

$$\frac{(4+b)^2 + (3+a)^2 - 15}{2} \leq \sqrt{(4+b)^2 + (3+a)^2}. \quad (4.7)$$

Обозначим $m = \sqrt{(4+b)^2 + (3+a)^2}$ и запишем (4.7) в виде неравенства $m^2 - 2m - 15 \leq 0$. Отсюда следует, что $m \leq 5$, т. е.

$$(4+b)^2 + (3+a)^2 \leq 25. \quad (4.8)$$

Теперь займемся системой уравнений относительно y, z . Сделаем замену $y = 2\sin \gamma$, $z = 3\sin \delta$, где $0 < \gamma < \pi/2$, $0 < \delta < \pi/2$, и запишем уравнения в виде

$$\begin{aligned} 3\sin \delta &= 4 - b - 2\sin \gamma, \\ 3\cos \delta &= 3 - a - 2\cos \gamma. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Возведем оба уравнения (4.9) в квадрат и сложим их. В результате получим уравнение

$$(4 - b)\sin \gamma + (3 - a)\cos \gamma = \frac{(4 - b)^2 + (3 - a)^2 - 5}{4}. \quad (4.10)$$

Чтобы (4.10) имело решение относительно γ , необходимо, чтобы неотрицательная величина $n = \sqrt{(4 - b)^2 + (3 - a)^2}$ удовлетворяла неравенству $n^2 - 4n - 5 \leq 0$. Отсюда следует, что $n \leq 5$, т. е.

$$(4 - b)^2 + (3 - a)^2 \leq 25. \quad (4.11)$$

Складывая (4.8) и (4.11), получим неравенство $a^2 + b^2 \leq 0$. Отсюда сразу следует, что $a = 0$ и $b = 0$. Далее уже нетрудно получить

$$\sin \alpha = \sin \beta = \sin \gamma = \sin \delta = \frac{4}{5}, \quad x = \frac{4}{5}, \quad y = \frac{8}{5}, \quad z = \frac{12}{5}, \quad t = \frac{16}{5}.$$

Задача 10. Два цилиндра имеют одинаковый объем и одинаковую площадь полной поверхности. Равны ли они?

Решение. Пусть x — радиус, y — высота цилиндра. Тогда объем цилиндра $V = \pi x^2 y$, площадь полной поверхности $S = 2\pi xy + 2\pi x^2$. Обозначим $V/\pi = a$, $S/2\pi = b$ и сформулируем задачу так: сколько решений может иметь система уравнений

$$\begin{cases} xy + x^2 = b, \\ x^2 y = a; \end{cases}$$

при $a > 0$, $b > 0$? Если окажется, что система имеет единственное решение, это означает, что цилиндры равны.

Выразим из второго уравнения $y = a/x^2$ и, подставив в первое, получим одно уравнение для переменной x :

$$x^2 + a/x = b. \quad (4.12)$$

Чтобы выяснить, существует ли решение уравнения (4.12), найдем минимум функции $f(x) = x^2 + a/x$. При помощи неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом получаем $f(x) = x^2 + a/2x + a/2x \geq 3\sqrt[3]{a^2/4}$. Следовательно, уравнение (4.12) имеет решение только тогда, когда параметры связаны условием $b \geq 3\sqrt[3]{a^2/4}$.

Теперь рассмотрим, сколько решений имеет (4.12), если это условие выполнено. При малых значениях x значения $f(x)$ близки к a/x , т. е. $f(x)$ убывает, а при больших значениях x значения $f(x)$ близки к x^2 , т. е. $f(x)$ возрастает. График $y = f(x)$ имеет вид, показанный на рис. 4.27 и пересекается с прямой $y = b$ ровно в двух точках, если $b > 3\sqrt[3]{a^2/4}$, или касается прямой если $b = 3\sqrt[3]{a^2/4}$. Таким образом, при условии $(S/2\pi)^3 > 27(V/\pi)^2/4$ существуют два различных цилиндра с одинаковым объемом и одинаковой площадью поверхности, а при условии $(S/2\pi)^3 = 27(V/\pi)^2/4$ существует единственный цилиндр.

Упражнение

Найдите отношение диаметра и высоты цилиндра, у которого объем и площадь поверхности связаны условием $(S/2\pi)^3 = 27(V/\pi)^2/4$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Найдите все действительные числа x, y, z , удовлетворяющие уравнению

$$x^2 + 19y^2 + 6z^2 - 8xy - 4xz + 12xy = 0.$$

Задача 2. Найдите все действительные числа x , y , удовлетворяющие уравнению

$$x^2 + 4x \cos(x \cdot y) + 4 = 0.$$

Задача 3. Найдите все действительные числа x , y , удовлетворяющие уравнению

$$\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} \right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} \right)^2 = 12 + \frac{1}{2} \sin y.$$

Задача 4. Найдите все действительные числа x , y , удовлетворяющие уравнению

$$\sin^2(x + y) + 2x \cdot (x - \sin(x + y)) = 0.$$

Задача 5. Найдите все действительные числа x , y , удовлетворяющие уравнению

$$\cos^2(x \cdot y) + 2x \cdot (1 + \cos(x \cdot y)) + 2x^2 + 1 = 0.$$

Задача 6. Найдите все действительные числа x , y , удовлетворяющие уравнению

$$x^2 + 2x \sin(x \cdot y) + 1 = 0.$$

Задача 7. Найдите наименьшее значение параметра a , при котором уравнение

$$\frac{\sqrt{x^2 + 16}}{3} - \frac{x}{5} = a$$

имеет решение.

Задача 8. Найдите все действительные числа a , b , c , d , удовлетворяющие уравнению

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - a \cdot b - b \cdot c - c \cdot d - d + 0,4 = 0.$$

Задача 9. Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} xz = y + 2, \\ x + z = 2\sqrt{y} \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z}). \end{cases}$$

Задача 10. Найти все действительные решения системы уравнений

$$2y = 1 + x^2, \quad 2z = 1 + y^2, \quad 2t = 1 + z^2, \quad 2x = 1 + t^2.$$

Задача 11. Найти все действительные решения системы уравнений

$$x - \sqrt{y} = 1, \quad y - \sqrt{z} = 1, \quad z - \sqrt{x} = 1.$$

Задача 12. Действительные числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ удовлетворяют равенствам

$$x_1 + \frac{1}{x_1} = x_2 + \frac{1}{x_2} = \dots = x_n + \frac{1}{x_n}.$$

Докажите, что для любых двух чисел x_m, x_k из этого набора либо $x_m = x_k$ или $|x_k \cdot x_m| = 1$.

Задача 13. Докажите, что если действительные числа x, y, z, t удовлетворяют уравнению $x^2 + t^2 = 2(xy + yz + zt - y^2 - z^2)$, то $x = y = z = t$.

Задача 14. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения $x^2 - xy + y^2$, если $2x^2 + 2xy + y^2 = 2$.

Задача 15. Найдите наименьшее значение x , для которого существуют действительные числа y, z , удовлетворяющие уравнению

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz - yz = 1.$$

4.3. Когда без производной не обойтись

Вы, конечно, заметили, что до сих пор при поиске экстремума функции мы нигде не использовали производную. Это не случайность, а обдуманное намерение автора. Причины к тому час-

тично указаны в начале главы 2: производная — не универсальное средство. Мы рассмотрели немало задач, в которых понятие производной не могло бы ничем нам помочь при поиске экстремума. Отсюда, однако, не следует, что в любой задаче, где требуется найти экстремум, можно обойтись без понятия производной. Иногда с помощью производной задача решается гораздо проще и быстрее, а иногда использование производной — единственно возможное средство решения.

В этом параграфе мы рассмотрим именно такие задачи. Здесь от читателя потребуется четкое представление о том, что такое предел последовательности, предел функции, производная. Кроме того, потребуется знание производных некоторых элементарных функций, а также умение дифференцировать сумму, произведение, отношение функций и сложную функцию. Напомним некоторые из этих правил.

Производная произведения функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

Производная отношения функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}.$$

Дифференцирование сложной функции $F = f(g(x))$:

пусть $F = f(g)$, $g = g(x)$, тогда $F'(x_0) = f'(g_0) \cdot g'(x_0)$.

Пример. Вычислить производную функции $F(x) = \sin(\sqrt{x})$.

Решение. Здесь $f(g) = \sin g$, $g(x) = \sqrt{x}$, $f'(g) = \cos g$, $g'(x) = 1/2\sqrt{x}$. При этом

$$F'(x_0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos(\sqrt{x_0})}{\sqrt{x_0}}.$$

Муравей на консервной банке

Пешеход, бредущий верной дорогой, обгонит всадника, скачущего по неверному пути.

Восточная пословица

Муравей находится на поверхности цилиндра радиусом R и высотой h в некоторой точке A окружности торца цилиндра. Ему нужно перебраться в точку B , наиболее удаленную от A , расположенную на окружности другого торца цилиндра. Как ему это сделать кратчайшим путем? Муравей может двигаться только по поверхности цилиндра.

Решение. Часть пути муравья пройдет по боковой поверхности цилиндра (участок AC), а другая часть (участок CB) по торцу цилиндра. Ясно, что на верхнем торце муравей должен двигаться кратчайшим путем между точками C и B (рис. 4.27). Как найти длину участка AC ? Для выяснения этого развернем боковую поверхность цилиндра на плоскость. У нас получится прямоугольник (рис. 4.28). Кратчайший путь между точками A и C — это прямая, и длину участка AC можно найти по теореме Пифагора для прямоугольного треугольника AA_1C . Искомая длина равна $\sqrt{AA_1^2 + A_1C^2}$. Кстати говоря, на боковой поверхности цилиндра линия AC будет кривой, которая называется винтовой

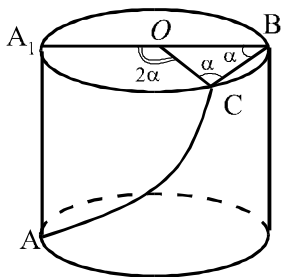


Рис. 4.27

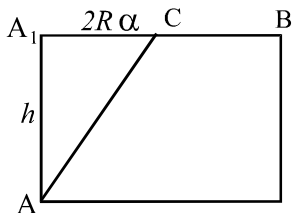


Рис. 4.28

линией. Именно эту линию прочерчивает на поверхности заготовки резец при нарезке резьбы в токарном станке. Тот факт, что нам удалось так просто найти длину участка кривой — большая удача! Нам повезло в том, что развертка боковой поверхности цилиндра без искажений переносится на плоскость.

Вопрос

Какие еще известные вам тела вращения обладают таким свойством?

Центр окружности верхнего торца точку O соединим с точками C и B . Обозначим $\angle A_1OC = 2\alpha$, $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ (рис. 4.27). Тогда дуга $A_1C = 2R\alpha$, отрезок $AC = \sqrt{h^2 + 4R^2\alpha^2}$. В равнобедренном треугольнике BOC углы OBC и OCB равны α (A_1B — диаметр), поэтому длина хорды CB равна $2R\cos\alpha$. Таким образом, нам надо найти значение переменной α , при котором функция $S(\alpha) = \sqrt{h^2 + 4R^2\alpha^2} + 2R\cos\alpha$ принимает наименьшее значение. Для исследования поведения этой функции найдем ее производную:

$$S'(\alpha) = \frac{4R^2\alpha}{\sqrt{h^2 + 4R^2\alpha^2}} - 2R\sin\alpha.$$

Если всюду на некотором интервале значений α производная $S'(\alpha) < 0$, то функция $S(\alpha)$ убывает на этом интервале, в случае обратного неравенства — возрастает. Надо выяснить, положительное или отрицательное значение имеет выражение

$$\frac{S'(\alpha)}{2R} = \frac{\alpha}{\sqrt{p^2 + \alpha^2}} - \sin\alpha$$

на интервале $0 \leq \alpha \leq \pi/2$. Здесь мы ввели геометрический параметр $p = h/2R$. Введем новую переменную β с помощью замены $\alpha = p \cdot \operatorname{tg}\beta$, где $0 \leq \beta = \operatorname{arctg}(\alpha/p) < \pi/2$. Тогда

$$\frac{\alpha}{\sqrt{p^2 + \alpha^2}} = \sin\beta, \quad \sin\alpha = \sin(p \cdot \operatorname{tg}\beta).$$

Рассмотрим функцию $S'/2R = f(\beta) = \sin \beta - \sin(p \cdot \operatorname{tg} \beta)$. Воспользуемся тригонометрическим тождеством и представим $f(\beta)$ в виде

$$f(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\beta + p \cdot \operatorname{tg} \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta - p \cdot \operatorname{tg} \beta}{2}\right).$$

Поскольку $0 \leq (\beta + p \cdot \operatorname{tg} \beta)/2 < \pi/2$, то в этом произведении косинус принимает только положительные значения, а положительность или отрицательность значений синуса определяется выражением $\beta - p \cdot \operatorname{tg} \beta = \beta \cdot p \cdot (1/p - \operatorname{tg} \beta/\beta)$. Таким образом, все сводится к выяснению знака выражения $1/p - \operatorname{tg} \beta/\beta$. Тут может быть два варианта.

Первый вариант: $1/p < 1$. Тогда $1/p - \operatorname{tg} \beta/\beta < 0$, поскольку $\operatorname{tg} \beta/\beta > 1$. В этом случае $S(\alpha)$ убывает на всем интервале и достигает минимума в крайней точке $\alpha = \pi/2$.

Второй вариант: $1/p > 1$. Тут придется исследовать функцию $F(\beta) = \operatorname{tg} \beta/\beta^*$. Находим производную $F'(\beta)$ и выясняем, что в исследуемом интервале

$$F'(\beta) = \frac{(\operatorname{tg} \beta)' \cdot \beta - \operatorname{tg} \beta}{\beta^2} = \frac{1}{\beta \cos^2 \beta} \left(1 - \frac{\sin 2\beta}{2\beta}\right) > 0.$$

Таким образом, функция $F(\beta)$ монотонно возрастает, и область ее значений $F \geq 1$. Следовательно, принимать значение, равное $1/p$, она может только в единственной точке $\beta = \beta_0$, причем при $0 \leq \beta < \beta_0$ $F(\beta) < 1/p$, а при $\beta > \beta_0$ $F(\beta) > 1/p$. Следовательно, функция $S(\alpha)$ возрастает при $0 \leq \alpha < p \cdot \operatorname{tg} \beta_0$ и убывает при $\alpha > p \cdot \operatorname{tg} \beta_0$. В точке $\alpha = p \cdot \operatorname{tg} \beta_0$ достигается максимум функции $S(\alpha)$, а минимум может достигаться только на краях интер-

* Функция $F(\beta)$ не определена при $\beta = 0$, но для читателя, знакомого с понятием предела функции, несложно выяснить, что $\lim_{\beta \rightarrow 0} (\operatorname{tg} \beta/\beta) = 1$.

вала. То есть из двух значений $S(0)$ и $S(\pi/2)$ надо выбрать наименьшее. Найдем критическое значение параметра, при котором $S(0) = S(\pi/2)$. Решая уравнение $h + 2R = \sqrt{h^2 + \pi^2 R^2}$, находим критическое значение $h/2R = (\pi^2 - 4)/8$.

Итак, подведем итог. Если $h/2R < (\pi^2 - 4)/8$ (банка из-под шпрот), муравью надо ползти по образующей AA_1 , затем по диаметру A_1B , при этом длина его пути $h + 2R$. Если же $h/2R > (\pi^2 - 4)/8$ (банка из-под пива), муравью следует сразу ползти в точку B по боковой поверхности банки (по винтовой линии), при этом длина его пути $\sqrt{h^2 + \pi^2 R^2}$.

О переправе или о том, что прямой путь не всегда самый быстрый

Турист находится на берегу реки в точке A и торопится попасть на автобусную остановку в точке B на противоположном берегу реки (прямая AB перпендикулярна берегам). Местный житель взялся перевезти туриста через реку на своей лодке. Скорость течения реки U , скорость лодки V_1 , турист может бежать по берегу со скоростью V_2 , ширина реки h . Под каким углом к прямой AB следует направить лодку (рис. 4.29), чтобы турист добрался до автобусной остановки за наименьшее время?

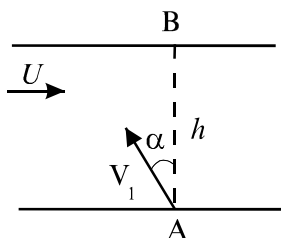


Рис. 4.29

Решение. Во время переправы лодку сносит течением, и она причалит к берегу в некоторой точке С. Далее турист должен бежать на остановку по берегу. Время путешествия складывается из двух слагаемых: времени, затраченного непосредственно на переправу, и времени пробежки по берегу.

Пусть вектор скорости лодки образует некоторый острый угол α с прямой АВ. Очевидно, что вектор скорости лодки должен быть повернут относительно прямой АВ против течения реки. Действительно, если вектор скорости лодки повернуть на такой же угол по течению, то в этом случае время переправы было бы тем же, но лодку снесло бы течением дальше и путь по берегу был бы больше. Тогда в направлении, перпендикулярном берегу, лодка перемещается со скоростью $V_1 \cos \alpha$, а в направлении течения — со скоростью $U - V_1 \sin \alpha$. Возникает резонный вопрос: можно ли переправиться так, чтобы турист вышел из лодки сразу в точке В? Очевидно, это возможно, только если $V_1 > U$.

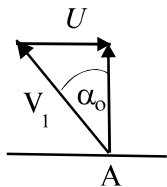


Рис. 4.30

Рассмотрим случай, когда скорость лодки больше скорости течения. Если направить лодку под углом α_0 так, чтобы $\sin \alpha_0 = U/V_1$, (рис. 4.30), то лодка будет двигаться по линии АВ. Такой маршрут будет самым коротким. Но будет ли он самым быстрым? Заметим еще, что в любом случае угол α не должен быть больше α_0 , иначе время переправы увеличится ($\cos \alpha$ уменьшится), и к тому же туристу еще придется бежать по берегу. Таким образом, угол α меняется в интервале $0 < \alpha \leq \alpha_0$.

Определим теперь функцию, минимум которой надо найти. Время, затраченное только на переправу, $t_1 = h/V_1 \cos \alpha$. За это время

лодку снесет вниз по течению на расстояние $BC = t_1 \cdot (U - V_1 \sin \alpha)$, поэтому время пробежки туриста по берегу составит $t_2 = BC / V_2 = t_1 \cdot (U - V_1 \sin \alpha) / V_2$. Все время путешествия составит

$$t = \frac{t_1(V_2 + U - V_1 \sin \alpha)}{V_2} = \frac{h \cdot (V_2 + U)}{V_1 \cdot V_2} \cdot \frac{(1 - k \sin \alpha)}{\cos \alpha},$$

где $k = V_1 / (U + V_2)$. Таким образом, нам надо найти наименьшее значение функции $f(\alpha) = (1 - k \sin \alpha) / \cos \alpha$ на интервале $0 < \alpha \leq \alpha_0$. Найдем производную

$$f'(\alpha) = \frac{-k \cos^2 \alpha + \sin \alpha \cdot (1 - k \sin \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha - k}{\cos^2 \alpha}.$$

Производная равна нулю при $\alpha = \alpha_m = \arcsin k$. При $0 < \alpha < \alpha_m$ $f'(\alpha) < 0$, а при $\alpha_m < \alpha$ $f'(\alpha) > 0$. Таким образом, при $\alpha = \alpha_m$ функция $f(\alpha)$ достигает минимума. Для того чтобы существовало такое значение угла α_m , необходимо условие $V_1 \leq U + V_2$. Теперь нужно выяснить, находится ли значение α_m на интересующем нас интервале $[0, \alpha_0]$. Сравнивая значения $\sin \alpha_m$ и $\sin \alpha_0$, приходим к следующему выводу. Если $U < V_1 < \sqrt{U(U + V_2)}$, то $\alpha_m < \alpha_0$, и минимум функции $f(\alpha)$ достигается при $\alpha = \alpha_m$ (проверьте, что условие $V_1 \leq U + V_2$ при этом выполнено). Если же выполнено неравенство $\sqrt{U(U + V_2)} < V_1$, то минимум функции $f(\alpha)$ достигается при $\alpha = \alpha_0$.

В том случае, когда скорость лодки меньше скорости течения, т. е. $V_1 < U$, не существует угла α_0 , который дает туристу возможность высадиться на автобусной остановке. Минимум функции $f(\alpha)$ опять же достигается при $\alpha = \alpha_m$.

Подведем итог. Если $V_1 > \sqrt{U(U + V_2)}$, то лодку необходимо направить к линии АВ под углом $\alpha = \arcsin(U / V_1)$. Если же

$V_1 < \sqrt{U(U + V_2)}$, то лодку необходимо направить к линии АВ под углом $\alpha = \arcsin(V_1 / (U + V_2))$.

О невезучем рыбаке, догоняющем свою лодку

Ветер по морю гуляет
И кораблик подгоняет...

А. С. Пушкин

Рыбак на лодке доплыл до круглого острова, оставил лодку у берега в точке А (рис. 4.31) и пошел осматривать остров. Когда он находился в точке В (АВ — диаметр), он вдруг заметил, что лодку волной стаскивает с отмели и ветер гонит ее по касательной к острову со скоростью 2,6 км/ч. Рыбак может бежать по берегу со скоростью 10,4 км/ч, а плыть со скоростью 2 км/ч. Сможет ли рыбак догнать свою лодку?

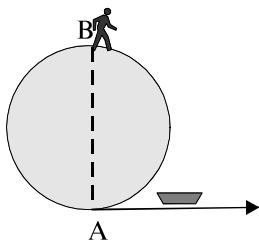


Рис. 4.31

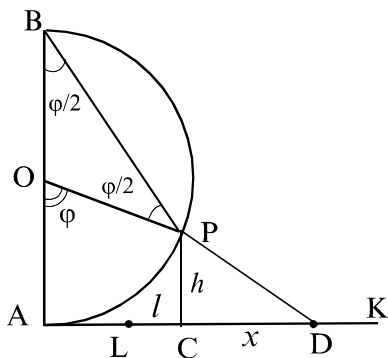


Рис. 4.32

Решение. Рассмотрим, при каком расположении рыбака и лодки в момент начала "заплыва" можно догнать лодку вплавь. Пусть АК — касательная, по которой движется лодка, рыбак вошел в воду в точке Р, расстояние РС от точки Р до прямой АК равно h (рис. 4.32). Лодка в этот момент находится в некоторой точке L

на отрезке AC, иначе плыть за ней бессмысленно (скорость плывущего рыбака меньше скорости лодки). Обозначим расстояние $LC = l$. Пусть рыбак догнал лодку в точке D ($CD = x$). Тогда отношение расстояний, пройденных лодкой и рыбаком за время "заплыва", равно отношению скоростей, т. е.

$$\frac{LD}{PD} = \frac{l + x}{\sqrt{h^2 + x^2}} = 1,3.$$

Преобразуем это уравнение:

$$0,69x^2 - 2x \cdot l + (1,69 \cdot h^2 - l^2) = 0.$$

Для того чтобы оно имело действительные решения, необходимо, чтобы дискриминант был неотрицательным. Отсюда получаем условие

$$l \geq \sqrt{0,69} \cdot h. \quad (4.13)$$

Рассмотрим теперь, сможет ли рыбак его реализовать. Пусть O — центр острова радиусом R, $\angle AOP = \varphi$. Тогда $h = R(1 - \cos \varphi) = 2R \sin^2(\varphi/2)$, $BP = 2R \cos(\varphi/2)$, $AC = R \sin \varphi$. Отношение расстояний, пройденных рыбаком и лодкой во время "забега", также равно отношению их скоростей, т. е. $AL / BP = 1/4$. Отсюда следует

$$\begin{aligned} l = AC - AL &= R \cdot \sin \varphi - \frac{1}{2} R \cos(\varphi/2) = \\ &= 2R \cos(\varphi/2) \cdot \left(\sin(\varphi/2) - \frac{1}{4} \right) = 2R \cos(\varphi/2) \cdot \left(\sin(\varphi/2) - \frac{1}{4} \right). \end{aligned}$$

Для угла φ из условия (4.13) получаем неравенство

$$\cos(\varphi/2) \cdot \left(\sin(\varphi/2) - \frac{1}{4} \right) \geq \sqrt{0,69} \sin^2(\varphi/2). \quad (4.14)$$

Сделаем замену $\tilde{x} = \operatorname{tg}(\varphi/2)$ и преобразуем (4.14) к виду:

$$\tilde{x} - \sqrt{0,69} \cdot \tilde{x}^2 \geq \frac{1}{4} \sqrt{1 + \tilde{x}^2}. \quad (4.15)$$

График правой части (4.15) — гипербола $y = 0,25\sqrt{1 + \tilde{x}^2}$, выпуклая вниз*. Асимптотой гиперболы является прямая $y = 0,25\tilde{x}$.

Графиком левой части (4.15) является парабола $y = \tilde{x} - \sqrt{0,69} \cdot \tilde{x}^2$ с вершиной в точке $\tilde{x} = 0,5/\sqrt{0,69}$, выпуклая вверх. Чтобы выяснить, существуют ли точки, в которых парабола лежит выше гиперболы, можно взять вершину параболы и проверить, выполняется ли неравенство

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{0,69}} \geq \frac{1}{4} \sqrt{1 + \frac{1}{4 \cdot 0,69}}. \quad (4.16)$$

Если оно окажется неверным, то это еще не означает, что решений (4.15) не существует. Но неравенство (4.16) оказывается верным! Рыбак сможет догнать свою лодку, если у него не только сильные мышцы, но и хороший глазомер! Конечно, такое решение очень похоже на "метод тыка", но в тяжелой ситуации для решения проблемы все средства хороши.

Проведем все же исследование существования решения неравенства (4.15). Рассмотрим вместо (4.15) неравенство

$$\tilde{x} - a \cdot \tilde{x}^2 \geq 0,25\sqrt{1 + \tilde{x}^2}, \quad (4.17)$$

где a — параметр, и выясним, при каких значениях a имеются решения неравенства (4.17). Умножим обе части (4.17) на a и сделаем замену $z = a \cdot \tilde{x}$. Тогда неравенство примет вид

$$z - z^2 \geq 0,25\sqrt{a^2 + z^2}. \quad (4.18)$$

Теперь вершина параболы $y_1(z) = z - z^2$ в точке $z = 0,5$ и положение гиперболы $y_2(z) = 0,25\sqrt{a^2 + z^2}$ зависит от параметра a (чем больше значение a , тем выше расположена гипербола). При малых значениях a графики $y_1(z)$ и $y_2(z)$ пересекаются

* В декартовой системе координат уравнение гиперболы $(y/a)^2 - (x/b)^2 = 1$.

(рис. 4.33), а при $a=1$ заведомо не пересекаются, т. к. $y_1(z) \leq 0,25$, $y_2(z) > 0,25$. Следовательно, существует такое критическое значение параметра a , при котором графики функций $y_1(z)$ и $y_2(z)$ касаются в точке z_c , принадлежащей интервалу $(0, 1)$. В этой точке одновременно выполняются два условия: $y_1(z_c) = y_2(z_c)$ и $y_1'(z_c) = y_2'(z_c)$.*

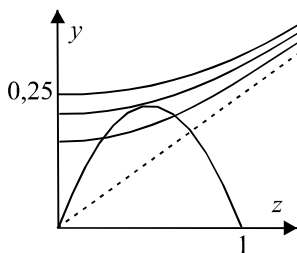


Рис. 4.33

Для того чтобы найти z_c и a_c , решим систему уравнений

$$\begin{cases} z - z^2 = 0,25\sqrt{a^2 + z^2}, \\ 1 - 2z = 0,25 \cdot \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}. \end{cases} \quad (4.19)$$

Перемножая левые и правые части этих уравнений, получаем квадратное уравнение

$$2z^2 - 3z + \frac{15}{16} = 0$$

(при этом мы поделили обе части на $z \neq 0$). Отсюда находим $z_c = (3 - \sqrt{3/2})/4 \approx 0,44$ (второй корень посторонний, т. к. не принадлежит интервалу $(0; 1)$). Подставив найденное значение в любое из уравнений (4.19), находим критическое значение $a_c \approx 0,86$. Таким образом, при $a < a_c$ неравенство (4.18) имеет решение.

* Вспомните геометрический смысл производной: производная равна тангенсу угла между касательной к графику и осью абсцисс.

В нашей задаче значение $a = \sqrt{0,69} < a_c$, поэтому у рыбака имеется некоторый диапазон направлений движения, в которых он может бежать по острову, чтобы гарантированно догнать свою лодку.

Об одном страшноватом на вид уравнении

"Интересно, имеет ли эта непонятная штука если не смысл, то хотя бы начало?" — сказал один любопытный кролик, гуляя по лесу и споткнувшись о хвост очень длинного удава.

С. Бобров, "Волшебный двурог"

Как вам понравится идея решить такое уравнение:

$$x^{x^{x^{\dots}}} = 4? \quad (4.20)$$

Здесь все показатели степени образуют бесконечную "этажерку". Выглядит уравнение страшновато, однако попробуем его все-таки решить.

Будем рассуждать так. Уберем из бесконечной "этажерки" нижнюю "полочку". При этом "этажерка" останется бесконечной, т. е. не изменится. Значит, можно "этажерку" из показателей степени просто заменить четверкой. В результате мы придем к уравнению $x^4 = 4$. Поскольку основание положительно, получаем решение $x = \sqrt{2}$.

Ободренные таким легким успехом, мы теперь запросто решим аналогичное уравнение:

$$x^{x^{x^{\dots}}} = 2.$$

Рассуждая точно так же, приходим к уравнению $x^2 = 2$, решение которого $x = \sqrt{2}$. Теперь сравните эти два равенства:

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\dots}}} = 4 \text{ и } \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\dots}}} = 2.$$

Получается, что $2 = 4$. Этот вывод наводит на нехорошие подозрения, что тут не все так гладко, как кажется на первый взгляд. Придется разобраться с вопросом:

Что означает выражение $x^{x^{x^{\dots}}}$? Как его надо понимать?

Решение. Пусть число $a > 0$. Рассмотрим следующую последовательность, заданную рекуррентно: $x_0 = 1$, $x_1 = a^{x_0}$, $x_2 = a^{x_1}$, т. е. $x_n = a^{x_{n-1}}$. Если эта последовательность сходится, то выражение $a^{a^{a^{\dots}}}$ следует понимать как предел этой последовательности.

Исследуем, при каких значениях $a > 0$ последовательность x_n сходится и какие значения может принимать предел этой последовательности. Можно, например, пойти путем эксперимента: взять калькулятор и вычислять по порядку члены последовательности x_n . Такой эксперимент, конечно, не может служить доказательством сходимости изучаемой последовательности, но может помочь нам обнаружить какую-либо закономерность. Цель эксперимента — сделать правдоподобное предположение, т. е. догадку. Затем уже эту догадку нам придется доказать (без этого никак не обойтись).

Возьмем для начала $a = 2$. Вычисляя $x_1 = 2$; $x_2 = 4$; $x_3 = 16$; $x_4 = 65536$, видим, что члены последовательности быстро растут и последовательность расходится. Будем уменьшать число a . Возьмем теперь $a = \sqrt{2} \approx 1,4142$. Находим $x_1 \approx 1,4142$; $x_2 \approx 1,632$; $x_3 \approx 1,761$; $x_4 \approx 1,966$; $x_5 = 1,999$. Похоже на то, что предел последовательности равен двум.

При $a = 1$ все члены последовательности равны 1 и предел также равен 1.

Теперь возьмем $a = 0,5$. Находим $x_1 = 0,5$; $x_2 = 0,707$; $x_3 = 0,613$; $x_4 = 0,654$. Пока закономерность не ясна, но, вычислив еще несколько членов, замечаем, что при $n > 14$ первые че-

тыре значащих цифры после запятой не меняются. Похоже, последовательность сходится и предел ее равен примерно 0,64.

Наконец, возьмем $a = 0,01$. Вычисляем $x_1 = 0,01$; $x_2 = 0,955$; $x_3 = 0,0123$; $x_4 = 0,945$; $x_5 = 0,013$. Вычислив еще несколько членов, убеждаемся, что происходит "болтанка": члены с нечетными номерами примерно равны 0,013, а члены с четными номерами примерно равны 0,94. Вывод: предела последовательности не имеет.

Итак, численный эксперимент выявил следующую картину. Когда значения $a > 0$ лежат в некотором диапазоне, последовательность x_n сходится; в остальных случаях последовательность является расходящейся. Границы этого диапазона в эксперименте определить сложно. Во всяком случае, интервал $(0,5; \sqrt{2})$ принадлежит этому диапазону. Кроме того, мы выяснили, что при $a = \sqrt{2}$ предел последовательности x_n равен двум. Отложим калькулятор и начнем рассуждать.

Пусть число s является пределом последовательности $x_n = a^{x_{n-1}}$. Тогда число s должно быть корнем уравнения

$$s = a^s. \quad (4.21)$$

Возьмем натуральный логарифм от обеих частей равенства (4.21) и запишем его в виде

$$\ln a = \frac{\ln s}{s}. \quad (4.22)$$

Исследуем поведение функции $y(s) = \ln s / s$, определенной при $s > 0$, и установим область ее значений. Для этого найдем производную $y'(s) = (1 - \ln s) / s^2$. Как видим, производная равна нулю при $\ln s = 1$, т. е. при $s = e$.

При $s < e$ $y'(s) > 0$, а при $s > e$ $y'(s) < 0$. Таким образом, функция $y(s)$ возрастает на интервале $(0; e)$ и убывает на интервале $(e; \infty)$. Следовательно, при $s = e$ функция $y(s)$ достигает максимального значения, равного e^{-1} . На интервале $0 < s < 1$ $y(s) < 0$,

причем $\lim_{s \rightarrow 0} (\ln s / s) = -\infty$, а на интервале $s > 1$ $y(s) > 0$. Исследуя поведение $y(s)$ при $s \rightarrow \infty$, находим, что $\lim_{s \rightarrow \infty} (\ln s / s) = 0$.

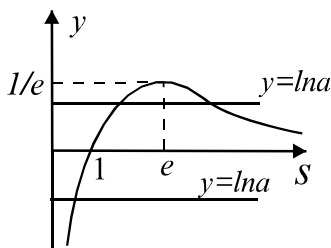


Рис. 4.34

Таким образом, график функции $y(s)$ имеет вид, показанный на рис. 4.34. Чтобы уравнение (4.22) имело решение, этот график должен иметь общие точки с горизонтальной прямой $y = \ln a$. С помощью рис. 4.34 можно сделать следующий вывод.

При $\ln a < 0$ уравнение (4.21) имеет единственный корень $s_0 < 1$.

При $0 < \ln a < e^{-1}$ уравнение (4.21) имеет два решения $s_1 > 1$ и $s_2 > 1$; причем $s_1 < e$, $s_2 > e$. При $\ln a = e^{-1}$ оба корня уравнения (4.21) равны e . При $\ln a > e^{-1}$ (т. е. при $a > e^{1/e}$) уравнение не имеет решений.

Чтобы выяснить, какой из корней s_1, s_2 является пределом последовательности x_n , необходимо рассмотреть два случая.

Случай 1: $1 \leq a \leq e^{1/e}$. Пусть s_1 и s_2 — корни уравнения (4.21), где $s_2 \geq e \geq s_1 > 1$. Докажем следующее утверждение.

Утверждение. Последовательность x_n возрастает и ограничена сверху числом s_1 .

Доказательство проведем методом математической индукции. При $n=1$ имеем: $x_1 = a^1 > 1 = x_0$, т. е. утверждение верно. Пред-

положим, что оно верно при $n = k$, т. е. $x_k > x_{k-1}$. Поскольку при $a > 1$ функция $y(x) = a^x$ возрастающая, то большему значению показателя степени соответствует большее значение функции. Следовательно $a^{x_k} > a^{x_{k-1}}$, т. е. $x_{k+1} > x_k$. Далее, при $n=1$ имеем: $x_0 = 1 < s_1$. Предположим, что при $n = k$ выполняется неравенство $x_k < s_1$. Отсюда следует, что $a^{x_k} < a^{s_1} = s_1$, т. е. $x_{k+1} < s_1$. Утверждение доказано.

Согласно теореме К. Вейерштрасса, возрастающая и ограниченная сверху последовательность x_n имеет предел. Этот предел должен быть корнем уравнения (4.21). Очевидно, что пределом последовательности x_n не может быть число s_2 (иначе нашлись бы члены последовательности x_n , близкие к значению s_2 , т. е. большие, чем s_1). Итак, пределом последовательности x_n является число s_1 , которое удовлетворяет неравенству $1 \leq s_1 \leq e \approx 2,71828$. Отсюда следует, что уравнение (4.20) не имеет корней.

Случай 2: $0 < a < 1$. В этом случае, как показал численный эксперимент, последовательность x_n немонотонная. Поэтому мы рассмотрим отдельно две ее подпоследовательности:

- подпоследовательность x_{2n} , состоящую из членов с четными номерами;
- подпоследовательность x_{2n-1} из членов с нечетными номерами.

Будем опираться на следующую лемму, которую приведем без доказательства.

Лемма. Пусть последовательность x_n имеет предел s . Тогда любая ее подпоследовательность также имеет пределом число s .

Предел обеих подпоследовательностей должен удовлетворять уравнению

$$s = a^{a^s}. \quad (4.23)$$

Прологарифмируем дважды обе части уравнения (4.23) и запишем его в виде

$$\frac{1}{\ln a} \cdot \ln \left(\frac{\ln s}{\ln a} \right) - s = 0. \quad (4.24)$$

Заметим, что любой корень уравнения (4.21) является также корнем уравнения (4.23). При $0 < a < 1$ функция $y(s) = a^s$ убывающая, а функция $y(s) = s$ возрастающая, поэтому уравнение (4.21) имеет ровно один корень $s_0 < 1$ (рис. 4.35). Значит, при $0 < a < 1$ уравнение (4.23) имеет, по крайней мере, один корень. Существуют ли другие корни? Чтобы ответить на этот непростой вопрос, исследуем на интервале $0 < s < 1$ функцию

$$\varphi(s) = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln \left(\frac{\ln s}{\ln a} \right) - s.$$

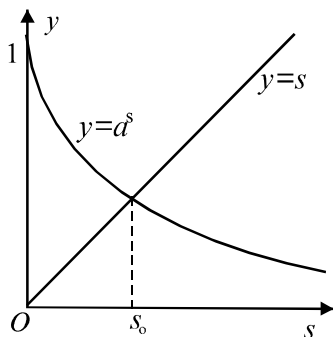


Рис. 4.35

При $s \rightarrow 0$ имеем $\ln s / \ln a \rightarrow +\infty$, поэтому $\lim_{s \rightarrow 0} \varphi(s) = -\infty$.

При $s \rightarrow 1$ имеем $\ln s / \ln a \rightarrow 0$, поэтому $\lim_{s \rightarrow 1} \varphi(s) = +\infty$.

Вычислим производную

$$\varphi'(s) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{s \cdot \ln s} - 1$$

и рассмотрим асимптотику производной $\varphi'(s)$. При $s \rightarrow 0$ находим $s \cdot \ln s \rightarrow 0^*$. При $s \rightarrow 1$ также $s \cdot \ln s \rightarrow 0$.

Таким образом, на краях интервала $(0; 1)$ $\varphi'(s) \rightarrow +\infty$. Это означает, что на интервале $(0; 1)$ функция $\varphi'(s)$ сначала убывает, а затем возрастает. Найдем минимальное значение производной $\varphi'(s)$. Для этого вычислим вторую производную

$$\varphi''(s) = -\frac{(s \cdot \ln s)'}{\ln a \cdot (s \cdot \ln s)^2} = -\frac{\ln s + 1}{\ln a \cdot (s \cdot \ln s)^2}.$$

Она равна нулю при $s = 1/e$, поэтому минимальное значение производной $\varphi'_{\min} = -1 - e/\ln a$. Если $\varphi'_{\min} > 0$ (т. е. $a > e^{-e} \approx 0,065988$), то всюду на интервале $(0; 1)$ функция $\varphi'(s)$ положительная, и ее график имеет вид, показанный на рис. 4.36, а. В этом случае функция $\varphi(s)$ на всем интервале монотонно растет, следовательно, она принимает значение ноль в единственной точке $s = s_0$. График функции $\varphi(s)$ для этого случая показан на рис. 4.36, б.

Итак, при $e^{-e} \leq a < 1$ уравнение (4.24) имеет единственный корень s_0 . Осталось показать, что число s_0 является пределом подпоследовательностей x_{2n} и x_{2n-1} .

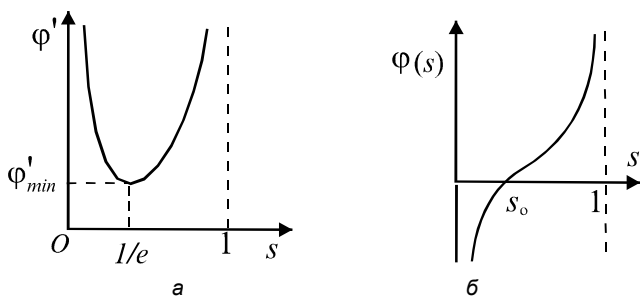


Рис. 4.36

* С помощью замены $s = e^{-t}$ получаем $\lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot \ln s) = \lim_{t \rightarrow \infty} (-te^{-t}) = 0$.

Упражнение 1

Докажите по индукции, что подпоследовательность x_{2n} убывает и ограничена снизу числом s_0 , а подпоследовательность x_{2n-1} возрастает и ограничена сверху числом s_0 .

Указание

Используйте тот факт, что $s_0 < 1$ а также свойство убывающей функции $y = a^x$: большему значению показателя степени соответствует меньшее значение функции.

Нам осталось выяснить поведение функции $\varphi(s)$ при $0 < a < e^{-e}$. В этом случае $\varphi'_{\min} < 0$, поэтому равенство $\varphi'(s) = 0$ выполняется в двух точках λ_1 и λ_2 . График $\varphi'(s)$ для этого случая имеет вид, показанный на рис 4.37, а. Нетрудно установить, что при $s = \lambda_1$ функция $\varphi(s)$ достигает максимума, а при $s = \lambda_2$ — минимума.

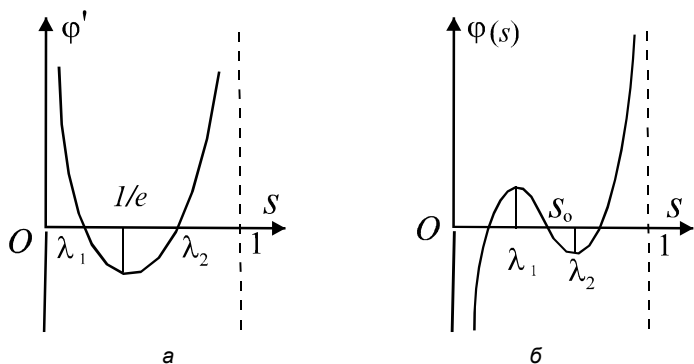


Рис. 4.37

Покажем, что $\varphi'(s_0) < 0$, и график функции $\varphi(s)$ имеет вид, показанный на рис. 4.37, б. Это означает, что уравнение (4.12) помимо корня s_0 имеет еще два корня s_1 и s_2 , причем $s_1 < s_0 < s_2$. Заметим, что $\ln s_0 / s_0 = \ln a < -e$. Функция $y(s) = \ln s / s$ монотонно возрастает на интервале $(0, 1)$, причем значение $-e$ дос-

тигается при $s = e^{-1}$. Поскольку $y(s_0) < y(e^{-1})$, то $s_0 < e^{-1}$, т. е. $\ln s_0 < -1$. Отсюда следует, что $\ln^2 s_0 > 1$. Таким образом, действительно,

$$\varphi'(s_0) = \frac{1}{\ln a \cdot s_0 \cdot \ln s_0} - 1 = \frac{1}{\ln^2 s_0} - 1 < 0.$$

Упражнение 2

Докажите по индукции, что подпоследовательность x_{2n} убывает и ограничена снизу числом s_2 . Докажите, что подпоследовательность x_{2n-1} возрастает и ограничена сверху числом s_1 . Тем самым будет доказано, что последовательность x_n не имеет предела.

Подведем итоги. При $1 \leq a \leq e^{1/e}$ последовательность x_n сходится к меньшему из двух корней уравнения (4.21). При $e^{-e} \leq a < 1$ последовательность x_n сходится к единственному корню уравнения (4.21). При остальных значениях a последовательность x_n не имеет предела.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. На параболе $y = x^2$ взяты точка $A(-1; 1)$ и точка $B(2; 4)$. Найдите на дуге AB параболы такую точку C , чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей.

Задача 2. Найдите $f'(2)$, где

$$f(x) = (x-2) \cdot \left(\sqrt[3]{x^2 + 2x} + (x-2) \cdot \sqrt[7]{x^5 + x\sqrt{x}} \right).$$

Задача 3. Известно, что в точке $x = 0$ касательные к графикам функций $f(x)$, $g(x)$ и $h(x) = f(x)/g(x)$ пересекают ось абсцисс под одним и тем же углом. Найдите наибольшее значение $f(0)$.

Задача 4. Сколько корней в зависимости от параметра a имеют уравнения: а) $e^x = ax^2 + 1 + a$; б) $e^x = ax$?

Задача 5. При каких значениях параметра a уравнение $e^{ax} = \sin x$ имеет один корень на интервале $[0, \pi]$?

Задача 6. При каких значениях параметра a уравнение $|\ln x| = ax$ имеет ровно три корня?

Задача 7. Сколько положительных корней имеет уравнение $n^x = x^n$? (n — натуральное число больше единицы).

Задача 8. Найти максимальный член последовательности $x_n = n^2 / 1,1^n$.

Задача 9. На окружности радиусом 1 взята точка А. На каком расстоянии от точки А нужно провести хорду ВС параллельно касательной в точке А, чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей?

Задача 10. В следующих уравнениях выражения $f_\infty(x)$, содержащие бесконечное число операций, следует понимать как предел последовательности $f_n(x)$ при $n \rightarrow \infty$. В каждой из предлагаемых задач нужно провести исследование: определить функцию $f(x)$, затем найти все "подозрительные" значения x и доказать существование предела.

$$x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots = 1$$

$$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\cdots}}} = 3$$

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots}}} = 2$$

$$\sqrt{3^x + \sqrt{3^x + \sqrt{3^x + \cdots}}} = 6$$

$$\sqrt{2 + x\sqrt{2 + x\sqrt{2 + \cdots}}} = 14$$

Список литературы

1. Абакумов Е., Ижболдин О., Курляндчик Л., Нецветаев Н. Кратчайшие сети. Квант, 1990, № 3.
2. Акулич И. Ф. Муравей на консервной банке. Квант, 1989, № 9.
3. Бартенев Ф., Савин А. Метод перебора. Квант, 1982, № 2.
4. Берколайко С. Т. Использование неравенства Коши при решении задач. Квант, 1975, № 4.
5. Васильев Н. Б., Молчанов С. А., Розенталь А. Л., Савин А. П. Математические соревнования. Геометрия. М.: Наука, 1974. Библиотечка физ.-мат. школы.
6. Гейн А. Г., Ковальджи А. К., Сапир М. В. Задачи, модели и ЭВМ. Квант, 1983, № 5.
7. Горнштейн П., Полонский В., Якир М. Геометрическое решение экстремальных геометрических задач. Квант, 1992, № 9.
8. Готман Э. Г. Правильное решение геометрической задачи. Квант, 1987, № 5.
9. Гутенмахер В. Л., Раббот Ж. М. Выбор наилучшего варианта. Квант, 1987, № 1.
10. Егоров А. Уравнения и пределы. Квант, 1977, № 10.
11. Ижболдин О., Курляндчик Л. Неравенство Йенсена. Квант, 1990, № 4.
12. Крейн М. Г., Нудельман А. А. О некоторых пространственных изопериметрических задачах. Квант, 1973, № 2.
13. Курляндчик Л. Приближение к экстремуму. Квант, 1982, № 1.
14. Львовский С. М., Тоом А. Л. Разберем все варианты. Квант, 1988, № 1.

15. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975.
16. Савин А. П. Максимум, минимум и теорема о средних. Квант, 1970, № 11.
17. Сергеев И. Н., Олехин С. Н., Гашков С. Б. Примени математику. М.: Наука, 1990.
18. Сивашинский И. Х. Задачи по математике для внеклассных занятий. М.: Просвещение, 1968.
19. Сидоров Ю. Об одном замечательном уравнении. Квант, 1990, № 5.
20. Слойер К. Математические фантазии. Приложения элементарной математики. М.: Мир, 1993.
21. Смышляев В. К. Применение неравенства Коши — Буняковского к решению некоторых задач. Квант, 1972, № 1.
22. Софман Л. Сумма длин и минимум энергии. Квант, 1978, № 3.
23. Тихомиров В. М. Геометрия или анализ. Квант, 1990, № 10.
24. Тихомиров В. М. Рассказы о максимумах и минимумах. М.: Наука, 1986. Библиотечка "Квант". Вып. 56.
25. Трофимов В. В. Царевна Дидона, изопериметры и мыльные пленки. Квант, 1985, № 5.
26. Туриянский Л. Принцип Ферма. Квант, 1976, № 8.
27. Шарыгин И. Ф. Задачи по геометрии. Планиметрия. М.: Наука, 1986. Библиотечка "Квант". Вып. 17.
28. Шарыгин И. Ф., Ерганжиева Л. Н. Наглядная геометрия. М.: МИРОС, 1995.
29. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. М.: Наука, 1970. Библиотечка математического кружка. Вып. 12.